مجله تحقیق در عملیات و کاربردهای آن، سال نهم، شماره دوم (پیاپی ۳۳)، تابستان ۹۱، ص ص ۲۰-۱
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

بهینه‌سازی رژیم غذایی افراد مبتلا به هپاتیت با رویکرد فازی

حسین اقبالی[۱]، محمدعلی اقبالی*[۲]، علی وحیدیان کامیاد[۳]، رضا امین لو[۴]
۱و۴ -کارشناس ارشد ریاضی کاربردی، عضو هیات علمی موسسه آموزش عالی غیرانتفاعی و غیردولتی ایوانکی، سمنان، ایران
۲ -کارشناس ارشد مهندسی صنایع، عضو هیات علمی دانشگاه صنعتی بیرجند، ایران
۳ - استاد دانشکده ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد، ایران

رسید مقاله: ۸ دی ۱۳۹۰
پذیرش مقاله: ۲ خرداد ۱۳۹۱

چکیده
به دلیل تنوع اقلیم‌های آب وهوایی در سطح جهان و شرایط مختلف نگهداری مواد غذایی، میزان ریزمغذی‌ها و درشت مغذی‌های موجود در مواد غذایی مختلف با عدم قطعیت روبروست. کمیت مربوط به میزان یک ماده مغذی موجود در یک ماده غذایی را هیچ‌گاه نمی‌توان به طوردقیق تعیین نموده و عدد مشخصی را به‌آن نسبت داد. این عدم قطعیت در مورد اعداد و ارقام موجود در مراجع پزشکی سبب می‌شود تا تصمیم‌گیری‌ها در مورد ارایه یک رژیم غذایی بر اساس داده‌های قاطع، دور از واقعیت باشد. هدف این مقاله، تهیه و تنظیم یک رژیم غذایی بهینه در محیط فازی است. به دلیل اهمیت تغذیه بیماران مبتلا به هپاتیت، مطالعه موردی روی این بیماران صورت پذیرفته است. با توجه به رژیم پرکالری و پرپروتئین برای این بیماران، مساله تحقیق را به صورت یک مساله برنامه‌ریزی خطی فازی با دو تابع هدف که شامل ماکزیمم‌سازی میزان کالری و میزان پروتئین روزانه است، مدل‌بندی و سپس با روشی مناسب حل شده است. در پایان با پیاده‌سازی رژیم غذایی در محیط فازی به نتایج خوبی حاصل گردید، به طوری‌که اعداد به دست آمده با در نظرگرفتن تمامی حالات ممکن واقعی‌تر هستند.

کلمات کلیدی: رژیم غذایی، هپاتیت، برنامه‌ریزی خطی چند هدفه، اعداد فازی مثلثی.

۱ مقدمه
در دنیای امروز، افراد بنا به موقعیت‌های متفاوتی‌که درآن قرار می‌گیرند، نیازهای تغذیه‌ای متفاوتی دارند. پس از تأمین نیاز افراد به مواد مغذی مناسب و یک رژیم غذایی مطلوب، اولویت‌هایی نیز در انتخاب رژیم غذایی بهینه برای آن‌ها مطرح می‌گردد. بنا به نظر اکثر پزشکان، تغذیه و رژیم درمانی به عنوان یک عامل مهم در کنترل و درمان اکثر بیماری‌های خاص می‌باشدکه هپاتیت یکی از آن‌هاست. "هپاتیت" التهاب گسترده کبدی

* عهده دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: Eghbali@Birjandut.ac.ir

است که معمولاً منشاء ویروسی دارد. با توجه به این‌که معمولاً در بیماران مبتلا به هپاتیت کاهش اشتها، حالت تهوع و استفراغ وجود دارد، دریافت کافی انرژی دچار مشکل شده و این بیماران دچار کاهش وزن می‌شوند. لذا دریافت روزانه انرژی و پروتئین به میزان بالا برای آن‌ها ضروری است. علاوه بر دو مورد مذکور، می‌توان هر یک از محدودیت‌های مربوط به ریزمغذی‌ها و درشت مغذی‌ها را بنا به نیاز افراد به حداقل یا حداکثر رساند و یا به سطح مورد نظری نزدیک کرد. به طورخلاصه می‌توان گفت، آن چه اهمیت دارد آن است که در شرایط فعلی، یک رژیم غذایی بهینه که در آن اهداف مورد نظر متخصصین علم تغذیه برآورده شود ضروری به نظر می‌رسد. اما موضوعی که در این‌جا مطرح است، مشکل مربوط به نادقیق بودن مقدار مواد مغذی در غذاها است، به طوری‌که عموماً مواد مغذی موجود در یک غذا مشخص هستند، اما مساله مقدار دقیق آن‌ها همواره مطرح است. چنان‌چه درباره وجود ماده مغذی معینی مشکوک باشیم، فرض می‌شودکه مقدار آن بسیار ناچیز است، که مجدداً مساله نادقیق بودن مقدار تقریباً صفر ظاهر می‌گردد. وقتی غذا به شکلی دقیق و پایدار فرآوری و بسته‌بندی می‌شود (مثلاً انواع روغن‌ها، شکر، بیسکویت‌ها و غیره)، مقادیر مواد مغذی آن اغلب به صورت دقیق و با قطعیت ارایه می‌شوند. برای سایر غذاها، مقدار ماده‌ی مغذی در ۱۰۰ گرم از یک غذا (مثلاً سیب، نان سفید، سیب‌زمینی) ممکن است در طول یک بازه متغیر باشد، که میزان این تغییرات تحت شرایط مختلف می‌تواند نسبتاً بزرگ باشد. مقدارکربوهیدرات موجود در ۱۰۰ گرم سیب، به نوع سیب و میزان رسیدگی آن بستگی دارد، حتی پس از کنترل رسیدگی و نوع سیب، تغییرات دیگری مربوط به خاک و شرایط رشد آن وجود دارد. به عنوان نمونه، درصد قند موجود در ۱۰۰ گرم سیب منطقه گرمسیر، (به علت کمبود میزان آب موجود در سیب) از درصد قند موجود در نمونه مشابه که در منطقه معتدل و کوهستانی کشت شده است کمتر است. بدین ترتیب لزوم دخالت مفهوم فازی در بیان مقادیر مربوطه بیشتر مطرح می‌شود. مطالعاتی در این زمینه صورت گرفته است که می‌توان به مطالعه مامات و همکاران اشاره کرد [۱]. آن‌ها در این تحقیق به بررسی رژیم غذایی انسان با قیمت فازی پرداخته‌اند ولی ما بقی فاکتورها را به صورت قاطع در نظرگرفته و فقط به مینیمم کردن هزینه بسنده کرده‌اند. اعتقاد ما بر این است که میزان مواد مغذی موجود در مواد غذایی مختلف نیز باید به صورت اعداد فازی در نظرگرفته شوند. به عنوان مثال آیا می‌توان با اطمینان کامل میزان کلسترول موجود در ۱۰۰ گرم تخم مرغ را تعیین نمود؟ مسلماً جواب منفی است زیرا عواملی نظیر نژاد مرغ‌ها، کمیت و کیفیت تغذیه آن‌ها و هم‌چنین کیفیت محیط رشد آن‌ها تاثیر بسزایی بر نوسان عدد مربوطه دارد. در اینجا به نمونه دیگری اشاره می‌شود. طبق مطالعات و تحقیقات وزارت کشاورزی ایالات متحده در هر ۱۰۰ گرم کاهو، ۲ گرم قند وجود دارد. بنا به دلایل متعددی نمی‌توان این عدد را مبنای تصمیم‌گیری قرار داد. اگر کاهو در منطقه‌ای با آب فراوان کشت شده باشد به دلیل فزونی آب در واحد حجم این سبزی، چگالی قند موجود در ۱۰۰ گرم از آن کمتر از چگالی قند موجود در ۱۰۰ گرم از نمونه کاهوی مشابه است که در منطقه‌ای با آب کمتر کشت شده باشد. لذا بایستی عدد مربوط به میزان قند موجود در ۱۰۰ گرم کاهو را به صورت عدد فازی در نظر گرفت. از طرفی نمی‌توان مرز مشخصی جهت حداقل و حداکثر میزان استفاده روزانه افراد از ریز مغذی‌ها و درشت مغذی‌ها را تعیین نمود. زیرا عواملی از

قبیل منطقه جغرافیایی، جنسیت افراد، سن و... سبب ایجاد نوسان در میزان استفاده از مواد مغذی می‌گردد. به عنوان مثال زمانی که گفته می‌شود حداقل مقدار دریافت روزانه از ویتامین E ، ۱۰۰ میلی‌گرم است، بایستی این کمیت را به صورت عدد فازی در نظر گرفت. دلایلی که سبب گردید تا در این مقاله از دیدگاه فازی به مساله تغذیه پرداخته شود، اهمیت بالای اعمال رژیم غذایی مناسب برای بیماران خاص از جمله بیماران مبتلا به هپاتیت است، زیرا میزان نیاز روزانه این افراد به چربی‌ها، کربوهیدرات‌ها، پروتئین‌ها و... تابع شرایط جسمانی بیمار، متغیر است. از این رو، دستیابی به یک رژیم بهینه غذایی با به کارگیری دیدگاه کلاسیک دور از واقعیت است. به عنوان مثال، اگر برای یک بیمار خوردن یک عدد سیب متوسط از لحاظ اندازه در روز مجاز باشد، هم متوسط بودن اندازه سیب، یک مفهوم فازی است و هم مطالبی که قبلاً بیان شد دلیل کافی است تا محقق با نگاه فازی به مساله تغذیه این بیماران بپردازد.

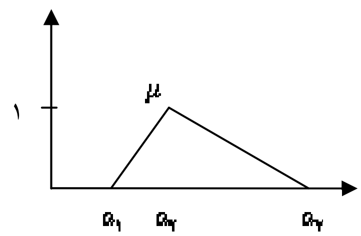
منطق فازی برای اولین بار در سال ۱۹۶۵ توسط پروفسور لطفعلی عسکرزاده مطرح گردید. سپس برای نخستین بار مفهوم برنامه‌ریزی خطی فازی توسط تاناکا و همکاران [۲] مطرح شد. هم‌چنین مفهوم تصمیم‌گیری فازی برای نخستین بار توسط بلمن و زاده [۳] مطرح وسپس زیمرمن [۴] روش Max-Min را برای حل مساله برنامه‌ریزی خطی فازی ارایه نمود. سایر محققین نیز در مطالعات خود از این روش استفاده کردند. به عنوان مثال جانا و همکاران [۵] به بررسی مدل حمل و نقل در محیط فازی پرداختند. در مدل آن‌ها ضرایب هدف، توابع عرضه و تقاضا و ظرفیت انتقال به عنوان اعداد فازی بیان شده است. این مقاله درصدد است تا به بحث و بررسی پیرامون تغذیه بهینه بیماران مبتلا به هپاتیت پرداخته و آن را به صورت یک مساله برنامه‌ریزی خطی فازی با دو تابع هدف درنظرگیرد. در مدل ساخته شده تمامی ضرایب به صورت اعداد فازی از نوع مثلثی منظور شده است. با استفاده از فرآیند تصمیم‌گیری بلمن و زاده، مدل فازی به یک مساله برنامه‌ریزی خطی کلاسیک با ضرایب قاطع تبدیل و سپس با استفاده از روش سیمپلکس حل شده است.

