مجله تحقیق در عملیات و کاربردهای آن ، سال هشتم، شماره ۳ (پیاپی ۳۰)، پائیز ۹۰، ص ص ۶۹-۵۳
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

روش های ناپارامتری مدل بندی خروجی های نامطلوب در DEA: رویکرد استفاده از اصل دسترسی پذیری ضعیف

رضا کاظمی متین*
گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد کرج، کرج، ایران

رسید مقاله: پنجم اسفند ماه ۱۳۸۹
پذیرش مقاله: چهارم مرداد ماه ۱۳۹۰

چکیده

اغلب فعالیت های تولیدی، علاوه بر خروجی های مطلوب، خروجی های نامطلوبی مانند مواد مضر معلق در هوا، ضایعات و اثرات نامطلوب دیگری مانند آلودگی های صوتی نیز تولید می‌کنند. از این رو مدل بندی این خروجی ها همواره در تئوری های اقتصاد و تولید مورد توجه بوده است. این مقاله به معرفی روش های ناپارامتری موجود در مبحث مدل بندی و کنترل خروجی های نامطلوب در تئوری تولید از دیدگاه اصول موضوعه ای می پردازد. تاکید عمده بر مقایسه سلسله کارهای اخیر مبتنی بر اصل موضوع دسترسی پذیری ضعیف در ادبیات تئوری تولید است.

کلمات کلیدی: تئوری تولید، روش های ناپارامتری ، تحلیل پوششی داده ها، دسترسی پذیری ضعیف.

---

۱ مقدمه

در روش های کلاسیک تتوری تولید در بیان عام و تحلیل پوششی داده ها در بیان خاص، در سطح تکنولوژی هدف عبارتست از مینیموم کردن ورودی ها و ماکزیموم کردن خروجی ها. در حالی که واحد ها و سازمان هایی نظیر کارخانه ها، بیمارستان ها و. . . در فرآیند فعالیت و تولید ممکن است علاوه بر تولید خروجی های مطلوب مورد نیاز، خروجی های نامطلوبی نیز مانند ذرات معلق در هوا، ضایعات و آلودگی و . . . تولید کنند. حضور خروجی هایی از این قبیل، تحت عنوان عوامل محیطی، نقش مهمی در برآورد میزان کارایی این واحد ها دارد. در ارزیابی چنین واحد هایی، هدف استفاده از روشی است که علاوه بر سازگاری با مفاهیم تئوری تولید، به کمک آن قادر به کاهش خروجی های نامطلوب و افزایش خروجی های مطلوب باشیم.

---

* عهده دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: *rkmatin@kiau.ac.ir*

از جمله کارهای انجام شده در این زمینه می توان به مقاله های فار و همکاران[۱]، بال و همکاران[۲]، هایلو و ویمن[۴-۳]، سیفورد و ژو[۵]، فار و گراسکوف[۷-۶]، جهانشاهلو و همکاران [۸]، کاسمانن [۹]، فار و گراسکوف [۷] و کاسمانن و پودینوسکی[۱۰] اشاره نمود.

در این مقاله، ابتدا به معرفی روش هایلو و ویمن[۳] در برخورد با این خروجی ها پرداخته می شود و سپس نقد ارایه شده بر رویکرد هایلو و ویمن توسط فار و گراسکوف بررسی شده و روش دیگری برای کنترل خروجی های نامطلوب در یک تکنولوژی مفروض ارایه می شود. در ادامه و بر اساس نتایج مقالات متعددی از کاسمانن و پودینوسکی و نیز فار و گراسکوف به ساختار مجموعه امکان تولید سازگار با مفهوم دسترسی پذیری ضعیف شفرد خواهیم رسید[۱۰].

۲ روش های ناپارامتری اولیه مدل بندی خروجی های نامطلوب

۲-۱ روش هایلو- ویمن

هایلو و ویمن [۳] برای زمانی که تکنولوژی شامل خروجی های نامطلوب باشد، روشی را معرفی کردند که اساس آن اصلاح روش ناپارامتری بنکر و ماندیرتا بود[۱۱].

فرض کنید در یک فعالیت تولیدی، N ورودی در تولید M خروجی مطلوب و J خروجی نامطلوب به کار برده شود. $\mathbf{x}\in\Re_+^N$ بردار ورودی مصرف شده و $\mathbf{v}\in\Re_+^M$، $\mathbf{w}\in\Re_+^J$ به ترتیب نشان دهنده‌ی بردارهای خروجی های مطلوب و خروجی های نامطلوب باشند، همچنین $\mathbf{p}\in\Re_+^N$، $\mathbf{r}\in\Re_+^M$ و نیز $\mathbf{q}\in\Re_-^J$ به ترتیب نشان دهنده قیمت ورودی ها، قیمت خروجی های مطلوب و قیمت خروجی های نامطلوب باشند. و مجموعه مشاهدات با S نشان داده شود.

مجموعه امکان تولید هایلو و ویمن ، $T_{HV}\subseteq\Re_+^M\times\Re_+^J\times\Re_+^N$، با توجه به اصول زیر بنا نهاده می شود:

A1 برای هر $s\in S$ داریم: $(\mathbf{v}^s,\mathbf{w}^s,\mathbf{x}^s)\in T_{HV}$.

A2 T_{HV} زیر مجموعه ی مشاهدات E را معنی دار می کند هر گاه:

$$\forall(\mathbf{v}^s,\mathbf{w}^s,\mathbf{x}^s)\in T_{HV}, t\in E:\mathbf{r}^t\mathbf{v}^t+\mathbf{q}^t\mathbf{w}^t-\mathbf{p}^t\mathbf{x}^t\geq\mathbf{r}^t v^s+\mathbf{q}^t w^s-\mathbf{p}^t x^s$$

A3 شرط امکان پذیری اصلاح شده:

$$\forall(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{x}),\forall\mathbf{x}',\forall\mathbf{w}',\forall\mathbf{v}':\left((\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{x})\in T_{HV},\mathbf{x}'\geq\mathbf{x},\mathbf{w}'\geq\mathbf{w},\mathbf{v}'\leq\mathbf{v}\right)\Rightarrow(\mathbf{v}',\mathbf{w}',\mathbf{x}')\in T_{HV}$$

A4 T_{HV} بسته و محدب است.

شرط اول، همان شرط شمول مشاهدات است. شرط دوم، مفهومی است که بنکر و ماندیرتا از معنی دار بودن ضعیف معرفی کردند و این شرط نیازمند آن است که مجموعه‌ی امکان تولید، زیر مجموعه‌ی E از مشاهدات گذرنده از آزمون WAPM را معنی دار کند[۱۲].

برای توضیح آزمون WAPM، فرض کنید بردارهای خروجی و ورودی مشاهده شده برای واحد $i \in S$، $(\mathbf{y}^i,-\mathbf{x}^i)$ و بردارهای قیمت متناظر $(\mathbf{r}^i,\mathbf{p}^i)$ باشد. واریان[۱۲]، مفهوم معنی دار کردن را به صورت زیر معرفی کرد:

تعریف ۱. مجموعه امکان تولید T_{HV}، به طور قوی مجموعه مشاهدات S را معنی دار می کند، اگر برای هر $i \in S$، $(\mathbf{y}^i,-\mathbf{x}^i) \in T_{HV}$ و هر $(\mathbf{y},-\mathbf{x}) \in T_{HV}$ داشته باشیم: $\mathbf{r}^i\mathbf{y}^i - \mathbf{p}^i\mathbf{x}^i \geq \mathbf{r}^i\mathbf{y} - \mathbf{p}^i\mathbf{x}$.

