مجله تحقیق در عملیات و کاربردهای آن، سال نهم، شماره دوم (پیاپی ۳۳)، تابستان ۹۱، ص ص ۱۳۰-۱۲۱
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

تغییر سطح ورودی‌ها و ارزیابی خروجی‌ها در DEA وقتی که تعدادی از خروجی‌ها نامطلوب هستند

سعید محرابیان [1]، مهدی عینی* [2]، بلال کریمی [3]

۱- استادیار دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه تربیت معلم، گروه ریاضی، تهران، ایران

۲- هیأت علمی دانشگاه پیام نور، دانشگاه پیام نور مرکز کرمانشاه، واحد کنگاور، گروه ریاضی، کنگاور، ایران

۳- پژوهشگر دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات کرمانشاه، گروه ریاضی، کرمانشاه، ایران

رسید مقاله: ۲۱ آبان ۱۳۹۰
پذیرش مقاله: ۲۴ اسفند ۱۳۹۰

چکیده

در این مقاله، DEA معکوس با ارجحیت محدویت‌های مخروطی، زمانی که تعدادی از خروجی‌های واحدهای تصمیم‌گیری نامطلوب هستند، مورد بحث قرار می‌گیرد. بدین صورت که با تغییر سطح ورودی‌های واحد تحت ارزیابی و با حفظ مقدار کارایی، سطح خروجی مطلوب (نامطلوب)، افزایش (کاهش) می‌یابد. برای این منظور از مدل برنامه‌ریزی خطی چند هدفه $(MOLP)$ استفاده می‌کنیم.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، محدودیت‌های مخروطی، $MOLP$، خروجی نامطلوب.

۱ مقدمه

در سال‌های اخیر تحقیقات و پژوهش‌های زیادی در زمینه DEAانجام شده است [۱]. تحلیل پوششی داده‌ها، کارایی واحدهای تصمیم‌گیری را با چندین ورودی و خروجی اندازه‌گیری می‌کند. DEA یک مرز کارایی مشخص کرده و کارایی واحدهای تصمیم‌گیری را با کاهش سطح ورودی‌ها و افزایش سطح خروجی‌ها (در صورت امکان) نسبت به آن بهبود می‌دهد. گاهی ممکن است در بین خروجی‌ها، خروجی نامطلوب نیز وجود داشته باشد [۲و۳] که برای بهبود سطح کارایی باید سطح خروجی‌های مطلوب (نامطلوب) را افزایش (کاهش) داد. نمونه‌هایی از خروجی‌های نامطلوب عبارتند از: گازهای گلخانه‌ای تولیدی صنایع، پرداخت مالیات در مراکز تجاری و....

وای و همکاران [۴] با افزایش سطح ورودی (خروجی) های واحد تحت ارزیابی و حفظ مقدار کارایی آن، با استفاده از DEA معکوس سطح خروجی (ورودی) ها را ارزیابی کردند. جهانشاهلو و همکاران [۵] DEA

* عهده دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: mahdi_eyni@yahoo.com

معکوس را در حالتی که تعدادی از خروجی‌ها نامطلوب باشند، استفاده کردند. با توجه به این‌که مدل DEA معکوس با ساختار مخروطی وسیله‌ای موثرتر برای ارزیابی سطح خروجی‌ها می‌باشد [۶]، در این مقاله، از DEA معکوس با ارجحیت محدودیت‌های مخروطی برای ارزیابی سطح خروجی‌ها (مطلوب و نامطلوب) استفاده شده است که حالت دیگری از [۵] می‌باشد. بنابراین با تغییر سطح ورودی‌های واحد تحت ارزیابی و با حفظ مقدار کارایی، می‌توان با استفاده از مدل $MOLP$ صرف‌نظر از کارایی یا ناکارایی واحد تحت ارزیابی، سطح خروجی مطلوب (نامطلوب) را، افزایش (کاهش) داد. سازمان‌دهی این مقاله چنین است:

در بخش ۲، ابتدا مساله را توضیح داده و در ادامه مدل $MOLP$ با ارجحیت محدویت‌های مخروطی برای ارزیابی سطح خروجی‌ها پیشنهاد می کنیم. در بخش ۳، روش ارائه شده را با مثالی توضیح می دهیم. سرانجام نتیجه‌گیری را در بخش ۴، بیان می‌کنیم.