۲ تعاریف و مفاهیم اولیه

۲-۱ اعدد فازی مثلثی

فرض کنید $\tilde{F}(R)$ مجموعه تمام اعداد فازی مثلثی روی خط حقیقی R باشد. عدد فازی مثلثی $\tilde{A}\left(\in \tilde{F}(R)\right)$ با سه تایی مرتب $\tilde{A}=(a_1,a_2,a_3)$ تعریف می‌شود. تابع عضویت به صورت زیر نشان داده شده است:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a_1}{a_2-a_1} & a_1\le x\le a_2\\ \dfrac{a_3-x}{a_3-a_2} & a_2\le x\le a_3\\ 0 & \text{Otherwise}\end{cases} \qquad (۱)$$



شکل ۱. عدد فازی $\tilde{A}=(a_1,a_2,a_3)$

تذکر ۲-۱. اگر $\tilde{A}=(a_1,a_2,a_3)$ عدد فازی مثلثی باشد، آن‌گاه $-\tilde{A}=(-a_3,-a_2,-a_1)$ هم یک عدد فازی مثلثی است.

تذکر ۲-۲. عدد فازی مثلثی صفر را به صورت $\tilde{0}=(0,0,0)$ ، نشان می‌دهند.

۲-۲ عدد فازی مثلثی چپ

عدد فازی مثلثی چپ به صورت $\tilde{A}=(a_1,a_2,a_3)$ است. در این تعریف $a_2>a_1$ و تابع عضویت آن به صورت زیر است:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} 1 & x\ge a_2 \\ \dfrac{x-a_1}{a_2-a_1} & a_1\le x\le a_2 \\ 0 & x\le a_1 \end{cases} \qquad (2)$$

۲-۳ عدد فازی مثلثی راست

عدد فازی مثلثی راست به صورت $\tilde{A}=(a_1,a_2,a_3)$ است. در این‌جا $a_3>a_2$ و تابع عضویت آن به صورت زیر است:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} 1 & x\le a_2 \\ \dfrac{a_3-x}{a_3-a_2} & a_2\le x\le a_3 \\ 0 & x\ge a_3 \end{cases} \qquad (3)$$

۳ برنامه ریزی خطی چند هدفه با ضرایب فازی

در حالت کلی مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه با ضرایب فازی را به صورت زیر تعریف می‌شود [۵]:

$$\begin{aligned} &Min \quad \tilde{Z}=\left[\tilde{Z}^1,\tilde{Z}^2,\tilde{Z}^3,\dots,\tilde{Z}^k\right] \\ &s.t. \\ &\qquad \sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}x_j\ge\tilde{b}_i \qquad i=1,2,3,\dots,m_1, \\ &\qquad \sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}x_j\le\tilde{b}_i \qquad i=m_1+1,m_1+2,\dots,m_2, \\ &\qquad \sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}x_j=\tilde{b}_i \qquad i=m_2+1,m_2+2,\dots,m, \\ &\qquad x_j\ge 0 \qquad j=1,2,3,\dots,n. \end{aligned} \qquad (4)$$

به طوری که:

$$\tilde{Z}^k=\sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_j^{\,k}x_j \qquad k=1,2,3,\dots,K$$

تذکر ۳-۱. فرض کنید $\mathcal{T} \subseteq \{۱,۲,۳,...,k\}$ یک مجموعه اندیس باشد. همچنین فرض کنید برای هر $k \in \mathcal{T}$ تابع هدف $\tilde{Z}^k$ ، ماکزیمم‌سازی باشد. در این صورت از تبدیل زیراستفاده می‌شود:

$$Maximize\ \tilde{Z}^k = -Minimize\ \left(-\tilde{Z}^k\right) \qquad (۵)$$

فرض ۱. ضرایب در توابع هدف، محدودیت‌ها و همچنین مقادیر سمت راست محدودیت‌ها با اعداد فازی مثلثی مثبت به صورت زیر تعریف می‌شود[۵]:

اعداد فازی مثلثی راست به صورت $\tilde{c}_j^k = (c_j^k, c_j^k, c_j^k + p_j^k)$ با تلورانس $p_j^k > 0$ برای تابع هدف $\sum_{j=۱}^{n} \tilde{c}_j^k x_j$ که در آن k = ۱، ۲، ...، K.

اعداد فازی مثلثی چپ به صورت $\tilde{a}_{ij} = (a_{ij} - d_{ij}^0, a_{ij}, a_{ij})$ با تلورانس $d_{ij}^0 < a_{ij}$ و همین‌طور $\tilde{b}_i = (b_i - b_i^0, b_i, b_i)$ با تلورانس $b_i^0 < b_i$ برای $\sum_{j=۱}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j \geq \tilde{b}_i$ که در آن i = ۱، ۲، ...، $m_۱$.

اعداد فازی مثلثی راست به صورت $\tilde{a}_{ij} = (a_{ij}, a_{ij}, a_{ij} + d_{ij}^0)$ با تلورانس $d_{ij}^0 > 0$ وهم‌چنین $\tilde{b}_i = (b_i, b_i, b_i + b_i^0)$ با تلورانس $b_i^0 \succ 0$ برای $\sum_{j=۱}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j \leq \tilde{b}_i$ که در آن i = $m_۱$+۱، $m_۱$+۲، ...، $m_۲$.

اعداد فازی مثلثی به صورت $\tilde{a}_{ij} = (a_{ij} - d_{ij}^l, a_{ij}, a_{ij} + d_{ij}^r)$ با تلورانس‌های $b_{ij}^r \succ 0$, $b_{ij}^l \succ a_{ij}$ و هم‌چنین $\tilde{b}_i = (b_i - b_i^l, b_i, b_i + b_i^r)$ با تلورانس $b_i^l < b_i, b_i^r > 0$ برای $\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j = \tilde{b}_i$، i = $m_۲$+۱، $m_۲$+۲، ...، m.

تذکر ۳-۲. فرض کنید $\mathcal{T} \subseteq \{۱,۲,۳,...,k\}$ یک مجموعه اندیس باشد. هم‌چنین فرض کنید برای هر $k \in \mathcal{T}$ تابع هدف $\tilde{Z}^k$، ماکزیمم‌سازی باشد. در این صورت $\tilde{c}_j^k$ با عدد فازی مثلثی به صورت $\tilde{c}_j^k = \left(c_j^k - p_j^k, c_j^k, c_j^k\right)$ با تلورانس $p_j^k < c_j^k$ مشخص می‌گردد.

اکنون برای محاسبه‌ی کران‌های بالا (U_k) و کران‌های پایین (L_k) مربوط به توابع هدف که تعداد آنها K تا است، ابتدا زیر مساله‌های زیر که همگی به صورت برنامه‌ریزی خطی کلاسیک می‌باشند تشکیل می‌شوند [۵]:

$$\begin{aligned}
&Min \quad Z^{k۱} = \sum_{j=۱}^{n} c_j^k x_j \\
&s.t. \\
&\qquad \sum_{j=۱}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \qquad i = ۱,۲,۳,\ldots,m_۱, \\
&\qquad \sum_{j=۱}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad i = m_۱+۱, m_۱+۲,\ldots,m_۲, \\
&\qquad \sum_{j=۱}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad i = m_۲+۱, m_۲+۲,\ldots,m, \\
&\qquad x_j \geq ۰ \qquad\qquad j = ۱,۲,۳,\ldots,n.
\end{aligned} \qquad (۶)$$

$$
\begin{aligned}
&Min \quad Z^{k2} = \sum_{j=1}^{n} (c_j{}^{k} + p_j{}^{k}) x_j \\
&s.t. \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \qquad i = 1,2,3,\dots,m_1, \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad i = m_1+1, m_1+2,\dots,m_2, \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad i = m_2+1, m_2+2,\dots,m, \\
&\quad x_j \ge 0 \qquad j = 1,2,3,\dots,n.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
&Min \quad Z^{k3} = \sum_{j=1}^{n} c_j{}^{k} x_j \\
&s.t. \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i - b_i^{\circ} \qquad i = 1,2,3,\dots,m_1, \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i + b_i^{\circ} \qquad i = m_1+1, m_1+2,\dots,m_2, \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i - b_i^{l} \qquad i = m_2+1, m_2+2,\dots,m, \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i + b_i^{r} \qquad i = m_2+1, m_2+2,\dots,m. \\
&\quad x_j \ge 0 \qquad j = 1,2,3,\dots,n.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
&Min \quad Z^{k4} = \sum_{j=1}^{n} (c_j{}^{k} + p_j{}^{k}) x_j \\
&s.t. \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i - b_i^{\circ} \qquad i = 1,2,3,\dots,m_1, \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i + b_i^{\circ} \qquad i = m_1+1, m_1+2,\dots,m_2, \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i - b_i^{l} \qquad i = m_2+1, m_2+2,\dots,m, \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i + b_i^{r} \qquad i = m_2+1, m_2+2,\dots,m, \\
&\quad x_j \ge 0 \qquad j = 1,2,3,\dots,n.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$$\begin{aligned}
&Min \quad Z^{k5}=\sum_{j=1}^{n} c_j^{k} x_j\\
&s.t.\\
&\quad \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-d_{ij}^{\circ})x_j \ge b_i \qquad i=1,2,3,\ldots,m_1,\\
&\quad \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+d_{ij}^{\circ})x_j \le b_i \qquad i=m_1+1,\ m_1+2,\ldots,m_2,\\
&\quad \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-d_{ij}^{l})x_j \ge b_i \qquad i=m_2+1,m_2+2,\ldots,m,\\
&\quad \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+d_{ij}^{r})x_j \le b_i \qquad i=m_2+1,m_2+2,\ldots,m,\\
&\quad x_j \ge 0 \qquad j=1,2,3,\ldots,n.
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
&Min \quad Z^{k6}=\sum_{j=1}^{n} (c_j^{k}+p_j^{k}) x_j\\
&s.t.\\
&\quad \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-d_{ij}^{\circ})x_j \ge b_i \qquad i=1,2,3,\ldots,m_1,\\
&\quad \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+d_{ij}^{\circ})x_j \le b_i \qquad i=m_1+1,m_1+2,\ldots,m_2,\\
&\quad \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-d_{ij}^{l})x_j \ge b_i \qquad i=m_2+1,m_2+2,\ldots,m,\\
&\quad \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+d_{ij}^{r})x_j \le b_i \qquad i=m_2+1,m_2+2,\ldots,m,\\
&\quad x_j \ge 0 \qquad j=1,2,3,\ldots,n.
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
&Min \quad Z^{k7}=\sum_{j=1}^{n} c_j^{k} x_j\\
&s.t.\\
&\quad \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-d_{ij}^{\circ})x_j \ge b_i - b_i^{\circ} \qquad i=1,2,3,\ldots,m_1,\\
&\quad \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+d_{ij}^{\circ})x_j \le b_i + b_i^{\circ} \qquad i=m_1+1,m_1+2,\ldots,m_2,\\
&\quad \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-d_{ij}^{l})x_j \ge b_i - b_i^{l} \qquad i=m_2+1,m_2+2,\ldots,m,\\
&\quad \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+d_{ij}^{r})x_j \le b_i + b_i^{r} \qquad i=m_2+1,m_2+2,\ldots,m,\\
&\quad x_j \ge 0 \qquad j=1,2,3,\ldots,n.
\end{aligned} \tag{12}$$

$$
\begin{aligned}
&Min \quad Z^{k8} = \sum_{j=1}^{n} (c_j^{\,k} + p_j^{\,k}) x_j \\
&s.t. \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - d_{ij}^{\,\circ}) x_j \ge b_i - b_i^{\,\circ} \qquad i = 1,2,3,\ldots,m_1, \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + d_{ij}^{\,\circ}) x_j \le b_i + b_i^{\,\circ} \qquad i = m_1+1, m_1+2,\ldots,m_2, \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - d_{ij}^{\,l}) x_j \ge b_i - b_i^{\,l} \qquad i = m_2+1, m_2+2,\ldots,m, \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + d_{ij}^{\,r}) x_j \le b_i + b_i^{\,r} \qquad i = m_2+1, m_2+2,\ldots,m, \\
&\qquad x_j \ge 0 \qquad\qquad j = 1,2,3,\ldots,n.
\end{aligned} \qquad (۱۳)
$$

٤ حل مساله برنامه‌ریزی خطی چند هدفه فازی

همان‌طورکه قبلاً اشاره شد L_k و U_k به ترتیب کران پایین و کران بالا برای تابع هدف kام هستند $(k = 1,2,3,\ldots K)$.