شرط $(A3)$ نیز شرط امکان پذیری اصلاح شده‌ی هایلو و ویمن است.

در DEA کلاسیک فرض می شود که خروجی های مطلوب و ورودی ها امکان پذیری آزاد دارند. هایلو و ویمن در برخورد با خروجی های نامطلوب، آن ها را به عنوان ورودی در نظر گرفته و شرط امکان پذیری آزاد را بر آن ها تحمیل کردند و این دلیل را مطرح نمودند که خروجی های نامطلوب و ورودی ها هر دو برای یک واحد تولیدی هزینه در بر دارند. شرط چهارم نیز از شرایط اساسی است که معمولاً بر مجموعه امکان تولید تحمیل می شود.

با این مفروضات نتایج حاصل به صورت قضیه‌ی زیر بیان می شود :

قضیه ۱. برای خانواده ای از مجموعه های امکان تولید T_{HV}، که در شرایط فوق صدق می کنند، داریم: $EYI \subseteq T_{HV} \subseteq EYO$ که در آن،

$$EYI = \left\{ (\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{x}) : \mathbf{v} \leq \sum_{k=1}^{K} \lambda^k \mathbf{v}^k , \mathbf{w} \geq \sum_{k=1}^{K} \lambda^k \mathbf{w}^k , \mathbf{x} \geq \sum_{k=1}^{K} \lambda^k \mathbf{x}^k , \sum_{k=1}^{K} \lambda^k = 1, \mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{x} \geq 0 \right\} \quad (۱)$$

$$EYO = \left\{ (\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{x}) : r^t\mathbf{v} + q^t\mathbf{w} - p^t\mathbf{x} \leq \mathbf{r}^t\mathbf{v}^t + \mathbf{q}^t\mathbf{w}^t - \mathbf{p}^t\mathbf{x}^t ; t \in E, \mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{x} \geq 0 \right\}. \quad (۲)$$

اثبات. رجوع شود به مقاله بنکر و ماندیرتا [۱۱].

در این نتیجه، کران درونی (EYI) همان مرز DEA است و کران بیرونی (EYO) شامل DMU های است که در شرط WAPM صدق می کنند.

هایلو و ویمن ادعا کردند که اگر قید خروجی های نامطلوب با فرم تساوی $\mathbf{w} = \sum_{k=1}^{K} \lambda^k w^k$ جایگزین شود مدل DEA حاصل دسترسی پذیری ضعیف را نشان می دهد[۷].

آن ها دلیل استفاده از فرمول بندی EYI بجای روش امکان پذیری ضعیف را این چنین بیان کردند:

- در روش امکان پذیری ضعیف، به کار بردن قید تساوی برای خروجی های نامطلوب مجموعه‌ی امکان تولید را کوچک کرده و تعداد واحد های مرجع را کاهش می دهد، بنابراین اعداد کارایی را بزرگ تر می کند.
- روش امکان پذیری ضعیف، تأثیر خروجی های نامطلوب را بر کارایی مشخص نمی کند. در حالی که یک مدل مناسب مدلی است که مشاهده‌ی مورد ارزیابی را که خروجی های نامطلوب بیشتری نسبت به

مشاهده‌ی مرجع داشته باشد، حتی وقتی آن مشاهده بر حسب خروجی های مطلوب و ورودی ها به خوبی مشاهده مرجع باشد، ناکارا معرفی کند.

- قیمت های سایه، اعم از مثبت و منفی برای مؤلفه های نامطلوب در فرمول بندی امکان پذیری ضعیف پذیرفتنی است واین مسأله تأثیر خروجی های نامطلوب بر کارایی را نامشخص می کند. در صورتی که در مدل بندی قبلی برای این مؤلفه ها تنها مقادیر نامثبت قیمت های سایه معنی دار و قابل قبول اند.

هایلو و ویمن برای اندازه گیری کران های مربوط به کارایی تکنیکی بردار مشاهدات $(\mathbf{v}^o, \mathbf{w}^o, \mathbf{x}^o)$، مدل های با ماهیت ورودی زیر را به کار بردند.

$$
\begin{aligned}
TE_o^{EYI} = Min \quad & \theta \\
s.t. \quad & \sum_{k=1}^{K} \lambda^k x_n^k \le \theta x_n^o, \; n = 1, \dots, N, \\
& \sum_{k=1}^{K} \lambda^k v_m^k \ge v_m^o, \; m = 1, \dots, M, \\
& \sum_{k=1}^{K} \lambda^k w_j^k \le w_j^o, \; j = 1, \dots, J, \\
& \sum_{k=1}^{K} \lambda^k = 1, \; \lambda^k \ge 0, \; k = 1, \dots, K.
\end{aligned}
\tag{۳}
$$

$$
\begin{aligned}
& TE_o^{EYO} = Min \;\; \lambda \\
& s.t \quad \mathbf{r}^t \mathbf{v}^s + \mathbf{q}^t \mathbf{w}^s - \mathbf{p}^t (\lambda \mathbf{x}^s) \le \mathbf{r}^t \mathbf{v}^t + \mathbf{q}^t \mathbf{w}^t - \mathbf{p}^t \mathbf{x}^t, \forall t \in E
\end{aligned}
\tag{۴}
$$

که $E \subseteq S$ زیرمجموعه ای از مشاهدات است که در آزمون WAPM صدق می کنند.

این تکنیک که توسط هایلو و ویمن، در مقاله ای با نام " تحلیل بهره وری ناپارامتری با خروجی های نامطلوب: کاربردی در صنعت کاغذ و خمیر کاغذ کانادا " (۲۰۰۱) در AJEA ارایه شد، توسط مقاله‌ی فار و گراسکوف در همان نشریه مورد نقد و بررسی قرار گرفت که مباحث علمی پیاپی آن ساختار بخش های بعدی این مقاله را تشکیل می دهند[۶].

۲-۲ روش فار و گراسکوف در مدل بندی فاکتورهای نامطلوب

فار و گراسکوف در مقاله ای که در نشریه‌ی AJAE منتشر شد، نشان دادند که شرط یکنواختی اصلاح شده‌ی هایلو و ویمن ($A3$)، متناقض با قوانین فیزیکی و اصول استاندارد تئوری تولید است و بیشترین ایراد آن ها از تکنولوژی امکان پذیری ضعیف، بر اساس درک نادرست است. این دو نویسنده مدل بندی دیگری از امکان ضعیف ارایه داده و این دو روش را مقایسه کردند[۶].