۲ بیان مساله

فرض کنید n واحد تصمیم‌گیری داریم که هر کدام m ورودی را برای تولید s خروجی مصرف می‌کنند. بردار ورودی و خروجی هر واحد را به صورت $\left(x_j, y_j\right)$، j=۱، ۲، ...، n در نظر گرفته و فرض کنید V^*، U^{g*}، $\overline{U}^{b*}$، K^* به ترتیب قطب منفی V، U^g، $\overline{U}^b$، K باشند که در آن $V \subset R_+^m$، $\overline{U}^b, U^g \subset R_+^s$ و $K \subset R_+^n$ به ترتیب مخروط ارجحیت نسبی ورودی‌ها، خروجی‌ها و واحدهای تصمیم‌گیری هستند. نیز فرض کنید:

$X_j \in -IntV^*$، $Y_j^g \in -IntU^{g*}$، $\overline{Y}_j^b \in -Int\overline{U}^{b*}$، به ازای هر $j = ۱, ۲, \ldots n$.

بر اساس [۵,۶]، مدل BCC در ماهیت خروجی با ارجحیت محدودیت‌های مخروطی برای اندازه‌گیری کارایی واحد p ام به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
P^O:\ & \varphi_p^* = max \quad \varphi \\
s.t.\ & \\
& X\lambda - X_P \in V^*, \\
& -Y^g\lambda + \varphi Y_P^g \in U^{g*}, \\
& -\overline{Y}^b\lambda + \varphi \overline{Y}_P^b \in \overline{U}^{b*}, \\
& ۱\lambda = ۱, \\
& \lambda \in -K^*.
\end{aligned}
\qquad (۱)
$$

که $\overline{Y}_j^b = -Y_j^b + \eta$، $\eta - Y_j^b \in -Int\overline{U}^{b*}$. یعنی بردار η را طوری انتخاب می‌کنیم که برای هر $j = ۱, ۲, \ldots n$ داشته باشیم: $\overline{Y}_j^b \in -Int\overline{U}^{b*}$.

در مدل P^O، ناحیه شدنی غیر تهی است و $\varphi_p^* \geq 1$ [۷و۸].

تعریف ۱. در مدل P^O ، اگر $\varphi_p^* = 1$، می‌گوییم واحد تصمیم‌گیری p ام (حداقل) کارای ضعیف است.

فرض کنید: $\alpha_P \in R_+^m$ و سطح ورودی‌های واحد تصمیم‌گیری p از X_P به α_P در امتداد مخروط محدب $-V^*$ تغییر کند. حال با حفظ مقدار کارایی، سطح خروجی‌های واحد تحت ارزیابی p را ارزیابی می‌کنیم به طوری که، سطح خروجی‌های مطلوب (نامطلوب) در امتداد مخروط محدب $-U^{g^*}$ ($-\overline{U}^{b^*}$) افزایش (کاهش) یابند، یعنی $\beta_P^g - Y_P^g \in -U^{g^*}$ ($\overline{Y}_P^b - \overline{\beta}_P^b \in -\overline{U}^{b^*}$). مدل $MOLP$ با ارجحیت محدودیت‌های مخروطی برای محاسبه سطح خروجی‌های (مطلوب و نامطلوب) به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
&M^O: Max\ \beta_P = (\beta_P^g, \overline{\beta}_P^b)\\
&s.t.\\
&\quad X\lambda - \alpha_P \in V^*,\\
&\quad -Y^g\lambda + \varphi_P \beta_P^g \in U^{g^*},\\
&\quad -\overline{Y}^b\lambda + \varphi_P \overline{\beta}_P^b \in \overline{U}^{b^*},\\
&\quad \beta_P^g - Y_P^g \in -U^{g^*},\\
&\quad \overline{Y}_P^b - \overline{\beta}_P^b \in -\overline{U}^{b^*},\\
&\quad 1\lambda = 1,\\
&\quad \lambda \in -K^*.
\end{aligned}
\tag{۲}
$$