به لحاظ تئوری L_k عبارت است از پایین‌ترین سطح قابل دسترسی توسط تابع هدف kام، نسبت به تمام حالات ممکن و هم‌چنین U_kعبارت از بالاترین سطح قابل دسترسی توسط تابع هدف kام ، نسبت به تمام حالات ممکن است. در این حالت با استفاده از برنامه‌ریزی خطی فازی، مدل فازی را تشکیل داده و سپس با استفاده از روش زیمرمن، مدل فازی را تبدیل به مدل کلاسیک نموده وسپس حل می گردد. مراحل کار به شرح زیر است [۵]:

گام اول: حل زیرمساله‌های برنامه‌ریزی خطی (۶)، (۷)، (۸)، (۹)، (۱۰)، (۱۱)، (۱۲)، (۱۳) برای تابع هدف K ام.
$(k = 1,2,3,\ldots K)$

گام دوم: ، تعیین مقدار متناظر برای هر تابع هدف نسبت به هر یک از جواب‌ها برای نتایج حاصل از گام اول.

گام سوم: تعیین کران بالا (U_k)و کران پایین (L_k) برای تابع هدف kام بـه صورت زیر:

$$
\begin{aligned}
L_k &= \min_{\substack{1 \le r \le K \\ 1 \le s \le 8}} \left\{ Z^k (X^{rs*}) \right\} \qquad k = 1,2,3,\ldots,K \\
U_k &= \max_{\substack{1 \le r \le K \\ 1 \le s \le 8}} \left\{ Z^k (X^{rs*}) \right\} \qquad k = 1,2,3,\ldots,K
\end{aligned} \qquad (۱۴)
$$

گام چهارم: فرموله کردن مدل فازی به صورت زیر:

$$
\begin{aligned}
& Find\ \{x_j : j = 1,2,3,\ldots,n\} \\
& s.t. \\
& \quad Z_k \lesssim L_k \qquad\qquad k = 1,2,3,\ldots,K, \\
& \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \gtrsim b_i \qquad i = 1,2,3,\ldots,m_1, \\
& \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \lesssim b_i \qquad i = m_1+1, m_1+2,\ldots,m_2, \\
& \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \cong b_i \qquad i = m_2+1, m_2+2,\ldots,m, \\
& \quad x_j \geq 0 \qquad\qquad j = 1,2,3,\ldots,n.
\end{aligned}
\tag{۱۵}
$$

مجموعه فازی $\tilde{G}_k$ بـرای نـامساوی $Z_k \lesssim L_k$ منظور می‌شود. توابع عضویت برای این مجموعه‌های فازی به صورت زیر است:

$$
\mu_{\tilde{G}_k}(U_k) = \begin{cases} 0 & \sum_{j=1}^{n} c_j{}^k x_j > U_k \\[2ex] \dfrac{U_k - \sum_{j=1}^{n} c_j{}^k x_j}{\sum_{j=1}^{n} p_j{}^k x_j + M} & \sum_{j=1}^{n} c_j{}^k x_j \leq U_k \leq \sum_{j=1}^{n} (c_j{}^k + p_j{}^k) x_j + M_k \\[2ex] 1 & U_k \geq \sum_{j=1}^{n} (c_j{}^k + p_j{}^k) x_j + M_k \end{cases}
\tag{۱۶}
$$

که در آن $M_k = U_k - L_k$ برای $(k = 1,2,3,\ldots K)$.

مجموعه‌های فازی $\tilde{C}_i$ برای نامساوی‌های $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \gtrsim b_i$ منظور می‌شود. توابع عضویت برای این مجموعه‌های فازی به صورت زیر است: $(i = 1,2,3,\ldots m_1)$

$$\mu_{\tilde{C}_i}(b_i)=\begin{cases} ۰ & \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j < b_i \\ \dfrac{\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j - b_i}{\sum_{j=۱}^{n} d_{ij}^{\circ}x_j + b_i^{\circ}} & \sum_{j=۱}^{n}(a_{ij}-d_{ij}^{\circ})x_j - b_i^{\circ} \le b_i \le \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j \\ ۱ & \sum_{j=۱}^{n}(a_{ij}-d_{ij}^{\circ})x_j - b_i^{\circ} \ge b_i \end{cases} \tag{۱۷}$$

مجموعه‌های فازی $\tilde{C}_i$ را برای نامساوی‌های $\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j \lesssim b_i$ منظور می‌شود. توابع عضویت برای این مجموعه‌های فازی به صورت زیر است $(i = m_۱+۱, m_۱+۲,\ldots,m_۲)$.

$$\mu_{\tilde{C}_i}(b_i)=\begin{cases} ۰ & \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j > b_i \\ \dfrac{b_i - \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j}{\sum_{j=۱}^{n} d_{ij}^{\circ}x_j + b_i^{\circ}} & \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \le \sum_{j=۱}^{n}(a_{ij}+d_{ij}^{\circ})x_j + b_i^{\circ} \\ ۱ & b_i \ge \sum_{j=۱}^{n}(a_{ij}+d_{ij}^{\circ})x_j + b_i^{\circ} \end{cases} \tag{۱۸}$$

مجموعه‌های فازی $\tilde{C}_i$ را برای تساوی‌های $\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j \cong b_i$ منظور می‌شود. توابع عضویت برای این مجموعه‌های فازی به صورت زیر است: $(i = m_۲+۱, m_۲+۲,\ldots,m)$.

$$\mu_{\tilde{C}_i}(b_i)=\begin{cases} \dfrac{b_i - \sum_{j=۱}^{n}(a_{ij}-d_{ij}^{\,l})x_j + b_i^{\,r}}{\sum_{j=۱}^{n} d_{ij}^{\,l}x_j + b_i^{\,r}} & \sum_{j=۱}^{n}(a_{ij}-d_{ij}^{\,l})x_j - b_i^{\,r} \le b_i \le \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j \\ \dfrac{\sum_{j=۱}^{n}(a_{ij}+d_{ij}^{\,r})x_j + b_i^{\,l} - b_i}{\sum_{j=۱}^{n} d_{ij}^{\,r}x_j + b_i^{\,l}} & \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \le \sum_{j=۱}^{n}(a_{ij}+d_{ij}^{\,r})x_j + b_i^{\,l} \\ ۰ & \text{Otherwise} \end{cases} \tag{۱۹}$$

تذکر ٤-۱. چنانچه برخی از توابع هدف به صورت ماکزیمم‌سازی باشند، (بدون کاستی از کلیت موضوع، فرض کنید K_1 تای اول) در این حالت بـرای $k=1,2,3,\dots,K_1$ عبارت $-Z_k \le -U_k$ جایگزین K_1 تا محدودیت اول در (۱۵) شده و در این حالت مدل فازی به صورت زیر در می‌آید:

$$
\begin{aligned}
& Find \left\{x_j : j=1,2,3,\dots,n\right\} \\
& s.t. \\
& Z_k \gtrsim U_k && k=K_1+1, K_1+2,\dots,K, \\
& Z_k \lesssim L_k && k=K_1+1, K_1+2,\dots,K, \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \gtrsim b_i && i=1,2,3,\dots m_1, \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \lesssim b_i && i=m_1+1, m_1+2,\dots,m_2, \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \cong b_i && i=m_2+1, m_2+2,\dots,m, \\
& x_j \ge 0 && j=1,2,3,\dots,n
\end{aligned}
\tag{20}
$$

توابع عضویت برای K_1 محدودیت اول در (۲۰)، که به عنوان مجموعه‌های فازی $\tilde{G}_k$ در نظر گرفته شده‌اند، با جایگزین کردن عبارت $-\sum_{j=1}^{n} c_j^k x_j$ به جای $\sum_{j=1}^{n} c_j^k x_j$ و هم‌چنین $-U_k$ به جای L_k در (۱۹) به صورت زیر تعیین می‌شوند: $(k=1,2,3,\dots,K_1)$.

$$
\mu_{\tilde{G}_k}(L_k)=\begin{cases}
0 & \sum_{j=1}^{n} c_j^k x_j < L_k \\[2ex]
\dfrac{M+L_k-\sum_{j=1}^{n}(c_j^k-p_j^k)x_j}{\sum_{j=1}^{n} p_j^k x_j + M} & \sum_{j=1}^{n}(c_j^k-p_j^k)x_j - M_k \le L_k \le \sum_{j=1}^{n} c_j^k x_j \\[2ex]
1 & \sum_{j=1}^{n}(c_j^k-p_j^k)x_j - M_k \ge L_k
\end{cases}
\tag{21}
$$

که در آن $M_k=U_k-L_k$ برای $(k=1,2,3,\dots,K_1)$.

گام پنجم: فرموله کردن مدل برنامه ریزی خطی کلاسیک با استفاده از روش (max-min) به صورت زیر:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad \lambda \\
&s.t. \\
&\sum_{j=1}^{n}(c_j{}^k - \lambda p_j{}^k)x_j - \lambda\left(U_k - L_k\right) \ge L_k && k = 1,2,3,\ldots,K_1, \\
&\sum_{j=1}^{n}(c_j{}^k + \lambda p_j{}^k)x_j + \lambda\left(U_k - L_k\right) \le U_k && k = K_1+1, K_1+2,\ldots,K, \\
&\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} - \lambda d_{ij}{}^{\cdot})x_j - \lambda b_i{}^{\cdot} \ge b_i && i = 1,2,3,\ldots,m_1, \\
&\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} + \lambda d_{ij}{}^{\cdot})x_j + \lambda b_i{}^{\cdot} \le b_i && i = m_1+1, m_1+2,\ldots,m_2, \\
&\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} - (1-\lambda)d_{ij}{}^{l})x_j + \lambda b_i{}^{r} \le b_i + b_i{}^{r} && i = m_2+1, m_2+2,\ldots,m, \\
&\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} + (1-\lambda)d_{ij}{}^{r})x_j - \lambda b_i{}^{l} \ge b_i - b_i{}^{l} && i = m_2+1, m_2+2,\ldots,m, \\
&0 \le \lambda \le 1 \;,\; x_j \ge 0 && j = 1,2,3,\ldots,n.
\end{aligned}
\tag{۲۲}
$$

تذکر ۴-۲. همان‌طور که در مساله (۲۲) مشخص است، عبارت‌های λx_j سبب می‌شود که برنامه‌ریزی خطی فوق، نامحدب باشد. لذا امکان دارد در صورت استفاده از روش‌های معمولی، جواب بهینه به دست آمده جواب سراسری نباشد. بنابراین در این‌جا از روش (fuzzy decisive set method) استفاده می‌شود [۶].

