

## بهینه‌سازی هندسی تحت معادلات با مشتقات جزئی با داده‌های تصادفی

علی محمودی نهرانی<sup>۱</sup>، محمد کیانپور<sup>۲\*</sup>

۱- دانشجوی دکتری، دانشگاه گیلان، گروه ریاضی کاربردی، رشت، ایران

۲- استادیار، دانشگاه گیلان، گروه ریاضی کاربردی، رشت، ایران

رسید مقاله: ۹ اسفند ۱۳۹۳

پذیرش مقاله: ۷ مرداد ۱۳۹۴

### چکیده

مقاله حاضر بهینه‌سازی شکل هندسی سازه‌هایی را در نظر گرفته است که توسط معادلات با مشتقات جزئی در حضور داده‌های تصادفی، مدل‌سازی شده است. داده‌های تصادفی در پارامترها و ورودی‌های معادله با مشتقات جزئی، ظاهر می‌شود. مبانی نظری ارائه شده و با استفاده از آشفتگی روش همانی، مساله بهینه‌سازی شکل به دامنه ثابت تبدیل شده و سپس به صورت یک مساله کنترل بهینه تصادفی فرمول‌بندی شده است. داده‌های تصادفی به صورت میدان تصادفی در نظر گرفته شده و با استفاده از توسیع کارهونن-لویو<sup>۱</sup> تقریب زده شده است. کمی‌سازی عدم قطعیت توسط روش‌های غیر نفوذی مانند هم‌محلی تصادفی صورت پذیرفت. روش گرادیان برای بهینه‌سازی به کار گرفته و مثال عددی برای نشان دادن قابلیت کاربرد روش ارائه شده است.

**کلمات کلیدی:** بهینه‌سازی هندسی، معادله با مشتقات جزئی تصادفی، گسسته‌سازی تصادفی، کنترل بهینه.

### ۱ مقدمه

مساله بهینه‌سازی شکل که در بخش‌های مختلفی از علوم مهندسی و فناوری مطرح است به صورت زیر بخش‌بندی می‌شود:

- مدل: اغلب به صورت معادله با مشتقات جزئی بیان می‌شود و به ما اجازه می‌دهد تا رفتار مکانیکی سازه‌ها را محاسبه و تحلیل کنیم.
- تابع هدف: که به دنبال یافتن مقدار کمینه و یا مقدار بیشینه آن هستیم.
- جهت قابل قبول بهینه‌سازی: که با در نظر گرفتن محدودیت‌هایی که روی دامنه اعمال شده، به دست می‌آید.

\* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: Keyanpour@guilan.ac.ir

<sup>1</sup> Karhunen-Loeve

بهینه‌سازی شکل در بسیاری از صنایع، کاربردهای فراوانی دارد؛ اما بسیار پیچیده‌تر از بهینه‌سازی معمولی است و در آن‌ها متغیرها، ویژگی‌های مکانیکی مواد هستند. مساله‌های بهینه‌سازی شکل را به سه دسته کلی می‌توان تقسیم کرد:

- بهینه‌سازی شکل پارامتری: که در آن شکل‌ها با استفاده از تعداد کاهش یافته‌ای از متغیرها، پارامتری می‌شود (به‌عنوان مثال ضخامت، قطر و یا بعد)، که محدودیت آن‌ها تعداد قابل توجهی از شکل‌های قابل قبول را در نظر می‌گیرد [۱].

- بهینه‌سازی شکل هندسی: که در آن با شروع از یک شکل اولیه و با تغییرات قابل قبول مرزهای شکل (بدون این که توپولوژی شکل را تغییر دهیم) به شکل بهینه می‌رسیم [۲].

- بهینه‌سازی توپولوژی: در آن بدون محدودیت صریح و یا ضمنی، شکل بهینه را جستجو می‌کنیم و تغییرات توپولوژی شکل نیز در نظر گرفته می‌شود [۳].

بهینه‌سازی توپولوژی، کلی‌تر و درعین حال دشوارترین نوع بهینه‌سازی شکل است. در این مقاله به مطالعه بهینه‌سازی هندسی سازه‌ها با در نظر گرفتن پارامترهای تصادفی خواهیم پرداخت.

اولین بار هادامارد در سال ۱۹۱۰ از فرمول‌بندی ریاضی برای تحلیل حساسیت معادله با مشتقات جزئی، نسبت به شکل دامنه استفاده کرد که به زمینه تحقیقاتی جدیدی به نام "طراحی بهینه شکل" انجامید. موضوع طراحی بهینه شکل که امروزه استفاده می‌شود از نتایج نظریه کنترل و بهینه‌سازی روی سیستم‌های توزیعی حاصل شده است [۴] و لذا بهینه‌سازی شکل را می‌توان شاخه‌ای از نظریه کنترل و بهینه‌سازی دانست. طراحی با استفاده از کمینه‌سازی یک معیار انجام می‌پذیرد که به متغیر حالت به‌عنوان جواب معادله با مشتقات جزئی و تابع کنترل به‌عنوان شکل وابسته است.

برای محاسبه شرایط بهینگی، پیرونو [۵]، سوکولوسکی [۶] و سیا [۷] برای مساله‌های پیوسته، ماروکو و دیگران [۸] برای مساله‌های گسسته، روش‌هایی را ارائه کرده‌اند. نتایج نظری برای وجود جواب در مقالات [۹-۱۲] به‌دست آمده است. برای مطالعه نظری مساله و بررسی وجود و یکتایی جواب و همچنین به دست آوردن شرایط بهینگی، دشواری‌هایی وجود دارد و برای حل آن‌ها لازم است توپولوژی مناسبی روی دامنه‌های شدنی اعمال گردد. راه‌حل مستقیمی برای این کار وجود ندارد؛ ولی روش‌هایی مانند نمایش دامنه به‌صورت توابع تراز [۱۳، ۱۴] و یا استفاده از تبدیل‌های مناسب [۱۵، ۱۶] معرفی شده است. توپولوژی‌های مختلفی نیز برای این کار پیشنهاد شده است که از میان آن‌ها می‌توان به توپولوژی کورانت [۱۷] که با توابع فاصله ایجاد شده است (مانند توابع مشخصه، اندازه هاسدورف و همچنین  $W^{1,p}$ -توپولوژی)، اشاره کرد. برای این که بتوانیم از نتایج به‌دست آمده در زمینه حساب دیفرانسیل در اینجا استفاده کنیم و به تحلیل پیوستگی و دیفرانسیل پذیری شکل‌ها پردازیم، ابتدا باید فضاهایی با ساختار خطی معرفی شود. دو روش معمول برای تعریف مشتق‌های شکل در حیطه تبدیل‌ها عبارت است از:

- روش سرعت که توسط زولزیو معرفی شد [۱۸].
- روش آشفستگی همانی که توسط مورات و سیمون ارائه گردید [۱۵، ۱۶].

با توجه به این که در مسایل مهندسی، صنعتی و غیره، مدل‌ها شامل پارامترهای تصادفی است، مساله بهینه‌سازی شکل با در نظر گرفتن پارامترها و یا بارهای تصادفی توجه محققان را به خود جلب کرده است. مدل‌سازی این مساله‌ها با بهینه‌سازی شکل بر پایه قابلیت اعتماد آغاز شد که در آن محدودیت‌های قابلیت اعتماد بر اساس احتمال شکست معرفی می‌شود [۱۹]. به دلیل مشکلاتی که در تعریف تابع شکست وجود دارد، روش بهینه‌سازی استوار به‌عنوان جایگزین، توسعه داده شده است که اغلب برای سیستم‌ها بدترین حالت را در نظر می‌گیرد و به دنبال جواب غیر حساس نسبت به پارامترها می‌گردد [۲۰-۲۲]. برخی محققان نیز از روش برنامه‌ریزی تصادفی برای حل مسایل بهینه‌سازی شکل استفاده کرده‌اند [۲۳]. کم‌تر منبعی یافت می‌شود که پارامترهای تصادفی را به‌صورت میدان تصادفی در نظر بگیرد [۲۴].

در مقاله حاضر بر آنیم تا روشی که "آشفتگی همانی" نامیده می‌شود و توسط مورات و سیمون [۱۶، ۱۵] ارایه شده است در فضاهای بخنر<sup>۱</sup> برای حل مساله بهینه‌سازی شکل تصادفی توسعه دهیم. روش ذکر شده چارچوب روشی را بر اساس فضای توابع ارایه می‌دهد که شیوه‌های کنترل بهینه تصادفی (نام‌گذاری که برای مساله کنترل بهینه با داده‌های تصادفی به کار می‌بریم) را قابل استفاده می‌کند. در ادامه نشان خواهیم داد که با این روش چگونه گرایان شکل به دست می‌آید.

با استفاده از فرمول‌بندی اشاره شده، این امکان را خواهیم داشت که از روش‌های کنترل بهینه تصادفی در بهینه‌سازی شکل تصادفی استفاده کنیم که در سال‌های اخیر توسعه داده شده است [۲۵-۲۷]. برای گسسته‌سازی تصادفی از روش نمونه‌گیری مونت کارلو و روش هم‌محلی تصادفی [۲۸، ۲۹] استفاده کرده‌ایم. در پایان روش به‌دست آمده برای حل مساله بهینه‌سازی نازل با ورودی تصادفی به کار برده شده و نتایج به‌دست آمده با شکل ارایه شده است.

ساختار مقاله به این ترتیب است: در بخش دوم فرمول‌بندی عمومی مساله به همراه روش آشفتگی همانی برای پارامتری کردن مساله ارایه شده است. در بخش سوم، مساله در دامنه ثابت فرمول‌بندی شده و شرایط بهینگی به‌دست آمده است. در بخش چهارم گسستگی تصادفی را مرور کرده‌ایم. بهینه‌سازی هندسی مقید به معادله با مشتقات جزئی برای یک مدل خاص در بخش پنجم ارایه شده است و در بخش شش به‌عنوان مثال عددی، مساله بهینه‌سازی شکل نازل حل و نتیجه‌گیری از مقاله در بخش هفت گنجانده شده است.

## ۲ فرمول‌بندی مساله

### ۲-۱ فرمول‌بندی مساله

مساله بهینه‌سازی شکل عموماً به‌صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$\min_{S \in \mathcal{O}_{ad}} \{J(S, u) \mid E(S, u) = 0, S \in \mathcal{O}_{ad}, u \in \mathcal{U}\}, \quad (1)$$

<sup>1</sup> Bochner space

که در آن فضای حالت مساله است و زیر فضایی از فضای هیلبرت انعکاسی در نظر گرفته خواهد شد. در مساله (۱)،  $S \subset D$  مرز آزاد<sup>۱</sup> (پارامتر طراحی) است و  $D$  دامنه یا همان شکل موردنظر است. در ادامه برای سادگی در فرمول نویسی پارامتر طراحی را نیز با  $D$  نمایش خواهیم داد.  $O_{ad}$  مجموعه همه شکل‌های شدنی است.  $D$  شامل مرزهای آزاد است و در طول فرایند بهینه‌سازی، تغییر می‌کند و در نتیجه شکل سازه موردنظر نیز تغییر می‌کند.  $E$  در (۱) نشان دهنده معادله حالت می‌باشد. در این نوع مسایل غالباً مجموعه شکل‌های شدنی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$O_{ad} := \{D \subset \mathbb{R}^d : \partial D \subset D, \int_D dx = V\}. \quad (2)$$

که  $d \in \{2, 3\}$  عددی طبیعی است. همان‌طور که گفته شد پارامتر طراحی، مرزهای آزاد دامنه است که در اینجا برای جلوگیری از زیاد شدن تعداد متغیرها، با همان دامنه  $D$  نشان می‌دهیم در ادبیات کنترل بهینه دامنه  $D$  در واقع همان کنترل موردنظر است که ضمن برقراری معادله حالت و قیود فضای شدنی، باید تابع هدف مساله،  $J$ ، را کمینه کند. برای فرمول‌بندی مساله بهینه‌سازی شکل با پارامترهای تصادفی، متغیر حالت جواب یک معادله با مشتقات جزئی تصادفی در دامنه  $D$  است. اغلب متغیر حالت به فضای باناخ (انعکاسی)  $X(D)$  از توابع تعلق دارد. معادله با مشتقات جزئی را که متغیر حالت در آن صدق می‌کند می‌توانیم با عملگر  $\bar{E}(\bar{u}, D) = 0$  نشان دهیم، فرض می‌کنیم که  $\bar{E}$  شرایط اولیه (در صورت وجود) و مرزی را شامل می‌شود.