با توجه به این‌که مدل (۲) ، یک مدل $MOLP$ است، روش‌های متفاوتی برای حل آن وجود دارد [۹]. یکی از این روش‌ها، روش وزن دهی است. در این روش، برای حل مدل(۲)می‌توان برای هر کدام از خروجی‌های مطلوب و نامطلوب، وزنی را در نظر گرفت. با توجه این‌که مدل (۲) با ارجحیت محدودیت‌های مخروطی به کار رفته است، بهتر است وزن‌ها را از مخروط ارجحیت نسبی خروجی‌ها انتخاب کرد. برای این منظور فرض کنید W_P^g و $\overline{W}_P^b$ به ترتیب بردارهای وزنی، ارزش خروجی‌های مطلوب و نامطلوب β_P^g و $\overline{\beta}_P^b$ باشند. در این صورت بدون تغییر محدویت‌ها، فقط تابع چند هدفه ($M^O: max\ \ \beta_P = (\beta_P^g, \overline{\beta}_P^b)$) به تابع یک هدفه $M^O: max\ W_P^g \beta_P^g + \overline{W}_P^b \overline{\beta}_P^b$ تبدیل شده و جواب بهینه به راحتی به دست می‌آید.

حال فرض کنید واحد $(n+1)$ام را، واحد جدیدی با ورودی‌ها و خروجی‌های تغییر یافته واحد pام در نظر بگیریم. در این صورت مدل BCC در ماهیت خروجی با ارجحیت محدودیت‌های مخروطی برای اندازه‌گیری کارایی آن چنین است:

$$
\begin{aligned}
&P^{O+}: \varphi_p^{*+} = Max \quad \varphi \\
&s.t. \\
&\qquad X\lambda + \alpha_P \lambda_{n+1} - \alpha_P \in V^*, \\
&\qquad -Y^g \lambda - \beta_P^g \lambda_{n+1} + \varphi \beta_P^g \in U^{g*}, \\
&\qquad -\overline{Y}^b \lambda - \overline{\beta}_P^b \lambda_{n+1} + \varphi \overline{\beta}_P^b \in \overline{U}^{b*}, \\
&\qquad 1\lambda + \lambda_{n+1} = 1, \\
&\qquad (\lambda, \lambda_{n+1})^t \in -K^* \subset R_+^{n+1}.
\end{aligned} \qquad (۳)
$$

که $\overline{\beta}_P^b = -\beta_P^b + \eta$ ،$\overline{Y}^b_{n+1} = \overline{\beta}_P^b$ ،$\eta - \beta_P^b \in -Int\overline{U}^{b*}$.

تعریف ۲. اگر $\varphi_p^{*+} = \varphi_p^*$، می‌گوییم مقدار کارایی بدون تغییر مانده است.

تعریف ۳. فرض کنید $(\beta_P, \lambda^{M^O}) = (\beta_P^g, \overline{\beta}_P^b, \lambda^{M^O})$ جواب شدنی مدل M^O باشد. اگر جواب شدنی $(\beta_P^{"}, \lambda^{"}) = (\beta_P^{g"}, \overline{\beta}_P^{b"}, \lambda^{"})$ از مـدل M^O وجود نداشته باشد به طوری کـه $\begin{cases} \beta_P^{g"} - \beta_P^g \in -IntU^{g*} \\ \overline{\beta}_P^b - \overline{\beta}_P^{b"} \in -Int\overline{U}^{b*} \end{cases}$ آنگاه می‌گوییم $(\beta_P, \lambda^{M^O}) = (\beta_P^g, \overline{\beta}_P^b, \lambda^{M^O})$ جواب کـارای ضعیف مـدل M^O وابسته با $(-IntU^{g*}, -Int\overline{U}^{b*}, -K^*)$ است.

تعریف ٤. فرض کنید $(\beta_P, \lambda^{M^O}) = (\beta_P^g, \overline{\beta}_P^b, \lambda^{M^O})$ جـواب شـدنی مـدل M^O باشـد. اگـر جـواب شـدنی $(\beta_P^{"}, \lambda^{"}) = (\beta_P^{g"}, \overline{\beta}_P^{b"}, \lambda^{"})$ از مدل M^O وجود نداشته باشد به طوری که

$$
\begin{cases} \beta_{r_1P}^{g"} - \beta_{r_1P}^g \in -U^{g*} \\ \text{برای تمام } r_1 \\ \overline{\beta}_{r_2P}^b - \overline{\beta}_{r_2P}^{b"} \in -\overline{U}^{b*} \\ \text{برای تمام } r_2 \end{cases}
\quad \text{و} \quad
\begin{cases} \beta_{r_1P}^{g"} - \beta_{r_1P}^g \in -IntU^{g*} \\ \text{براي حداقلي از } r_1 \\ \overline{\beta}_{r_2P}^b - \overline{\beta}_{r_2P}^{b"} \in -Int\overline{U}^{b*} \\ \text{براي حداقلي از } r_2 \end{cases}
$$

آن‌گاه مـی گوییم $(\beta_P, \lambda^{M^O}) = (\beta_P^g, \overline{\beta}_P^b, \lambda^{M^O})$ جواب کارای قوی مدل M^O مرتبط با $(-IntU^{g*}, -Int\overline{U}^{b*}, -K^*)$ است.