۵ مدل تغذیه بهینه برای بیماران مبتلا به هپاتیت در محیط فازی

هپاتیت التهاب گسترده کبدی است که معمولاً منشاء ویروسی دارد. به دلیل فعل و انفعالاتی که طی این بیماری در بدن رخ می‌دهد، بیماران مبتلا به هپاتیت دچار بی‌اشتهایی مفرط می‌شوند و در نتیجه مدت بسیار کوتاهی بخش اعظمی از وزن آنان از بین می‌رود، از این رو اولین نکته رفع بی‌اشتهایی این بیماران است [۷]. انرژی مورد نیاز در این بیماران ۴۰-۲۵ کیلو کالری به ازای کیلوگرم وزن ایده‌آل بدن ویا (مصرف انرژی پایه) ×۱/۴-۱/۱ می‌باشد [۸]. لذا می‌بایست میزان دریافتی انرژی روزانه افزایش یابد. اما با توجه به این‌که معمولاً در این بیماران کاهش اشتها، حالت تهوع و استفراغ وجود دارد، دریافت کافی انرژی دچار مشکل می‌شود، به ویژه که مصرف قندهای ساده و چربی‌های اشباع (که از منابع انرژی رژیم غذایی هستند) در این بیماران محدود می‌باشد. از طرفی کبد نقش مهمی در سوخت و ساز بدن دارد و در صورت تخریب آن انرژی کافی به بدن نمی‌رسد. این بیماران برای غلبه بر بی‌اشتهایی باید از غذاهای تحریک کننده اشتها استفاده کنند. در مورد میزان استفاده از مواد مغذی به کارگیری نکات زیر حائز اهمیت است. کربوهیدرات‌ها باید از نوع پیچیده باشد و ۵۵-۵۰ درصد انرژی دریافتی از آن‌ها تأمین شود [۸]. میزان نیاز پروتئین روزانه ۱/۵-۱/۲ گرم به ازای کیلوگرم وزن بدن در روز است که باید بیش از ۶۰ درصد آن از پروتئین با ارزش بالا باشد [۸]. در مورد میزان استفاده از چربی‌ها بر حسب تحمل

بیماری (۳۵-۳۰ درصد کل کالری) توصیه می‌شود. چربی‌های ترانس محدود شده و چربی اشباع نباید بیش از ۷ درصد انرژی را شامل شود. در مورد میزان دریافت ریزمغذی‌ها هم رعایت برخی نکات ضروری است. از میان ویتامین‌ها، ویتامین‌های گروه B، ویتامین C و K توصیه می‌شوند. تفاوت چندانی در مورد میزان استفاده از سایر ویتامین‌ها، املاح و مواد معدنی میان بیماران مبتلا به هپاتیت و افراد عادی جامعه به چشم نمی‌خورد. لذا آن‌چه که باید در تغذیه بیماران هپاتیتی مورد توجه قرار گیرد تهیه و تنظیم یک رژیم غذایی بر اساس ماکزیمم دریافت روزانه از انرژی و پروتئین است. لذا با در نظرگرفتن این مطلب به پیاده‌سازی مساله رژیم غذایی این بیماران به صورت یک مساله برنامه- ریزی خطی فازی با دو تابع هدف پرداخته شده است. اهداف مورد نظر در این برنامه غذایی عبارتند از ماکزیمم‌سازی انرژی دریافتی و هم‌چنین ماکزیمم‌سازی پروتئین دریافتی ضمن این‌که سایر احتیاجات غذایی بیمار اعم از ویتامین‌ها، املاح و مواد معدنی و سایر درشت مغذی‌ها نیز مرتفع گردد. مدل تغذیه را در حالت کلی به صورت زیر مطرح می‌گردد.

$$
\begin{aligned}
&Max \quad \tilde{Z}^{1} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j^{1} x_j \\
&Max \quad \tilde{Z}^{2} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j^{2} x_j \\
&s.t. \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j \geq \tilde{b}_i \qquad i = 1,2,3,\ldots,m, \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j \leq \tilde{d}_i \qquad i = 1,2,3,\ldots,m, \\
&\qquad x_j \geq 0 \qquad j = 1,2,\ldots,n.
\end{aligned} \tag{23}
$$

به طوری که:

x_j: ۱۰۰ گرم از ماده غذایی jام که در رژیم غذایی گنجانده شده است.

$\tilde{c}_j^{1}$: مقدار تقریبی انرژی دریافتی از ۱۰۰ گرم ماده غذایی jام.

$\tilde{c}_j^{2}$: مقدار تقریبی پروتئین موجود در ۱۰۰ گرم ماده غذایی jام.

$\tilde{a}_{ij}$: مقدار تقریبی ماده مغذی iام در ۱۰۰ گرم از ماده غذایی jام.

$\tilde{b}_i$: میزان مورد نیاز دریافتی روزانه از ماده مغذی iام.

$\tilde{d}_i$:حداکثر میزان مجاز دریافتی از ماده مغذی iام.

M: تعداد مواد مغذی به کارگرفته شده.

N: تعداد مواد غذایی به کارگرفته شده.

٦ مثال عددی

هدف از ارایه مثال زیر پیشنهاد یک رژیم غذایی بهینه برای افراد مبتلا به هپاتیت می‌باشد. البته رژیم ارایه شده در مثال زیر بهترین رژیم غذایی محسوب نمی‌شود و شاید تنوع غذایی درآن به چشم نیاید ولی این اطمینان وجود دارد که با به کاربستن این رژیم در وعده‌های غذایی زیاد با حجم کم (مثلاً ۶ وعده غذایی در روز) بیشترین میزان انرژی و پروتئین روزانه با توجه به محدودیت‌های مربوطه دریافت می‌شود. البته نقطه قوت این رژیم آن است که براساس داده‌های واقعی (پیاده‌سازی مدل در محیط فازی) شکل گرفته است. در زیر تعداد ۱۸ غذای مفید برای بیماران مبتلا به هپاتیت ذکر شده که برگرفته از تمامی گروه‌های غذایی است. این غذاها شامل نان، پنیر کم چرب، عدس پخته شده، مغز گردو، شکر، سیب، آلو، سینه مرغ، برنج سفید، روغن زیتون، پیاز، ماست کم چرب، اسفناج، گلابی، سیب‌زمینی، ماهی، گوجه فرنگی و شیرکم چرب می‌باشد. به دلیل تفاوت در الگوی غذایی مصرفی افراد، مطالعه موردی روی یک بیمار ۶۵ ساله با شاخص جرم بدن ($BMI=۲۳/۶۵kg/m^{۲}$) انجام گرفته است. بر اساس تحقیقات صورت گرفته، هرگرم چربی حدود ۹ کیلوکالری و هرگرم کربو هیدرات و هرگرم پروتئین حدود ۴ کیلوکالری، انرژی تولید کرده و فیبرها تولید کالری نمی‌کنند [۹]. بر همین اساس و هم‌چنین سایر اطلاعات دیگر احتیاجات غذایی مربوط به حداقل و حداکثر میزان دریافت روزانه از انواع مواد مغذی در جدول ۱ آمده است.

جدول ۱. حداقل و حداکثر نیاز روزانه به مواد مغذی (بیمار،مرد ۶۵ ساله، $BMI =۲۳/۶۵ kg/m^{۲}$)

مواد مغذی	حداقل نیاز روزانه	حداکثر نیاز روزانه	مواد مغذی	حداقل نیاز روزانه	حداکثر نیاز روزانه
انرژی(کیلوکالری)	۱۷۵۰	۲۸۰۰	فولات (میکروگرم)	۴۰۰	۱۰۰۰
قند(گرم)	N.D*	۱۲۴	ویتامین $B_{۱۲}$ (میکروگرم)	۲/۴	N.D
کربوهیدرات(گرم)	۲۴۰	۳۸۵	کلسیم(میلی گرم)	۱۰۰۰	۲۵۰۰
مجموع فیبر(گرم)	۲۰	۳۵	مس(میلی گرم)	۰/۹	۱۰
چربی(گرم)	۵۸/۳۳	۹۳/۳۳	آهن(میلی گرم)	۱۸	۴۵
پروتئین(گرم)	۸۴	۱۰۵	منزیم(میلی گرم)	۳۲۰	۳۵۰
ویتامین A(IU)	۲۳۳۳	۱۰۰۰۰	منگنز(میلی گرم)	۱/۸	۱۱
ویتامین C(میلی گرم)	۷۵	۲۰۰۰	فسفر(میلی گرم)	۷۰۰	۴۰۰۰
ویتامین E(میلی گرم)	۱۳	۱۰۰۰	سلنیم(میلی گرم)	۵۵	۴۰۰
تیامین(میلی گرم)	۱/۱	N.D	روی(میلی گرم)	۸	۴۰
ریبوفلاوین(میلی گرم)	۱/۱	N.D	پتاسیم(میلی گرم)	۳۵۰۰	N.D
نیاسین(میلی گرم)	۱۴	۳۵	سدیم(میلی گرم)	۵۵۰	۲۳۰۰
ویتامین $B_{۴}$ (میلی گرم)	۱/۳	۱۰۰			

[1] منظور از N.D آن است که مقدار مورد نظر مشخص نیست و یا بررسی نشده است.

متغیرهای تصمیم همان مواد غذایی هستند، حداکثر و حداقل میزان مجاز روزانه برای استفاده از ویتامین‌ها، مواد معدنی و هم‌چنین میزان انرژی دریافتی مجاز روزانه، به عنوان محدودیت‌های مساله در نظر گرفته می‌شوند. همان طور که در جدول ۱ مشاهده می‌شود، تعداد ۲۴ محدودیت از نوع" $\geq$ " و تعداد ۲۱ محدودیت از نوع" $\leq$ " وجود دارد. علت این تمایز به خاطر آن است که، اطلاعات مربوط به حداکثر و حداقل دریافتی روزانه از برخی مواد مغذی، نامشخص است.

اکنون مدل تغذیه‌ی فوق به صورت یک مساله برنامه‌ریزی خطی فازی با دو تابع هدف، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$
\begin{aligned}
& Max \quad \tilde{Z}^{1} = \sum_{j=1}^{18} \tilde{c}_j^{1} x_j \\
& Max \quad \tilde{Z}^{2} = \sum_{j=1}^{18} \tilde{c}_j^{2} x_j \\
& s.t. \\
& \qquad \sum_{j=1}^{18} \tilde{a}_{ij} x_j \geq \tilde{b}_i \qquad i = 1,2,3,\ldots,24, \\
& \qquad \sum_{j=1}^{18} \tilde{a}_{ij} x_j \leq \tilde{d}_i \qquad i = 1,2,3,\ldots,21, \\
& \qquad x_j \geq 0 \qquad\qquad j = 1,2,\ldots,18.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

حال با استفاده از مطالب گذشته مربوط به حل مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه فازی، به حل مثال پرداخته شده است. کلیه محاسبات با استفاده از نرم افزار محاسباتی MATLAB انجام گرفته و هم‌چنین اعداد مربوط به کلیه ضرایب اعم از ضرایب در تابع هدف‌ها، ماتریس ضرایب و اعداد سمت راست محدودیت‌ها در فایل ضمیمه آورده شده است. جواب بهینه مساله (۲۴) در جدول ۲ آمده است (سطح مطلوبیت $\lambda = 0/0486656$).