فضای کامل احتمال را با  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  نشان می‌دهیم، مجموعه  $\Omega$  را در مقاله حاضر مجموعه پیشامدهای  $\omega$  در نظر خواهیم گرفت،  $\mathcal{F}$  سیگما جبری از پیشامدهاست و  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  اندازه احتمال است. مساله بهینه‌سازی شکل را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف ۱: فرض کنید  $O_{ad} \in \Lambda(\mathbb{R}^d)$  مجموعه‌ای شامل دامنه‌های شدنی باشد ( $\Lambda$  مجموعه همه زیر مجموعه‌هاست)،  $D$  را دامنه کران‌دار با مرز لیشیتس<sup>۲</sup> در نظر بگیرید. به علاوه برای هر  $D \in O_{ad}$  فضاهای بختر

$$L^2(\Omega; X(D)) \text{ و } L^2(\Omega; Z(D)) \text{ را روی } D \text{ در نظر می‌گیریم. فرض کنید } \bar{J} \text{ تابع هدف موردنظر باشد}$$

$$\bar{J}: \{(\bar{u}, D) \mid \bar{u} \in L^2(\Omega; X(D)), D \in O_{ad}\} \rightarrow \mathbb{R},$$

و  $\bar{E}$  عملگری بین مجموعه‌هایی از فضاهای توابع شدنی باشد

$$\bar{E}: \{(\bar{u}, D) \mid \bar{u} \in L^2(\Omega; X(D)), D \in O_{ad}\} \rightarrow \{\bar{z} \mid \bar{z} \in L^2(\Omega; Z(D))\},$$

آنگاه

$$\min \bar{J}(\bar{u}, D) \text{ s.t. } \{\bar{E}(\bar{u}, D) = 0, D \in O_{ad}\}, \quad (3)$$

را مساله بهینه‌سازی شکل تصادفی می‌نامیم.

برای بررسی مسایل بهینه‌سازی شکل ابتدا لازم است تا یک توپولوژی مناسب روی مجموعه دامنه‌های شدنی،  $O_{ad} \in \Lambda(\mathbb{R}^d)$  قرار دهیم؛ ولی همان‌طور که اشاره شد، راه‌حل مستقیمی برای این کار وجود ندارد. برای به دست آوردن متغیرهایی از جنس زیرمجموعه‌های  $\mathbb{R}^d$ ، محققان روش‌های مختلفی را برای بیان دامنه‌ها پیشنهاد

<sup>1</sup> Free boundary

<sup>2</sup> Lipschitz

کرده‌اند. روشی که در اینجا به کار می‌بریم، تصویر تبدیلی<sup>۱</sup> از دامنه مرجع (که آن را با  $D_{ref}$  نشان خواهیم داد) است که توسط مورات و سیمون [۱۶، ۱۵] معرفی شده است. بسته به نحوه نمایش دامنه، مفاهیم توپولوژیکی متفاوتی را می‌توان به کاربرد. در اینجا از اندازه کورانت و  $W^{1,p}$ -توپولوژی استفاده می‌کنیم و با کمک روش آشفته‌نگی همانی به فرمول‌بندی مساله در فضاهای بخر می‌پردازیم.

## ۲-۲ روش آشفته‌نگی همانی

ابتدا دامنه مرجع کران‌دار  $D_{ref} \in \mathcal{O}_{ad}$  را ثابت می‌گیریم. فرض کنیم دامنه شدنی  $D \in \mathcal{O}_{ad}$  می‌تواند با استفاده از تبدیل متناظر مناسب  $\tau \in T(D_{ref})$  مشخص شود به طوری که  $\tau(D_{ref}) = D$  در اینجا  $T(D_{ref}) = \{\tau: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \mid (\tau - id) \in S\}$  فضای آفینی از تبدیل‌ها در نظر می‌گیریم که روی  $D_{ref}$  تعریف شده است و  $S$  فضای باناخ مناسبی است. به علاوه تبدیل‌های  $\tau \in T(D_{ref})$  را به مجموعه  $T_{ad}$  از توابع بیلیپشیتس<sup>۲</sup> محدود می‌کنیم که  $(\tau - id)$  به زیرمجموعه باز از  $S$  تعلق دارد. برای مرتبط کردن این روش با دامنه‌های شدنی، فرض می‌کنیم  $T_{ad} = \{\tau \in T(D_{ref}) \mid \tau(D_{ref}) \in \mathcal{O}_{ad}\}$ . با استفاده از این فرمول‌بندی، بهینه‌سازی شکل به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۲: فرض کنید  $T_{ad} \subset T(D_{ref})$  مجموعه‌ای از تبدیل‌های شدنی از دامنه مرجع  $D_{ref} \in \mathcal{O}_{ad}$  باشد. به علاوه برای هر  $\tau \in T_{ad}$  فرض کنیم  $L^{\check{}}(\Omega; X(\tau))$  و  $L^{\check{}}(\Omega; Z(\tau))$  فضای بخر باشند که روی  $\tau(D_{ref})$  تعریف شده است.  $\tilde{J}: \{(\tilde{u}, \tau) \mid \tilde{u} \in L^{\check{}}(\Omega; X(\tau)), \tau \in T_{ad}\} \rightarrow \mathbb{R}$  تابع هدف است و  $\tilde{E}$  عملگری بین مجموعه‌هایی از فضاهای توابع شدنی است:

$$\tilde{E}: \{(\tilde{u}, \tau) \mid \tilde{u} \in L^{\check{}}(\Omega; X(\tau)), \tau \in T_{ad}\} \rightarrow \{\tilde{z} \mid \tilde{z} \in L^{\check{}}(\Omega; Z(\tau))\}.$$

در این صورت

$$\min \tilde{J}(\tilde{u}, \tau), \text{ s.t. } \tilde{E}(\tilde{u}, \tau) = 0, \tau \in T_{ad}, \quad (۴)$$

را مساله بهینه‌سازی شکل تصادفی با تبدیل‌ها می‌نامیم.

برای رسیدن به خوش‌تعریفی مساله باید در نظر بگیریم که با فرض  $\tau_1, \tau_2 \in T_{ad}$  که  $\hat{D} := \tau_1(D_{ref}) = \tau_2(D_{ref})$  و  $\hat{u} = u_1 \circ \tau_1^{-1} = u_2 \circ \tau_2^{-1}$  از  $u_1$  و  $u_2$  آنگاه برای جواب‌های  $\hat{u}$  و  $\hat{\tau}$   $\tilde{E}(\hat{u}, \hat{\tau}) = 0$  داریم  $\tilde{E}(u_2, \tau_2) = 0$  و  $\tilde{E}(u_1, \tau_1) = 0$ . این فرض ضروری است؛ زیرا تبدیل‌های مختلفی که دامنه یکسان  $\hat{D}$  را بیان می‌کنند باید متغیر حالت یکسان  $\hat{u}$  را معرفی کنند، به طوری که  $\tilde{E}(\hat{u}, \hat{\tau}) = 0$  تضمین شده باشد. با وجود این، معمولاً این فرض به راحتی برقرار می‌شود. با این ساختار،  $\tau$  متعلق به فضای آفین تبدیل‌هاست؛ ولی  $\hat{u}$  در مجموعه  $\bigcup_{\tau \in T_{ad}} L^{\check{}}(\Omega; X(\tau))$  قرار می‌گیرد که هنوز به هیچ توپولوژی‌ای مجهز نشده است. هدف تبدیل فضای  $L^{\check{}}(\Omega; X(\tau))$  به فضای  $L^{\check{}}(\Omega; X_{ref})$  است که توابع آن در دامنه مرجع  $D_{ref}$  تعریف شده است. در واقع

<sup>1</sup> Projecting transformation

<sup>2</sup> biLipschitz

متغیر  $(\tilde{u} \in L^1(\Omega; X(\tau)))$  با استفاده از تبدیل  $\tau$  می‌تواند به متغیر  $u = \tilde{u} \circ \tau$  که روی  $D_{ref}$  تعریف شده است تبدیل شود. برای رسیدن به این منظور  $u = \tilde{u} \circ \tau$  که روی  $D_{ref}$  و در فضای آفینی از تبدیل‌ها  $T(D_{ref})$  و فضای بختر  $(L^1(\Omega; X(\tau)))$  قرار دارد، باید با دقت انتخاب شود. برای دست یافتن به این منظور معمولاً تبدیل‌ها طوری انتخاب می‌شود که درجه مشخصی از هموار بودن را داشته باشد. اغلب مجموعه تبدیل‌های شدنی  $T_{ad}$  باید به اندازه کافی کوچک انتخاب شود به این معنی که تنها آشفتگی‌های کوچک از دامنه مورد قبول قرار گیرد. برای این که بتوانیم فضای مناسبی از تبدیل‌ها  $T(D_{ref})$  را تعریف کنیم، متناظر با فضای باناخ  $S$  فضای سوبولوف  $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d) = W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d)^d$  را در نظر می‌گیریم. با به کار بردن  $S = W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d)$  فضای  $T(D_{ref})$  به فرم فضای  $\mathcal{V}^{k,\infty}$  خواهد بود که توسط مورات و سیمون در [۱۶] به صورت زیر تعریف شده است:

$$\mathcal{V}^{k,\infty} := \{ \tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \mid (\tau - id) \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d) \}.$$

که در آن  $k \geq 1$ . در اینجا برای هر تبدیل  $\tau \in \mathcal{V}^{k,\infty}$  جابه‌جایی متناظر  $(\tau - id) \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d)$  را در نظر می‌گیریم. توجه کنید که  $id \in \mathcal{V}^{1,\infty}$ ، از آنجا که  $id - id \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$  در حالی که  $id \notin L^\infty(\mathbb{R}^d) \subset W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$  به روشنی داریم

$$\mathcal{V}^{k,\infty} = \{ \tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \mid (\tau - id) \in L^\infty(\mathbb{R}^d), D^\alpha \tau \in L^\infty(\mathbb{R}^d), \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, 1 \leq |\alpha| \leq k \}, \quad (5)$$

به علاوه  $\mathcal{V}^{k,\infty}$  می‌تواند به صورت زیر تعریف شود [۱۶ و ۱۰]:

$$\mathcal{V}^{k,\infty} = \{ \tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \mid (\tau - id) \in L^\infty(\mathbb{R}^d), D^\alpha \tau \in C^\infty(\mathbb{R}^d),$$

$$\sup_{x,y \in \mathbb{R}^d, x \neq y} \frac{\| D^\alpha \tau(y) - D^\alpha \tau(x) \|}{\| y - x \|} < +\infty, \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, 1 \leq |\alpha| \leq k \},$$

حداقل فرض لازم برای تبدیل‌ها، به این صورت است که  $T_{ad}$  زیرمجموعه‌ای از

$$\mathcal{T}^{k,\infty} := \{ \tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \mid \tau \in \mathcal{V}^{k,\infty}, \tau^{-1} \in \mathcal{V}^{k,\infty} \}$$

$$T_{ad} \subset \mathcal{T}^{k,\infty} \subset \mathcal{V}^{k,\infty} = T(D_{ref}) = \{ \tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \mid (\tau - id) \in S \}.$$

که در آن  $S = W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d)$  فضای سوبولوف است. توجه کنید که فضای آفین  $T(D_{ref})$  (و بنابراین  $T_{ad}$ ) می‌تواند به توپولوژی‌ای که از فضای جابه‌جایی  $S$  به ارث رسیده، مجهز شود. با توجه به حفظ هموار بودن مرز و منظم بودن توابع تبدیل، مورات و سیمون در [۱۶] نتایج پایه‌ای را برای تکمیل بحث بررسی کرده‌اند.

