مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال دهم، شماره سوم (پیاپی ۳۸)، پاییز ۹۲، ص ص ۲۳-۱۱
شاپا ۷۲۸٦-۲۲۵۱

کنترل موجودی، قیمت گذاری و برنامه‌ریزی تولید برای یک تولیدکننده با اقلام فاسد شدنی وابسته به زمان

حامد پورعلیخانی*[1]، علیمحمد کیمیاگری[2]، محسن کیوانلو[3]
۱- کارشناس ارشد دانشگاه صنعتی امیرکبیر، دانشکده مهندسی صنایع، تهران، ایران
۲- دانشیار دانشگاه صنعتی امیرکبیر، گروه مهندسی صنایع، تهران، ایران
۳- دانشجوی دکتری دانشگاه صنعتی امیرکبیر، گروه مهندسی صنایع، تهران، ایران

رسید مقاله: ۴ بهمن ۱۳۹۱
پذیرش مقاله: ۱ تیر ۱۳۹۲

چکیده

در این مقاله یک مدل موجودی تولیدکننده برای اقلام فاسد شدنی در شرایطی که نرخ فاسد شدن وابسته به زمان و از توزیع دو پارامتری وایبول تبعیت می‌کند؛ توسعه داده شده است. هدف این مقاله ابتدا یافتن قیمت بهینه فروش تولیدکننده و سپس زمان بهینه تولید و تعداد دوره‌های تحویل کالا برای تولیدکننده با ملاحظه‌ی بیشینه کردن سود تولیدکننده می‌باشد. یک الگوریتم ابتکاری برای تعیین تصمیمات بهینه ارایه شده و با توجه به ادبیات موضوع مثال عددی برای صحت الگوریتم حل طراحی گردیده است. در نهایت، جهت دستیابی به نتایج مدیریتی آنالیز حساسیتی بر جواب بهینه با تغییر پارامترهای هزینه‌ای و فاسدشدنی انجام شده است.

کلمات کلیدی: کنترل موجودی، قیمت‌گذاری، برنامه‌ریزی تولید، اقلام فاسد شدنی.

۱ مقدمه

همان‌طور که واضح است یکی از هزینه‌هایی که هریک از اجزای زنجیره تامین به منظور پاسخ‌گویی به نیازهای اجزای پایین دست خود متحمل می‌شوند؛ هزینه‌های موجودی می‌باشد که از جمله مهم‌ترین هزینه‌های یک زنجیره تامین به شمار می‌آید. در میان زنجیره‌های تامین متداول زنجیره‌های تامینی که کالاهایی که در طی آن حرکت می‌کنند با گذشت زمان فاسد می‌شوند از حساسیت بیشتری در هزینه‌های موجودی برخوردار هستند. با کاهش هزینه‌های زنجیره، قیمت تمام شده کالا یا خدمت کاهش یافته در حقیقت شانس به‌دست آوردن سهم بیشتری از بازار فراهم می‌گردد که به نوبه خود منجر به افزایش سودآوری هریک از اجزای زنجیره تامین خواهد گردید. اگر هر جزء زنجیره در صدد کاهش هزینه خود و در حقیقت افزایش سود خویش بدون توجه به سایر اجزا زنجیره باشد؛ نتیجه حاصل افزایش چشمگیر در هزینه‌های کل زنجیره و در نهایت حذف کلیه

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: hamed_pouralikhani@aut.ac.ir

اجزای زنجیره در بین رقبا خواهد بود. همان‌طور که گفته شد یکی از آثار مثبت کاهش هزینه‌های موجودی زنجیره تامین یک کالا، کاهش قیمت تمام شده کالای مذکور و در نتیجه افزایش رضایت مشتریان، ایجاد سود بیشتر برای هریک از اجزای زنجیره در اثر دستیابی به سهم بیشتر بازار و در نهایت ایجاد پویایی در زنجیره تامین درجهت غلبه بر سایر رقبا می‌باشد. بنابراین در نهایت با انجام چنین تحقیقی نه تنها یک مدل مناسب برای سفارش‌دهی اجزای زنجیره ارایه می‌شود؛ بلکه دامنه سودمندی آن می‌تواند شامل مشتری نهایی و کلیه اجزای زنجیره تامین گردد. در این میان زنجیره‌هایی که محصول‌شان فاسد شدنی است از حساسیت بیشتری برخوردار هستند؛ از این جهت که در این زنجیره‌ها علاوه بر هزینه‌های رایج موجودی هزینه مربوط به فاسد شدن نیز وجود دارد که منجر به تولید بیشتر از تقاضا و تحمیل هزینه می‌شود. استفاده از سیاست‌هایی که بتواند زنجیره تامین را به صورتی کارا هماهنگ نماید؛ همواره مورد توجه متخصصان هم در دانشگاه‌ها و هم در محیط‌های کسب و کار بوده است.