جدول ۲. جواب بهینه مربوط به مساله (۲۴)

X_1=۲/۸	X_{10}=۰/۳۲۱۴
X_2=۱/۱۷۴۰۵	X_{11}=۰
X_3=۳/۰۱۵۹۲	X_{12}=۳/۲۵۸۹
X_4=۰/۵	X_{13}=۰/۸۴۸۱۸
X_5=۰/۸۰۶۷	X_{14}=۰
X_6=۰	X_{15}=۱/۸۹۰۶۸
X_7=۰	X_{16}=۰
X_8=۰/۲۷۷۰۱	X_{17}=۰/۵۳۹۴۲
X_9=۰	X_{18}=۲

از آن‌جا که واحد مواد غذایی بر حسب ۱۰۰ گرم منظور شده است، لذا با تبدیل واحد برحسب گرم، جواب نهایی مربوط به مقدار هر ماده غذایی موجود در رژیم غذایی در جدول ۳ آورده شده است. باید توجه کرد که رژیم غذایی عنوان شده فقط برحسب رژیم پرکالری - پر پروتئین که برای بیماران مبتلا به هپاتیت ضروری است طراحی شده و برای تنوع بخشیدن به آن می‌توان در وعده‌های غذایی متعدد روزانه از آن بهره گرفت. به عنوان مثال، مقدار نان مصرفی روزانه برابر ۲۸۰ گرم است که بنا به سلیقه بیمار می‌تواند در وعده‌های غذایی متعدد مصرف شود به گونه‌ای که میزان کل مصرفی روزانه همان ۲۸۰ گرم باشد.

جدول ۳. مقدار موادا غذایی برحسب گرم در رژیم پرکالری- پرپروتئین

نان سنگک	۲۸۰	آلو	۰	اسفناج	۸۴/۸۱۸
پنیرکم چرب	۱۱۷/۴۰۵	سینه مرغ	۲۷/۷۰۱	گلابی	۰
عدس پخته شده	۳۰۱/۵۹۲	برنج سفید	۰	سیب زمینی پخته	۱۸۹/۰۶۸
مغز گردو	۵۰	روغن زیتون	۳۲/۱۴	ماهی	۰
شکر	۸۰/۶۷	پیاز	۰	گوجه فرنگی	۵۳/۹۴۲
سیب	۰	ماست کم چرب	۳۲۵/۸۹	شیر کم چرب	۲۰۰

۷ نتیجه‌گیری

موضوع تغذیه بهینه فازی به دلیل احتساب عدم قطعیت در داده‌های موجود مرتبط با مواد مغذی در انواع مواد غذایی، بسیار حائز اهمیت است. نیازهای تغذیه‌ای متنوع در افراد، بر اساس جنسیت و نوع فعالیت، میزان فعالیت، موقعیت سلامت و ... بسیار مورد توجه است. حتی افرادی با یک جنس و یک سن، بر اساس منطقه جغرافیایی که زندگی می‌کنند، دارای نیازهای تغذیه‌ای متفاوتی هستند. اهمیت موضوع در ارتباط با افراد با بیماری‌های خاص، به عنوان مثال بیماران مبتلا به هپاتیت، بیشتر است و کاربرد نظریه فازی در تغذیه این افراد، بیشتر به چشم می‌آید. از مقایسه نتایج حاصل از مدل‌های موجود قبلی و مدل پیشنهادی با استفاده از برنامه‌ریزی چند هدفه‌ی فازی در این تحقیق، کارآمدی مدل پیشنهادی به خوبی مشهود است. همان‌طورکه مشاهده شد، اعداد به کار رفته در مدل تغذیه بهینه بیماران دیابتی در محیط فازی، به صورت اعداد فازی به کارگرفته شدند که بر این اساس، موضوع عدم قطعیت در داده‌های قبلی را تحت پوشش قرار داده و با دید واقعی به مساله تغذیه نگریسته شد. برخی اوقات، تصورات اشتباهی در مورد مقایسه "منطق فازی" و "واقعیت" وجود دارد. به عنوان مثال، آیا حل مسایل مختلف در محیط فازی به واقعیت نزدیک‌تر است یا در محیط کلاسیک؟ آیا جواب‌هایی که در محیط فازی حاصل می‌شوند، به جواب‌های به دست آمده در حالت کلاسیک، نزدیک هستند؟ در این تحقیق و مطالعات مشابه درمی‌یابیم که، پدیده‌های دنیای واقعی به دلیل عدم قطعیت بایستی در محیط فازی بررسی شوند. هم‌چنین با تغییر دیدگاه‌های قبلی، می‌بایست ملاک عمل و تصمیم‌گیری را در محیط فازی جستجو نمود و سوال دوم را به گونه‌ای دیگر مطرح کنیم. آیا جواب‌هایی که در محیط کلاسیک و قاطع حاصل می‌شوند به جواب‌های

واقعی نزدیک هستند؟ به هر حال روش پیشنهادی در این تحقیق یک روش نوین برای تعیین برنامه رژیم غذایی بیماران هپاتیتی با اهداف از پیش تعیین شده می‌باشد که یکی از کاربردهای ریاضیات فازی را در علم پزشکی به تصویر می‌کشد.

منابع

[1] Mamat, M., Rokhayati, Y., Mohamad Noor, N., Mohd, I., (2011). Optimizing Human Diet Problem with Fuzzy Price Using Fuzzy Linear Programming Approach,Pakistan Journal of Nutrition 10 (6), 594-598.

[2] Tanaka, H., Okuda, T., Asai, K., (1974). On fuzzy mathematical programming, The Journal of Cybernetics, 3, 37-46.

[3] Bellman, R. E., Zadeh, L. A., (1970). Decision-making in a fuzzy environment, Management Science 17, B141–B164.

[4] Zimmermann, H. J., (1987). Fuzzy set, decision making and expert systems, Kluwer Academi Publisher.

[5] Jana, B., Kumar Roy, T., (2005). Multi-objective Fuzzy Linear Programming and Application in Transportation Model,Tamsui Oxford Journal of Mathematical Scieces 21(2), 243-268.

[6] Sakawa, M., Yano, H., (1985). Interactive decision making for multi-objective linear fractional programming problems with fuzzy parameters. Cybernetics Systems 16, 377-394.

[7] Mendenhall, C. L., Anderson, S., Weesner, R. E., et al., (1984). Protein-calorie malnutrition associated with alcoholic hepatitis. Am J Med, 76, 211-222.

[8] Nompleggi, D. J., Bonkovsky, H. L., (1994). Nutritional Supplementation in Chronic Liver Disease: An Analytical Review. Hepatology, 19, 519-533.

[9] Raffensperger, J. F., (2008). The least-cost low-carbohydrate diet is expensive. Nutr. Res,28, 6-12.

[10] USDA National Nutrient Database [http://www.nal.usda.gov/fnic/foodcomp/search/]

ضمیمه

$\tilde{C}^{۱} =$

(۲۴۴،۲۴۷،۲۴۷)(۷۰،۷۲،۷۲)(۱۱۲،۱۱۶،۱۱۶)(۶۵۲،۶۵۴،۶۵۴)(۳۸۴،۳۸۷،۳۸۷)(۵۲،۵۲،۵۲)(۴۶،۴۶،۴۶)(۱۶۵،۱۶۵،۱۶۵)(۹۶،۹۷،۹۷)

(۸۸۳،۸۸۴،۸۸۴)(۴۰،۴۰،۴۰)(۶۱،۶۳،۶۳)(۲۳،۲۳،۲۳)(۵۷،۵۸،۵۸)(۹۱،۹۳،۹۳)(۱۹۳،۱۹۵،۱۹۵)(۱۷،۱۸،۱۸)(۴۹،۵۰،۵۰)

$\tilde{C}^{۲} =$

(۱۲،۱۳،۱۳)(۱۲و۱۲/۳ و ۱۲/۳)(۸،۹،۹) (۱۴/۱۵،۹/۱۵،۲/۲) (۰،۰،۰) (۰/۳و۰/۳و۰/۳) (۰/۷و۰/۷و۰/۷) (۳۰،۳۱،۳۱)(۲،۲،۲)(۰،۰،۰)(۱/۱ ،۱/۱ ،۱/۱)

(۵/۱و۵/۱ و ۵/۵)(۲/۸و۲/۹ و ۲/۹)(۰/۳و۰/۴ و ۰/۴)(۲/۵و۲/۵ و ۲/۵)(۱۳/۴و۱۳/۴ و ۱۳/۴)(۰/۹و۰/۹ و ۰/۹)(۳/۳و۳/۳ و ۳/۳)

در این‌جا داریم:

$$\tilde{c}_{۱}^{۱} = (۲۴۴,۲۴۷,۲۴۷)\ \tilde{c}_{۱}^{۲} = (۷۰,۷۲,۷۲)$$
$$\tilde{c}_{۲}^{۱} = (۱۲,۱۳,۱۳),\ \tilde{c}_{۲}^{۲} = (۱۲,۱۲/۳,۱۲/۳)$$

هم‌چنین برای دیگر اعداد هم به همین ترتیب است. حداقل و حداکثرمقدار مجاز دریافتی از مواد مغذی به صورت اعداد فازی در زیرآورده شده است.

$\tilde{b} =$

(۲۳۵،۲۴۰،۲۴۰)(۱۸،۲۰،۲۰)(۵۸/۳ و۵۸/۳و۵۵)(۸۱،۸۴،۸۴)(۲۳۳۰،۲۳۳۳،۲۳۳۳)(۷۳،۷۵،۷۵)(۱۱،۱۳،۱۳)(۱/۱ و۱/۱و۱/۱)(۱/۱ و۱/۱و۱/۱)

(۱/۸ و۱/۵و۱/۵)(۱۲،۱۴،۱۴)(۱.۳،۱،۱.۳)(۳۹۷،۴۰۰،۴۰۰)(۲،۲.۴،۲.۴)(۹۹۰،۱۰۰۰،۱۰۰۰)(۰.۸،۰.۹،۰.۹)(۱۶،۱۸،۱۸)(۳۱۶،۳۲۰،۳۲۰)

(۶۹۵،۷۰۰،۷۰۰)(۵۱،۵۵،۵۵)(۷،۸،۸)(۳۴۹۵،۳۵۰۰،۳۵۰۰)(۵۴۵،۵۵۰،۵۵۰)(۱۷۴۰،۱۷۵۰،۱۷۵۰)

$\tilde{d} =$

(۱۲۴،۱۲۴،۱۲۶)(۳۸۵،۳۸۵،۳۸۷)(۳۵،۳۵،۳۷)(۹۳/۹۳،۳۳/۹۵،۳۳)(۱۰۵،۱۰۵،۱۰۷)(۱۰۰۰۰،۱۰۰۰۰،۱۰۰۰۵)(۲۰۰۰،۲۰۰۰،۲۰۱۰)

(۱۰۰۰،۱۰۰۰،۱۰۰۵)(۳۵،۳۵،۳۶)(۱۰۰،۱۰۰،۱۰۳)(۱۰۰۰،۱۰۰۰،۱۰۰۵)(۲۵۰۰،۲۵۰۰،۲۵۵۰)(۱۰،۱۰،۱۲)(۴۵،۴۵،۴۷)(۳۷۰،۳۷۰،۳۷۵)

(۱۱،۱۱،۱۲)(۴۰۰۰،۴۰۰۰،۴۰۵۰)(۴۰۰،۴۰۰،۴۱۰)(۴۰،۴۰،۴۵)(۲۳۰۰،۲۳۰۰،۲۳۲۰)(۲۸۰۰،۲۸۰۰،۲۸۳۰)

در این‌جا داریم:

$$\tilde{b}_۱ = (۲۳۵,۲۴۰,۲۴۰),\ \tilde{b}_۲ = (۱۸,۲۰,۲۰),\ \tilde{d}_۱ = (۱۲۴,۱۲۴,۱۲۶),\ \tilde{d}_۲ = (۳۸۵,۳۸۵,۳۸۷)$$

هم‌چنین برای دیگر اعداد هم به همین ترتیب است.

تذکر: اعداد اولیه مربوط به میزان مواد مغذی موجود در ۱۰۰ گرم از مواد غذایی مختلف از مرجع اطلاعات وزارت کشاورزی ایالات متحده آمریکا اقتباس شده [۱۰] که به دلیل عدم قطعیت ، اعداد فازی مربوطه به صورت زیر داده شده است.