طبق نماد گذاری هایلو و ویمن[۳]، مجموعه‌ی امکان تولید حاصل از تکنولوژی مفروض شامل همه‌ی $(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x})$ های شدنی با

$P(\mathbf{x}) = \{(\mathbf{v},\mathbf{w});(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{x}) \in Y\}$ یا مجموعه‌ی خروجی $T = \{(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{x});$ $(\mathbf{v},\mathbf{w})$ را تولید کند $\mathbf{x}\}$ میتواند
نشان داده می شود. برای اینکه نشان دهیم مجموعه‌ی امکان حاصل از تکنولوژی هایلو و ویمن متناقض با قوانین فیزیکی و اصول استاندارد تئوری تولید است، فرض کنید $\mathbf{x} = \mathbf{x}', \mathbf{w}' \geq \mathbf{w}, \mathbf{v} = \mathbf{v}'$، در این صورت، شرط امکان پذیری اصلاح شده‌ی هایلو و ویمن $(A3)$نتیجه می دهد: $(\mathbf{v},\mathbf{w}') \in P(\mathbf{x})$. یعنی، هر $\mathbf{w}' \geq \mathbf{w}$ با $(\mathbf{v},\mathbf{x})$ مفروض، شدنی است. به عبارت دیگر با به کار بردن مقدار ثابت انرژی، نیروی انسانی، سرمایه و مواد اولیه می توان مقدار نامحدودی از خروجی های نامطلوب مانند جامدات معلق و غیره تولید کرد. که البته، از نظر فیزیکی غیر ممکن است. شرط امکان پذیری به فرم $(A3)$، همچنین اصول پایه ای تولید[۱۳]، با این مضمون که " برای هر $\mathbf{x} \in \Re_+^N$ ، $P(\mathbf{x})$ کراندار است. " را نیز نقض می کند.

فار و گراسکوف، تعریف دسترسی پذیری ضعیف بر اساس دیدگاه شفرد[۱۴] را در این مقوله به صورت زیر ارایه کردند.

تعریف ۲. (دسترسی پذیری ضعیف) خروجی ها دسترسی پذیری ضعیف دارند، اگر کاهش یکنواخت خروجی های شدنی کماکان شدنی باشد. یعنی: اگر $(\mathbf{v},\mathbf{w}) \in P(\mathbf{x})$ و $0 \leq \theta \leq 1$ آن گاه $(\theta\mathbf{v},\theta\mathbf{w}) \in P(\mathbf{x})$.

برای مثال، اگر با سوزاندن زغال سنگ، الکتریسیته (خروجی مطلوب) و دی اکسید سولفور (خروجی نامطلوب) تولید شود، آن گاه تعریف بالا نتیجه می دهد که با ثابت نگه داشتن ورودی، برای ٪ ۱۰ کاهش در انتشار دی اکسید سولفور می بایست ٪۱۰ کاهش در الکتریسیته تولید شده داشته باشیم.

۲-۲- ۱ معرفی مدل بندی فار و گراسکوف و مقایسه ی آن با مدل بندی هایلو ویمن

مجموعه‌ی خروجی مدل ارایه شده توسط هایلو و ویمن که خروجی های نامطلوب را به عنوان ورودی در نظر گرفته و شرط دسترسی پذیری آزاد را طبق $(A3)$اعمال کردند، به صورت زیر نوشته می شود:

$$P(\mathbf{x}) = \Big\{ (\mathbf{v},\mathbf{w}): \quad \begin{aligned} &\sum_{k=1}^{K} \lambda^k x_n^k \leq x_n, \quad n = 1,\ldots,N, \\ &\sum_{k=1}^{K} \lambda^k v_m^k \geq v_m, \quad m = 1,\ldots,M, \\ &\sum_{k=1}^{K} \lambda^k w_j^k \leq w_j, \quad j = 1,\ldots,J, \\ &\sum_{k=1}^{K} \lambda^k = 1, \lambda^k \geq 0, k = 1,\ldots,K \Big\}. \end{aligned} \tag{۵}$$

توجه کنید که نوع قیود مربوط به خروجی های بد و ورودی ها یکسانند. در مقابل فار و گراسکوف مجموعه‌ی امکان تولید را طبق اصول زیر ساختند:

B1 شمول مشاهدات.

B2 دسترسی پذیری آزاد برای ورودی ها و خروجی های مطلوب:

$$\forall (\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{x}), \forall\, \mathbf{v}', \forall\, \mathbf{x}' : \big((\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{x}) \in T, 0 \le \mathbf{v}' \le \mathbf{v}, \mathbf{x}' \ge \mathbf{x} \Rightarrow (\mathbf{v}',\mathbf{w},\mathbf{x}') \in T \big)$$

B3 دسترسی پذیری ضعیف برای خروجی های مطلوب و نامطلوب (تعریف ۲-۲)

$$\forall (\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{x}), \forall\, \theta : \big((\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{x}) \in T, 0 < \theta \le 1 \Rightarrow (\theta\mathbf{v},\theta\mathbf{w},\mathbf{x}) \in T \big)$$

B4 تحدب.

طبق این اصول، فار و گراسکوف مجموعه‌ی خروجی تکنولوژی را به صورت زیر بیان نمودند:

$$\begin{aligned} P^{W}(\mathbf{x}) = \Big\{ \quad (\mathbf{v},\mathbf{w}) : \quad & \sum_{k=1}^{K} \lambda^{k} x_{n}^{k} \le x_{n}, && n = 1,\ldots,N, \\ & \theta \sum_{k=1}^{K} \lambda^{k} v_{m}^{k} \ge v_{m}, && m = 1,\ldots,M, \\ & \theta \sum_{k=1}^{K} \lambda^{k} w_{j}^{k} = w_{j}, && j = 1,\ldots,J, \\ & \sum_{k=1}^{K} \lambda^{k} = 1, \ \lambda^{k} \ge 0 && k = 1,\ldots,K, \\ & 0 \le \theta \le 1 \quad \Big\}. \end{aligned} \tag{۶}$$

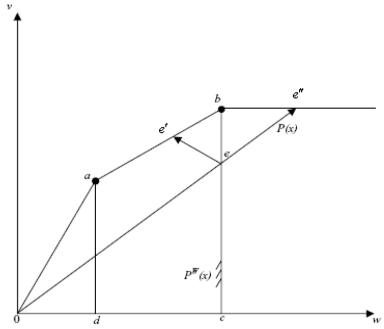
پارامتر θ متناظر با تعریف ۲ اجازه‌ی انقباض یکنواخت خروجی های خوب و بد را می دهد.

به بیان فار و گراسکوف، $P^{W}(\mathbf{x})$ اگر چه کوچکتر از $P(\mathbf{x})$است، اما زیر مجموعه‌ی اکید آن نیست. بنابراین کوچکتر شدن مجموعه امکان تولید که هایلو ویمن به عنوان ایراد امکان پذیری ضعیف مطرح کردند، لزوماً بزرگتر شدن اعداد کارایی را نتیجه نخواهد داد و بستگی به چگونگی اندازه گیری کارایی دارد. ایراد دوم هایلو و ویمن از مدل امکان پذیری ضعیف این بود که " روش امکان پذیری ضعیف، تأثیر خروجی های نامطلوب را بر کارایی مشخص نمی کند "، این نه فقط به فرمول بندی تکنولوژی مرجع، بلکه به چگونگی اندازه گیری کارایی بستگی دارد. همچنین فار و گراسکوف ترجیح دادند تا برای اندازه گیری کارایی از تابع فاصله جهتی خروجی استفاده کنند که به طور همزمان، افزایش خروجی های مطلوب و کاهش خروجی های نامطلوب را نتیجه می دهد.

