

## مدلسازی آرمانی برای انتخاب پرتفولیوی بهینه با گشتاورهای بالا

مهسا قندهاری<sup>۱</sup>، فاطمه فغانی<sup>۲\*</sup>، سید مهدی طباطبایی<sup>۳</sup>

۱- استادیار دانشگاه اصفهان، گروه مدیریت، اصفهان، ایران.

۲ و ۳- دانشجوی کارشناسی ارشد مدیریت بازرگانی گرایش مالی، دانشگاه اصفهان، گروه مدیریت، اصفهان، ایران.

رسید مقاله: ۱ شهریور ۱۳۹۱

پذیرش مقاله: ۲۲ آذر ۱۳۹۱

### چکیده

سرمایه‌گذاران در تصمیمات خود جهت انتخاب پرتفولیوی مناسب به طور هم‌زمان چندین هدف را مدنظر قرار می‌دهند. این اهداف ممکن است در مواقعی با هم در تعارض باشند. عموماً مدیران پرتفولیو، بهترین ترکیب سهامی را انتخاب می‌کنند که حد الامکان تمام اهداف سرمایه‌گذاران را برآورده سازد. بدین جهت در این مقاله سعی شده است تا ضمن بررسی تحقیقات قبلی و مقایسه مدل‌های بهینه‌سازی پرتفولیو، به کمک برنامه‌ریزی آرمانی مدلی ارائه شود که با در نظر گرفتن اهدافی همچون؛ حداکثرسازی بازده، حداقل‌سازی ریسک، حداکثرسازی چولگی بازده پرتفولیو و حداقل‌سازی کشیدگی ریسک پرتفولیو، بتواند بهترین ترکیب سهام را انتخاب کند. بدین منظور ۱۰ شرکت اول از فهرست ۵۰ شرکت فعال‌تر در بورس اوراق بهادار تهران در سه ماهه سوم سال ۱۳۹۰ انتخاب گردیده است. اطلاعات مورد نیاز هر سهم با استفاده از نرم‌افزار تدبیر جمع آوری و با نرم‌افزار SPSS محاسبه و سپس با جایگذاری داده‌ها در مدل عمومی، مدل با نرم‌افزار LINGO حل شده است و در آخر درصد سرمایه‌گذاری در هر سهم مشخص گردیده است.

**کلمات کلیدی:** برنامه‌ریزی آرمانی، پرتفولیوی بهینه، کشیدگی، چولگی، ریسک سرمایه‌گذاری.

### ۱ مقدمه

سرمایه‌گذاران همیشه به دنبال انتخاب گزینه مناسب برای سرمایه‌گذاری هستند. در قدیم، آنان به منظور دستیابی به اهداف خود از شرم تجاری و تجربیات خود و با دیگران استفاده می‌کردند. با پیشرفت مدیریت مالی انتخاب‌های سرمایه‌گذاران علمی‌تر شد و آن‌ها توانستند با به کارگیری مدل‌های مختلف و تلفیق نتایج حاصل از آن با تجربیات خود، انتخاب بهینه را تا حدی محقق سازند. در گذشته انتخاب در سرمایه‌گذاری، با در نظر گرفتن یک معیار انجام می‌شد؛ در حالی که هر سرمایه‌گذار در کنار هدف اصلی خود آرمان‌هایی نیز در نظر می‌گیرد

\* عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیک: f.faghani1367@gmail.com

که برآورده شدن تمام آن آرمان‌ها رضایت او را فراهم می‌آورد. در اواخر دهه‌ی ۶۰ میلادی بسیاری از مسایل مالی-اقتصادی با استفاده از تکنیک‌های تحقیق در عملیات مورد بررسی قرار گرفتند و روش‌های بهینه‌سازی برای یافتن جواب بهینه این گونه مسایل ارایه شدند. علم تصمیم‌گیری چند معیاره، سرمایه‌گذاران را در راستای اتخاذ تصمیم بهینه با به کارگیری مدل‌های مختلف یاری می‌نماید. یکی از این مدل‌ها برنامه‌ریزی آرمانی است که به افراد کمک می‌کند تا به اهداف مختلف به صورت هم‌زمان دست یابند. در اکثر تحقیقاتی که در این زمینه صورت گرفته است به ریسک و بازده توجه خاصی شده، بدین منظور در ادامه مقاله ضمن بیان انواع مدل‌های انتخاب پرتفولیو و معرفی برنامه‌ریزی آرمانی با توسعه مدل‌های آرمانی که محققین قبلی ارایه نموده‌اند، یک مدل آرمانی برای انتخاب سبد بهینه سهام ارایه می‌شود و کاربرد آن با مثالی نشان داده می‌شود.

## ۲ مدل‌های انتخاب پرتفولیو

در سال ۱۹۵۰ هری مارکوویتز مدل اساسی پرتفولیو را ارایه کرد که مبنایی برای تئوری مدرن پرتفولیو قرار گرفت. قبل از مارکوویتز سرمایه‌گذاران با مفاهیم ریسک و بازده آشنا بودند. اگرچه آن‌ها با مفهوم ریسک آشنا بودند ولی نمی‌توانستند آن را اندازه‌گیری کنند. بدین جهت تنها معیار برای سرمایه‌گذاری بازده بود. سرمایه‌گذاران از قبل می‌دانستند که ایجاد تنوع مناسب است، با این حال مارکوویتز اولین کسی بود که به صورت کمی نشان داد که چرا و چگونه تنوع‌سازی پرتفولیو می‌تواند باعث کاهش ریسک سبد سرمایه‌گذاری یک سرمایه‌گذار شود. وی بازده و ریسک پرتفولیو را به صورت زیر محاسبه نمود:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^n w_i E(R_i) \quad (1)$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} \quad (2)$$