ستون‌های ماتریس قیود مربوط به نامساوی "≥"

ستون‌های ۱ تا ۹

(۵/۶و۵/۶و۵/۶)	(۲/۷ و۲/۷و۲/۶)	(۱/۸ و۱/۷و۱/۷)	(۲/۶ و۲/۶و۲/۶)	(۹۹/۹ و۹۹/۹و۹۹/۸)	(۱۰/۴ و۱۰/۳و۱۰/۳)	(۹/۹،۹/۹،۹/۹)	(۰،۰،۰)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)
(۸/۶ و۸/۶و۷/۶)	(۰ و۰و۰)	(۹/۷ و۹/۷و۹/۷)	(۷/۶ و۷/۶و۷/۶)	(۰ و۰و۰)	(۲/۴ و۲/۳و۲/۳)	(۱/۱،۳/۱،۴/۴)	(۰،۰،۰)	(۱،۱،۱)
(۳/۱ و۳/۱و۳/۱)	(۱،۱،۱)	(۰/۴ و۰/۴و۰/۴)	(۲/۶ و۲/۶و۲/۶)	(۰ و۰و۰)	(۰/۲ و۰/۲و۰/۲)	(۰/۳ و۰/۳و۰/۳)	(۳/۶ و۳/۶و۳/۵)	(۰/۲ و۰/۲و۰/۲)
(۱۲،۱۳،۱۳)	(۱۲/۴ و۱۲/۳و۱۲/۳)	(۸،۹،۹)	(۱۵/۲ و۱۵/۲و۱۴/۹)	(۰ و۰و۰)	(۰/۳ و۰/۳و۰/۳)	(۰/۷ و۰/۷و۰/۷)	(۳۱،۳۰،۳۱)	(۲،۲،۲)
(۳،۳،۳)	(۴۰،۴۱،۴۱)	(۷،۸،۸)	(۱۸،۲۰،۲۰)	(۰ و۰و۰)	(۵۳،۵۴،۵۴)	(۳۴۴،۳۴۵،۳۴۵)	(۱۹،۲۱،۲۱)	(۰ و۰و۰)
(۰،۰،۰)	(۰ و۰و۰)	(۱/۵ و۱/۵و۱/۴)	(۳/۱ و۳/۱و۲/۱)	(۰ و۰و۰)	(۶/۴ و۶/۴و۵/۴)	(۹/۵ و۹/۵و۹/۵)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)
(۰/۵ و۰/۵و۰/۵)	(۰ و۰و۰)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۰/۷ و۰/۷و۰/۶)	(۰ و۰و۰)	(۰/۲ و۰/۲و۰/۲)	(۰/۳ و۰/۳و۰/۳)	(۰/۳ و۰/۳و۰/۳)	(۰ و۰و۰)
(۰/۵ و۰/۵و۰/۵)	(۰ و۰و۰)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۰/۷ و۰/۷و۰/۶)	(۰ و۰و۰)	(۰/۲ و۰/۲و۰/۲)	(۰/۳ و۰/۳و۰/۳)	(۰/۳ و۰/۳و۰/۳)	(۰ و۰و۰)
(۰/۴ و۰/۴و۰/۳)	(۰ و۰و۰)	(۰/۲ و۰/۲و۰/۲)	(۰/۳ و۰/۳و۰/۳)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۰ و۰و۰)
(۰/۱۵ و۰/۲و۰/۲)	(۰/۲ و۰/۲و۰/۲)	(۰/۲ و۰/۲و۰/۲)	(۰/۲ و۰/۲و۰/۲)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۰ و۰و۰)
(۴/۷ و۴/۶و۴/۶)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۱/۱ و۱/۱و۱/۱)	(۱/۱ و۱/۱و۱/۱)	(۰ و۰و۰)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۰/۴ و۰/۴و۰/۳)	(۱۳/۷ و۱۳/۷و۱۳/۴)	(۰/۳ و۰/۳و۰/۳)
(۰/۲ و۰/۲و۰/۲)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۰/۲ و۰/۲و۰/۲)	(۰/۵ و۰/۵و۰/۴)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)	(۰/۶ و۰/۶و۰/۵)	(۰ و۰و۰)
(۵۰،۵۰،۴۹)	(۱۱،۱۲،۱۲)	(۱۷۹،۱۸۱،۱۸۱)	(۹۷،۹۸،۹۸)	(۰ و۰و۰)	(۳،۳،۳)	(۵،۵،۵)	(۴،۴،۴)	(۱،۱،۱)
(۰،۰،۰)	(۰/۶ و۰/۶و۰/۵)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)	(۰/۳ و۰/۳و۰/۲)	(۰ و۰و۰)
(۱۰۷،۱۰۷،۱۰۵)	(۶۱،۶۱،۶۱)	(۱۸،۱۹،۱۹)	(۹۸،۹۸،۹۸)	(۱،۱،۱)	(۶،۶،۶)	(۶،۶،۶)	(۱۴،۱۵،۱۵)	(۲،۲،۲)
(۰/۴ و۰/۳و۰/۳)	(۰ و۰و۰)	(۰/۳ و۰/۳و۰/۳)	(۱/۶ و۱/۶و۱/۶)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)
(۳/۲ و۲/۴و۲/۴)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۳/۴ و۳/۳و۳/۳)	(۲/۹ و۲/۹و۲/۹)	(۰ و۰و۰)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۰/۲ و۰/۲و۰/۲)	(۱،۱،۱)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)
(۸۲،۸۲،۸۰)	(۵،۵،۵)	(۳۶،۳۶،۳۶)	(۱۵۶،۱۵۸،۱۵۸)	(۰ و۰و۰)	(۵،۵،۵)	(۷،۷،۷)	(۲۹،۲۹،۲۹)	(۴،۵،۵)
(۲/۱ و۲/۱و۲/۱)	(۰ و۰و۰)	(۱/۵ و۱/۵و۱/۳)	(۳/۴ و۳/۴و۳/۴)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۰ و۰و۰)	(۰/۳ و۰/۳و۰/۳)
(۲۰۲،۲۰۲،۲۰۰)	(۱۳۳،۱۳۴،۱۳۴)	(۱۸۰،۱۸۰،۱۸۰)	(۳۴۶،۳۴۶،۳۴۶)	(۰ و۰و۰)	(۱۱،۱۱،۱۱)	(۱۶،۱۶،۱۶)	(۲۲۶،۲۲۸،۲۲۸)	(۸،۸،۸)
(۴۰/۶ و۳۸/۳و۳۸/۳)	(۹،۹،۹)	(۲/۸ و۲/۶و۲/۶)	(۴/۹ و۴/۸و۴/۸)	(۰/۶ و۰/۶و۰/۵)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)	(۲۷/۶ و۲۷/۶و۲۷/۶)	(۵/۶ و۵/۶و۵/۲)
(۱/۸ و۱/۶و۱/۶)	(۰/۴ و۰/۴و۰/۴)	(۳/۱ و۳/۱و۳/۱)	(۱/۳ و۱/۳و۱/۳)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۱،۱،۱)	(۰/۴ و۰/۴و۰/۴)
(۲۴۶،۲۴۸،۲۴۸)	(۸۵،۸۶،۸۶)	(۳۶۸،۳۶۹،۳۶۹)	(۴۴۱،۴۴۱،۴۴۱)	(۲،۲،۲)	(۱۰۴،۱۰۷،۱۰۷)	(۱۵۷،۱۵۶،۱۵۷)	(۲۵۶،۲۵۶،۲۵۶)	(۱۰،۱۰،۱۰)
(۴۶۹،۴۷۲،۴۷۲)	(۴۰۵،۴۰۶،۴۰۶)	(۲،۲،۲)	(۲،۲،۲)	(۰ و۰و۰)	(۱،۱،۱)	(۰ و۰و۰)	(۷۳،۷۴،۷۴)	(۵،۵،۵)
(۲۴۴،۲۴۷،۲۴۷)	(۷۰،۷۲،۷۲)	(۱۱۲،۱۱۶،۱۶۶)	(۶۵۲،۶۵۴،۶۵۴)	(۳۸۴،۳۸۷،۳۸۷)	(۵۲،۵۲،۵۲)	(۴۶،۴۶،۴۶)	(۱۶۵،۱۶۵،۱۶۵)	(۹۶،۹۷،۹۷)