قضیه ۱. اگـــر $(\beta_P, \lambda^{M^O}) = (\beta_P^g, \overline{\beta}_P^b, \lambda^{M^O})$ جـــواب کـــارای قـــوی مـــدل M^O وابسته بـا

$(-IntU^{g*}, -Int\overline{U}^{b*}, -K^*)$ باشد، آن‌گاه $\varphi_p^{*+} = \varphi_p^*$.

برهان. چون $(\beta_P, \lambda^{M^O}) = (\beta_P^g, \overline{\beta}_P^b, \lambda^{M^O})$ یک جواب شدنی مدل M^O است، بنابراین در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$X\lambda - \alpha_P \in V^* \tag{۱}$$

$$-Y^g\lambda + \varphi_P \beta_P^g \in U^{g*} \tag{۲}$$

$$-\overline{Y}^b\lambda + \varphi_P \overline{\beta}_P^b \in \overline{U}^{b*} \tag{۳}$$

$$\beta_P^g - Y_P^g \in -U^{g*} \tag{۴}$$

$$\overline{Y}_P^b - \overline{\beta}_P^b \in -\overline{U}^{b*} \tag{۵}$$

$$۱\lambda = ۱ \tag{۶}$$

$$\lambda \in -K^*. \tag{۷}$$

از روابط (۱) الی (۳)، (۶) و (۷) نتیجه می‌شود $(\varphi_P, \lambda^{M^O})$ یک جواب شدنی مدل P^{O+} است. بنابراین $\varphi_p^{*+} \geq \varphi_p^*$. از طرف دیگر با توجه به کارای قوی بودن جواب $(\beta_P, \lambda^{M^O}) = (\beta_P^g, \overline{\beta}_P^b, \lambda^{M^O})$، از مدل‌های P^O و P^{O+} نتیجه می‌شود $\varphi_p^* \geq \varphi_p^{*+}$ و لذا $\varphi_p^{*+} = \varphi_p^*$. ■

قضیه زیر نشان می‌دهد که هنگام ارزیابی سطح خروجی‌ها با در نظر گرفتن جواب کارای ضعیف مدل M^O، مقدار کارایی واحد تحت ارزیابی حفظ خواهد شد.

قضیه ۲. فرض کنیم سطح ورودی‌ها در امتداد مخروط محدب $-V^*$ تغییر کند. در این صورت اگر $(\beta_P, \lambda^{M^O}) = (\beta_P^g, \overline{\beta}_P^b, \lambda^{M^O})$ یک جواب کارای ضعیف مدل M^O مرتبط با $(-IntU^{g*}, -Int\overline{U}^{b*}, -K^*)$ باشد، به طوری که سطح خروجی‌های مطلوب (نامطلوب) در امتداد مخروط محدب $-U^{g*}$ $(-\overline{U}^{b*})$ افزایش (کاهش) یابند، آن‌گاه $\varphi_p^{*+} = \varphi_p^*$.

برهان. مشابه اثبات قضیه ۱ و طبق تعریف جواب کارای ضعیف، نتیجه برقرار می‌گردد. ■

۳ مثال. جدول ۱ شامل سه واحد تصمیم‌گیری A، B و C با سه ورودی $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ سه خروجی $y_۱$، $y_۲$ و $y_۳$ را در نظر بگیرید:

جدول ۱. داده‌های مربوط به ۳ واحد تصمیم گیری

	DMU	A	B	C
input	$x_۱$	۱۶	۸	۶
	$x_۲$	۲۱	۱۰	۶
	$x_۳$	۱۸	۱۲	۱۶
output	$y_۱$	۳	۵	۳
	$y_۲$	۱	۷	۵
	$y_۳$	۴	۸	۴