که در این معادلات؛  $E(R_p)$  بازده مورد انتظار پرتفولیو،  $w_i$  وزن پرتفولیو برای  $i$ امین اوراق بهادار،  $E(R_i)$  بازده مورد انتظار اوراق بهادار  $i$ ،  $\sigma_p^2$  واریانس بازده پرتفولیو،  $\sigma_i^2$  واریانس بازده اوراق بهادار  $i$  و  $\sigma_{ij}$  کوواریانس میان بازده‌های اوراق بهادار  $i$  و  $j$  می‌باشد. طبق این روابط هرچه تعداد اوراق بهادار موجود در یک پرتفولیو افزایش یابد، از اهمیت ریسک (واریانس) هریک از اوراق بهادار کاسته می‌شود، در حالی که اهمیت روابط کواریانس افزایش می‌یابد. به گونه‌ای که ترکیب اوراقی که همبستگی کاملاً منفی داشته باشند، می‌تواند باعث حذف ریسک پرتفولیو شود. وی پس از تعیین این معادلات به معرفی مرز کارا پرداخت. مرز کارا مکان هندسی مجموعه نقاطی است در نموداری که محور افقی آن ریسک و محور عمودیش بازده مورد انتظار اوراق بهادار است، به طوری که به تمامی پرتفولیوهای داخل منحنی اولویت دارد. وی پیشنهاد نمود که سرمایه‌گذاران در پرتفولیوهای بر روی این مرز سرمایه‌گذاری نمایند. پرتفولیوی بهینه برای هر سرمایه‌گذار در محل تلاقی میان بالاترین منحنی بی‌تفاوتی

سرمایه‌گذاران و منحنی مرز کارا، اتفاق می‌افتد. در دنیای واقعی بیشتر سهام با همدیگر یا با بازار همبستگی مثبت دارند [۱]. اگرچه تحقیقات کینگ [۲] حاکی از آن است که ریسک را نمی‌توان در بدنه سهام در هر اندازه به صفر کاهش داد؛ بلکه تنها می‌توان نیمی از ریسک کل را که به نیروهای بازار مرتبط نیست (ریسک غیر سیستماتیک) با متنوع‌سازی کاهش داد، با این همه نباید فراموش کرد که از نیم دیگر ریسک، یعنی ریسک سیستماتیک به هیچ عنوان گریزی نیست. بنابراین افزودن بر تعداد سهام بیش از حد معین موجب صرف هزینه و زمان جهت نظارت بر عملکرد بدنه خواهد شد و این هزینه را به هیچ عنوان نمی‌توان با کاهش ریسک جبران نمود. که البته ایوانز و آرچر [۳] پیشنهاد می‌کند که می‌توان ریسک غیر سیستماتیک را با نگهداری ۱۰ تا ۱۵ سهم کاهش داد.

ویلیام شارپ با پیگیری کارهای مارکوئیتز، مدل تک شاخصی را که بازده هر اوراق بهادار را به بازده شاخص سهام عادی مرتبط می‌سازد ارائه کرد. مدل تک عاملی شارپ به شرح زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= (1-\lambda)E_p - \lambda b_p \\ \sum_{i=1}^n X_i &= 1 \\ E_p &= \sum_{i=1}^n X_i E_i \\ b_p &= \sum_{i=1}^n X_i b_i \\ b_i &= \frac{\text{Cov}(R_i, R_m)}{\text{Var}(R_m)} \\ 0 &\leq \lambda \leq 1 \end{aligned} \quad (3)$$

که در این مدل؛  $E_p$  بازده مورد انتظار پرتفولیو،  $X_i$  بخشی از بودجه کل که در طرح نام سرمایه‌گذاری می‌گردد،  $E_i$  بازدهی مورد انتظار طرح نام،  $B_p$  نسبت کوواریانس عایدی ورقه نام بازار به واریانس بازار و  $\lambda$  درجه ریسک‌گریزی سرمایه‌گذار می‌باشد [۴]. به دلیل مشکلات مدل مارکوئیتز از جمله محاسبات پیچیده کوواریانس، چندی بعد بر اساس تئوری بازار سرمایه، مدل قیمت‌گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای (CAPM) شکل گرفت. در مدل قیمت‌گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای سعی می‌شود، بازده مورد انتظار از هر دارایی مالی بر اساس صرف ریسک نسبت به  $R_f$  به ازای ریسک آن دارایی تعیین شود که برای اندازه‌گیری ریسک هم از واریانس و هم از  $\beta$  (ریسک سیستماتیک) می‌توان استفاده کرد. وی خط بازار سرمایه CML و بازار اوراق بهادار SML را معرفی کرد. وی بیان کرد که در صورتی که به جای ریسک کل فقط ریسک سیستماتیک را در نظر بگیریم، معادله خط بازار اوراق بهادار به صورت معادله ۴ می‌شود:

$$R = R_f + (R_m - R_f)\beta \quad (4)$$

## ۲-۱ برنامه‌ریزی آرمانی

برنامه‌ریزی آرمانی نخستین بار توسط چارلز و کوپر در ۱۹۵۵ معرفی شد [۵] و به وسیله‌ی همین محققین در سال ۱۹۶۱ به صورت روشن‌تری تعریف شد [۶]، سپس به وسیله‌ی ایجری در طول دهه ۱۹۶۰ توسعه بیشتری یافت [۷]. اما از اواسط ۱۹۷۰ توجه گسترده و قابل توجهی را به دست آورد. دلیل عمده چنین توجهی توانایی استفاده از آن به عنوان یک ابزار کارآمد و موثر جهت مدل‌سازی، حل و تجزیه و تحلیل مدل‌های ریاضی که شامل اهداف متعدد و در بعضی موارد متضاد که به مسایل دنیای واقعی نزدیک‌تر است، می‌باشد. دلیل دیگر علاقه به GP این است که روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی مرسوم همیشه جواب‌های قابل قبولی برای مسایل دنیای واقعی تولید نمی‌کنند [۸]. این روش در باره سیستم‌هایی که دارای اهداف متعارف و چندگانه هستند، مطرح می‌گردد. روش‌های ارایه شده پیرامون برنامه‌ریزی آرمانی دقیق، دارای بافت مشترکی هستند و هدف همه آن‌ها حداقل کردن انحرافات نامساعد از آرمان‌هاست. برنامه‌ریزی آرمانی تلاش می‌کند تا منطق بهینه‌سازی را در برنامه‌ریزی ریاضی با خواست (تمایل) تصمیم‌گیرنده جهت ارضاء چندین هدف ترکیب نمایند. مدل کلی برنامه‌ریزی آرمانی، مدل ریاضی خطی می‌باشد که حصول بهینه اهداف را در محیط تصمیم‌گیری داده شده را جستجو می‌کند. محیط تصمیم‌گیری مفاهیم پایه شامل محدودیت‌های سیستمی و آرمانی، متغیرهای تصمیم و تابع هدف را مشخص می‌سازد. به عبارت دیگر برنامه‌ریزی آرمانی، راه حرکت هم‌زمان به سوی چندین هدف را نشان می‌دهد. مبنای کارچنین است که برای هر کدام از هدف‌ها، عدد مشخص به عنوان آرمان تعیین و تابع هدف مربوط به آن فرمول‌سازی می‌گردد. آن‌گاه جوابی جستجو می‌شود که مجموع (وزنی) انحرافی هر هدف نسبت به آرمانی که برای همان هدف تعیین شده است را حداقل نمایند. مدل برنامه‌ریزی آرمانی دقیق به شرح زیر می‌باشد [۹]:

$$\begin{aligned} \text{Min } A &= \{g_1(n_1, p_1), g_2(n_2, p_2), \dots, g_k(n_k, p_k)\} \\ \text{s.t. } F_i(X) + n_i - p_i &= b_i \\ x &\geq 0, n_i, p_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (5)$$

## ۲-۲ مدل‌های آرمانی برای انتخاب پرتفولیوی بهینه

در سال ۱۹۷۳ لی و لیرو، طی مقاله‌ای مدل برنامه‌ریزی آرمانی را با در نظر گرفتن متغیرهای بازده مورد انتظار، بتای هر سهم، ضریب کوواریانس در ارتباط با هر سهم، متوسط درصد سود تقسیم‌شده سالانه به واریانس هر سهم، واریانس هر سهم، برای انتخاب پرتفولیوی ارایه نمودند. آنان محدودیت تنوع‌بخشی و محدودیت نسبت سرمایه‌گذاری را نیز در مدل خود در نظر گرفته‌اند. برای محاسبه بازده مورد انتظار و واریانس از فرمول‌های شارپ استفاده نمودند [۱۰]. مریم خلیلی عراقی در سال ۱۳۸۵ با استفاده از مدل لی و لیرو پرتفولیویی که شامل ۸ سهم از ۴ صنعت (واسطه‌گری مالی - مواد و محصولات شیمیایی - سایر محصولات کانی غیرفلزی - خودرو و ساخت

قطعات) بود را ایجاد و نسبت سرمایه گذاری در هر سهم را مشخص نمود [۱۱]. در سال ۱۹۸۰ لی وچیسر مدل GP با آرمان‌های زیر را پیشنهاد نمودند [۱۲]:

- حداکثرسازی عایدی مورد انتظار سرمایه گذاری هر سهم
- حداقل کردن ریسک (بتای) سرمایه گذاری
- حداکثر سرمایه گذاری در یک ورقه معین
- ترجیح سرمایه گذار برای اوراق دارای بتای ورقه  $i$
- حداکثرسازی عایدی پرتفولیو
- محدودیت بودجه

با استفاده از مدل وی (۶) مقدار پول سرمایه گذاری در هر سهم را می‌توان محاسبه کرد.

$$\text{Min } Z = p_1 d_1 + p_2 (d_2^- + d_2^+) + p_3 \sum_{i=4}^n d_i^- + p_4 d_{n+4}^- + p_5 d_{n+5}^- + p_6 d_{n+6}^-$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^n X_i + d_1^- - d_1^+ = BC,$$

$$\sum_{i=1}^n R_i X_i + d_2^- - d_2^+ = DR, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^n B_i X_i + d_3^- - d_3^+ = B(BC),$$

$$X_i + d_4^- - d_4^+ = v_i,$$

$$X_i + d_5^- - d_5^+ = D_i,$$

$$BC + \sum R_i X_i + d_6^- - d_6^+ = M.$$

در سال ۱۹۹۳ تاپو و فینستین، مدل خود را برای انتخاب پرتفولیو به صورت زیر ارائه نمودند:

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (V_t + W_t) \\
 \text{s.t.} \quad & \\
 & V_t - W_t - \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j = 0, \\
 & t = 1, \dots, T, \\
 & \sum_{j=1}^n r_j X_j \geq p M_0, \\
 & \sum_{j=1}^n X_j = M_0, \\
 & 0 \leq X_j \leq U_j, j = 1, \dots, n, \\
 & U_t, W_t \geq 0, t = 1, \dots, T, \\
 & V_t = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j \geq 0, \\
 & -W_t = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j \leq 0, \\
 & V_t W_t = 0, t = 1, \dots, T, \\
 & R_i = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T r_{ij}, \\
 & a_{ij} = r_{ij} - r_j.
 \end{aligned} \tag{V}$$

که در این معادلات داریم:

$R_i$ : متغیر تصادفی بیانگر نرخ عایدی دوره‌ای برای  $S_j$ ، زامین دارایی باشناخت  $r_{ij}$  در دوره  $t$  می‌باشد.

$X_j$ : متغیر تصمیم که بیانگر مقدار وجهی است که در  $S_j$  به عنوان بخشی از  $M_0$  سرمایه گذاری می‌شود.

$P$ : حداقل نرخ عایدی مورد انتظار سرمایه گذاری را نشان می‌دهد.

$U_j$ : حداکثر مبلغ مجاز برای سرمایه گذاری در  $S_j$  می‌باشد.