ستون‌های ۱۰ تا ۱۸

(۵.۱،۵.۱،۵.۱)	(۲/۶ و۲/۶و۲/۵)	(۰ و۰و۰)	(۱/۲ و۱/۲و۱/۱)	(۹/۸ و۹/۸و۹/۷)	(۰/۴ و۰/۴و۰/۳)	(۸و۷و۶/۷)	(۴/۲، ۴/۲، ۴/۱)	(۰ و۰و۰)
(۰،۰،۰)	(۱/۲ و۱/۲و۱/۲)	(۰ و۰و۰)	(۲/۲ و۲/۲و۲/۲)	(۳/۱ و۳/۱و۳/۱)	(۲/۲ و۲/۲و۲/۱)	(۰ و۰و۰)	(۱/۷ و۱/۷و۱/۶)	(۰ و۰و۰)
(۱.۹،۲،۲)	(۰/۲ و۰/۲و۰/۲)	(۱۵/۳ و۱۵/۳و۱۵/۲)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۰/۴ و۰/۴و۰/۴)	(۱/۵ و۱/۵و۱/۵)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۱۰۰،۱۰۰،۱۰۰)
(۳.۳،۳.۳،۳.۳)	(۰/۹ و۰/۹و۰/۹)	(۱۳/۴ و۱۳/۴و۱۳/۴)	(۲.۵،۲.۵،۲.۵)	(۰/۴ و۰/۴و۰/۳)	(۲/۹ و۲/۹و۲/۸)	(۵/۲ و۵/۲و۵/۱)	(۱/۱ و۱/۱و۱/۱)	(۰ و۰و۰)
(۱۸۸،۱۸۹،۱۸۹)	(۸۳۳،۸۳۳،۸۳۱)	(۳۰۹،۳۱۰،۳۱۰)	(۱۰،۱۰،۱۰)	(۲۲،۲۳،۲۳)	(۹۳۷۶،۹۳۷۶،۹۳۷۲)	(۵۱،۵۱،۵۰)	(۲،۲،۲)	(۰ و۰و۰)
(۰/۲ و۰/۲و۰/۲)	(۱۲/۷ و۱۲/۷و۱۲/۴)	(۰ و۰و۰)	(۹/۶، ۹/۶، ۹/۴)	(۴/۲، ۴/۲، ۴/۱)	(۲۸/۱ و۲۸/۱و۲۷/۹)	(۰/۸ و۰/۸و۰/۸)	(۷/۴ و۷/۳و۷/۳)	(۰ و۰و۰)
(۰،۰،۰)	(۰/۵ و۰/۵و۰/۵)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۲ و۲و۱/۹)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)	(۱۴۲،۱۴۳،۱۴۳)
(۰،۰،۰)	(۰/۵ و۰/۵و۰/۵)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۲ و۲و۱/۹)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)	(۱۴۲،۱۴۳،۱۴۳)
(۰،۰،۰)	(۰ و۰و۰)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۰ و۰و۰)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)
(۰/۲ و۰/۲و۰/۲)	(۰ و۰و۰)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)	(۲ و۲و۰/۱۵)	(۰/۲ و۰/۲و۰/۱۵)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)
(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۰/۶، ۰/۶، ۰/۶)	(۴، ۴، ۳/۵)	(۱/۴ و۱/۴و۱/۴)	(۰/۲ و۰/۲و۰/۲)	(۰/۷ و۰/۷و۰/۶)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۰ و۰و۰)
(۰،۰،۰)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۰/۳ و۰/۳و۰/۳)	(۰/۳ و۰/۳و۰/۲)	(۰ و۰و۰)	(۰/۲ و۰/۲و۰/۲)	(۰ و۰و۰)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۰ و۰و۰)
(۵،۵،۵)	(۱۵،۱۵،۱۵)	(۱۴،۱۵،۱۵)	(۲۶،۲۸،۲۸)	(۶،۷،۷)	(۱۹۳،۱۹۴،۱۹۴)	(۹،۱۱،۱۱)	(۱۸،۱۹،۱۹)	(۰ و۰و۰)
(۰/۵ و۰/۵و۰/۵)	(۰ و۰و۰)	(۱/۵ و۱/۵و۱/۴)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)	(۰/۶ و۰/۶و۰/۵)	(۰،۰،۰)	(۰ و۰و۰)
(۱۱۶،۱۱۷،۱۱۷)	(۱۰،۱۰،۱۰)	(۳۵،۳۵،۳۵)	(۱۵،۱۵،۱۵)	(۹،۹،۹)	(۹۹،۹۹،۹۹)	(۱۸۲،۱۸۳،۱۸۳)	(۲۳،۲۳،۲۳)	(۱،۱،۱)
(۰،۰،۰)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۰ و۰و۰)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)
(۰،۰،۰)	(۰/۳ و۰/۳و۰/۳)	(۱/۳ و۱/۳و۱/۲)	(۱/۱ و۱/۱و۱/۱)	(۰/۲ و۰/۲و۰/۲)	(۲/۷ و۲/۷و۲/۷)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۰/۲ و۰/۲و۰/۲)	(۰/۶ و۰/۶و۰/۶)
(۱۱،۱۱،۱۰)	(۱۱،۱۱،۱۱)	(۵۳،۵۵،۵۵)	(۲۸،۲۸،۲۸)	(۷،۷،۷)	(۷۹،۷۹،۷۹)	(۱۷،۱۷،۱۷)	(۱۰،۱۰،۱۰)	(۰ و۰و۰)
(۰،۰،۰)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۰ و۰و۰)	(۰/۲ و۰/۲و۰/۲)	(۰ و۰و۰)	(۰/۹ و۰/۹و۰/۸)	(۰ و۰و۰)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۰ و۰و۰)
(۹۴،۹۳،۹۴)	(۲۴،۲۴،۲۴)	(۱۶۶،۱۶۸،۱۶۸)	(۷۰،۷۰،۷۰)	(۱۱،۱۱،۱۱)	(۴۸،۴۹،۴۹)	(۱۴۳،۱۴۴،۱۴۴)	(۲۹،۲۹،۲۹)	(۰ و۰و۰)
(۲/۵ و۲/۵و۲/۳)	(۰ و۰و۰)	(۳۶/۵ و۳۶/۵و۳۵)	(۰/۴ و۰/۴و۰/۴)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۱ و۱و۰/۹)	(۳/۳ و۳/۳و۳/۳)	(۰/۵ و۰/۵و۰/۵)	(۰ و۰و۰)
(۰/۴ و۰/۴و۰/۴)	(۰/۲ و۰/۲و۰/۲)	(۰/۳ و۰/۳و۰/۳)	(۰/۴ و۰/۴و۰/۴)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۰/۵ و۰/۵و۰/۵)	(۰/۹ و۰/۹و۰/۸)	(۰/۲ و۰/۲و۰/۲)	(۰ و۰و۰)
(۱۵۰،۱۵۰،۱۵۰)	(۲۳۷،۲۳۷،۲۳۷)	(۳۵۶،۳۵۸،۳۵۸)	(۵۳۵،۵۳۵،۵۳۵)	(۱۱۷،۱۱۹،۱۱۹)	(۵۵۸،۵۵۸،۵۵۸)	(۲۳۳،۲۳۴،۲۳۴)	(۱۴۶،۱۴۶،۱۴۶)	(۱،۱،۱)
(۳۹،۴۱،۴۱)	(۵،۵،۵)	(۵۴،۵۶،۵۶)	(۱۰،۱۰،۱۰)	(۱،۱،۱)	(۷۹،۷۹،۷۹)	(۶۸،۷۰،۷۰)	(۴،۴،۴)	(۲،۲،۲)
(۴۹،۵۰،۵۰)	(۱۷،۱۸،۱۸)	(۱۹۳،۱۹۵،۱۹۵)	(۹۱،۹۳،۹۳)	(۵۷،۵۸،۵۸)	(۲۳،۲۳،۲۳)	(۶۱،۶۳،۶۳)	(۴۰،۴۰،۴۰)	(۸۸۳،۸۸۴،۸۸۴)

ستون‌های ماتریس قیود مربوط به نامساوی "≤"

ستون‌های ۱ تا ۹

(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۰ و۰و۰)	(۹/۹ و۹/۹و۹/۹)	(۱۰/۵ و۱۰/۴و۱۰/۴)	(۱۰۰و۹۹/۹و۹۹/۹)	(۲/۶ و۲/۶و۲/۶)	(۱/۹ و۱/۸و۱/۸)	(۲/۸ و۲/۸و۲/۸)	(۵/۷ و۵/۶و۵/۶)
(۱،۱،۱)	(۰ و۰و۰)	(۱/۵ و۱/۴و۱/۴)	(۲/۵ و۲/۴و۲/۴)	(۰ و۰و۰)	(۶/۷ و۶/۷و۶/۷)	(۷/۹ و۷/۹و۷/۹)	(۰ و۰و۰)	(۶/۹ و۶/۸و۶/۸)
(۰/۲ و۰/۲و۰/۲)	(۳/۷و۳/۶و۳/۶)	(۰/۳ و۰/۳و۰/۳)	(۰/۲ و۰/۲و۰/۲)	(۰ و۰و۰)	(۶۵/۵ و۶۵/۲و۶۵/۲)	(۰/۴ و۰/۴و۰/۴)	(۱،۱،۱)	(۳/۵ و۳/۵و۳/۵)
(۲،۲،۲)	(۳۱،۳۱،۳۲)	(۰/۷ و۰/۷و۰/۷)	(۰/۳ و۰/۳و۰/۳)	(۰ و۰و۰)	(۱۵/۵و۱۵/۲و۱۵/۲)	(۹،۹،۱۰)	(۱۲/۵ و۱۲/۴و۱۲/۴)	(۱۳،۱۳،۱۴)
(۰ و۰و۰)	(۲۱،۲۱،۲۳)	(۳۴۵،۳۴۵،۳۴۶)	(۵۴،۵۴،۵۵)	(۰ و۰و۰)	(۲۰،۲۲،۲۲)	(۸،۸،۹)	(۴۲،۴۱،۴۱)	(۳،۳،۳)
(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)	(۹/۵ و۹/۵و۹/۵)	(۴/۷ و۴/۶و۴/۶)	(۰ و۰و۰)	(۱/۴ و۱/۳و۱/۳)	(۱.۵،۱.۵،۱.۶)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)
(۰ و۰و۰)	(۰/۳ و۰/۳و۰/۳)	(۰/۳ و۰/۳و۰/۳)	(۰/۲ و۰/۲و۰/۲)	(۰ و۰و۰)	(۰/۸ و۰/۷و۰/۷)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۰ و۰و۰)	(۰/۵ و۰/۵و۰/۵)
(۰ و۰و۰)	(۰/۳ و۰/۳و۰/۳)	(۰/۳ و۰/۳و۰/۳)	(۰/۲ و۰/۲و۰/۲)	(۰ و۰و۰)	(۰.۷،۰.۷،۰.۸)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۰ و۰و۰)	(۰/۵ و۰/۵و۰/۵)
(۰ و۰و۰)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)	(۰/۳ و۰/۳و۰/۳)	(۰/۲ و۰/۲و۰/۲)	(۰ و۰و۰)	(۰/۵ و۰/۴و۰/۴)
(۰ و۰و۰)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)	(۰/۲ و۰/۲و۰/۲)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۰/۲ و۰/۲و۰/۲)	(۰/۲۵ و۰/۲و۰/۲)
(۰/۳ و۰/۳و۰/۳)	(۱۴و۱۳/۷و۱۳/۷)	(۰/۵ و۰/۴و۰/۴)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۰ و۰و۰)	(۱/۱ و۱/۱و۱/۱)	(۱/۱ و۱/۱و۱/۱)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۴/۸ و۴/۸و۴/۷)
(۰ و۰و۰)	(۰/۷ و۰/۶و۰/۶)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)	(۰/۶ و۰/۵و۰/۵)	(۰/۲ و۰/۲و۰/۲)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۰/۲ و۰/۲و۰/۲)
(۱،۱،۱)	(۴،۴،۴)	(۵،۵،۵)	(۳،۳،۳)	(۰ و۰و۰)	(۹۸،۹۸،۹۹)	(۱۸۱،۱۸۱،۱۸۳)	(۱۲،۱۲،۱۳)	(۵۰،۵۱،۵۱)
(۰ و۰و۰)	(۰/۴ و۰/۳و۰/۳)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)	(۰/۷ و۰/۶و۰/۶)	(۰ و۰و۰)
(۲،۲،۲)	(۱۵،۱۵،۱۶)	(۶،۶،۶)	(۶،۶،۶)	(۱،۱،۱)	(۹۸،۹۸،۹۸)	(۱۹،۱۹،۲۰)	(۶۱،۶۱،۶۱)	(۱۰۷،۱۰۹،۱۰۷)
(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)	(۱/۶ و۱/۶و۱/۶)	(۰/۳ و۰/۳و۰/۳)	(۰ و۰و۰)	(۰/۵ و۰/۵و۰/۴)
(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۱،۱،۱)	(۰/۲ و۰/۲و۰/۲)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۰ و۰و۰)	(۲/۹ و۲/۹و۲/۹)	(۳/۳ و۳/۳و۳/۳)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۲/۴ و۲/۴و۲/۴)
(۶،۵،۵)	(۲۹،۲۹،۲۹)	(۷،۷،۷)	(۵،۵،۵)	(۰ و۰و۰)	(۱۵۸،۱۵۸،۱۶۰)	(۳۶،۳۶،۳۶)	(۵،۵،۵)	(۸۲،۸۲،۸۴)
(۰/۳ و۰/۳و۰/۳)	(۰ و۰و۰)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)	(۳/۴ و۳/۴و۳/۴)	(۱/۷ و۱/۵و۱/۵)	(۰ و۰و۰)	(۲ و۲/۱و۲/۱)
(۸،۸،۸)	(۲۲۸،۲۳۰،۲۲۸)	(۱۶،۱۶،۱۶)	(۱۱،۱۱،۱۱)	(۰ و۰و۰)	(۳۴۶،۳۴۶،۳۴۶)	(۱۸۰،۱۸۰،۱۸۰)	(۱۳۴،۱۳۴،۱۳۵)	(۲۰۲،۲۰۲،۲۰۴)
(۵/۷ و۵/۶و۵/۶)	(۲۷/۶ و۲۷/۶و۲۷/۶)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)	(۰/۶ و۰/۶و۰/۶)	(۵ و۴/۹و۴/۹)	(۳ و۲/۸و۲/۸)	(۹،۹،۹)	(۴۲ و۴۰/۳و۴۰/۳)
(۰/۴ و۰/۴و۰/۴)	(۱،۱،۱)	(۰/۱ و۰/۱و۰/۱)	(۰ و۰و۰)	(۰ و۰و۰)	(۲/۱ و۳/۱و۳/۱)	(۱/۳ و۱/۳و۱/۳)	(۰/۴ و۰/۴و۰/۴)	(۲ و۱/۸و۱/۸)
(۱۰،۱۰،۱۰)	(۲۵۶،۲۵۶،۲۵۶)	(۱۵۷،۱۵۷،۱۵۸)	(۱۰۷،۱۰۷،۱۱۰)	(۲،۲،۲)	(۴۴۱،۴۴۱،۴۴۱)	(۳۶۹،۳۶۹،۳۷۰)	(۸۶،۸۶،۸۷)	(۲۴۸،۲۴۸،۲۵۰)
(۵،۵،۵)	(۷۴،۷۴،۷۵)	(۰ و۰و۰)	(۱،۱،۱)	(۰ و۰و۰)	(۲،۲،۲)	(۲،۲،۲)	(۴۰۶،۴۰۶،۴۰۷)	(۴۷۲،۴۷۲،۴۷۵)
(۹۷،۹۷،۹۸)	(۱۶۵،۱۶۵،۱۶۵)	(۴۶،۴۶،۴۶)	(۵۲،۵۲،۵۲)	(۳۸۷،۳۸۷،۳۹۰)	(۶۵۴،۶۵۴،۶۵۴)	(۱۶۶،۱۶۶،۱۷۰)	(۷۲،۷۲،۷۴)	(۲۴۷،۲۴۷،۲۵۰)