فرض کنید در جدول ۱، خروجی دوم نامطلوب است. بردار انتقال برای خروجی نامطلوب به صورت $\eta = ۲۰$ در نظر می‌گیریم. همچنین فرض کنید C واحد تحت ارزیابی بوده و مخروط ارجحیت نسبی ورودی‌ها و همچنین خروجی‌های مطلوب این واحد تصمیم‌گیری به ترتیب به صورت زیر باشد:

$$U^g = \left\{(۴\times ۱۰^۴, ۵)^t u_۱ : u_۱ \geq ۰\right\} \text{ و } V = \left\{\left(۴, ۲, ۵\right)^t v_۱ : v_۱ \geq ۰\right\}$$

فرض کنید مخروط ارجحیت نسبی خروجی‌های نامطلوب واحد تصمیم‌گیری C به صورت $\overline{U}^b = R^۱_+$ باشد. بنابراین مخروط قطب منفی ورودی‌های و همچنین خروجی‌های مطلوب آن به ترتیب به صورت زیر

$$U^{g*} = \left\{(u_۱, u_۲)^t : (۴\times ۱۰^۴, ۵)\begin{pmatrix} u_۱ \\ u_۲ \end{pmatrix} \leq ۰\right\} \text{ و } V^* = \left\{\left(v_۱, v_۲, v_۳, v_۴\right)^t : \left(۴, ۲, ۵\right)\begin{pmatrix} v_۱ \\ v_۲ \\ v_۳ \\ v_۴ \end{pmatrix} \leq ۰\right\}$$

بوده و مخروط قطب منفی خروجی‌های نامطلوب به صورت $\overline{U}^{b*} = -R^۱_+$ می‌باشد. با توجه به مطالب فوق، مدل BCC در ماهیت خروجی با ارجحیت محدودیت‌های مخروطی، به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_C^* = Max \quad \varphi \\
&s.t. \\
&\begin{pmatrix} ۱۶ & ۲۱ & ۱۸ \\ ۸ & ۱۰ & ۱۲ \\ ۶ & ۶ & ۱۶ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_۱ \\ \lambda_۲ \\ \lambda_۳ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ۱۸ \\ ۱۲ \\ ۱۶ \end{pmatrix} \in V^*, \\
&-\begin{pmatrix} ۳ & ۵ & ۳ \\ ۴ & ۸ & ۴ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_۱ \\ \lambda_۲ \\ \lambda_۳ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۳ \\ ۴ \end{pmatrix}\varphi \in U^{g*}, \\
&۱۹\lambda_۱ + ۱۳\lambda_۲ + ۱۵\lambda_۳ \geq ۱۵\varphi, \\
&\lambda_۱ + \lambda_۲ + \lambda_۳ = ۱, \\
&\lambda_۱, \lambda_۲, \lambda_۳ \geq ۰.
\end{aligned}
$$

جواب بهینه مدل فوق برابر است با

$$(\varphi_C, \lambda_۱^*, \lambda_۲^*, \lambda_۳^*)^t = (۱/۶۶۷, ۰/۷۵۵۱, ۰/۲۵, ۰)^t.$$

فرض کنید سطح ورودی‌های واحد تصمیم‌گیری C از $(۱۸,۱۲,۱۶)^t$ به $(۱۳,۹,۱۳)^t$ کاهش یابد. حال با حفظ مقدار کارایی، مدل $MOLP$ مربوطه برای ارزیابی سطح خروجی‌های آن به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad (\beta_۱^g, \beta_۳^g, \overline{\beta}_۲^b) \\
&s.t. \\
&\begin{pmatrix} ۱۶ & ۲۱ & ۱۸ \\ ۸ & ۱۰ & ۱۲ \\ ۶ & ۶ & ۱۶ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_۱ \\ \lambda_۲ \\ \lambda_۳ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ۱۳ \\ ۹ \\ ۱۳ \end{pmatrix} \in V^*, \\
&-\begin{pmatrix} ۳ & ۵ & ۳ \\ ۴ & ۸ & ۴ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_۱ \\ \lambda_۲ \\ \lambda_۳ \end{pmatrix} + ۱/۶۶۷\begin{pmatrix} \beta_۱^g \\ \beta_۳^g \end{pmatrix}\varphi \in U^{g*}, \\
&۱۹\lambda_۱ + ۱۳\lambda_۲ + ۱۵\lambda_۳ \geq ۱/۶۶۷\overline{\beta}_۲^b, \\
&\begin{pmatrix} \beta_۱^g \\ \beta_۳^g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ۳ \\ ۴ \end{pmatrix} \in -U^{g*}, \\
&۱۵ - \overline{\beta}_۲^b \in -\overline{U}^{b*}, \\
&\lambda_۱ + \lambda_۲ + \lambda_۳ = ۱, \\
&\lambda_۱, \lambda_۲, \lambda_۳ \geq ۰.
\end{aligned}
$$