<sup>1</sup> Sobolev space

### ۲-۳ دامنه‌های تبدیل، مرزها و توابع

برای دامنه کران‌دار  $D_{ref}$  و  $\tau \in T^{k,\infty}$  مجموعه  $\tau(D_{ref})$  نیز دامنه کران‌دار است. به علاوه برای منظم بودن دامنه‌ها نتایج زیر را داریم:

لم ۱: فرض کنید  $D_{ref}$  دامنه کران‌داری با مرز  $W^{k,\infty}$  باشد که  $k \geq 1$  و همچنین فرض کنیم  $\tau \in T^{k,\infty}$  در این صورت  $\tau(D_{ref})$  دامنه‌ای با مرز  $W^{k,\infty}$  خواهد بود [۱۶].

در صورتی که تبدیل‌های  $(\mathbb{R}^d)$  به اندازه کافی کوچک باشند، دامنه‌های لپشیتس حفظ می‌شود (ر.ک. لم ۳ در [۳۰]).

لم ۲: فرض کنید  $D_{ref}$  دامنه کران‌داری با مرز لپشیتس باشد در این صورت ثابت  $1 < c(D_{ref}) < \infty$  وجود دارد که برای هر  $\tau \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$  داریم:  $\|\tau - id\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)} < c(D_{ref})$  و  $\tau(D_{ref})$  دامنه کران‌داری با مرز لپشیتس است [۳۰].

اکنون تبدیل توابع به دامنه مرجع را تحلیل می‌کنیم. فرض کنید  $\tilde{f}: \Omega \times D \rightarrow \mathbb{R}^m$  تابعی با دامنه  $D = \tau(D_{ref})$  باشد که  $\tilde{f} \in L^1(\Omega; L^1(\tau))$ . برای نگاشت داده شده  $\tau \in T^{k,\infty}$  تابع تبدیل متناظر زیر را تعریف می‌کنیم:

$$f: \Omega \times D_{ref} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad f(\omega; x) := (f \circ \tau)(\omega; x) = \tilde{f}(\omega; \tau(x)), \quad \forall \omega \in \Omega,$$

در این صورت  $f$  یک بازگشت<sup>۱</sup> از  $\tilde{f}$  به  $D_{ref}$  با  $\tau$  است. اگر  $f$  دیفرانسیل پذیر باشد، مشتق‌ها را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$D_{\tilde{x}} \tilde{f}(\omega; \tau(x)) = D_x f(\omega; x) \tau'(x)^{-1}, \quad \nabla_{\tilde{x}} \tilde{f}(\omega; \tau(x)) = \tau'(x)^{-T} \nabla_x f(\omega; x), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

که در آن متغیر فضای معین روی  $\tau(D_{ref})$  است. مورات و سیمون تأثیر تبدیل، روی منظم بودن تابع را بررسی کرده‌اند. مشابه لم ۴.۱ از [۱۶] داریم:

لم ۳: فرض کنید  $D$  دامنه‌ای باز باشد همچنین  $\tau \in T^{1,\infty}$  و  $1 \leq p \leq \infty$  آنگاه

$$f \in L^p(\Omega; \tau(D)) \Leftrightarrow f \circ \tau \in L^p(\Omega; L^p(D)),$$

$$f \in L^1(\Omega; W^{1,p}(\tau(D))) \Leftrightarrow f \circ \tau \in L^1(\Omega; W^{1,p}(D)),$$

اگر  $p \in (1, +\infty)$  آنگاه  $f \in L^1(\Omega; W^{1,p}(\tau(D))) \Leftrightarrow f \circ \tau \in L^1(\Omega; W^{1,p}(D))$ .

این لم بسیاری از ابزارهای مورد نیاز برای بهینه‌سازی شکل را (که در آن متغیر حالت معادله با مشتقات جزئی موردنظر به فضاها بخر  $L^1(\Omega; L^p(D))$  یا  $L^1(\Omega; W^{1,p}(D))$  تعلق دارد) فراهم می‌کند.

<sup>1</sup> pullback

### ۳ فرمول بندی در دامنه ثابت

اکنون می‌توانیم مساله بهینه‌سازی را به‌طور کامل روی دامنه ثابت  $D_{ref}$  (مرجع) تعریف کنیم. این کار با انتقال معادله با مشتقات جزئی موردنظر بر روی دامنه مرجع، انجام می‌گیرد. با توجه به مساله (۴) عملگر  $\tilde{E}$  بین فضاها به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$\tilde{E} : \{(\tilde{u}, \tau) \mid \tilde{u} \in L^{\check{}}(\Omega; X(\tau)), \tau \in T_{ad}\} \rightarrow \{\tilde{z} \mid \tilde{z} \in L^{\check{}}(\Omega; Z(\tau))\}.$$

در ادامه از نماد  $T_{ref}$  برای نمایش  $T(D_{ref})$  استفاده خواهیم کرد. اکنون فضاهای  $L^{\check{}}(\Omega; X(\tau))$  و  $L^{\check{}}(\Omega; Z(\tau))$  را به فضاهای ثابت  $L^{\check{}}(\Omega; X_{ref})$  و  $L^{\check{}}(\Omega; Z_{ref})$  منتقل کرده‌ایم،  $L^{\check{}}(\Omega; X_{ref}) = \{\tilde{u}\sigma\tau : \tilde{u} \in L^{\check{}}(\Omega; X(\tau))\}$ . همچنین  $E : L^{\check{}}(\Omega; X_{ref}) \times T_{ref} \rightarrow L^{\check{}}(\Omega; Z_{ref})$  حال  $\tilde{u} \in L^{\check{}}(\Omega; X(\tau)) \mapsto u := \tilde{u}\sigma\tau \in L^{\check{}}(\Omega; X_{ref})$  عملگر تبدیل شده است، به‌طوری‌که برای همه  $\tau \in T_{ad}$  و هر  $\tilde{u} \in L^{\check{}}(\Omega; X(\tau))$  داشته باشیم  $E(u, \tau) = 0 \Leftrightarrow \tilde{E}(\tilde{u}, \tau) = 0$ .

به‌طور مشابه تابع هدف  $J : X_{ref} \times T_{ref} \rightarrow \mathbb{R}$  برای  $J : X_{ref} \times T_{ref} \rightarrow \mathbb{R}$  به‌صورت  $J(u, \tau) = \tilde{J}(\tilde{u}, \tau)$  تعریف می‌شود. همچنین فرض می‌کنیم که  $L^{\check{}}(\Omega; Z(\tau))$  می‌تواند به‌طور مشابه منتقل شود. اکنون مساله (۴) را می‌توانیم به‌صورت زیر بیان کنیم:

تعریف ۳: مساله کمینه‌سازی

$$\min J(u, \tau) \quad \text{s.t. } E(u, \tau) = 0, \tau \in T_{ad}, \quad (6)$$

که در آن  $J : L^{\check{}}(\Omega; X_{ref}) \times T_{ref} \rightarrow \mathbb{R}$  تابع هدف است و  $E : L^{\check{}}(\Omega; X_{ref}) \times T_{ref} \rightarrow L^{\check{}}(\Omega; Z_{ref})$  مساله بهینه‌سازی شکل با تبدیل‌ها روی دامنه ثابت نامیده می‌شود.

در این فرمول بندی یک مساله بهینه‌سازی روی دامنه ثابت در فضای توابع خواهیم داشت که در آن نقش متغیر کنترل را در مساله دارد؛ بنابراین می‌توانیم شیوه‌های کنترل بهینه را برای به دست آوردن شرایط بهینگی به کار ببریم و در ادامه از الگوریتم‌های بهینه‌سازی برای حل آن استفاده کنیم. توجه داریم که در مقابل سایر بردها و فضاهای تصویر از  $J$  و  $E$ ، فضای آفین  $T_{ref}$  فضای برداری نخواهد بود. در واقع داریم:

$$T_{ref} = \{\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \mid (\tau - id) \in S\} = \{\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \mid \tau = id + \hat{\tau}, \hat{\tau} \in S\} =: id + S,$$

با وجود این، از آنجا که یک نگاشت یک-به-یک بین تبدیل  $\tau \in T_{ref}$  و جابه‌جایی متناظر  $\hat{\tau} = \tau - id$  داریم، می‌توانیم  $T_{ref}$  را با فضای باناخ  $S$  مشخص کنیم. از آنجا که می‌خواهیم از شیوه‌های کنترل بهینه برای تحلیل مساله بهینه‌سازی شکل استفاده کنیم، می‌توانیم از این موضوع که برای  $E$  و  $J$  مشتقات جهتی نسبت به  $\tau$  در تمام جهت‌ها، در فضای باناخ  $S$  قابل محاسبه هستند، استفاده کنیم. بنابراین می‌توانیم از جفت دوگان برای فضای باناخ  $S$  در همه جهت‌ها نسبت به  $\tau$  استفاده کنیم. به عبارت دیگر  $\langle J_{\tau}(u, \tau), v \rangle_{S^*, S}$  برای هر  $u \in L^{\check{}}(\Omega; X_{ref})$  و  $\tau \in T_{ad}$  و  $v \in S$  خوش تعریف است. اکنون معادله حالت را با فرم تغییری

$$\langle \tilde{E}(\tilde{u}, \tau), \tilde{v} \rangle_{L^Y(\Omega; Z(\tau))} = 0, \quad \forall \tilde{v} \in L^Y(\Omega; Z(\tau)^*), \quad (7)$$

بیان می‌کنیم. نماد  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  زوج دوگان است و  $Z(\tau)^*$  فضای مناسبی از توابع آزمون است که بر روی  $D = \tau(D_{ref})$  با  $\tau \in T_{ad}$  تعریف شده است. مانند متغیر حالت، توابع آزمون را نیز از  $D$  به  $D_{ref}$  برای هر  $x \in D_{ref}$  با استفاده از بازگشت  $v(x) := (\tilde{v} \circ \tau)(x)$  تبدیل می‌کنیم که در آن توابع آزمون برای مساله‌ای هستند که روی  $D = \tau(D_{ref})$  تعریف شده است. حال  $E(u, \tau)$  برای هر  $\tilde{v} \in L^Y(\Omega; Z(\tau)^*)$  و هر  $\tau \in T_{ad}$  به صورت زیر است:

$$\langle E(\tilde{u} \circ \tau, \tau), \tilde{v} \circ \tau \rangle_{L^Y(\Omega; Z_{ref})} := \langle \tilde{E}(\tilde{u}, \tau), \tilde{v} \rangle_{L^Y(\Omega; Z(\tau))}, \quad \forall \tilde{u} \in L^Y(\Omega; X(\tau)),$$

مفروضات زیر را داریم:

- برای هر  $\tau \in T_{ad}$ ،  $L^Y(\Omega; X_{ref})$  را طوری انتخاب می‌کنیم که
- $L^Y(\Omega; X_{ref}) \subset \{\tilde{u} \circ \tau \mid \tilde{u} \in L^Y(\Omega; X(\tau))\}$ .
- برای هر  $\tau \in T_{ad}$ ،  $L^Y(\Omega; Z_{ref})$  را طوری انتخاب می‌کنیم که
- $L^Y(\Omega; Z_{ref}^*) = \{\tilde{v} \circ \tau \mid \tilde{v} \in L^Y(\Omega; Z(\tau)^*)\}$ .
- جواب  $\tilde{u}(\tau)$  از معادله

$$\tilde{E}(\tilde{u}(\tau), \tau) = 0. \quad (8)$$

برای هر  $\tau \in T_{ad}$  در رابطه  $\tilde{u} \circ \tau \in L^Y(\Omega; X_{ref})$  صدق می‌کند.