با توجه به مدل بندی ماکزیموم فوق، سطح خروجی های نامطلوب با تأثیر منفی روی کارایی منعکس می شود. هایلو و ویمن، به جای ماکزیموم کردن خروجی های مطلوب و می نیموم کردن خروجی های نامطلوب، ورودی ها را مینیموم کردند و برای DMU_o، مسأله LP کران درونی را حل کردند که در ادبیات DEA تحت بازده به مقیاس ثابت (CRS)، از نظر مقدار معکوس جواب مسأله زیر است:

$$
\begin{aligned}
& Max \quad \delta \\
& s.t \quad \sum_{k=1}^{K} \lambda^k x_n^k \le x_n^o, \qquad n = 1,\ldots,N, \\
& \qquad \sum_{k=1}^{K} \lambda^k v_m^k \ge \delta v_m^o, \qquad m = 1,\ldots,M, \\
& \qquad \sum_{k=1}^{K} \lambda^k w_j^k \le \delta w_j^o, \qquad j = 1,\ldots,J, \\
& \qquad \lambda^k \ge 0, \qquad k = 1,\ldots,K.
\end{aligned} \tag{۷}
$$

اگرچه ، این رابطه با فرض بازده به مقیاس متغیر (VRS) درست نیست ولی دارای تفسیری مشابه است.
تفاوت این دو روش، در شکل ۱ شرح داده شده است. در این شکل، مشاهده‌ی e به عنوان واحد ناکارا معرفی شده است. با به کاربردن تابع فاصله جهت دار و مجموعه‌ی امکان تولید $P^W(\mathbf{x})$، مشاهده‌ی e به e' (افزایش خروجی های مطلوب و کاهش خروجی های نامطلوب) تصویر می شود. با به کار بردن مدل هایلو و ویمن، بر حسب مرز $P(\mathbf{x})$ و اینکه خروجی های خوب و بد به طور متناسب افزایش یابند، مشاهده‌ی e به e'' تصویر می شود.



شکل ۱. مقایسه‌ی کارایی ها در دو روش

به بیان فارو گراسکوف ایراد سوم هایلو ویمن نیز به انتخاب جهتی که مشاهده‌ی در حال ارزیابی به مرز مجموعه امکان تولید تصویر می شود بستگی دارد. همانطور که در شکل ۱ دیده می شود، با به کار بردن تابع فاصله مناسب، e به e' تصویر می شود که نتیجه می دهد خروجی های اول نامطلوبند.
این بحث توسط مقاله های دیگری از کاسمانن و پودینوسکی و نیز فار و گراسکوف ادامه پیدا می کند. در این مقاله ها رویکردی اصول موضوعه ای به بحث دسترسی پذیری ضعیف دارند که در بخش بعدی به آن می پردازیم.

۳ رویکرد اصول موضوعه ای در ارزیابی عملکرد واحد های تصمیم گیری با داده های نامطلوب

در مدل بندی ارایه شده توسط فار و گراسکوف (۶) برای استفاده از اصل امکان پذیری ضعیف در کنترل خروجی های نامطلوب، تنها یک فاکتور انقباض یکنواخت برای همه‌ی DMUها به کار برده می شود و مجموعه‌ی امکان تولید بر حسب همین یک فاکتور انقباض تولید می شود. در این بخش، رویکردی متمایزی در به کارگیری اصل امکان پذیری ضعیف بیان می شود و نشان داده می شود با این رویکرد مجموعه ای سازگار با اصول موضوعه استخراج می شود.

۳-۱ روش کاسمانن در مدل بندی مجموعه امکان تولید با دسترسی پذیری ضعیف شفرد

در رویکردی که کاسمانن [۹] از تکنولوژی امکان پذیری ضعیف ارایه کرد، به جای به کار بردن یک فاکتور انقباض یکنواخت برای امکان پذیری ضعیف، از فاکتور های کاهش غیر یکنواخت در مدل استفاده می نماید.
اصول موضوعه ای که کاسمانن برای مدل بندی امکان پذیری ضعیف به کار برد همان اصول موضوعه‌ی فار وگراسکوف (B1) تا (B4) بود، با این تفاوت که در اصل امکان پذیری ضعیف، فاکتورهای انقباض غیر یکنواختی را در مؤلفه های خروجی مطلوب و خروجی نامطلوب هر یک از واحدها به کار می برد.
بنابراین با این فرض که θ^k فاکتور انقباضی DMU_k باشد، مجموعه‌ی خروجی معرفی شده توسط کاسمانن به صورت زیر نوشته می شود:

$$\hat{P}(\mathbf{x}) = \left\{ (\mathbf{v},\mathbf{w}) : \begin{array}{ll} \sum_{k=1}^{K} \lambda^k x_n^k \le x_n, & n=1,\dots,N \\ \sum_{k=1}^{K} \theta^k \lambda^k v_m^k \ge v_m, & m=1,\dots,M \\ \sum_{k=1}^{K} \theta^k \lambda^k w_j^k = w_j, & j=1,\dots,J \\ \sum_{k=1}^{K} \lambda^k = 1 & \\ \lambda^k \ge 0, 0 \le \theta^k \le 1, & k=1,\dots,K \end{array} \right\}. \qquad (۸)$$

۳-۲ مقایسه‌ی مدل بندی فار- گراسکوف و کاسمانن

با مقایسه ی فرمول بندی کاسمانن (۸) و فار وگراسکوف (۶) مشاهده می شود که فاکتور انقباض غیر یکنواخت به کار رفته برای همه واحدها در مدل بندی کاسمانن با تحمیل قیود مازاد $\theta^1 = \theta^2 = \dots = \theta^k$ مدل فار و گراسکوف را نتیجه می دهد و چون مدل کلاسیک (۶)، یک قید محدود کننده بیشتر دارد، مجموعه‌ی امکان تولید راکوچکتر می کند. از طرفی، به بیان کاسمانن دلیل تئوری خاصی برای اینکه فاکتور انقباض یکنواخت برای همه‌ی ها به کار برده شود، وجود ندارد. او همچنین بیان کرد که به کار

بردن قید دوم (خروجی های نامطلوب) به صورت (۶)، عدم امکان پذیری[1] را تحمیل می کند. موضوعی که در ادامه بحث آن را با مثال عددی تشریح خواهیم کرد.

یک مشکل فرمول بندی (۸)، غیر خطی بودن آن است که با یک روش ساده خطی می شود. برای خطی کردن، فرض کنید وزن های DMU_k به دو قسمت به صورت $\lambda^k = \eta^k + \mu^k$ تجزیه شود. مؤلفه‌ی دوم، μ^k، نشان دهنده‌ی قسمتی از خروجی است که سطح فعالیت را کاهش می دهد (یعنی $\mu^k = (1-\theta^k)\lambda^k$). در حالی که مؤلفه ی اول، η^k، نشان دهنده‌ی قسمتی از خروجی واحد k ام است که فعال باقی می ماند (یعنی $\eta^k = \theta^k \lambda^k$). توجه شود که متغیر انقباض اصلی از رابطه $\theta^k = \frac{\eta^k}{\eta^k + \mu^k}$ به دست می آید. با به کار بردن این نمادگذاری، مجموعه‌ی خروجی حاصل از (۸) به صورت زیر نوشته می شود:

$$\hat{P}(\mathbf{x}) = \Big\{ \ (\mathbf{v},\mathbf{w}) : \sum_{k=1}^{K} (\eta^k + \mu^k) x_n^k \le x_n, \quad n = 1,\dots,N, \quad \sum_{k=1}^{K} \eta^k v_m^k \ge v_m, \quad m = 1,\dots,M, \quad \sum_{k=1}^{K} \eta^k w_j^k = w_j, \quad j = 1,\dots,J, \quad \sum_{k=1}^{K} (\eta^k + \mu^k) = 1, \eta^k, \mu^k \ge 0, \ k = 1,\dots,K \ \Big\}. \tag{۹}$$

ملاحظه می شود که (۹) برحسب متغیرهای η و μ خطی است.