انواری رستمی و نصراللهی در سال ۱۳۸۲ مدل برنامه‌ریزی آرمانی سرمایه گذاری در صنعت بیمه ایران را با در نظر گرفتن معیارهای بازده، ریسک، نقدینگی، نسبت تقسیم سود و نسبت قیمت به درآمد طراحی نمودند [۱۳]. نیل منصور و همکارانش در سال ۲۰۰۷ مدل برنامه‌ریزی آرمانی انتخاب پرتفولیو بهینه را برای آرمان‌های نرخ بازده و نقدینگی و ریسک (بتای هر سهم) ارائه نمودند. این مدل را برای ۳۴ سهم بازار بورس تونس فرمول‌سازی کرده‌اند [۱۴]. کلنیاتی و روستم در سال ۲۰۰۹ در مقاله ای تحت عنوان "تصمیم‌گیری پرتفولیو با گشتاورهای مرتبه بالاتر" با توجه به مفروضات مدل کلاسیک میانگین-واریانس مارکوویتز و در نظر گرفتن چولگی (گشتاور سوم) و کشیدگی (گشتاور چهارم) یک پرتفولیو جهانی بهینه را بررسی نمودند. آرمان‌های مدنظر آن‌ها افزایش دادن بازده (گشتاور اول) و چولگی و کاهش دادن واریانس (گشتاور دوم) و کشیدگی می‌باشد [۱۵].

تحقیق دیگری که در این زمینه انجام شده توسط مهیری و پریجنت در سال ۲۰۱۰ می باشد. آنان نیز با در نظر گرفتن این چهار معیار مدل برنامه ریزی آرمانی ایجاد نمودند. آنان بازده ماهانه ۸ شاخص بازار بورس بین الملل را در طول دوره ژانویه ۱۹۸۸ تا دسامبر ۲۰۰۷ در نظر گرفتند. مدل آنان به صورت زیر می باشد [۱۶]:

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad Z &= \left| \frac{d_1}{R^*} \right|^{\lambda_1} + \left| \frac{d_2}{V^*} \right|^{\lambda_2} + \left| \frac{d_3}{S^*} \right|^{\lambda_3} + \left| \frac{d_4}{K^*} \right|^{\lambda_4} \\
 \text{s.t.} \quad & X^T \bar{R} + d_1 = R^*, \\
 & X^T V X - d_2 = V^*, \\
 & \frac{E(X^T (\bar{R} - \bar{R}))^r}{\sigma^r} + d_3 = S^*, \\
 & \frac{E(X^T (\bar{R} - \bar{R}))^f}{\sigma^f} + d_4 = K^*, \\
 & X^T I = 1, \\
 & X \geq 0, \quad d_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 4.
 \end{aligned} \tag{16}$$

کمالبای و همکارانش نیز در سال ۲۰۱۱ با در نظر گرفتن ۴ گشتاور مدل زیر را طراحی نمودند که اندکی با مدل قبلی تفاوت دارد. آنان نیز مثالی از ۲۶ سهام از بازار بورس استانبول با در نظر گرفتن بازده ماهانه در دوره زمانی ژانویه ۲۰۰۵ تا دسامبر ۲۰۱۰ ارائه نمودند [۱۷].

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad Z &= \left| \frac{d_1}{M^*} \right|^{\lambda_1} + \left| \frac{d_2}{V^*} \right|^{\lambda_2} + \left| \frac{d_3}{S^*} \right|^{\lambda_3} + \left| \frac{d_4}{K^*} \right|^{\lambda_4} \\
 \text{s.t.} \quad & X^T \bar{R} + d_1 = M^*, \\
 & X^T V X - d_2 = V^*, \\
 & \frac{E(X^T (\bar{R} - \bar{R}))^r}{\sigma^r} + d_3 = S^*, \\
 & \frac{E(X^T (\bar{R} - \bar{R}))^f}{\sigma^f} + d_4 = K^*, \\
 & X^T I = 1, \\
 & X \geq 0, \quad d_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 4.
 \end{aligned} \tag{9}$$

گان نیز در سال ۲۰۱۱ مدلی برای انتخاب پرتفولیو با استفاده از برنامه ریزی آرمانی چند فرموله با در نظر گرفتن میانگین و واریانس و چولگی ارائه نموده است [۱۸].

### ۳ روش تحقیق

محققین در این مقاله با توسعه مدل کمال بای و همکارانش [۱۷] و افزودن آرمان حداکثرسازی سود تقسیمی و نشان دادن آرمان ریسک به صورت ریسک پرتفولیو مدلی جدید ارائه نموده‌اند، به طوری که آرمان‌های اصلی مدل ارائه شده را به صورت زیر در نظر گرفته‌اند:

- ۱- مقدار ریسک پرتفولیو حداقل شود.
- ۲- بازده مورد انتظار سرمایه گذاری حداکثر شود.
- ۳- مقدار سود پرداختی سالانه پرتفولیو حداکثر شود.
- ۴- ضریب چولگی بازده مثبت باشد.
- ۵- ضریب کشیدگی منفی شود.

با توجه به آرمان‌های بیان شده مدل عمومی انتخاب پرتفولیو سهام به صورت زیر ارائه شده است:

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad Z &= W_1 \left| \frac{d_1^+}{\sigma^{*}} \right| + W_2 \left| \frac{d_2^-}{\mu^*} \right| + W_3 \left| \frac{d_3^-}{D^*} \right| + W_4 \left| \frac{d_4^-}{S^*} \right| + W_5 \left| \frac{d_5^- + d_5^+}{K^*} \right| \\
 \text{s.t.} \quad & \\
 & \sigma_p^* - \sigma^{*} = d_1^+ - d_1^-, \\
 & E(R_p) - \mu^* = d_2^+ - d_2^-, \\
 & \sum_{i=1}^n D_i X_i - D^* = d_3^+ - d_3^-, \\
 & \sum_{i=1}^n S_i X_i - S^* = d_4^+ - d_4^-, \\
 & \sum_{i=1}^n K_i X_i - K^* = d_5^+ - d_5^-, \\
 & \sum_{i=1}^n X_i = 1, \\
 & d_p \geq 0, p = 1, \dots, 5.
 \end{aligned} \tag{10}$$