فرض کنید  $\tau \in T_{ad}$  در این صورت معادله حالت تبدیل یافته، در فرم تغییری به صورت زیر خواهد بود:

$$\langle E(u, \tau), v \rangle_{L^Y(\Omega; Z_{ref})} = 0, \quad \forall v \in L^Y(\Omega; Z_{ref}^*), \quad (9)$$

با این ترتیب معادله (۹) در واقع برابر (۸) است؛  $\tilde{u}(\tau)$  مساله (۸) را حل می‌کند اگر و فقط اگر  $u = \tilde{u}(\tau) \circ \tau$  مساله (۹) را حل کند. برعکس  $u(\tau) \in L^Y(\Omega; X_{ref})$  مساله (۹) را حل می‌کند اگر و فقط اگر  $\tilde{u}(\tau) := u(\tau) \circ \tau^{-1}$  مساله (۸) را حل کند.

### ۳-۱ تبدیل فرم تغییری به معادله حالت

معمولاً یک فرم تغییری صرف بعد از تبدیل به دامنه مرجع، با استفاده از قاعده تبدیل برای انتگرال‌ها و مشتق‌ها، از معادله حالت اولیه به دست می‌آید. فرض کنید  $\tau \in T^{1, \infty}$  و  $\tilde{f} \in L^Y(\Omega; L^1(D_{ref}))$ ، سپس با استفاده از قاعده تبدیل برای انتگرال‌ها  $f = (\tilde{f} \circ \tau) |\det \tau'|$  روی  $\Omega \times D_{ref}$  انتگرال پذیر است:

$$\int_{\Omega} \int_{D_{ref}} (\tilde{f} \circ \tau)(\omega, x) dx \mu(d\omega) = \int_{\Omega} \int_{\tau(D_{ref})} f(\omega, x) |\det(\tau^{-1})'(x)| dx \mu(d\omega), \quad (10)$$

در تحلیل ویژگی‌های دیفرانسیل پذیری مساله بهینه‌سازی (۶) بررسی دیفرانسیل پذیری  $E(u, \tau)$  نسبت به  $u$  و  $\tau$  بسیار مفید خواهد بود. برای انتقال فرم تغییری معادله حالت از دامنه  $\tau(D_{ref})$  به دامنه مرجع  $D_{ref}$ ، قاعده

تبدیل برای انتگرال‌ها به کار می‌رود. در این حالت دیفرانسیل پذیری نگاشت‌های  $\tau \rightarrow |\det \tau'|$  و

$(\tau^{-1})'$  باید توجه شود؛ بنابراین لم زیر را خواهیم داشت:

لم ۴: (الف) فرض کنید  $\tau \in T^{1,\infty}$  آنگاه  $\delta > 0$  وجود دارد که

$$|\det \tau'| \geq \delta, \quad a.a. \ x \in \mathbb{R}^d,$$

(ب) فرض کنید  $k \geq 1$ ، نگاشت  $g_1(\tau) = |\det \tau'|$  برای هر  $\tau \in T^{k,\infty}$  از  $W^{k-1,\infty}(\mathbb{R}^d)$  به  $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d)^d$  دیفرانسیل پذیر است. به علاوه برای هر  $\varphi \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d)^d$  داریم:

$$g'_1(\tau)\varphi = \text{tr}((\tau^{-1})'\varphi') |\det \tau'|, \quad (11)$$

(پ) فرض کنید  $k \geq 1$ ، نگاشت  $g_2(\tau) = (\tau^{-1})'$  برای هر  $\tau \in T^{k,\infty}$  از  $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d)^{d \times d}$  به  $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d)^d$  دیفرانسیل پذیر است. به علاوه برای هر  $\varphi \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d)^d$  داریم:

$$g'_2(\tau)\varphi = -(\tau^{-1})'\varphi'(\tau^{-1})', \quad (12)$$

**برهان.** (الف) از قسمت ii در برهان لم ۴.۲ در مرجع [۱۶] آمده است. دیفرانسیل پذیری فرشت در قسمت (ب) و (پ) نیز از لم‌های ۴.۲ و ۴.۳ همین منبع به دست می‌آید.

اگر تبدیل  $\tau$  دامنه‌ای را نشان دهد که بسیار به دامنه مرجع نزدیک است، آنگاه  $\delta > 0$   $\det \tau' \geq \delta$  و می‌توانیم قدر مطلق را از (۱۱) حذف کنیم.

### ۳-۲ مساله کاهش یافته، وجود جواب‌ها و شرایط بهینگی

فرض کنید  $L^1(\Omega; X_{ref})$  و  $L^1(\Omega; Z_{ref})$  فضاهای بخنر باشند و  $T_{ref} = id + S$  در این صورت مساله (۶) یک مساله کنترل بهینه با کنترل  $\tau$  و حالت  $u(\tau)$  است و می‌توانیم از نظریه کنترل بهینه برای تحلیل وجود جواب و شرایط بهینگی استفاده کنیم. مطابق معمول ابتدا مجموعه‌های شدنی، جواب‌های بهینه و عملگر کنترل-به-حالت (عملگر طراحی-به-حالت) را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۴: مجموعه  $\mathcal{G} = \{(u, \tau) \in L^1(\Omega; X_{ref}) \times T_{ref} \mid E(u, \tau) = 0, \tau \in T_{ad}\}$  مجموعه شدنی مساله (۶)

می‌نامیم. به علاوه  $(\bar{u}, \bar{\tau})$  را جواب بهینه سرتاسری می‌نامیم هرگاه:  $J(\bar{u}, \bar{\tau}) \leq J(u, \tau), \quad \forall (u, \tau) \in \mathcal{G}$ .

همچنین  $(\bar{u}, \bar{\tau}) \in \mathcal{G}$  را جواب‌های بهینه موضعی می‌نامیم اگر  $\epsilon > 0$  وجود داشته باشد به طوری که

$$J(\bar{u}, \bar{\tau}) \leq J(u, \tau), \quad \forall (u, \tau) \in \mathcal{G} \cap L^1(\Omega; X_{ref}) \times B_{\|\cdot\|_S}(\bar{\tau}, \epsilon),$$

اگر برای هر  $\tau \in T_{ad}$ ، حالت یکتای  $u(\tau) \in L^1(\Omega; X_{ref})$  وجود داشته باشد به طوری که  $E(u(\tau), \tau) = 0$ ،

آنگاه عملگر یکتای طراحی-به-حالت زیر را معرفی می‌کنیم:

$$S_u : T_{ad} \rightarrow L^1(\Omega; X_{ref}), \quad \tau \rightarrow u(\tau),$$

به علاوه می‌توانیم مساله بهینه‌سازی شکل کاهش یافته را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\min j(\tau) := \min J(S_u(\tau), \tau) \quad \text{s.t. } \tau \in T_{ad}. \quad (13)$$

براندنبرگ در [۳۱] چارچوبی را معرفی کرده است که وجود جواب برای مساله بررسی می‌شود:

لم ۵: فرض کنید  $S$  فضای باناخ باشد،  $T_{ref} = id + S$  و  $T_{ad}$  ناتهی، بسته و کران‌دار و  $L^{\vee}(\Omega; X_{ref})$  فضای بختر انعکاسی باشد. به‌علاوه معادله حالت  $L^{\vee}(\Omega; Z_{ref}) \times T_{ref} \rightarrow L^{\vee}(\Omega; X_{ref}) \times T_{ref} \rightarrow \mathbb{R}$  و تابع هدف  $E : L^{\vee}(\Omega; X_{ref}) \times T_{ref} \rightarrow \mathbb{R}$  را پیوسته در نظر می‌گیریم. همچنین فرض کنید  $\bar{S}$  فضای باناخ انعکاسی با جانشانی فشرده  $S \mapsto \bar{S}$  باشد و  $\bar{T}_{ad} \subset id + \bar{S}$  ناتهی، بسته، کران‌دار و محدب باشد که  $\bar{T}_{ad} \cap T_{ad} \neq \emptyset$  آنگاه مساله بهینه‌سازی شکل (۱۳) در  $\bar{T}_{ad} \cap T_{ad}$  جواب بهینه سرتاسری دارد.

برهان لم در منبع [۳۱] با استفاده از شیوه کنترل بهینه ارایه شده است.

برای به دست آوردن شرایط بهینگی فرض زیر را داریم:

فرض ۱:

۱. مجموعه  $T_{ad} \subset T_{ref}$  ناتهی، بسته و محدب است.

۲. تابع هدف  $J : L^{\vee}(\Omega; X_{ref}) \times T_{ref} \rightarrow \mathbb{R}$  و  $E : L^{\vee}(\Omega; X_{ref}) \times T_{ref} \rightarrow \mathbb{R}$  به‌طور پیوسته دیفرانسیل پذیر هستند.

۳. همسایگی باز  $\tilde{T}_{ref}$  از  $T_{ad}$  با  $T_{ad} \subset \tilde{T}_{ref} \subset T_{ref}$  وجود دارد به‌طوری که عملگر طراحی به-حالت  $S_u : \tilde{T}_{ref} \rightarrow L^{\vee}(\Omega; X_{ref})$  موجود و  $S_u$  به‌طور پیوسته دیفرانسیل پذیر است.

۴. مشتق  $E_u(u(\tau), \tau)$  برای هر  $\tau \in T_{ad}$  یک-به-یک است و  $u(\tau) = S_u(\tau)$ .

برای به دست آوردن شرایط بهینگی، تابع لاگرانژ  $\mathcal{L} : L^{\vee}(\Omega; X_{ref}) \times T_{ref} \times L^{\vee}(\Omega; Z_{ref}^*) \rightarrow \mathbb{R}$  را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$\mathcal{L}(u, \tau, \lambda) := J(u, \tau) + \langle \lambda, E(u, \tau) \rangle_{L^{\vee}(\Omega; Z_{ref})}, \quad (14)$$

تحت فرض ۱، جواب بهینه موضعی  $(\bar{u}, \bar{\tau}) \in L^{\vee}(\Omega; X_{ref}) \times T_{ad}$  از مساله (۱۳) با در نظر گرفتن حالت الحاقی مناسب  $\bar{\lambda} \in L^{\vee}(\Omega; Z_{ref}^*)$  در شرایط لازم بهینگی مرتبه اول زیر که شرایط کاروش-کان-تاکنر نیز نامیده می‌شود، صدق می‌کند:

$$\langle \mathcal{L}_{\lambda}(\bar{u}, \bar{\tau}, \bar{\lambda}), \delta \lambda \rangle_{L^{\vee}(\Omega; Z_{ref})} = \langle E(\bar{u}, \bar{\tau}), \delta \lambda \rangle_{L^{\vee}(\Omega; Z_{ref})} = 0,$$

$$\langle \mathcal{L}_u(\bar{u}, \bar{\tau}, \bar{\lambda}), \delta u \rangle_{L^{\vee}(\Omega; X_{ref})} = \langle J_u(\bar{u}, \bar{\tau}), \delta u \rangle_{L^{\vee}(\Omega; X_{ref})} + \langle \bar{\lambda}, E_u(\bar{u}, \bar{\tau}) \delta u \rangle_{L^{\vee}(\Omega; Z_{ref})} = 0,$$

$$\langle \mathcal{L}_{\tau}(\bar{u}, \bar{\tau}, \bar{\lambda}), \hat{\tau} - \bar{\tau} \rangle_S = \langle J_{\tau}(\bar{u}, \bar{\tau}) + E_{\tau}(\bar{u}, \bar{\tau}) \bar{\lambda}, \hat{\tau} - \bar{\tau} \rangle_S \geq 0, \quad \forall \hat{\tau} \in T_{ad},$$

که در آن اولین معادله، معادله حالت سیستم است و دومین معادله، معادله الحاقی است. معادله آخر برای ساختارهای مناسب  $S$  و  $T_{ad}$  می‌تواند به صورت معادله طراحی نوشته شود.