۳-۲- ۱ مثال عددی

مجموعه ای شامل سه مشاهده ی A، B و C با داده های زیر در نظر بگیرید:

جدول ۱. مجموعه عددی شامل ۳ مشاهده A و B و C.

نام واحد	$DMU \quad A$	$DMU \quad B$	$DMU \quad C$
v	۸	۳	۵
w	۶	۴	۱
x	۵	۱	۴

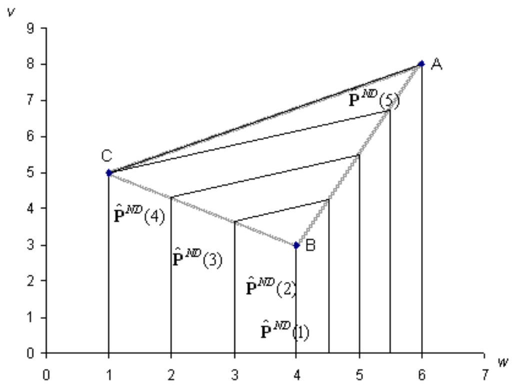
برای مشاهده تأثیرات اصل امکان پذیری ضعیف بر مجموعه های خروجی، ابتدا مدلی را که عدم امکان پذیری را برای خروجی های نامطلوب فرض می کند در نظر بگیرید. با این فرض، مجموعه‌ی خروجی در این مثال به صورت زیر مشخص می شود:

[1] No Disposability

$$\hat{P}^{ND}(x)=\{(v,w):\quad 5\lambda^{A}+\lambda^{B}+4\lambda^{C}\le x,\ 8\lambda^{A}+3\lambda^{B}+5\lambda^{C}\ge v,\ 6\lambda^{A}+4\lambda^{B}+\lambda^{C}=w,\ \lambda^{A}+\lambda^{B}+\lambda^{C}=1,\ \lambda^{A},\lambda^{B},\lambda^{C}\ge 0\}$$

شکل ۲ مجموعه های خروجی را به طور هندسی برای مقادیر ورودی x=۱،...،۵ شرح می دهد. محور افقی کمیت خروجی نامطلوب و محور عمودی کمیت خروجی مطلوب را نشان می دهد. مثلث ABC نشانگر مرز تولید است و نقاط داخل این مثلث به وسیله ی ترکیبات محدب واحدهای A، B، C تشکیل شده اند. خط های تیره تراز[۲] های خروجی را نشان می دهد.

قسمت های عمودی تراز های خروجی به دلیل امکان پذیری آزاد خروجی های مطلوب به دست آمده است.



شکل ۲. مجموعه های خروجی با عدم امکان پذیری خروجی های نامطلوب

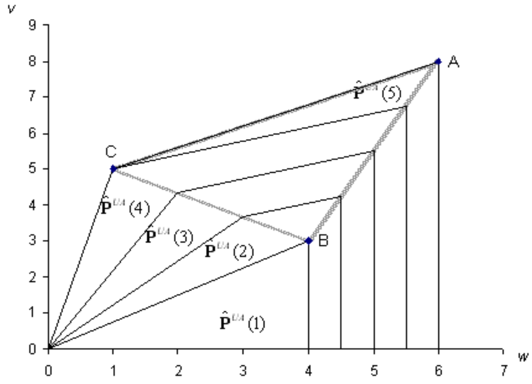
حال مدل کلاسیک فار و گراسکوف که کاهش یکنواخت را در همه واحدها فرض می کند در نظر بگیرید. با این مثال مجموعه های خروجی به صورت زیر تشکیل می شود:

$$\hat{P}^{UA}(x)=\{(v,w):\quad 5\lambda^{A}+\lambda^{B}+4\lambda^{C}\le x,\ \theta(8\lambda^{A}+3\lambda^{B}+5\lambda^{C})\ge v,\ \theta(6\lambda^{A}+4\lambda^{B}+\lambda^{C})=w,\ \lambda^{A}+\lambda^{B}+\lambda^{C}=1,\lambda^{A},\lambda^{B},\lambda^{C}\ge 0,\ 0\le\theta\le 1\} \quad (۱۰)$$

مشاهده می شود که ساختار این فرمول بندی غیر خطی است. شکل ۳ ترازهای این مجموعه‌ی خروجی را برای مقادیر ورودی x=۱،...،۵ تشریح می کند.

با مقایسه‌ی شکل های (۲) و (۳)، تغییر در شکل ترازها به وضوح نمایان است. در شکل(۳)، مجموعه‌ی خروجی $\hat{P}^{UA}(1)$ سه ضلعی با رئوس (۰و۰)، (۳و۴)و (۰و۴) است در حالی که مجموعه ی خروجی $\hat{P}^{UA}(3)$، چهارضلعی با رئوس(۰,۰)، (۲,۴$\frac{۱}{۳}$)، (۵,۵$\frac{۱}{۲}$) و (۵,۰) است. در حقیقت، مثلث OBC به مرز تولید اضافه شده است. توجه کنید که ترازها در امتداد رویه‌ی OBC گسترش یافته اند و در ساختار مجموعه‌ی خروجی قرار گرفته اند.

---
[۲] Isoquant



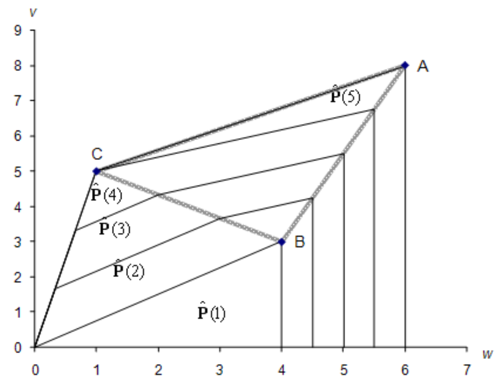
شکل ۳. مجموعه های خروجی با امکان پذیری ضعیف کلاسیک

سرانجام، شکل کلی امکان پذیری ضعیف (۲) در این مثال به صورت زیر نوشته می شود:

$$\hat{P}(x)=\{(v,w):5\eta^A+\eta^B+4\eta^C+5\mu^A+\mu^B+4\mu^C\le x,8\eta^A+3\eta^B+5\eta^C\ge v,6\eta^A+4\eta^B+\eta^C=w,$$
$$\eta^A+\eta^B+\eta^C+\mu^A+\mu^B+\mu^C=1,\eta^A,\eta^B,\eta^C,\mu^A,\mu^B,\mu^C\ge 0\}$$

مجموعه های خروجی به طور هندسی برای مقادیر ورودی $x=$۱،...،۵ شرح داده شده است. تفاوت کلیدی اشکال(۳) و (۴) در رویه OBC مشهود است. این تفاوت ناحیه به دلیل تفاوت حاصل از اعمال فاکتورهای انقباض در همه واحدهاست. برای مثال نقطه‌ی رأسی $(\frac{2}{3}, 3\frac{1}{3})$ مجموعه‌ی $\hat{P}(3)$ در (۹)، ابتدا با منقبض کردن خروجی های DMU_B به صفر و سپس ترکیب محدب آن با DMU_C، با وزن های $\eta^A,\mu^A=0$ ، $\mu^B=\frac{1}{3}$ ، $\mu^B=0$ $\mu^C=0$ ، $\eta^C=\frac{2}{3}$ به دست می آید.