جدول ۱. تعاریف نمادهای استفاده شده در مدل

تعریف	نماد
درجه اهمیت آرمان $i$	$W_i$
درصد سرمایه گذاری در ورقه $i$	$x_i$
بازده تحقق یافته ورقه $i$ در زمان $k$	$R_{ik}$
میانگین بازده تحقق یافته ورقه $i$ در طول دوره $m$	$\mu_i$
بازده مورد انتظار پرتفولیو	$E(R_p)$
واریانس ورقه $i$	$\sigma_i^2$
کو واریانس ورقه $i$ و $j$	$\rho_{ij}$
ریسک مورد انتظار پرتفولیو	$\sigma_p$
ضریب چولگی بازده های ورقه $i$	$S_i$
ضریب کشیدگی بازده های ورقه $i$	$K_i$
قیمت ورقه $i$ در زمان $k$	$P_{ki}$
قیمت ورقه $i$ در زمان $k-1$	$P_{(k-1)i}$
سود تقسیمی در طول دوره بین $k$ و $k-1$	$D_{ki}$
سود تقسیمی سالانه سهام $i$	$D_i$
تعداد اوراق در پرتفوی مورد نظر	$n$

نمادهای استفاده شده در مدل (۵) در جدول ۱ تعریف گشته اند. برای محاسبه  $\sigma_p^2$  از معادله (۲) استفاده می شود که  $\sigma_{ij}$  کو واریانس می باشد که از معادله (۱۱) قابل محاسبه است و همچنین  $\sigma_i^2$  که واریانس هر سهام می باشد از طریق فرمول ۱۲ محاسبه می گردد.

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^m (R_{ik} - \mu_i)(R_{jk} - \mu_j) \quad (11)$$

$$\sigma_i^2 = \sum_{k=1}^m (R_{ik} - \mu_i)^2 \quad (12)$$

که در این معادلات می توان  $R_{ik}$  و  $\mu_i$  را بترتیب از معادلات ۱۳ و ۱۴ محاسبه کرد:

$$R_{ik} = \frac{P_{ki} - P_{(k-1)i} + D_{ki}}{P_{i(k-1)}} \quad (13)$$

$$\mu_i = \frac{\sum_{k=1}^m R_{ik}}{K} \quad (14)$$

به طوری که  $k$  و  $m$  به صورت  $k: 1, 2, \dots, m$  و  $i: 1, 2, \dots, n$  تعریف می‌شوند.  
 $E(R_p)$  نیز از فرمول (۱۵) به دست می‌آید:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^n X_i \mu_i \quad (15)$$

جهت محاسبه چولگی و کشیدگی به ترتیب از معادلات ۱۶ و ۱۷ می‌توان استفاده نمود:

$$S_i = \frac{1}{k} \sum_{k=1}^m (R_{ik} - \mu_i)^2 \quad (16)$$

$$K_i = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (R_{ik} - \mu_i)^3 \quad (17)$$

با استناد به نتایج ایوانز و آرچر که بیان نمودند که می‌توان ریسک غیر سیستماتیک را با نگهداری ۱۰ الی ۱۵ سهم کاهش داد، در این مقاله ۱۰ سهم انتخاب شده است. به گونه‌ای که ۱۰ شرکت اول از لیست ۵۰ شرکت فعال‌تر در بورس در سه ماهه آخر سال ۱۳۹۰ انتخاب گردیده‌اند. بازده‌های ماهانه این اوراق از تاریخ ۱۳۸۹/۰۹/۱ تا ۱۳۹۰/۰۹/۱ با استفاده از نرم‌افزار تدبیر استخراج شده است. این اطلاعات در جدول ۲ نشان داده شده است. سود تقسیمی سالانه منتهی به سال ۱۳۹۰ این سهام نیز، با استفاده از این نرم‌افزار به دست آمده است که در جدول ۳ نشان داده شده است. اطلاعات مورد نیاز دیگر که عبارتند از انحراف معیار، واریانس، کوواریانس، چولگی، کشیدگی بازده‌های اوراق با استفاده از نرم افزار SPSS محاسبه گردیده است و به صورت جدول ۴ و ۵ به نمایش گذاشته شده است. جهت انتخاب مقدار مطلوب آرمان‌ها با استفاده از داده‌های جدول ۴ مطلوب‌ترین آنان انتخاب و در جدول ۶ به نمایش گذاشته شده‌اند. در این مقاله با استفاده از روش فرآیند تجزیه و تحلیل سلسله مراتبی (AHP) مقایسه‌ای دو بدویی در خصوص میزان اهمیت معیارهای مورد نظر صورت گرفت. اطلاعات مربوط به آن به وسیله توزیع ۱۵ پرسشنامه به سرمایه‌گذاران حضور یافته در بورس اوراق بهادار اصفهان به صورت تصادفی جمع‌آوری گردیده است. این اطلاعات توسط نرم افزار Expert Choice تحلیل شده‌اند. نتایج حاصل، اهمیت نسبی معیارها را به ترتیب: آرمان ۲، ۱، ۴، ۵، ۳ تعیین نموده است که ضرایب نهایی در جدول ۷ نمایش داده

شده‌اند. در این ضرایب می‌بایست معادله  $\sum_{i=1}^5 W_i = 1$  صدق کند.