برای حل مدل فوق، از روش وزن‌دارکردن تابع هدف استفاده می‌کنیم. در این صورت اگر

$$W_۲ \in R_+^۱ \text{ و } \left(W_۱, W_۳\right) \in U^g = \left\{\left(۴\times۱۰^۴, ۵\right)^t u_۱ : u_۱ \geq ۰\right\}$$

بدون از دست دادن کلیت استدلال، فرض کنید: $W_۱ = ۴\times۱۰^۴$، $W_۲ = ۱$، $W_۳ = ۵$. از این رو مدل فوق به مدل برنامه‌ریزی زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&Max \quad ۴\times۱۰^۴ \beta_۱^g + \overline{\beta}_۲^b + ۵\beta_۳^g \\
&s.t. \\
&\qquad \begin{pmatrix} ۱۶ & ۲۱ & ۱۸ \\ ۸ & ۱۰ & ۱۲ \\ ۶ & ۶ & ۱۶ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_۱ \\ \lambda_۲ \\ \lambda_۳ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ۱۳ \\ ۹ \\ ۱۳ \end{pmatrix} \in V^*, \\
&\quad -\begin{pmatrix} ۳ & ۵ & ۳ \\ ۴ & ۸ & ۴ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_۱ \\ \lambda_۲ \\ \lambda_۳ \end{pmatrix} + ۱/۶۶۷\begin{pmatrix} \beta_۱^g \\ \beta_۳^g \end{pmatrix} \in U^{g*}, \\
&\qquad ۱۹\lambda_۱ + ۱۳\lambda_۲ + ۱۵\lambda_۳ \geq ۱/۶۶۷\overline{\beta}_۲^b, \\
&\qquad \begin{pmatrix} \beta_۱^g \\ \beta_۳^g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ۳ \\ ۴ \end{pmatrix} \in -\overline{U}^{b*}, \\
&\qquad ۱۵ - \overline{\beta}_۲^b \in -\overline{U}^{b*}, \\
&\qquad \lambda_۱ + \lambda_۲ + \lambda_۳ = ۱, \\
&\qquad \lambda_۱, \lambda_۲, \lambda_۳ \geq ۰.
\end{aligned}$$

ملاحظه می‌گردد که

$$(\beta_۱^{g*}, \beta_۳^{g*}, \overline{\beta}_۲^{b*})^t = (۴/۲۸۶۴, ۰, ۱۰/۴۶۷۹)^t \text{ و } (\beta_۱^{g*}, \beta_۳^{g*}, \overline{\beta}_۲^{b*})^t = (۴/۲۸۶۴, ۰, ۱۱/۱۴۲۵)^t$$

به ترتیب جواب های کارای قوی و ضعیف مدل فوق می‌باشند.

حال با تغییرسطح ورودی‌های واحد تصمیم‌گیری C و با در نظر گرفتن جواب های کارای قوی و ضعیف مدل فوق، به ترتیب با استفاده از مدل P^{O+}، کارایی واحد C را بار دیگر اندازه‌گیری می‌کنیم. داریم:

$$\varphi_C^{*+} = Max \quad \varphi$$
$$s.t.$$
$$\begin{pmatrix} ۱۶ & ۲۱ & ۱۸ & ۱۳ \\ ۸ & ۱۰ & ۱۲ & ۹ \\ ۶ & ۶ & ۱۶ & ۱۳ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_۱ \\ \lambda_۲ \\ \lambda_۳ \\ \lambda_۴ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ۱۳ \\ ۹ \\ ۱۳ \end{pmatrix} \in V^*,$$
$$-\begin{pmatrix} ۳ & ۵ & ۳ & ۴/۲۸۶۴ \\ ۴ & ۸ & ۴ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_۱ \\ \lambda_۲ \\ \lambda_۳ \\ \lambda_۴ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۴/۲۸۶۴ \\ ۰ \end{pmatrix} \varphi \in U^{g*},$$
$$۱۹\lambda_۱ + ۱۳\lambda_۲ + ۱۵\lambda_۳ + ۱۱/۱۴۲۵\lambda_۴ \ge ۱۱/۱۴۲۵\varphi,$$
$$\lambda_۱ + \lambda_۲ + \lambda_۳ + \lambda_۴ = ۱,$$
$$\lambda_۱, \lambda_۲, \lambda_۳, \lambda_۴ \ge ۰$$