این مثال محدودیت فرمول بندی (۵) را نشان می دهد. برای نمونه، با اینکه نقطه‌ی $(\frac{2}{3}, 3\frac{1}{3})$ تحت اصول پایه ای امکان پذیری ضعیف و تحدب شدنی است، نمی تواند با استفاده از مدل (۵) به دست آید.



شکل ٤. مجموعه‌ی خروجی ها با اصلاح روش امکان پذیری ضعیف

۳-۳ رویکرد کاسمانن و پودینوسکی

فار و گراسکوف[۷] در مقاله ای بیان کردند که در مفهوم اولیه شفرد[۱۳]، یک پارامتر امکان پذیری واحد برای همه فعالیت های خروجی در نظر گرفته شده است و ادعا کردند که مجموعه امکان تولید شده توسط مدل بندی کاسمانن بزرگتر از حد نیاز برای صدق دادن اصل امکان پذیری ضعیف شفرد است. از این رو، کاسمانن و پودینوسکی[۱۰]، در مقاله‌ی خود با یک مثال عددی نشان دادند مجموعه‌ی امکان تولید با تکنولوژی شفرد مدل بندی شده توسط فار- گراسکوف که یک فاکتور انقباض را به کار می برد شامل همه‌ی نقاط تولید شدنی نبوده و منجر به نقض تحدب، یکی از فرض های پایه ای مدل می شود. همچنین ثابت کردند مجموعه امکان تولید با تکنولوژی کاسمانن در اصل کمینه‌ی برون یابی صدق می کند و کوچکترین توسیع محدب (پوسته‌ی محدب) مجموعه امکان تولید با تکنولوژی شفرد است، و تنها در یک مورد خاص این دو مجموعه یکسان هستند.

برای تشریح این مفاهیم، حالتی را در نظر بگیرید که مجموعه امکان تولید تکنولوژی بازده به مقیاس متغیر را نشان دهد و فرض کنید مجموعه‌ی امکان تولید شامل مشاهدات بوده و در اصول موضوعه‌ی (B1) تا (B3) صدق کند.

در مدل های DEA، مجموعه‌ی امکان تولید، توسط اشتراک همه‌ی زیر مجموعه های $\Re_+^{M+J+N}$ که در اصول پایه ای صدق کرده و شامل همه مشاهدات اند، مشخص می شود. این به عنوان اصل کمینه‌ی برون یابی شناخته می شود.

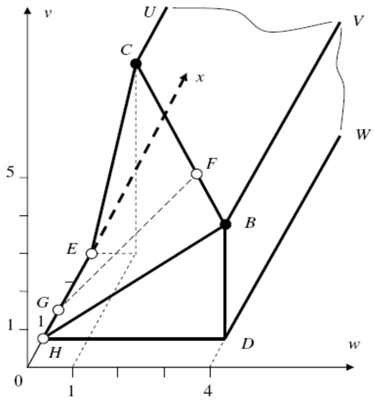
کاسمانن [۹] استدلال کرد که مجموعه‌ی امکان تولید واجد شرط امکان پذیری ضعیف و کمینه‌ی برون یابی نیازمند K فاکتور انقباض متفاوت به صورت زیر است. توجه کنید که مجموعه امکان تولید T_K مجدداً می تواند به صورت معادل خطی که در کاسمانن [۹] به دست آمد، بیان شود و نتیجه می دهد T_K چند وجهی است و استفاده از آن برای مدل های DEA تنها نیازمند مسائل برنامه ریزی خطی است.

$$
\begin{aligned}
T_K = \Big\{ \ (\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{x}) : & \sum_{k=1}^{K} \lambda^k x_n^k \le x_n, \qquad n=1,\ldots,N, \\
& \sum_{k=1}^{K} \theta^k \lambda^k v_m^k \ge v_m, \quad m=1,\ldots,M, \\
& \sum_{k=1}^{K} \theta^k \lambda^k w_j^k = w_j, \quad j=1,\ldots,J, \\
& \sum_{k=1}^{K} \lambda^k = 1, \lambda^k \ge 0,\ 0 \le \theta^k \le 1,\ k=1,\ldots,K \ \Big\}.
\end{aligned}
\tag{۱۱}
$$

۳-۳-۱ مثال عددی

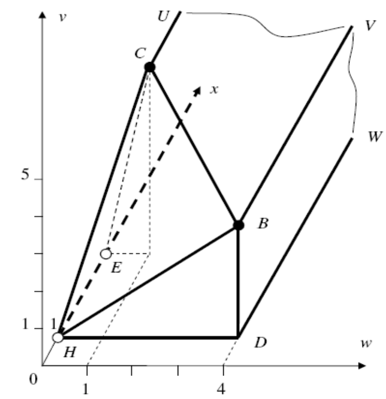
برای اثبات اینکه مجموعه امکان تولید با تکنولوژی شفرد اصل تحدب را نقض می کند و برخی از DMUهایی که تحت اصول موضوعه ای شدنی هستند را شامل نمی شود، مثال عددی بخش (۳-۳-۱) را با دو واحد C و B در نظر بگیرید.

دو فعالیت شدنی (۴, ۱, ۵) = $DMUC$ و DMUی فرضی (۱, ۰, ۰) = H در T_{FG} در نظر بگیرید. اگر T_{FG} یک مجموعه‌ی محدب باشد، آن گاه هر ترکیب محدب H و C نیز بایستی در آن قرار بگیرد. که در شکل ۵ این مورد این گونه نیست.



شکل ۵. مجموعه امکان تولید حاصل از تکنولوژی فار و گراسگوف با یک فاکتور انقباض

این مثال ساده نشان می دهد که مدل بندی تکنولوژی شفرد توسط فار و گراسکوف اصل تحدب، یکی از فرض های کلیدی مجموعه یعنی تحدب را نقض می کند و نقاطی که بایستی طبق مجموعه اصول شدنی باشند را شامل نمی شود. برای مقایسه، در شکل (۶)، مجموعه حاصل از تکنولوژی کاسمانن با همان واحدها نشان داده می شود که با دو مثلث BCH و BDH و نیم خط های DW، BV، CU و HE مشخص شده است. این مجموعه چند وجهی و بنابراین محدب است.



شکل٦. مجموعه امکان تولید حاصل از تکنولوژی کاسمانن با فاکتور های انقباض متفاوت

۳-۴-۲ توصیف اصول مجموعه امکان تولید با تکنولوژی کاسمانن

پودینوسکی [۱۴] ثابت کرد که مجموعه امکان تولید حاصل از تکنولوژی HRS مطابق اصل کمینه‌ی برون یابی، کوچکترین مجموعه‌ی سازگار با اصول موضوعه معرفی شده است. اثبات این نتیجه شامل دو مرحله است. در مرحله اول نشان داده می شود که این مجموعه در همه‌ی اصول بیان شده صدق می کند. در مرحله دوم، نشان داده می شود که زیر مجموعه ای از تمام مجموعه های دیگری است که در همان اصول صدق می کنند. همان تکنیک را برای اثبات قضیه‌ی زیر استفاده می کنیم.