جدول ۲. بازده سهام

تاریخ	صنایع مس ایران	سرمایه گذاری ملی ایران	مخابرات ایران	بانک ملت	سرمایه گذاری ملت	بیمه پارسیان	سرمایه گذاری صنعت و معدن	پارس خودرو	سرمایه گذاری بهمن	پست بانک ایران
۱۳۸۹/۱۰/۰۱	۷/۴۵	-۱۰/۰۳	-۰/۶۰	۲/۷۲	-۹/۶۸	۳/۸۵	-۱۰/۷۶	-۹/۳۱	-۶/۳۶	۱۰۶/۵۸
۱۳۸۹/۱۱/۰۱	۱۱/۴۸	۲۲/۵۱	۹/۰۰	۱/۴۶	۳/۷۳	-۱/۶۰	۱۸/۴۷	۱۸/۷۷	۱۳/۵۰	۶۸/۳۰
۱۳۸۹/۱۲/۰۱	۱۸/۳۳	۴/۵۵	۱۱/۲۰	۸/۵۸	-۵/۸۴	-۷/۴۲	۴/۱۵	-۷/۹۰	-۰/۴۱	۸/۴۶
۱۳۹۰/۰۱/۰۱	۳/۳۸	۵/۵۰	۱۲/۲۷	۲/۲۱	۰/۷۲	-۰/۰۳	۱۱/۵۱	-۱/۳۴	۴/۳۳	-۲۲/۴۷
۱۳۹۰/۰۲/۰۱	۱۴/۸۹	۲۴	۱۳/۷۳	۷/۰۶	-۷/۵۸	-۱/۵۷	۷/۷۰	۴۲/۴۸	۲۳/۴۰	-۱۷/۴۲
۱۳۹۰/۰۳/۰۱	۱/۰۲	-۱۰/۰۲	-۹/۵۹	۱/۵۴	-۵/۱۳	۱/۰۳	-۰/۱۵	-۱۱/۰۰	-۱/۴۵	۶/۹۸
۱۳۹۰/۰۴/۰۱	۹/۳۶	-۱۰/۳۵	-۵/۱۷	-۰/۴۴	-۲۰/۵۴	-۹/۲۹	-۳/۶۲	-۱۷/۰۰	-۸/۹۳	-۵/۲۲
۱۳۹۰/۰۵/۰۱	۳۴/۲۲	-۳/۹۳	-۲/۰۳	۳/۸۱	۹/۵۲	-۱/۸۴	-۷/۳۶	-۱/۴۶	۰/۹۱	-۱۲/۳۵
۱۳۹۰/۰۶/۰۱	-۱۱/۷۷	۳/۲۳	۱/۹۱	-۱/۷۲	-۷/۴۵	-۷/۲۲	-۲/۴۸	۳/۹۶	-۵/۰۱	۰/۳۷
۱۳۹۰/۰۷/۰۱	۴/۳۸	۱۲/۵۸	۱۲/۳۱	۷/۴۵	۲۷/۵۲	۹/۷۵	۳/۲۲	۷/۰۰	-۰/۶۳	۱۴/۹۹
۱۳۹۰/۰۸/۰۱	-۹/۶۱	-۱۰/۲۸	۱/۹۰	-۳/۸۹	-۱۱/۰۵	-۷/۶۹	۷/۷۲	-۱۱/۱۸	۶/۲۶	-۱۳/۱۴
۱۳۹۰/۰۹/۰۱	-۲/۲۸	-۵/۵۰	-۶/۱۰	-۹/۳۰	-۹/۴۷	-۱۳/۱۰	-۱۱/۵۲	-۸/۸۵	-۴/۰۰	-۱۶/۳۹

جدول ۳. سود تقسیمی سالانه در بازده زمانی تحقیق

پست بانک ایران	سرمایه گذاری بهمن	پارس خودرو	سرمایه گذاری صنعت و معدن	بیمه پارسیان	سرمایه گذاری ملت	بانک ملت	مخابرات ایران	سرمایه گذاری ملی ایران	صنایع مس ایران	سود تقسیمی سالانه
۰	۲۹۰/۴۰۰	۱۱۸/۰۰۰	۱۹۵/۰۰۰	۳۸۵/۰۰۰	۰	۱/۲۸۰/۰۰۰	۱۹/۷۲۵/۶۷۳	۴۳۵/۰۰۰	۱۰/۰۸۸/۴۷۲	سود تقسیمی سالانه

جدول ۴. داده‌ها

کشفیدگی	چولگی	واریانس	درجه	ضریب تغییرات	انحراف معیار	میانگین
۱/۰۶	۰/۶۲	۱۵۶/۹۹	۱	۱/۸۵	۱۲/۵۲	۶/۷۶
۲/۹۸	۱/۸۶	۱۵۱۱/۳۴	۵	۳/۹۳	۳۸/۸۷	۹/۸۹
۱/۸۵	۱/۳۵	۸۳/۰۵	۷	۵/۰۶	۹/۱۱	۱/۸۰
۳/۲۶	۱/۷۳	۲۷۱/۴۹	۱۰	۴۷/۴۲	۱۶/۴۷	۰/۳۴
-۰/۵۲	۰/۲۴	۸۳/۴۸	۸	۶/۵۰	۹/۱۳	۱/۴۰
۰/۰۶	۰/۳۶	۴۰/۱۰	۲	-۲/۱۷	۶/۳۳	-۲/۹۲
۲/۸۳	۱/۳۹	۱۵۰/۸۷	۶	-۴/۱۸	۱۲/۲۸	-۲/۹۳
۰/۶۴	-۰/۶۷	۲۵/۷۶	۴	۳/۱۳	۵/۰۷	۱/۶۲
-۱/۵۴	-۰/۰۷	۶۷/۱۸	۳	۲/۵۳	۸/۱۹	۳/۲۳
-۰/۵۷	۰/۷۷	۱۶۰/۴۸	۹	۶/۵۴	۱۲/۶۶	۱/۹۳