$$\varphi_C^{*+} = Max \quad \varphi$$
$$s.t.$$
$$\begin{pmatrix} ۱۶ & ۲۱ & ۱۸ & ۱۳ \\ ۸ & ۱۰ & ۱۲ & ۹ \\ ۶ & ۶ & ۱۶ & ۱۳ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_۱ \\ \lambda_۲ \\ \lambda_۳ \\ \lambda_۴ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ۱۳ \\ ۹ \\ ۱۳ \end{pmatrix} \in V^*,$$
$$-\begin{pmatrix} ۳ & ۵ & ۳ & ۴/۲۸۶۴ \\ ۴ & ۸ & ۴ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_۱ \\ \lambda_۲ \\ \lambda_۳ \\ \lambda_۴ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۴/۲۸۶۴ \\ ۰ \end{pmatrix} \varphi \in U^{g*},$$
$$۱۹\lambda_۱ + ۱۳\lambda_۲ + ۱۵\lambda_۳ + ۱۰/۴۶۷۹\lambda_۴ \ge ۱۰/۴۶۷۹\varphi,$$
$$\lambda_۱ + \lambda_۲ + \lambda_۳ + \lambda_۴ = ۱,$$
$$\lambda_۱, \lambda_۲, \lambda_۳, \lambda_۴ \ge ۰$$

با حل هر یک از مدل های فوق، جواب بهینه برابر است با:

$$(\varphi_C^{*+}, \lambda_۱^*, \lambda_۲^*, \lambda_۳^*, \lambda_۴^*)^t = (۱/۱۶۶۷, ۰, ۱, ۰, ۰)^t.$$

ملاحظه می‌گردد که مقدار کارایی واحد تصمیم‌گیری C حفظ شده است، یعنی با کاهش سطح ورودی‌های واحد C، با حفظ مقدار کارایی، سطح خروجی نامطلوب آن کاهش و سطح خروجی‌های مطلوب آن افزایش یافته است.

٤ نتیجه‌گیری

با توجه به مطالب بیان شده، با تغییر سطح ورودی‌های واحد تحت ارزیابی، در صورت وجود خروجی نامطلوب در بین خروجی‌ها، با حفظ مقدار کارایی، می‌توان سطح خروجی‌های مطلوب (نامطلوب) را افزایش (کاهش) داد. در این مقاله از DEA معکوس با ارجحیت محدودیت‌های مخروطی استفاده شده است، که در آن برای ارزیابی سطح خروجی‌ها (مطلوب و نامطلوب) صرف نظر از کارایی یا ناکارایی واحد تصمیم‌گیری، می‌توان مدل $MOLP$ را به کار گرفت.

منابع

[1] Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes, E., (1978). Measuring the efficiency of decision making units. European Journal of Operational Research, 2, 429-444.

[2] Koopmans, T. C., (1951). Analysis of production as an efficient combination of activities, in: T.C. Koopmans (Ed.), Activity Analysis of Production and Allocation, Cowles Commission, Wiley, New York, 33-97.

[3] Smith, P., (1990). Data envelopment analysis applied to financial statements, Omega: Int. j. Manage. Sci., 18, 131-138.

[4] Wei, Q. L., Zhang, J., Zhang, X., (2000). An inverse DEA model for inputs/outputs estimate. European J. Oper. Res, 121(1), 151-163.

[5] Jahanshahloo, G. R., Hadi Vencheh, A., Foroughi, A. A., Kazemi Matin, R., (2004). Inputs/output estimation in DEA when some factors are undesirable, Appl. Math. Comput, 156, 19-32.

[6] Yan, H., Wei, Q., Hao, G., (2002). DEA models resource reallocation and production inputs/outputs estimation, European J. Oper. Res., 136, 19-31.

[7] Yu, G., Wei, Q. L., Brockett, P., (1996). A generalized data envelopment analysis model: A unification and extension of existing methods for efficiency analysis of decision making units. Annals of Operations Research, 66, 47-89.

[8] Charnes, A., Cooper, W. W., Wei, Q. L., Huang, Z. M., (1989). Cone ratio data envelopment analysis and multi-objective programming. International Journal of System Science, 20, 1099-1118.

[9] Steuer, R. E., (1986). Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Application, Wiley, New York.