### ۳-۳ محاسبه مشتق شکل مرتبه اول

تحت فرض ۱ مشتق‌های تابع هدف کاهش یافته  $j(\tau) := J(u(\tau), \tau)$  را می‌توان مانند معمول با استفاده از قاعده زنجیره‌ای محاسبه کرد و  $u(\tau) = S_u(\tau)$  می‌تواند به صورت نماد جایگزینی برای عملگر طراحی-به-حالت به کار رود. در حقیقت برای مشتق‌های  $j \in \tau \in T_{ad}$  در جهت  $\delta\tau$  داریم:

$$\langle j'(\tau), \delta\tau \rangle_S = \langle J_u(u(\tau), \tau), u'(\tau)\delta\tau \rangle_{L^2(\Omega; X_{ref})} + \langle J_\tau(u(\tau), \tau), \delta\tau \rangle_S,$$

$$= \langle u'(\tau)^* J_u(u(\tau), \tau), \delta\tau \rangle_S + \langle J_\tau(u(\tau), \tau), \delta\tau \rangle_S,$$

$$= \langle u'(\tau)^* J_u(u(\tau), \tau) + J_\tau(u(\tau), \tau), \delta\tau \rangle_S,$$

که در آن  $u'(\tau) \in Y(S, L^2(\Omega; X_{ref}))$  عملگر الحاقی  $u'(\tau)^* \in Y(L^2(\Omega; X_{ref}^*), S^*)$  است (توجه کنید که در اینجا  $Y(\cdot, \cdot)$  مجموعه همه عملگرهای خطی پیوسته بین دو فضا است)؛ بنابراین مشتق کاهش یافته  $j'(\tau) \in S^*$  برابر خواهد بود با

$$j'(\tau) = u'(\tau)^* J_u(u(\tau), \tau) + J_\tau(u(\tau), \tau). \quad (15)$$

اغلب محاسبه کارای عبارت دوم در (۱۵) در دسترس است. برای عبارت اول از روش الحاقی استفاده خواهیم کرد تا از محاسبه مستقیم  $u'(\tau)$  خودداری شود. کاربرد روش الحاقی در کنترل بهینه معمول و بر اساس ملاحظات زیر است:

مشتق معادله حالت  $E(u(\tau), \tau) = 0$  نتیجه می‌دهد:

$$E_u(u(\tau), \tau)u'(\tau) = -E_\tau(u(\tau), \tau), \quad (16)$$

و بنابراین  $u'(\tau)^* E_u(u(\tau), \tau)^* = -E_\tau(u(\tau), \tau)^*$  حال معادله الحاقی زیر را معرفی می‌کنیم:

$$E_u(u(\tau), \tau)^* \lambda = -J_u(u(\tau), \tau).$$

اکنون با فرض ۱، عملگر  $E_u(u(\tau), \tau)^*$  پوشاست. بنابراین معادله الحاقی دارای جواب  $\lambda \in L^2(\Omega; Z_{ref}^*)$  است. اکنون از عبارت اول (۱۵) داریم:

$$u'(\tau)^* J_u(u(\tau), \tau) = u'(\tau)^* (E_u(u(\tau), \tau)^* \lambda) = E_\tau(u(\tau), \tau)^* \lambda.$$

در نتیجه برای محاسبه مشتقات کاهش یافته به رابطه ساده زیر خواهیم رسید:

$$j'(\tau) = E_\tau(u(\tau), \tau)^* \lambda + J_\tau(u(\tau), \tau).$$

در مسایل بهینه‌سازی شکل،  $j'(\tau)$  را مشتق شکل می‌نامیم. الگوریتم محاسبه مشتق شکل در زیر خلاصه شده است:

### الگوریتم محاسبه گرادیان مرتبه اول

۱. فرض کنید  $\tau \in T_{ad}$  داده شده باشد، متغیر حالت  $u \in L^Y(\Omega; X_{ref})$  با حل معادله حالت به دست می آید:

$$\langle E(u(\tau), \tau), v \rangle_{L^Y(\Omega; Z_{ref})} = 0, \quad \forall v \in L^Y(\Omega; Z_{ref}^*).$$

۲. متغیر الحاقی متناظر  $\lambda \in L^Y(\Omega; Z_{ref}^*)$  را با حل معادله الحاقی زیر به دست آورید:

$$\langle \lambda, E_u(u(\tau), \tau)v \rangle_{L^Y(\Omega; Z_{ref})} = -\langle J_u(u(\tau), \tau), v \rangle_{L^Y(\Omega; X_{ref})}, \quad \forall v \in L^Y(\Omega; X_{ref}^*),$$

۳. مشتق کاهش یافته  $j'(\tau)$  از رابطه زیر به دست می آید:

$$\langle j'(\tau), \delta\tau \rangle_S = \langle \lambda, E_\tau(u(\tau), \tau)\delta\tau \rangle_{L^Y(\Omega; Z_{ref})} + \langle J_\tau(u(\tau), \tau), \delta\tau \rangle_S \quad \forall \delta\tau \in S^*.$$

### ۴ گسسته سازی تصادفی

#### ۴-۱ فرض نویز متناهی

متغیر تصادفی  $y_k: \Omega \rightarrow \Gamma_k \subset \mathbb{R}$  را برای  $k = 1, 2, \dots, M$  با  $M < +\infty$ ، حقیقی مقدار در نظر می گیریم که

دارای تابع چگالی احتمال  $\rho_k: \Gamma_k \rightarrow \mathbb{R}^+$  است. اکنون  $\rho(y) = \prod_{k=1}^M \rho_k(y_k)$  را چگالی توأم

$y \in \Gamma \equiv \prod_{k=1}^M \Gamma_k \subset \mathbb{R}^M$  تعریف می کنیم، همچنین می دانیم  $y = [y_1, y_2, \dots, y_M]^T$  برداری با بعد متناهی

است. در حل معادلات با مشتقات جزئی با روش های عددی، فرض متناهی بودن پارامترهای تصادفی بسیار حیاتی

است. در این پژوهش این فرض را در نظر گرفته و برای سادگی نمایش روابط، از نمادگذاری فضاهای متناهی

استفاده می کنیم. با این فرض تابع منبع تصادفی  $f$  به تعداد متناهی از متغیرهای تصادفی وابسته خواهند بود. به طور

نمادین می توانیم بنویسیم  $f(y(\omega), x) = f(y_1(\omega), \dots, y_M(\omega); x)$  که در آن  $y = (y_1, \dots, y_M)$  یک بردار

تصادفی است. فرض می کنیم که  $y_k$  برای  $k = 1, \dots, M$  دارای میانگین صفر و واریانس واحد هستند و همچنین

دو به دو از هم مستقل اند. با فرض وابستگی خطی  $f$  به  $y$ ، خواهیم داشت:

$$f(y, x) = \mathbb{E}[f](x) + \sum_{k=1}^M f_k(x)y_k(\omega),$$

که در آن  $f_k$  برای  $k = 1, \dots, M$  به طور یکنواخت کران دار هستند. این گسترش همان توسعه کارهونن-لویو

است. در این مقاله برای این گسترش ها توسعه کارهونن-لویو را به کار بسته ایم. این فرمول بندی برای

انتگرال گیری بسیار مفیدتر خواهد بود. ابتدا برای فرمول بندی در فضای متناهی، با استفاده از قضیه دووب-

دینکین<sup>۱</sup> داریم [۳۲]:

$$\int_{\Omega} \int_{\mathcal{D}} f(\omega, x) dx \mu(d\omega) = \int_{\Gamma} \int_{\mathcal{D}} f(y, x) dx \rho(y) dy.$$

<sup>1</sup> Doob-Dynkin

این فرمول بندی را برای استفاده از روش های عددی در ادامه به کار خواهیم بست. نحوه محاسبه توسیع کارهونن - لویو در [۳۳] مطالعه شد.

#### ۴-۲ روش نمونه گیری مونت کارلو

روش نمونه گیری مونت کارلو بر اساس ایجاد سیستمی از متغیرهای تصادفی  $y$  است که مستقل و با توزیع یکسان می باشد؛ بنابراین حل سیستم (۹) به صورت حل  $M$  سیستم معین، برای  $M$  حقیقی سازی متفاوت از  $Y$  است و بنابراین  $M$  جواب  $u^i(\tau) = u(y^j; \tau)$  را به دست خواهیم آورد که  $y^j, i=1, \dots, M$  حقیقی سازی  $y$  است. زمانی که  $M$  جواب محاسبه شد با استفاده از آن ها می توان آماره های مورد نیاز را تخمین زد. برای مثال می توان میانگین را با استفاده از قضیه لم مرکزی به صورت  $\bar{u} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M u^i(\tau)$  تخمین زد. نرخ همگرایی این روش نسبتاً کند و برابر

است با  $o(M^{-\frac{1}{2}})$  [۲۸].

#### ۴-۳ روش های هم محلی تصادفی

روش هم محلی تصادفی، در حالت کلی بر اساس توسیع چند جمله ای و به ویژه، درونیاب لاگرانژ است. ایده کلی، انتخاب مجموعه نقاط هم محلی  $y_M = \{y^j\}_{j=1}^M$  در فضای تصادفی است. بر این اساس معادله (۹) در هر یک از نقاط  $y^j$  باید برقرار باشد، به این معنی که سیستم زیر برای  $j=1, 2, \dots, M$  حل می شود:

$$E(u(y^j; \tau), \tau) = 0, \quad (17)$$

برای هر  $j$ ، (۱۷) یک سیستم معین است و در نتیجه روش هم محلی شامل حل  $M$  سیستم معین خواهد بود. البته این یک تعریف گسترده برای روش هم محلی است که روش نمونه گیری مونت کارلو را نیز شامل می شود. معمولاً زمانی که روش های هم محلی به کار می رود، انتخاب هوشمندانه نقاط هم محلی انجام می گیرد. جواب معادله با مشتقات مورد نظر را می توان با استفاده از توابع درونیاب لاگرانژ نمایش داد. اکنون جواب معادله حالت (۱۷) با استفاده از درونیابی به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$\tilde{u}(y) \equiv \mathcal{I}(u) = \sum_{j=1}^M u(y^j) h_j(y) v,$$

که در آن  $h_j$  چند جمله ای های لاگرانژ است و  $u(y^j) = u(y^j; \tau)$  یاد آوری می کنیم که چند جمله ای های لاگرانژ در فضای درونیابی مناسب، تعریف می شود و برای هر  $j \in \{1, 2, \dots, M\}$  داریم  $h_i(y^j) = \delta_{i,j}$ . در نتیجه درونیابی  $\tilde{u}(y)$  برابر جواب دقیق در هر  $M$  نقطه هم محلی است. با استفاده از جواب های معین در نقاط هم محلی، آماره های درونیابی را می توان محاسبه کرد و بنابراین می توان آماره های جواب تصادفی (۱۷) را به دست آورد. میانگین درونیابی  $\tilde{u}$  برای مثال می تواند به صورت زیر نمایش داده شود:

$$\mathbb{E}[\tilde{u}] = \sum_{j=1}^M u(y^j) \int_{\Gamma} h_j(y) \rho(y) dy. \quad (18)$$

محاسبه امید ریاضی می‌تواند به صورت غیر بدیهی به دست آید که برای این کار اطلاعات چندجمله‌ای‌های لاگرانژ مورد نیاز است. یک روش استفاده از ماتریس وارون از نوع واندرموند، است که به محاسبات زیادی نیاز دارد. روش دیگر استفاده از قاعده انتگرال گیری<sup>۱</sup> برای به دست آوردن انتگرال است که به رابطه زیر می‌انجامد:

$$\mathbb{E}[\tilde{u}] = \sum_{j=1}^M u(y^j) \sum_{k=1}^M h_j(y_k) \rho(y_k) w_k,$$