جدول ۵. ماتریس کوواریانس سهام

صنایع مس ایران	سرمايه گذاري ملي ايران	مخابرات ايران	بانک ملت	سرمايه گذاري ملت	بیمه پارسیان	سرمايه گذاري خودرو	پارس خودرو	سرمايه گذاري بهمن	پست بانک ایران
۳۳/۱۱	۱۵/۰۶	-۰/۷۳	۳۴/۳۱	۲۷/۴۷	۱۰۴/۴۹	-۱۵/۱۳	-۹/۰۸	-۴۳/۶۹	۱۵۱۱/۳۴
۲۳/۹۳	۸۸/۱۳	۴۵/۶۷	۱۴/۵۹	۱۷/۴۳	۸/۸۷	۵۸/۷۵	۱۲۷/۵۶	۸۳/۰۵	-۴۳/۶۹
۴۴/۲۷	۱۸۹/۳۱	۸۷/۴۷	۳۴/۵۹	۵۹/۷۹	۲۹/۹۱	۷۴/۷۴	۲۷۱/۴۹	۱۲۷/۵۶	-۹/۰۸
-۴/۰۰	۷۷/۲۷	۵۱/۴۹	۱۴/۹۴	۲۵/۸۴	۱۱/۲۴	۸۳/۴۸	۷۴/۷۴	۵۸/۷۵	-۱۵/۱۳
۱۵/۹۴	۲۳/۹۹	۱۸/۷۱	۲۰/۵۳	۵۵/۲۸	۴۰/۱۰	۱۱/۲۴	۲۹/۹۱	۸/۸۷	۱۰۴/۴۹
۴۲/۸۰	۶۸/۳۳	۴۴/۵۶	۲۹/۱۴	۱۵۰/۸۷	۵۵/۲۸	۲۵/۸۴	۵۹/۷۹	۱۷/۴۳	۲۷/۴۷
۳۷/۸۸	۱۳/۷۲	۲۶/۰۱	۲۵/۷۶	۲۹/۱۴	۲۰/۵۳	۱۴/۹۴	۳۴/۵۹	۱۴/۵۹	۳۴/۳۱
۱۷/۲۱	۸۴/۳۲	۶۷/۱۸	۲۶/۰۱	۴۴/۵۶	۱۸/۷۱	۵۱/۴۹	۸۷/۴۷	۴۵/۶۷	-۰/۷۳
۳۵/۲۳	۱۶۰/۴۸	۸۴/۳۲	۳۱/۷۲	۶۸/۳۳	۲۳/۹۹	۷۷/۲۷	۱۸۹/۳۱	۸۸/۱۳	۱۵/۰۶
۱۵۶/۹۹	۳۵/۲۳	۱۷/۲۱	۳۷/۸۸	۴۲/۸۰	۱۵/۹۴	-۴/۰۰	۴۴/۲۷	۲۳/۹۳	۳۳/۱۱

جدول ۶. سطح مطلوب متغیرهای آرمان‌ها

	$\mu^*$	$\sigma^{2*}$	$D^*$	$S^*$	$K^*$
سطح مطلوب	۹/۸۹	۲۵/۷۶	۱۹۷۲۵۶۷۳	۱/۸۶	-۱/۵۴

جدول ۷. ضرایب اهمیت آرمان‌ها

ضرایب ترجیحات	$W_5$	$W_4$	$W_3$	$W_2$	$W_1$
مقدار	۰/۱۵	۰/۲۰	۰/۱۰	۰/۳۰	۰/۲۵

با وارد کردن این اطلاعات به برنامه LINGO مقادیر به صورت جدول ۸ به دست آمد.

جدول ۸. درصد هر سهم در پرتفولیو

صنایع مس ایران	سرمایه گذاری ملی ایران	مخابرات ایران	بانک ملت	سرمایه گذاری ملت	بیمه پارسیان	سرمایه گذاری صنعت و معدن	پارس خودرو	سرمایه گذاری بهمن	پست بانک ایران	بازده پرتفولیو
در مدل ارائه شده	۰/۱۵	۰	۰/۴۹	۰	۰/۲۸	۰/۰۶	۰	۰	۰/۰۲	۲/۰۳
در مدل مارکوئیتز	۰/۰۵۶	۰	۰	۰/۷۳	۰	۰/۰۸۳	۰	۰/۱۰	۰/۰۱۸	۱/۹۲

با به دست آمدن مقادیر در جدول ۸ ارزش تابع هدف ۰/۵۳ می‌گردد که با مقایسه با رتبه‌بندی سهام‌ها براساس ضریب تغییرات آنان در جدول ۴ منطقی به نظر می‌رسد. علاوه بر این با مقایسه بازده کل این پرتفولیو که از دو مدل مارکوئیتز و مدل ارائه شده در این تحقیق ملاحظه می‌شود که این مدل جواب بهتری را می‌دهد و توجه به چولگی و کشیدگی و سود تقسیمی سالانه حایز اهمیت است. برای تست مدل با جایگزینی ۱۰ ترجیح مختلف سرمایه‌گذاران در مدل و درصد سرمایه‌گذاری در هر سهم محاسبه می‌گردد که این مقادیر در جدول ۹ نشان داده شده‌است. که این مقادیر نیز منطقی می‌باشند، به طور مثال انتخاب ۷۸٪ در سهم مخابرات ایران در ترجیح ۸ با توجه به سود تقسیمی بالا نسبت به دیگر سهام‌ها صحیح است. ملاحظه می‌گردد که در هر ترجیحی که میزان اهمیت سود تقسیمی بیشتر است مدل سهم بیشتری از شرکت مخابرات ایران خریداری می‌کند که این به معنای عملکرد صحیح مدل می‌باشد.

جدول ۹. مقایسات نتایج براساس ترجیحات مختلف

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
$W_1$	۰/۳	۰/۴	۰/۳	۰/۲	۰/۲	۰/۳	۰/۱	۰/۲	۰/۲	۰/۳
$W_2$	۰/۳	۰/۲	۰/۴	۰/۳	۰/۲	۰/۴	۰/۴	۰/۳	۰/۲	۰/۳
$W_3$	۰/۲	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۳	۰/۲	۰/۳	۰/۱	۰
$W_4$	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۲	۰/۲	۰	۰/۲	۰/۱	۰/۲	۰/۲
$W_5$	۰/۱	۰/۳	۰	۰/۱	۰/۲	۰	۰	۰/۱	۰/۳	۰/۳
صنایع مس ایران	۰/۱۵	۰/۰۷	۰/۰۵	۰/۲۰	۰/۱۳	۰/۱۱	۰/۳۲	۰/۲۰	۰/۰۸	۰/۰۹
سرمایه گذاری ملی ایران	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
مخابرات ایران	۰/۴۹	۰/۳۳	۰/۰۸	۰/۶۷	۰/۷۲	۰/۴۳	۰/۶۳	۰/۷۸	۰/۷۳	۰/۴۴
بانک ملت	۰/۰۹	۰/۱۰	۰/۶۶	۰	۰	۰/۴۵	۰	۰	۰	۰
سرمایه گذاری ملت	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
بیمه پارسیان	۰/۲۵	۰/۳۸	۰	۰/۱۲	۰/۰۵	۰	۰	۰	۰/۱۹	۰/۳۸
پارس خودرو	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۰۹
سرمایه گذاری صنعت و معدن	۰/۰۲	۰/۱۲	۰/۰۳	۰	۰	۰	۰/۰۱	۰	۰	۰
سرمایه گذاری بهمن	۰	۰	۰/۱۶	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
پست بانک ایران	۰	۰	۰/۰۲	۰/۰۱	۰/۰۸	۰/۰۱	۰/۰۴	۰/۰۲	۰	۰