قضیه ۲. مجموعه امکان تولید با تکنولوژی امکان پذیری ضعیف کاسمانن T_K، کوچکترین مجموعه شامل تمام فعالیت های مشاهده شده و صادق در اصول امکانپذیری آزاد ورودی ها و خروجی های مطلوب، امکان پذیری ضعیف خروجی های مطلوب وخروجی های نامطلوب و نیز تحدب است.

اثبات در مرحله‌ی اول بایستی ثابت شود که $\hat{Y}_T$ در اصول صدق می کند.

اگر $(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{x})$ با بردار های $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda^1,\ldots,\lambda^K)$ و $\boldsymbol{\theta}=(\theta^1,\ldots,\theta^K)$ در T_K باشد، آن گاه بنا بر (B2)، $(\mathbf{v}',\mathbf{w}',\mathbf{x}')$ با $\mathbf{x}'\geq\mathbf{x},\mathbf{v}'\leq\mathbf{v}$ نیز با همان $\boldsymbol{\theta}$ و $\boldsymbol{\lambda}$ در T_K قرار دارد. برای اثبات (B3)، $(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{x})\in T_K$ را در نظر بگیرید که در (۸) با بردارهای $\boldsymbol{\theta}$ و $\boldsymbol{\lambda}$ صدق می کند. برای هر $\alpha\in[0,1]$، اگر بردار $\boldsymbol{\theta}$ را به $\alpha\boldsymbol{\theta}$ تغییر داده و بردار $\boldsymbol{\lambda}$ بدون تغییر بماند، آن گاه $(\alpha\mathbf{v},\alpha\mathbf{w},\mathbf{x})$ نیز در (۸) صدق خواهد کرد. پس (B3) نیز برقرار است. برای اثبات (B4)، $(\tilde{\mathbf{v}},\tilde{\mathbf{w}},\tilde{\mathbf{x}}),(\tilde{\tilde{\mathbf{v}}},\tilde{\tilde{\mathbf{w}}},\tilde{\tilde{\mathbf{x}}})\in T_K$ را در نظر بگیرید. این دو به ترتیب با بردارهای $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ و $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$، $\tilde{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}}$, $\tilde{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}$ در (۸) صدق می کنند. برای هر $\alpha\in[0,1]$ تعریف می کنیم:

$(\hat{\mathbf{v}},\hat{\mathbf{w}},\hat{\mathbf{x}})=\alpha(\tilde{\mathbf{v}},\tilde{\mathbf{w}},\tilde{\mathbf{x}})+(1-\alpha)(\tilde{\tilde{\mathbf{v}}},\tilde{\tilde{\mathbf{w}}},\tilde{\tilde{\mathbf{x}}})$ بنابر این بردار $(\hat{\mathbf{v}},\hat{\mathbf{w}},\hat{\mathbf{x}})$ با بردار $\hat{\boldsymbol{\theta}},\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ که به صورت زیر تعریف می شود در (۸) صدق می کنند.

$$\hat{\lambda}^k=\alpha\tilde{\lambda}^k+(1-\alpha)\tilde{\tilde{\lambda}}^k \tag{i}$$

$$\hat{\theta}^k=(\alpha\,\tilde{\theta}^k\tilde{\lambda}^k+(1-\alpha)\tilde{\tilde{\theta}}^k\tilde{\tilde{\lambda}}^k)\big/\hat{\lambda}^k \tag{ii}$$

مؤلفه های $\hat{\lambda}^k$ نامنفی اند و مجموع آن ها مساوی با یک است. هم چنین برای هر k، $0\leq\hat{\theta}^k\leq 1$. همچنین برای هر $m=1,\ldots,M$ داریم: $\sum_{k=1}^{K}\tilde{\theta}^k\tilde{\lambda}^k v_m^k\geq\tilde{v}_m$ و $\sum_{k=1}^{K}\tilde{\tilde{\theta}}^k\tilde{\tilde{\lambda}}^k v_m^k\geq\tilde{\tilde{v}}_m$. که با ضرب اولی در α و دومی در $1-\alpha$، و جمع نتایج نامساوی ها با هم، خواهیم داشت:

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\alpha\,\tilde{\theta}^k\tilde{\lambda}^k+(1-\alpha)\tilde{\tilde{\theta}}^k\tilde{\tilde{\lambda}}^k\right]v_m^k\geq\alpha\,\tilde{v}_m+(1-\alpha)\tilde{\tilde{v}}_m$$

با ضرب و تقسیم هر عبارت داخل براکت در $\alpha\tilde{\lambda}^k + (1-\alpha)\tilde{\tilde{\lambda}}^k$و جای گذاری مقادیر (۱) و (۲)، $\sum_{k=1}^{K}\hat{\theta}^k\hat{\lambda}^k v_m^k \geq \hat{v}_m$ به دست می آید. با تکرار همین روند، $\sum_{k=1}^{K}\hat{\theta}^k\hat{\lambda}^k w_j^k = \hat{w}_j$ و $\sum_{k=1}^{K}\hat{\lambda}^k x_n^k \leq \hat{x}_n$ برای خروجی های نامطلوب و ورودی ها حاصل می شود.

در گام بعد بایستی ثابت شود که مجموعه T_K زیرمجموعه ی هر مجموعه $\hat{T}$ است که در اصول موضوعه ی (B1) – (B4) صدق کند. برای این منظور $(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{x}) \in T_K$ را که با بردارهای $\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\theta}$ در (۸) صدق می کند در نظر بگیرید. ثابت می کنیم $(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{x}) \in \hat{T}$. سمت چپ (۸) عضوی از $\hat{T}$ است چون از $(\mathbf{v}^k,\mathbf{w}^k,\mathbf{x}^k)$های مشاهده شده که نخست با فاکتور های θ^k منقبض شده و سپس با وزن های λ^kیک ترکیب محدب تشکیل شده است، به دست آمده اند. چون $\hat{T}$ در اصل (B2)، امکان پذیری آزاد ورودی ها و خروجی های خوب صدق می کند، می بایست $(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{x})$ را در سمت راست (۸) شامل شود.

فار و گراسکوف ادعا کردند که مجموعه امکان حاصل از تکنولوژی کاسمانن بزرگتر از حد لزوم است. قضیه۲ ثابت می کند که این تعبیر نادرست است. و بر اساس مثال قبل نتیجه می شود با اینکه مجموعه مدل بندی شده فار و گراسکوف برای تکنولوژی شفرد کوچکتر است، اما اصل تحدب را نقض می کند.

قضیه بعد نشان می دهد که مجموعه امکان تولید کاسمانن کوچکترین مجموعه ی محدب شامل تکنولوژی شفرد است.

قضیه ۳. مجموعه امکان تولید حاصل از تکنولوژی امکان پذیری ضعیف کاسمانن T_K پوسته‌ی محدب مجموعه امکان تولید با تکنولوژی شفرد T_{FG} است.