که در آن  $y_k$  نقاط و  $w_k$  وزن‌های انتگرال گیری هستند. تقریب انتگرال در (۱۸) دقیق خواهد بود؛ زیرا چندجمله‌ای لاگرانژ از مرتبه  $M$  هستند و انتگرال گیری درجه دوم برای چندجمله‌ای‌هایی از این مرتبه دقیق است. رابطه به دست آمده برای میانگین درونیابی را می‌توان با انتخاب هوشمندانه نقاط هم‌محلی، ساده‌تر کرد. با تابع مشخصه چندجمله‌ای‌های لاگرانژ برای  $\{1, 2, \dots, M\}$  که برابر  $h_i(y^j) = \delta_{i,j}$  است و بازنویسی روابط، میانگین به رابطه زیر کاهش می‌یابد:

$$\mathbb{E}[\tilde{u}] = \sum_{j=1}^M u(y^j) \rho(y^j) w_j,$$

به همین ترتیب واریانس درونیابی می‌تواند به صورت زیر محاسبه شود:

$$\begin{aligned} \text{Var}[\tilde{u}] &= \sum_{k=1}^M \left( \sum_{j=1}^M u(y^j) \delta_{i,j}(y_k) - \mathbb{E}[\tilde{u}] \right)^2 \rho(y_k) w_k \\ &= \sum_{k=1}^M (u(y_k) - \mathbb{E}[\tilde{u}])^2 \rho(y_k) w_k \end{aligned}$$

## ۵ بهینه‌سازی هندسی با قید معادله با مشتقات جزئی بیضوی تصادفی

روش ارائه شده در بخش‌های قبلی را برای حل مساله بهینه‌سازی

$$J(D) = \int_{\Gamma} \int_{\mathcal{D}} j(u(D)) dx dy. \quad (19)$$

و قید معادله با مشتقات جزئی زیر به کار می‌گیریم:

$$-\Delta u(y; x) + bu(y; x) = f(y; x), \quad \text{in } \Gamma \times \mathcal{D}, \quad (20)$$

با توجه به این که استخراج معادله حالت و الحاقی نیازی به انتقال دامنه ندارد، ابتدا آن‌ها را با معرفی لاگرانژین برای مساله بالا به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(D, u(y; D), p(y; D)) &= \int_{\Gamma} \int_{\mathcal{D}} j(u(D)) dx dy \\ &+ \int_{\Gamma} \int_{\mathcal{D}} p(y; D) (-\Delta u(y; x) + bu(y; x) - f(y; x)) dx dy. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Quadrature Rule

به راحتی می‌توان دید که انتقال این انتگرال‌ها به دامنه ثابت با استفاده از تبدیل‌های  $\tau \in T_{ad}$  و رابطه (۱۰) انجام می‌پذیرد. همچنین توجه کنید که در اینجا برای سادگی، از فرمول بندی بر اساس دامنه استفاده می‌کنیم (توجه کنید که  $(D = (\tau + I)(D_{ref}))$  برای مساله بهینه‌سازی ساختار، غالباً متناظر قید معادله با مشتقات جزئی، با دو نوع شرایط مرزی سروکار داریم: شرط مرزی دیریکله و شرط مرزی نیومن که به‌طور جداگانه به بررسی آن‌ها خواهیم پرداخت.

### ۵-۱ شرط مرزی نیومن

فرض کنیم  $u$  جواب سیستم (۲۰) با شرط مرزی نیومن زیر باشد:

$$\nabla u \cdot n = g_N(y, x), \quad \text{on } \Gamma \times \partial D_N \quad (21)$$

با تشکیل لاگرانژین برای مساله (۲۰) با شرط مرزی (۲۱) خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}(D, u, p) = \int_{\Gamma} \int_{\mathcal{D}} j(u) dx dy + \int_{\Gamma} \int_{\mathcal{D}} \nabla p \cdot \nabla u + b p u - p f dx dy - \int_{\Gamma} \int_{\partial \mathcal{D}} p g_N dx dy,$$

که در آن  $u$  و  $p$  به فضای بخر  $L^2(\Gamma; H^1(\mathbb{R}^d))$  تعلق دارند و  $d \in \{2, 3\}$ . باید توجه داشت که فضای  $(\mathbb{R}^d)$  به دامنه  $D$  وابسته نیست و در نتیجه متغیرهای تابع  $L^2$  لاگرانژین از یکدیگر مستقل هستند. با محاسبه مشتق‌های جهتی لاگرانژین می‌توانیم سیستم بهینگی مساله کنترل بهینه به دست آمده را تشکیل دهیم. ابتدا مشتق جزئی  $\mathcal{L}$  نسبت به  $p$  و در جهت  $\delta p$  برابر خواهد بود با:

$$\mathcal{L}_p(D, u, p)(\delta p) = \int_{\Gamma} \int_{\mathcal{D}} \nabla \delta p \cdot \nabla u + b \delta p u - \delta p f dx dy - \int_{\Gamma} \int_{\partial \mathcal{D}} \delta p g_N dx dy, \quad (22)$$

که وقتی صفر می‌شود در واقع فرم تغییری معادله حالت را به دست می‌دهد. اکنون مشتق جزئی  $\mathcal{L}$  نسبت به  $u$  و در جهت  $\delta u \in L^2(\Gamma; H^1(\mathbb{R}^d))$  برابر خواهد بود با:

$$\mathcal{L}_u(D, u, p)(\delta u) = \int_{\Gamma} \int_{\mathcal{D}} j'(u) \delta u dx dy + \int_{\Gamma} \int_{\mathcal{D}} \nabla p \cdot \nabla \delta u + b p \delta u dx dy, \quad (23)$$

که وقتی صفر می‌شود فرم تغییری معادله الحاقی را به دست می‌دهد. اکنون برای محاسبه مشتق شکل باید مشتق جزئی  $\mathcal{L}$  را نسبت به دامنه  $D$  با فرض این که متغیرهای  $u$  و  $p$  ثابت هستند در جهت  $\tau$  محاسبه کنیم:

$$\mathcal{L}_D(D, u, p)(\tau) = \int_{\Gamma} \int_{\partial D_{ref}} \tau \cdot n (j(u) + \nabla p \cdot \nabla u + b p u - p f + \frac{\partial(p g_N)}{\partial n} + H p g_N) ds dy, \quad (24)$$

که در آن  $H$  خمیدگی میانگین است. اکنون باید توجه داشت که با متغیر حالت  $u(D_{ref})$  و الحاقی  $p$  دقیقاً به گرادیان تابع هدف (مشتق شکل) دست خواهیم یافت:

$$J'(D_{ref})(\tau) = \mathcal{L}_D(D_{ref}, u(D_{ref}), p)(\tau) + \int_{\Omega} \int_{D_{ref}} \mathcal{L}_u u(D_{ref}, u(D_{ref}), p) u'(D_{ref}) \tau ds dy,$$

در اینجا  $u$  به دامنه  $D$  وابسته و از متغیر الحاقی،  $p$  مستقل است. توجه کنید که از قضیه مشتق ترکیبی برای مشتق شکل استفاده کردیم. با قرار دادن  $p(D_{ref})$  که جواب معادله الحاقی است، عبارت دوم حذف می‌شود و در نتیجه خواهیم داشت:

$$J'(D_{ref})(\tau) = \mathcal{L}_D(D_{ref}, u(D_{ref}), p(D_{ref}))(\tau). \quad (25)$$

که مشتق پذیری تابع هدف نسبت به دامنه را برای محاسبه مشتق ترکیبی نیاز داریم.

## ۵-۲ شرط مرزی دیریکله

اکنون سیستم (۲۰) را با شرط مرزی دیریکله زیر در نظر می‌گیریم:

$$u = g_D(\omega, x), \quad \text{in } \Omega \times \partial D. \quad (26)$$

با توجه به این که شرط مرزی دیریکله تغییری نیست در نتیجه وارد کردن آن در فضای تابعی و به دست آوردن تابعک لاگرانژین پیچیده خواهد بود. یک راه حل جایگزین برای حل این مشکل، استفاده از ضریب لاگرانژ

مکمل است. به عبارت دیگر برای  $\lambda$  لاگرانژین  $(u, p, \lambda) \in (L^2(\Gamma; H^1(\mathbb{R}^d)))^3$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{L}(D, u, p, \lambda) = \int_{\Gamma} \int_D j(u) dx dy + \int_{\Gamma} \int_D \nabla p \cdot \nabla u + b p u - p f dx dy + \int_{\Gamma} \int_{\partial D} \lambda (u - g_D) ds dy.$$

در رابطه بالا متغیرها از یکدیگر مستقل هستند؛ زیرا متغیرهای  $(u, p, \lambda)$  به فضایی تعلق دارند که به دامنه  $D$  وابسته نیست. همچنین مشتق جزئی لاگرانژین  $\mathcal{L}$  نسبت به متغیرهای  $p$  و  $\lambda$  (با توجه به تعریف) به ترتیب به فرم تغییری معادله‌های حالت و شرط مرزی دیریکله می‌انجامد. برای به دست آوردن فرم تغییری معادله الحاقی،

مشتق جزئی لاگرانژین را نسبت به  $u$  و در جهت  $\delta u \in L^2(\Gamma; H^1(\mathbb{R}^d))$  محاسبه می‌کنیم:

$$\mathcal{L}_u(D, u, p, \lambda)(\delta u) = \int_{\Gamma} \int_D j'(u) \delta u dx dy + \int_{\Gamma} \int_D p \Delta \delta u + b p \delta u dx dy + \int_{\Gamma} \int_{\partial D} \lambda \delta u ds dy. \quad (27)$$

با استفاده از انتگرال گیری جزئی مجدداً خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u(D, u, p, \lambda)(\delta u) &= \int_{\Gamma} \int_D (j'(u) - \Delta p + b p) \delta u dx dy \\ &\quad + \int_{\Gamma} \int_{\partial D} (\nabla p \cdot n + \lambda) \delta u ds dy + \int_{\Gamma} \int_{\partial D} p \nabla \delta u \cdot n ds dy, \end{aligned}$$

حال شرط  $\mathcal{L}_u(D, u, p, \lambda)(\delta u) = 0$  برای همه  $\delta u \in L^2(\Gamma; H^1(\mathbb{R}^d))$  به سه رابطه خواهد انجامید. ابتدا  $\delta u$  را با محل فشرده در  $\Omega \times D_{ref}$  نظر می‌گیریم. در نتیجه خواهیم داشت:

$$-\Delta p + b p = -j'(u), \quad \Omega \times D_{ref},$$

اکنون با صفر گرفتن  $\delta u$  روی  $\Omega \times \partial D_{ref}$  و با مقدار دلخواه برای  $\nabla \delta u \cdot n$  در فضای  $L^2(\Omega; L^2(\partial D_{ref}))$  روی  $\Omega \times \partial D_{ref}$  خواهیم داشت:  $p = 0$ . سرانجام با دلخواه گرفتن  $\delta u$  در فضای  $L^2(\Omega; H^1(D_{ref}))$  روی  $\Omega \times \partial D_{ref}$  خواهیم داشت:  $\nabla p \cdot n + \lambda = 0$ ، به این ترتیب دوباره به رابطه الحاقی خواهیم رسید. اکنون برای محاسبه مشتق شکل باید مشتق جزئی  $\mathcal{L}$  را نسبت به  $D$  و در جهت  $\tau$  به دست آوریم. با در نظر گرفتن جواب‌های  $u, p$  و ضریب لاگرانژ  $\lambda$  خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}_D(D, u, p)(\tau) = \int_{\Gamma} \int_{\partial D_{ref}} \tau n (j(u) + \nabla p \cdot \nabla u + b p u - p f + \frac{\partial(\lambda(u - g_D))}{\partial n} + H \lambda(u - g_D)) ds dy.$$

با در نظر گرفتن شرایط مرزی  $u = g_D, p = 0$  و همچنین  $\lambda = -\nabla p \cdot n$  روی  $\Omega \times \partial D_{ref}$  خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}_D(D_{ref}, u, p)(\tau) = J'(D_{ref})(\tau) + \int_{\Gamma} \int_{D_{ref}} \mathcal{L}_u(D_{ref}, u(D_{ref}), p) u'(D_{ref}) \tau ds dy.$$