#### ۴ نتیجه گیری

در این مقاله پس از پرداختن به ادبیات تحقیق و بیان مدل‌های ریاضی انتخاب پرتفولیو و همچنین مقایسه مدل‌های آرمانی انتخاب پرتفولیو، مدلی ارایه گشت که علاوه بر بازده و ریسک به عنوان معیارهای عمومی انتخاب پرتفولیو، معیارهای چولگی و کشیدگی سود تقسیمی نیز در نظر گرفته شد. کاربرد مدل در پرتفولیویی که شامل ۱۰ سهم ۵۰ شرکت فعال در سه ماه سوم ۱۳۹۰ می‌باشد تست گردید. داده‌های مساله از نرم افزار TADBIR و SPSS جمع‌آوری شدند. ترجیحات مختلفی در نظر گرفته شدند و درصد سرمایه گذاری در هر سهم با استفاده از مدل نوشته شده در برنامه LINGO محاسبه گردید. با مقایسه بازده پرتفولیو (با سهام‌های یکسان) بدست آمده از مدل مارکوویتز و مدل ارایه شده، این نتیجه حاصل شد که معیارهای دیگر علاوه بر بازده و ریسک نباید در انتخاب سبد بهینه نادیده گرفته شوند. همان‌طور که ملاحظه شد با توجه بدین عوامل نتایج بهینه‌تری حاصل می‌شود. سرمایه گذاران می‌توانند از مدل ارایه شده برای انتخاب پرتفوی بهینه سهام استفاده نمایند.

## منابع

- [۱] جونز، چ. پ.، (۱۳۸۹). مدیریت سرمایه‌گذاری، رضا تهرانی و عسگر نوربخش، تهران، انتشارات نگاه دانش.
- [۴] بیدگلی، غ. ر.، تلنگی، ا.، (۱۳۸۷). مدل‌های برنامه‌ریزی آرمانی در انتخاب پرتفولیوی بهینه. تحقیقات مالی، شماره ۱۳ و ۱۴، دانشکده مدیریت دانشگاه تهران.
- [۸] نصراللهی، ا.، (۱۳۸۹). برنامه‌ریزی آرمانی و کاربردهای آن، پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات، دانشکده علوم گروه ریاضی دانشگاه اصفهان.
- [۹] فراگوزلو، ع. ر.، برزگر، م.، (۱۳۸۷). برنامه‌ریزی آرمانی با استفاده از رویکرد AHP جهت بهینه‌سازی ترکیب تولید، مجله بررسی‌های بازرگانی، شماره ۲۹، موسسه مطالعات و پژوهش‌های بازرگانی.
- [۱۱] خلیلی عراقی، م.، (۱۳۸۵). انتخاب بده بهینه سهام با استفاده از برنامه‌ریزی آرمانی، پژوهشنامه اقتصادی، شماره ۶، پیاپی ۲۰، تهران.
- [۱۳] انواری رستمی، عل. ا.، نعمت‌الهی اردستانی، ا. ر.، (۱۳۸۲). طراحی مدل برنامه‌ریزی آرمانی سرمایه‌گذاری: مطالعه‌ی موردی: صنعت بیمه ایران. بررسی‌های حسابداری و حسابرسی، سال ۱۰، شماره ۳۲، دانشکده مدیریت دانشگاه تهران.
- [2] King, B. F., (1966). Market and Industry Factors in Stock Price Behavior. *Journal of Business*, 1, 139-90.
- [3] Evans, S., Archer, S. H., (1970). Diversification and the Reduction of Dispersion: An Emprial Analysis. *Journal of Finance*, 25(3), 761 –769.
- [5] Charnes, A., Cooper W. W., Ferguson, R., (1995). Optimal Estimation of Executive Compensation by Linear Programming, *Management Sci*, 1138-151.
- [6] Charnes, A., Cooper, W. W., (1961). *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*. New York: John Wiley & Sons.
- [7] Ijiri, Y., (1965). *Management Goals and Accounting for Control*. Chicago: Randmcnally.
- [10] Lee, S. M., Lerro, A. J., (1973). Optimizing the Portfolio Selection for Mutual Funds. *the Journal of Finance*, 1087-1099.
- [12] Lee, S. M., Chesser, D. L., (1980). Goal Programming for Portfolio. *The Journal of Portfolio Management*, 22-26.
- [14] Mansour, N., Rebai, A., Aouni, B., (2007). Portfolio Selection through Imprecise Goal Programming Model: Integration of the Manager's Preferences. *Journal of Industrial Engineering International*, 3(5), 1-8.
- [15] Kleniati, P. M., Rustem, B., (2009). Portfolio Decisions with Higher Order Moments. *Comisef Working Papers Series*.
- [16] Mhiri, M., Prigent, J. L., (2010). International Portfolio Optimization with Higher Moments. *International Journal of Economics and Finance*, 2(5).
- [17] Kemalbay, G., Ozkut, C. M., Franko, C., (2011). Portfolio Section with Higher Moments: a Ploynomial Goal Programming Approach to Ise-30 Index. *Econometrics and Statistics Issue: 13 (12th International Econometrics, Operations Research, Statistics Symposium Special Issue)*, 41-61.
- [18] Gan, Q., (2011). On Polynomial Goal Programming and Mean-Variance-Skewness Portfolio Selection. *Papers Being Presented at the 2011 Afaanz Conference accounting and Finance Association of Australia and New Zealand*, 3-5 July, Darwin, Australia.