اثبات. بایستی ثابت کنیم که T_K اشتراک تمام مجموعه های محدبی است که T_{FG} را شامل می شوند. چون T_K مجموعه‌ی محدب است، کافی است نشان دهیم که هر فعالیت $(\tilde{\mathbf{v}},\tilde{\mathbf{w}},\tilde{\mathbf{x}}) \in T_K$ یک ترکیب محدب از بعضی فعالیت های T_{FG} است. $(\tilde{\mathbf{v}},\tilde{\mathbf{w}},\tilde{\mathbf{x}})$در (۸) با $\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\theta}$ صدق می کند. برای سادگی نمایش و بدون کم شدن از کلیت مسأله، فرض کنید که مؤلفه های λ^k مثبت باشند. همچنین $e_m \geq 0$، $(m=1,\ldots,M)$ متغیرهای کمکی قیود نامساوی خروجی های مطلوب و $d_n \geq 0$، $(n=1,\ldots,N)$ متغیرهای کمکی ورودی ها باشد. برای هر m = ۱،...M، متغیرهای کمکی $e_m \geq 0$ را به K مؤلفه‌ی e_m^k تقسیم کنید. در اینصورت:

$$\tilde{v}_m = \sum_{k=1}^{K}\theta^k\lambda^k v_m^k - e_m = \sum_{k=1}^{k}(\theta^k\lambda^k v_m^k - e_m^k) = \sum_{k=1}^{K}\lambda^k(\theta^k v_m^k - (1/\lambda^k)e_m^k) \qquad \text{(i)}$$

توجه کنید که بنا به تعریف e_m^k ها، تمام تفاضلات (۳) نامنفی اند. بعلاوه، برای هر $n=1,\ldots,N$ داریم:

$$\tilde{x}_n = \sum_{k=1}^{K}\theta^k\lambda^k x_n^k + d_n = \sum_{k=1}^{k}\lambda^k(\theta^k x_n^k + d_n) \qquad \text{(ii)}$$

با توجه به مقادیر (۳) و(۴)، $(\tilde{\mathbf{v}},\tilde{\mathbf{w}},\tilde{\mathbf{x}})$ ترکیب محدب k فعالیت با وزن های λ^kاست. چنین فعالیتی، چون بواسطه‌ی انقباض فعالیت های مشاهده شده‌ی $(\theta\mathbf{v}^k,\theta\mathbf{w}^k,\mathbf{x}^k) \in T_{FG}$ با امکان پذیری آزاد ورودی ها و خروجی های مطلوب به دست آمده است، در مجموعه T_{FG} قرار دارد.

٤ نتیجه گیری

در این مقاله به مدل بندی خروجی های نامطلوب با رویکرد اولیه هایلو–ویمن اشاره شد که توسط فارو گروسکوف با این انتقاد مواجه شد که این رویکرد مناسب نیست، از این جهت که با تعریف شفرد از دسترسی پذیری ضعیف ناسازگار است. این تفکر برای دستیابی به مجموعه امکان تولید سازگار با اصول موضوعه شفرد توسط فار و گراسکوف ادامه می یابد. یک مثال عددی ساده توسط کاسمانن نشان می دهد که تکنولوژی امکان پذیری ضعیف تعریف شده‌ی شفرد که توسط فار و گراسکوف مدل بندی شده است محدب نیست و از این رو یکی از فرض های کلیدی تئوری تولید را نقض می کند و مجموعه امکان تولید محدب مینیمال واجد شرایط امکان پذیری ضعیف نیست. علاوه بر این، حتی اگر اصل تحدب را کلاً حذف کنیم مجموعه امکان تولید معرفی شده توسط فار و گراسکوف از تکنولوژی شفرد کوچکترین مجموعه با شرط امکان پذیری ضعیف نخواهد بود.

در بررسی اصول موضوعه ای که به وسیله‌ی کاسمانن و پودینوسکی معرفی گردید، ثابت شده است که مجموعه معرفی شده توسط کاسمانن زیر مجموعه ای از مجموعه های با تکنولوژی محدبی است که به طور مشترک دسترسی پذیری ضعیف خروجی های خوب و بد را دارا هستند و بنابراین کوچکترین مجموعه تحت مجموعه‌ی اصول موضوعه مطرح شده است. در مقابل فرمول بندی شفرد که یک فاکتور انقباض یکنواخت را برای همه‌ی فعالیت ها به کار می برد، فرمول بندی کاسمانن فاکتور های انقباض متعدد را به طور جداگانه ای برای هر یک از فعالیت های مشاهده شده به کار می برد.

در مجموع این گفتار دسترسی به درک مناسبی از مفهوم دسترسی پذیری ضعیف در ادبیات تئوری تولید را فراهم می کند و مدلی که سازگار با اصول موضوعه این بحث بودن و برای مدل بندی خروجی های نامطلوب، مطلوب است. در واقع مدل بندی خوبی از خروجی های بد ارایه می کند.

منابع

[1] Fare, R., Grosskopf, S., Lovell, C. A. K., Pasurka, C., (1984). Multilateral Productivity Comparisons When Some Outputs Are Undesirable: A Nonparametric Approach. Rev. Econ. Stat.75, 374-80.

[2] Ball, V. E., Lovell, C. A. K., Nehring, R., Somwaru, A., (1994). Incorporating Undesirable Outputs into Models of Production: An Application to U.S. Agriculture. Cah. Econ. Sociologie Rurales 3, 60-74.

[3] Hailu, A., Veeman, T. S., (2001). Nonparametric Productivity Analysis with Undesirable Outputs: An Application to the Canadian Pulp and Paper Industry. American Journal of Agricultural Economics ,83 , 605-16.

[4] Hailu, A., (2003). Nonparametric Productivity Analysis with Undesirable Outputs: Reply. American Journal of Agricultural Economics, 85, 1075-77.

[5] Seiford, L. M., Zhu, J. (2002). Modeling undesirable factors in efficiency evaluation. Eur, J, Oper. Res. 142, 16-20.

[6] Fare, R., Grosskopf, S., (2003). Nonparametric Productivity Analysis with Undesirable Outputs: Comment. American Journal of Agricultural Economics ,85, 1070-74.

[7] Fare, R., Grosskopf, S., (2008). A Comment on Weak Disposability in Nonparametric Productivity Analysis with Undesirable Outputs. American Journal of Agricultural Economics.

[8] Jahanshahloo, G. R., Hadi Vencheh, A., Foroughi, A, A., Kazemi Matin, R., (2004). Inputs/Outputs estimation in DEA when some factors are undesirable. Appl. Math. Comput, 156, 19-32.

[9] Kuosmanen, T., (2005). Weak Disposability in Nonparametric Productivity Analysis with Undesirable Outputs. American Journal of Agricultural Economics ,87 , 1077-1082.

[10] Kuosmanen, T., Poidinovski, V., (2009). Weak Disposability in Nonparametric Productivity Analysis with Undesirable Outputs: Reply to Fare and Grosskopf. American Journal of Agricultural Economics.

[11] Banker, R. D., Maindiretta, A., (1988). Nonparametric Analysis of Technical and Allocative Efficiencies in Production, Econometrica , 56, 1315-32.

[12] Varian, H. R., (1984). The Nonparametric Approach to Production Analysis. Econometrica ,52,579-97.

[13] Shephard, R.W., (1970). Theory of Cost and Production Functions. Princeton: Princeton University Press.

[14] Podinovski, V. V., (2004). Bridging the Gap between the constant and Variable Returns-to-Scale Models: Selective Proportionality in Date Envelopment Analysis. Journal of the Operational.