یادآوری می‌کنیم که برای به دست آوردن این رابطه، با توجه به استقلال متغیرهای  $p$  و ضریب لاگرانژ  $\lambda$  از دامنه  $D$  با استفاده از قضیه مشتق ترکیبی به دست آمد. اکنون با جایگذاری مقادیر  $p = p(D_{ref})$  و  $\lambda = \nabla p(D_{ref}) \cdot n$  که در آن جواب معادله الحاقی است، عبارت دوم حذف می‌شود و در نتیجه مشتق شکل موردنظر به دست می‌آید:

$$\mathcal{L}_D(D_{ref}, u, p)(\tau) = J'(D_{ref})(\tau). \quad (28)$$

### ۳-۵ الگوریتم بهینه‌سازی عددی

در این بخش، الگوریتم گرادیان را برای بهینه‌سازی شکل موردنظر، به کار می‌بریم. برای کمینه‌سازی عددی تابع هدف  $J(D) = \int_{\Gamma} \int_D j(u(D)) dx dy$ ، با قیود به دست آمده در سیستم بهینگی در نظر گرفته می‌شود. فرمول تحلیلی گرادیان تابع هدف نسبت به  $\tau$  که شکل موردنظر  $D = \tau(D_{ref}) = (I + \tau)(D_{ref})$  را پارامتری می‌کند به صورت زیر خواهد بود:

$$J'(D_{ref})(\tau) = \int_{\Gamma} \int_{\partial D_{ref}} \tau \cdot n \cdot j(D_{ref}) dx dy,$$

که در آن  $j(D_{ref})$  تابعی از متغیر حالت  $u$  و الحاقی  $p$  نیز است. در نتیجه می‌توانیم شکل جدید را با شروع از شکل اول  $D_{ref}$  به صورت  $D_s = (I + \tau_s)(D_{ref})$  که  $\tau_s = -s j(D_{ref}) \cdot n$  محاسبه کنیم که در آن  $s$  گام کاهش می‌باشد. برای  $s$  به اندازه کافی کوچک، می‌توان اطمینان داشت که  $J(D_s) \leq J(D_{ref})$ . توجه داریم که برای به دست آوردن شکل جدید  $D_s$  دو مساله وجود دارد: نخست آنکه بردار  $\tau_s \in T_{ad}$  باید در هر گام محاسبه شود در حالی که  $j(D_{ref}) \cdot n$  پیش‌تر روی مرز  $\partial D_{ref}$  تعریف شده است؛ بنابراین اثر موردنظر باید به درون  $D_{ref}$  گسترش یابد تا بتوانیم  $\tau_s$  را محاسبه کنیم. مساله دوم این است که با توجه به این که اغلب فرض می‌کنیم  $\tau \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  و این که تابع  $j(D_{ref})$  ممکن است به اندازه کافی منظم نباشد، باید پارامتر موردنظر را به اندازه کافی منظم کنیم [۱]. مطلب دیگری که برای پیاده‌سازی عددی باید به آن توجه داشت، اعمال قید محدودیت حجم در مسایل بهینه‌سازی شکل است که در رابطه (۲) با  $\int_D dx = V$  مشخص شده و در آن  $V$  حجم اولیه است. برای اعمال این دسته از قیود از ضریب لاگرانژ  $l$  استفاده می‌شود (با این ضریب می‌توان قید حجم را وارد تابع لاگرانژین کرد). با این توصیف و با در نظر گرفتن  $D := D_{ref}$  به عنوان شکل آغازین، قسمت اصلی الگوریتم در هر گام برابر خواهد بود با:

- محاسبه پارامتر طراحی

$$\tau_k = \begin{cases} s \cdot n_k \left( \frac{1}{\nu} (u - u_d)^2 + (\nabla u \cdot \nabla p + b u p - f p) - l_k \right) & \text{on } \mathcal{S}, \\ 0 & \text{on } \partial D \setminus \mathcal{S}, \end{cases} \quad (29)$$

- به هنگام سازی شکل:  $D_{k+1} = (I + \tau_k)(D_k)$

باید توجه داشت که مقدار پارامتر طراحی روی مرزهای ثابت برابر صفر است.

استراتژی که ما برای حل مساله کنترل بهینه روی مرز ثابت به کار برده ایم بهینه سازی-سپس-گسسته سازی نامیده می شود. حال سیستم بهینگی محاسبه شده است برای اعمال روش عددی، همان طور که در بخش ۴ توضیح داده شده است، از روش هم محلی تصادفی برای گسسته سازی استفاده می کنیم. در اینجا فرض می کنیم که  $y^j$  برای  $j=1,2,\dots,M$  نقاط هم محلی باشد،  $k \in \mathbb{N}$  را با  $k=0$  به عنوان گام آغازین، به عنوان شمارنده تکرارها در نظر می گیریم.  $\tau$  را متناظر با  $D$  نقطه شروع قرار می دهیم. اکنون الگوریتم بهینه سازی عددی به صورت زیر خلاصه می شود:

۱. حل معادلات حالت و الحاقی: برای هر نقطه هم محلی  $y^j$  سیستم معین متناظر معادله با مشتقات جزئی

تصادفی (۲۲) و (۲۳) (۲۲) و (۲۷) در حالت دیریکله را برای به دست آوردن  $(u_k^j, p_k^j, \lambda_k^j)$  حل کنید.

۲. جستجوی جهت: با استفاده از  $(u_k^j, p_k^j, \lambda_k^j)$  به دست آمده از گام (۱)، با استفاده از توسیع چندجمله ای

(۱۸) و به کار بردن قاعده انتگرال گیری، مقدار  $(\bar{u}_k, \bar{p}_k, \bar{\lambda}_k)$  را محاسبه کرده و با استفاده از آن و رابطه

(۲۹)، پارامتر طراحی (جابه جایی شبکه) را به دست می آوریم.

۳. به هنگام سازی: قرار می دهیم،  $D_{k+1} = (I + \tau_k)(D_k)$  و  $k := k + 1$ .

برای بیان بیش تر توضیحات زیر می تواند مفید واقع شود:

(الف) منظم سازی: باید توجه داشت که گرادیان تابع هدف از ضرب داخلی  $\langle J'(D_{ref}), \tau \rangle$  استخراج می کنیم

که در تعریف مشتق فرشت ظاهر می شود. ضرب داخلی دارای ساختار هیلبرت (برای مثال  $H^1(D)$ ) است.

بنابراین جهت کاهش  $d \in H^1(D)$  را می توان به طور یکتا از رابطه زیر به دست آورد:

$$\int_D \nabla d \nabla \tau + d \tau dx = \langle J'(D_{ref}), \tau \rangle, \quad (30)$$

که علاوه بر این که منظم بودن دلخواه گرادیان به دست می آید، رابطه (۳۰) را می توان به گسترش طبیعی جابه جایی شبکه به همه دامنه تعبیر کرد [۱].

(ب) محدودیت حجم: مقدار ضریب لاگرانژین در هر تکرار به هنگام سازی می شود. با در نظر گرفتن مشتق

شکل به صورت  $J'(D) + IV'(D) = 0$  لاگرانژین در هر گام با استفاده از رابطه زیر به هنگام می شود:

$$l_{k+1} = \frac{(l_k + l)}{2} + \varepsilon_l (V - V_0).$$

که در آن  $\varepsilon_l$  عدد مثبت به اندازه کافی کوچکی است. با توجه به این که پارامتر تغییر شبکه و حجم پارامترهای غیر تصادفی هستند، محاسبات مانند مساله های معین انجام می پذیرد.

(پ) محاسبه طول گام: محاسبه طول گام در این مسایل بسیار دشوار است و محاسبات را به اندازه قابل توجه

افزایش می دهد. با توجه به دشواری های قابل توجهی که برای استفاده از روش های کارایی مانند آرمیژو و ولف

وجود دارد در مقاله حاضر، طول گام را با محاسبه جهت های کاهش قبلی به دست آورده ایم. به این ترتیب که

ضرب داخلی  $\langle d_k, d_{k-1} \rangle$  معیاری برای کاهش یا افزایش طول گام در نظر گرفته می شود. همچنین

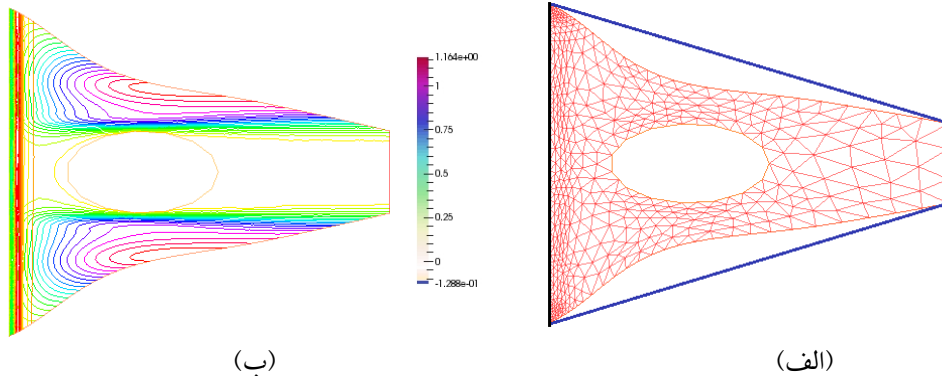
$\langle d_k, d_{k-1} \rangle$  می‌تواند معیاری را برای شرط توقف به دست دهد (در صورتی که جهت‌های کاهش قبلی به اندازه کافی به هم نزدیک شود، می‌توان استنباط کرد که به نقطه بهینه رسیده‌ایم).

## ۶ مثال عددی

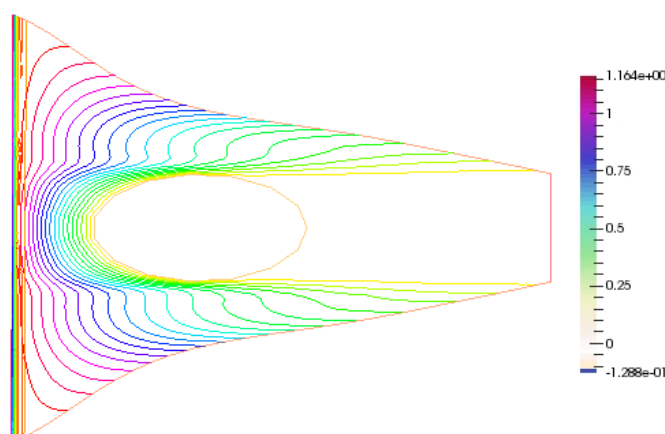
برای مطالعه مثال عددی، مساله آموزنده بهینه‌سازی شکل نازل را در نظر می‌گیریم. تابع هدف در رابطه (۱۹) برابر

$$J(D, u) = \frac{1}{\gamma} \int_{\Gamma} \int_{\mathcal{D}} (u - u_D)^2 dx dy + \frac{\beta}{\gamma} \int_{\Gamma} \int_{\partial \mathcal{D}_N} g_N(y; x) u ds dy,$$

است و معادله حالت (۲۰)، با پارامترهای تصادفی، رفتار جریان در نازل را مدل‌سازی می‌کند. نازل شامل یک ورودی، یک خروجی و دیواره است. در این مساله حالت مساله تابع جریان  $u$  است و دیواره (مرز آزاد  $\mathcal{S}$ ) پارامتر طراحی است. همچنین فرض کرده‌ایم که جریان غیر چرخشی و متقارن است. در مقاله حاضر مساله نازل همگرا در نظر گرفته شده و در آن به دنبال جریان یکنواخت  $u_D$  در سراسر نازل هستیم، در حالی که جریان خروجی نازل ناچیز باشد. شکل ایده‌آل نازل‌ها که در کاربردهای مهندسی استفاده می‌شود هموار است که البته در اینجا با انتخاب مرز لپیشیتس همواری مورد نظر به دست می‌آید. نازل اولیه در شکل ۱ نشان داده شده است. ورودی نازل با شرط مرزی دیریکله  $g_D = 2y_1 x_2 (1 - x_2)$  که یک میدان تصادفی است، مدل شده است. در اینجا  $y_1$  دارای توزیع گاوسی با میانگین  $\bar{y}_1 = 2$  و واریانس  $Var[y_1] = 0.02$  در بازه  $[0, 2]$  است. جریان خروجی با شرط نیومن  $\xi \times 10^{-4}$  مدل شده که یک متغیر تصادفی یکنواخت در بازه  $[-1, 1]$  با مقدار کوچک (اغتشاش) در نظر گرفته شده است.  $b = 10^{-4} \times y_2 (1 - x_1)$  پارامتر تصادفی است که با توسیع کارهونن-لویو (بخش ۴) تقریب شده است. تابع منبع  $f = 10^{-2} (1 - y_2^2) x_1$  که اثر دیواره نازل بر جریان را مدل کند، نیز میدان تصادفی در نظر گرفته شده که در آن دارای توزیع نرمال در بازه  $[-1, 1]$  با میانگین و واریانس  $0.2$  است تا مدل مناسبی از اثر دیواره بر جریان، به دست دهد. در این مثال  $\beta = 1$  در نظر گرفته شده است. شکل ۲، جواب بهینه به دست آمده را برای نازل (که همان شکل بهینه است) نشان می‌دهد، همچنین تابع تراز میانگین جریان نیز در آن نشان داده شده است. در شکل ۳ نازل بهینه به همراه میانگین متغیر الحاقی نشان داده شده است.