ستون‌های ۱۰ تا ۱۸

(۵/۱ و۵/۱ و۵/۱)	(۲/۷ و۲/۶ و۲/۶)	(۰ و۰ و۰)	(۱/۳ و۱/۲ و۱/۲)	(۹/۹ و۹/۸ و۹/۸)	(۰/۵ و۰/۴ و۰/۴)	(۷/۲ و۷ و۷)	(۴/۳ و۴/۲ و۴/۲)	(۰ و۰ و۰)
(۰ و۰ و۰)	(۱/۲ و۱/۲ و۱/۲)	(۰ و۰ و۰)	(۲/۳ و۲/۲ و۲/۲)	(۳/۲ و۳/۱ و۳/۱)	(۲/۳ و۲/۲ و۲/۲)	(۰ و۰ و۰)	(۱/۸ و۱/۷ و۱/۷)	(۰ و۰ و۰)
(۲/۱ و۲ و۲)	(۰/۲ و۰/۲ و۰/۲)	(۱۵/۴ و۱۵/۳ و۱۵/۳)	(۰/۱ و۰/۱ و۰/۱)	(۰/۱ و۰/۱ و۰/۱)	(۰/۴ و۰/۴ و۰/۴)	(۱/۵ و۱/۵ و۱/۵)	(۰/۱ و۰/۱ و۰/۱)	(۱۰۰،۱۰۰،۱۰۰)
(۳/۳ و۳/۳ و۳/۳)	(۰/۹ و۰/۹ و۰/۹)	(۱۳.۴،۱۳.۴،۱۳.۴)	(۲/۵ و۲/۵ و۲/۵)	(۰/۵ و۰/۴ و۰/۴)	(۲.۹،۲.۹،۳)	(۵.۲،۵.۲،۵.۳)	(۱/۱ و۱/۱ و۱/۱)	(۰ و۰ و۰)
(۱۸۹،۱۸۹،۱۹۰)	(۸۳۳،۸۳۳،۸۳۵)	(۳۱۰،۳۱۰،۳۱۱)	(۱۰،۱۰،۱۰)	(۲۳،۲۳،۲۴)	(۹۳۷۶،۹۳۷۶،۹۳۸۰)	(۵۱،۵۱،۵۲)	(۲،۲،۲)	(۰ و۰ و۰)
(۰/۲ و۰/۲ و۰/۲)	(۱۳ و۱۲/۷ و۱۲/۷)	(۰ و۰ و۰)	(۹/۸ و۹/۶ و۹/۶)	(۴/۳ و۴/۲ و۴/۲)	(۲۸/۲ و۲۸/۱ و۲۸/۱)	(۰/۸ و۰/۸ و۰/۸)	(۷/۵ و۷/۴ و۷/۴)	(۰ و۰ و۰)
(۰ و۰ و۰)	(۰/۵ و۰/۵ و۰/۵)	(۰ و۰ و۰)	(۰ و۰ و۰)	(۰/۱ و۰/۱ و۰/۱)	(۲/۱ و۲ و۲)	(۰ و۰ و۰)	(۰ و۰ و۰)	(۱۴/۴ و۱۴/۳ و۱۴/۳)
(۰ و۰ و۰)	(۰/۵ و۰/۵ و۰/۵)	(۰ و۰ و۰)	(۰ و۰ و۰)	(۰/۱ و۰/۱ و۰/۱)	(۲/۱ و۲ و۲)	(۰ و۰ و۰)	(۰ و۰ و۰)	(۱۴/۴ و۱۴/۳ و۱۴/۳)
(۰ و۰ و۰)	(۰ و۰ و۰)	(۰/۱ و۰/۱ و۰/۱)	(۰/۱ و۰/۱ و۰/۱)	(۰ و۰ و۰)	(۰/۱ و۰/۱ و۰/۱)	(۰ و۰ و۰)	(۰ و۰ و۰)	(۰ و۰ و۰)
(۰/۲ و۰/۲ و۰/۲)	(۰ و۰ و۰)	(۰/۱ و۰/۱ و۰/۱)	(۰ و۰ و۰)	(۰ و۰ و۰)	(۰/۲۵ و۰/۲ و۰/۲)	(۰/۲۵ و۰/۲ و۰/۲)	(۰ و۰ و۰)	(۰ و۰ و۰)
(۰/۱ و۰/۱ و۰/۱)	(۰/۶ و۰/۶ و۰/۶)	(۴،۴،۴.۵)	(۱/۴ و۱/۴ و۱/۴)	(۰/۲ و۰/۲ و۰/۲)	(۰.۷،۰.۷،۰.۸)	(۰/۱ و۰/۱ و۰/۱)	(۰/۱ و۰/۱ و۰/۱)	(۰ و۰ و۰)
(۰ و۰ و۰)	(۰/۱ و۰/۱ و۰/۱)	(۰/۳ و۰/۳ و۰/۳)	(۰/۴ و۰/۳ و۰/۳)	(۰ و۰ و۰)	(۰/۲ و۰/۲ و۰/۲)	(۰ و۰ و۰)	(۰/۱ و۰/۱ و۰/۱)	(۰ و۰ و۰)
(۵،۵،۵)	(۱۵،۱۵،۱۵)	(۱۵،۱۵،۱۶)	(۲۸،۲۸،۳۰)	(۷،۷،۸)	(۱۹۴،۱۹۴،۱۹۵)	(۱۱،۱۱،۱۳)	(۱۹،۱۹،۲۱)	(۰ و۰ و۰)
(۰/۵ و۰/۵ و۰/۵)	(۰ و۰ و۰)	(۱/۶ و۱/۵ و۱/۵)	(۰ و۰ و۰)	(۰ و۰ و۰)	(۰ و۰ و۰)	(۰/۷ و۰/۶ و۰/۶)	(۰ و۰ و۰)	(۰ و۰ و۰)
(۱۱۷،۱۱۷،۱۱۸)	(۱۰،۱۰،۱۰)	(۳۵،۳۵،۳۵)	(۱۵،۱۵،۱۵)	(۹،۹،۹)	(۹۹،۹۹،۹۹)	(۱۸۳،۱۸۳،۱۸۴)	(۲۳،۲۳،۲۳)	(۱،۱،۱)
(۰ و۰ و۰)	(۰/۱ و۰/۱ و۰/۱)	(۰ و۰ و۰)	(۰/۱ و۰/۱ و۰/۱)	(۰/۱ و۰/۱ و۰/۱)	(۰/۱ و۰/۱ و۰/۱)	(۰ و۰ و۰)	(۰ و۰ و۰)	(۰ و۰ و۰)
(۰ و۰ و۰)	(۰/۳ و۰/۳ و۰/۳)	(۱/۳ و۱/۳ و۱/۳)	(۱/۱ و۱/۱ و۱/۱)	(۰/۲ و۰/۲ و۰/۲)	(۲/۷ و۲/۷ و۲/۷)	(۰/۱ و۰/۱ و۰/۱)	(۰/۲ و۰/۲ و۰/۲)	(۰/۶ و۰/۶ و۰/۶)
(۱۱،۱۱،۱۲)	(۱۱،۱۱،۱۱)	(۵۳،۵۳،۵۵)	(۲۸،۲۸،۲۸)	(۷،۷،۷)	(۷۹،۷۹،۷۹)	(۱۷،۱۷،۱۷)	(۱۰،۱۰،۱۰)	(۰ و۰ و۰)
(۰ و۰ و۰)	(۰/۱ و۰/۱ و۰/۱)	(۰ و۰ و۰)	(۰/۲ و۰/۲ و۰/۲)	(۰ و۰ و۰)	(۱ و۰/۹ و۰/۹)	(۰ و۰ و۰)	(۰/۱ و۰/۱ و۰/۱)	(۰ و۰ و۰)
(۹۴،۹۴،۹۵)	(۲۴،۲۴،۲۴)	(۱۶۸،۱۶۸،۱۷۰)	(۷۰،۷۰،۷۰)	(۱۱،۱۱،۱۱)	(۴۹،۴۹،۵۰)	(۱۴۴،۱۴۴،۱۴۵)	(۲۹،۲۹،۲۹)	(۰ و۰ و۰)
(۲/۷ و۲/۵ و۲/۵)	(۰ و۰ و۰)	(۳۸ و۳۶/۵ و۳۶/۵)	(۰/۴ و۰/۴ و۰/۴)	(۰/۱ و۰/۱ و۰/۱)	(۱/۱ و۱ و۱)	(۳/۳ و۳/۳ و۳/۳)	(۰/۵ و۰/۵ و۰/۵)	(۰ و۰ و۰)
(۰/۴ و۰/۴ و۰/۴)	(۰/۲ و۰/۲ و۰/۲)	(۰/۳ و۰/۳ و۰/۳)	(۰/۴ و۰/۴ و۰/۴)	(۰/۱ و۰/۱ و۰/۱)	(۰/۵ و۰/۵ و۰/۵)	(۰.۹،۰.۹،۱)	(۰/۲ و۰/۲ و۰/۲)	(۰ و۰ و۰)
(۱۵۰،۱۵۰،۱۵۰)	(۲۳۷،۲۳۷،۲۳۷)	(۳۵۸،۳۵۸،۳۶۰)	(۵۳۵،۵۳۵،۵۳۵)	(۱۱۹،۱۱۹،۱۲۱)	(۵۵۸،۵۵۸،۵۵۸)	(۲۳۴،۲۳۴،۲۳۵)	(۱۴۶،۱۴۶،۱۴۶)	(۱،۱،۱)
(۴۱،۴۱،۴۳)	(۵،۵،۵)	(۵۶،۵۶،۵۸)	(۱۰،۱۰،۱۰)	(۱،۱،۱)	(۷۹،۷۹،۷۹)	(۷۰،۷۰،۷۲)	(۴،۴،۴)	(۲،۲،۲)
(۵۰،۵۰،۵۱)	(۱۸،۱۸،۱۹)	(۱۹۵،۱۹۵،۱۹۷)	(۹۳،۹۳،۹۵)	(۵۸،۵۸،۵۹)	(۲۳،۲۳،۲۳)	(۶۳،۶۳،۶۵)	(۴۰،۴۰،۴۰)	(۸۸۴،۸۸۴،۸۸۵)