شکل ۱. (الف) شکل اولیه نازل (خط‌های پر) و شکل نهایی نازل شبکه‌بندی شده است، (ب) شکل نهایی نازل که تراز میانگین متغیر الحاقی را نشان می‌دهد (سمت چپ ورودی نازل را نشان می‌دهد و سمت راست خروجی نازل است).



شکل ۲. تراز میانگین حالت نهایی متناظر با شکل بهینه (سمت چپ ورودی نازل و سمت راست خروجی نازل است)

نتایج عددی به دست آمده نشان می‌دهد که برای رسیدن به جریان دلخواه ( $u_d$ ) در ناحیه اندازه‌گیری (که در اینجا همه دامنه نازل دوبعدی است) با جریان ورودی تصادفی و غیر چرخشی داده شده  $g_D$  درحالی که جریان خروجی باید برابر با  $g_N$  باشد باید شکل نازل (شکل ۱) تغییر آن باید به گونه‌ای باشد که انرژی کمینه شود (عبارت دوم در تابع هدف) و حالت به دست آمده تا آنجا که ممکن است به حالت دلخواه نزدیک شود. در این صورت همان‌طور که انتظار می‌رود شکل نازل جمع‌تر شده است. البته با توجه به اعمال قید حجم مجاز می‌توان دید که بررسی مساله دشوار است و تنها کم کردن حجم ما را به جواب بهینه نمی‌رساند. در اینجا ضریب عبارت دوم می‌تواند مانند پارامتر منظم ساز در نظر گرفته شود بسته به این که کمینه کردن تابع انرژی در دامنه چه اندازه حایز اهمیت باشد. این دسته از مسایل در مهندسی کاربرد فراوانی دارد که می‌توان به طراحی تونل باد با جریان یکنواخت در داخل تونل اشاره کرد (در این صورت ضریب انرژی را نادیده می‌گیریم) درحالی که جریان باد ورودی رفتار تصادفی نسبت به مکان دارد.

یکی از ویژگی‌های اساسی روش‌های غیر نفوذی، در کنار قابلیت بهبود با انتخاب هوشمندانه نقاط (مانند نقاط هم‌محلی در روش هم‌محلی)، قابلیت ترکیب آن‌ها با روش‌های موجود برای حل دستگاه‌های معین است. این ویژگی به ما اجازه داده است تا از ابزارها و الگوریتم‌های کارای در دسترس برای به دست آوردن نتایج عددی استفاده کنیم. برای مقاله حاضر، کدها در سیستم عامل لینوکس پیاده‌سازی شده و از بسته نرم‌افزاری FEniCS [۳۴] منطبق با Python استفاده شده است. میانبر اصلی FEniCS بسته محاسباتی DOLFIN [۳۵] است که ابزارهای مناسبی را برای حل معادلات با مشتقات جزئی در اختیار قرار می‌دهد. برای حل مساله جابه‌جایی شبکه از افزونه FEMorph که توسط دکتر اشمیت [۳۶] توسعه داده شده، استفاده شده است. شکل‌ها با استفاده از نرم‌افزار Paraview [۳۷] ایجاد شده است.

## ۷ نتیجه گیری

در این مقاله مساله بهینه سازی شکل هندسی با ورودی های تصادفی (که آن را بهینه سازی هندسی تصادفی نامیدیم) ارایه شده است. فرمول بندی ما بر اساس کارهای مورات و سیمون [۱۶] برای پارامتری کردن مساله پی ریزی شده و با استفاده از ابزارهای کنترل بهینه تصادفی که در سال های اخیر توسعه داده شده، به بررسی و حل آن ها پرداختیم. برای گسسته سازی تصادفی از روش های غیر نفوذی مانند روش هم محلی تصادفی با استفاده از روش انتگرال گیری برای انتخاب شبکه، استفاده شده است و میدان های تصادفی را با استفاده از توسیع کارهونن-لویو تقریب زدیم. در ادامه روش ارایه شده را برای حل یک مساله آموزنده به کار بردیم تا کاربری روش نشان داده شود. باید توجه داشت که این روش برای حل این دسته از مسایل، در آغاز راه است و بنابراین مساله مشابهی برای مقایسه، در اختیار نبوده است؛ این نوع فرمول بندی برای استفاده در بهینه سازی، به خوبی انجام شده است اما هنوز برای بررسی کارایی روش های اعمال شده و همچنین بهبود کارایی آن ها باید مطالعات بیش تری صورت پذیرد.

## منابع

[۲۲] مرادی، م.، صلاحی، م.، بردسیری، م.، جمالیان، ع.، (۱۳۹۳). یک مدل جدید استوار در طراحی شبکه زنجیره تأمین تحت عدم قطعیت. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۴۱(۲)، ۲۶-۹.

- [1] Allaire, G., (2006). *Conception Optimale De Structures, Mathematiques And Applications*. Heidelberg: Springer.
- [2] Delfour, M.C., Zolésio, J.P., (2011). *Shapes and Geometries: Metrics, Analysis, Differential Calculus, And Optimization*, 22, Siam.
- [3] Allaire, G., (2012). *Shape Optimization By The Homogenization Method: Vol. 146*, Springer Science & Business Media.
- [4] Lions, J.L., Lelong, P., (1968). *Contrôle Optimal De Systemes Gouvernés Par Des Équations Aux Dérivées Partielles*, 7, Paris: Dunod.
- [5] Pironneau, O., (1973). On Optimum Profiles In Stokes Flow. *Journal Of Fluid Mechanics*, 59(01): 117-128.
- [6] Sokolowski, J., Zolesio, J.P., (1992). *Introduction To Shape Optimization*, pp. 5-12. Berlin: Springer.
- [7] Cea, J., (1986). *Conception Optimale Ou Identification De Formes. Calcul Rapide De La Dérivée Directionnelle De La Fonction Coût, RAIRO-Modélisation Mathématique Et Analyse Numérique*, 20(3): 371-402.
- [8] Marrocco, A., Pironneau, O., (1978). Optimum Design With Lagrangian Finite Elements: Design Of An Electromagnet. *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, 15(3): 277-308.
- [9] Mohammadi, B., (2002). *Global Optimization By The Solution Of Over-Determined Boundary Value Problems*. Paris: Comptes Rendus De l'Académie Des Sciences.
- [10] Delfour, M., Zolezio, J.P., (2001). *Surface Derivatives*. SIAM Series.
- [11] Guillaume, P., Masmoudi, M., (1994). Computation Of High Order Derivatives In Optimal Shape Design. *Numerische Mathematik*, 67(2): 231-250.
- [12] Hinze, M., Pinnau, R., Ulbrich, M., Ulbrich, S., (2009). *Optimization With PDE Constraints*, Vol. 23. *Mathematical Modelling: Theory And Applications*.
- [13] Sethian, J. A., (2003). Level Set Methods And Fast Marching Methods. *Journal Of Computing And Information Technology*, 11(1): 1-2.
- [14] Allaire, G., Jouve, F., Toader, A.M., (2002). A Level-Set Method For Shape Optimization. *Comptes Rendus Mathématique*, 334(12): 1125-1130.
- [15] Murat, F., Simon, J., (1975). Etude Des Problèmes d'Optimum Design, Conf. IFIP, Lectures Notes In Computer Sciences, 41: 54-62.

- [16] Murat, F., Simon, J., (1974). Quelques Résultats Sur Le Contrôle Par Un Domaine Géométrique, 4, Laboratoire d'Analyse Numérique.
- [17] Micheletti, A. M., (1972). Metrica Per Famiglie Di Domini Limitati E Proprieta Generiche Degli Autovalori. Annali Della Scuola Normale Superiore Di Pisa-Classe Di Scienze, 26(3): 683-694.
- [18] Zolesio, J. P., (1979). Identification De Domaines Par Deformation. Dissertation. Universite De Nice.
- [19] Kharmanda, G., Olhoff, N., Mohamed, A., Lemaire, M., (2004). Reliability-Based Topology Optimization. Structural And Multidisciplinary Optimization, 26(5): 295-307.
- [20] Ben-Tal, A., Nemirovski, A., (2002). Robust Optimization Methodology And Applications. Mathematical Programming, 92(3): 453-480.
- [21] De Gournay, F., Allaire, G., Jouve, F., (2008). Shape And Topology Optimization Of The Robust Compliance Via The Level Set Method. ESAIM: Control, Optimisation And Calculus Of Variations, 14(1): 43-70.
- [23] Conti, S., Held, H., Pach, M., Rumpf, M., Schultz, R., (2009). Shape Optimization Under Uncertainty-A Stochastic Programming Perspective. SIAM Journal On Optimization, 19(4): 1610-1632.
- [24] Chen, S., Chen, W., Lee, S., (2010). Level Set Based Robust Shape And Topology Optimization Under Random Field Uncertainties. Structural And Multidisciplinary Optimization, 41(4): 507-524.
- [25] Kouri, D. P., (2012). An Approach For The Adaptive Solution Of Optimization Problems Governed By Partial Differential Equations With Uncertain Coefficients. Dissertation. Rice University.
- [26] Rosseel, E., Wells, G.N. (2012). Optimal Control With Stochastic PDE Constraints And Uncertain Controls. Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering, 213: 152-167.
- [27] Keyanpou, M., Nehrani A.M., (2014). Optimal Thickness Of A Cylindrical Shell Subject To Stochastic Forces. Journal of Optimization Theory and Applications. In Publication. Doi.Org/10.1007/S10957-014-0663-Y
- [28] Xiu, D., (2010). Numerical Methods For Stochastic Computations: A Spectral Method Approach. Princeton University Press.
- [29] Kunoth, A., Schwab, C., (2013). Analytic Regularity And GPC Approximation For Control Problems Constrained By Linear Parametric Elliptic And Parabolic PDEs. SIAM Journal On Control And Optimization, 51(3): 2442-2471.
- [30] Bello, J. A., Fernández-Cara, E., Lemoine, J., Simon, J., (1997). The Differentiability Of The Drag With Respect To The Variations Of A Lipschitz Domain In A Navier-Stokes Flow. SIAM Journal On Control And Optimization, 35(2): 626-640.
- [31] Brandenburg, C., (2011). Adjoint-Based Adaptive Multilevel Shape Optimization Based On Goal-Oriented Error Estimators For The Instationary Navier-Stokes Equations. Verlag Dr. Hut.
- [32] Oksendal, B., (2003). Stochastic Differential Equations. Berlin: Springer.
- [33] Loeve, M., (1946). Fonctions Aleatoires De Second Ordre. Revue Scientifique. 84:195-206.
- [34] FEniCS project website: <http://fenicsproject.org/>
- [35] DOLFIN is the C++/Python interface of FEniCS:  
<http://bitbucket.org/fenics-project/dolfin>
- [36] FEMorph addon for Python: <http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~schmidt/femorph.php>
- [37] ParaView official site: <http://www.paraview.org/>