بررسی مدل های موجودی در شبکه زنجیره تامین سابقه طولانی دارد. اما لحاظ نمودن سیاست‌های برنامه‌ریزی تولید و موجودی و قیمت گذاری به صورت یکپارچه کمتر مورد توجه محققین قرار گرفته است. در واقع در این تحقیق بخش‌هایی از ادبیات موضوع که به دلیل پیچیدگی، کمتر به آن پرداخته شده به طور توامان بررسی شده‌اند عبارتند از: فاسد شدنی بودن کالا به نسبت زمان، در نظر گرفتن تامین‌کننده به صورت تولیدکننده و ادغام سیاست‌های موجودی، قیمت‌گذاری و برنامه‌ریزی تولید. لذا در نظر گرفتن این سه سیاست به طورت یکپارچه کمک شایانی به ارایه مدل‌های کاراتر که نیاز دنیای واقعی می‌باشد؛ ضروری به نظر می‌رسد. ادامه مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است. در بخش دوم، ادبیات موضوع شامل مفاهیم کالاهای فاسدشدنی و مدل‌های موجودی مرتبط و مرور بر مدل‌های تولید استفاده شده برای کالاهای فاسد شدنی مورد بررسی قرارگرفته‌اند. در بخش سوم به تشریح مساله، معرفی فرضیات و محدودیت‌های مساله پرداخته شده. در بخش چهارم مدل تولیدکننده ارایه گردیده و در بخش پنجم الگوریتم حل بهینه تشریح شده است. نتایج حاصل از اجرای مدل و به‌کارگیری الگوریتم برای یک مثال با آنالیزحساسیت کامل روی پارامترهای مدل در بخش ششم تحلیل گردیده و در نهایت در هفتم نتیجه‌گیری تحقیق و پیشنهاد برای تحقیقات آتی ارایه شده است.

۲ مرور مقالات

اقلام فاسد شدنی در زندگی روزمره ما امری معمول به شمار می‌روند. تاکنون صاحب نظران و کارشناسان علوم به یک اتفاق نظر در تعریفی برای اقلام فاسد شدنی نائل نشده‌اند. با توجه به مطالعات وی هوی مینگ [۱] اقلام فاسدشدنی در زمره اقلام پوسیده‌شده، خراب شده، تبخیر شده، منسوخ شده و گاهی افت ارزش کالا در طول زمان ارجاع داده می‌شود. مدل‌های موجودی اقلام فسادپذیر را می‌توان بر اساس خصوصیات عمرشان به سه دسته زیر دسته‌بندی کرد.

مدل‌های موجودی با عمر ثابت، مدل‌های موجودی با عمر تصادفی و مدل‌های موجودی که زوال متناسب با موجودی انبار باعث کاهش مقدار فیزیکی و یا کاربری کالا می‌شود. هر کدام از این دسته‌ها جداگانه می‌توانند بر

اساس تقسیم‌بندی رعفت، به دسته‌های مختلف دیگری تقسیم شوند: مدل‌های تک‌کالایی در مقابل چندکالایی، تقاضای قطعی در مقابل احتمالی، تقاضای متغیر یا ایستا، تک پریودی در مقابل چند پریودی، خرید در مقابل تولید محصول، کمبود غیرمجاز در مقابل کمبود مجاز، نرخ ثابت زوال در مقابل نرخ متغیر[۲].

مساله موجودی اقلام فاسد شدنی اولین بار توسط ویتین و واگنر [۳] مطالعه شد که وی اقلام فاسد شدنی مد را در انتهای دوره‌ی انبار مورد بررسی قرار داد. قاره و اشنایدر [۴] در مطالعه‌ی خود استنباط کردند که مصرف اقلام فاسد شدنی نسبتاً از تابع توزیع نمایی منفی نسبت به زمان پیروی می‌کند. آن‌ها مدل موجودی اقلام فاسدشدنی را به صورت زیر پیشنهاد کردند:

$$\frac{dI(t)}{dt} + \theta \times I(t) = -f(t)$$

در این تابع، θ نرخ فاسد شدن اقلام، $I(t)$ سطح موجودی در زمان t و سپس $f(t)$ نرخ تقاضا در زمان t می‌باشد. این مدل موجودی، اساس مطالعات مشابه در این حوزه می‌باشد. مقالات [۲] و [۵] مرور ادبیات کاملی در زمینه‌ی اقلام فاسدشدنی بیان می‌کند.

نرخ فاسد شدنی فاکتور مهمی در مطالعه موجودی اقلام فاسد شدنی می‌باشد که ماهیت فاسد شدنی اقلام را توصیف می‌کند. وقتی نرخ فاسد شدنی اقلام را ملاحظه می‌کنیم؛ شرایط مختلفی شاید روی دهد. در مراحل اول این مطالعه، اغلب نرخ‌های فاسد شدنی به صورت ثابت در نظر گرفته می‌شدند. مانند مقالات [۴]، [۶-۹]. در این مدل‌ها نرخ زوال نسبت ثابت یا متغیر از موجودی در دست است که به صورت تابع مشخصی (صعودی یا نزولی) نشان داده می‌شود. همان طور که در قبل ذکر شد اولین بار شنایدر و همکاران مدل ساده سفارش اقتصادی را با نرخ ثابت زوال ارایه دادند؛ در حالی که نرخ ثابت، حل مساله را ساده می‌سازد اما نمی‌تواند شرایط واقعی فاسد شدن را بازتاب دهد؛ بنابراین نرخ فاسد شدنی با ملاحظات زمان در تحقیقات اخیر، شرایط سناریوهای متفاوتی را به وجود آورده است. نرخ فاسد شدنی به صورت تابعی خطی از زمان [۱۰و ۱۱]، به صورت توزیع وایبول دو پارامتری [۱۲-۱۴]، نرخ فاسد شدن به صورت توزیع وایبول سه پارامتری [۱۵] و نرخ فاسد شدنی به صورت توابع دیگری از زمان [۱۶] از جمله مقالاتی در مورد این حوزه می‌باشند که وابستگی نرخ فاسد شدن به زمان را مطرح می‌کنند. کوورت و فیلیپ مدل اشنایدر را توسعه دادند و مدل سفارش اقتصادی را برای نرخ متغیر زوال با فرض تابع توزیع وایبول با دو پارامتر به دست آوردند[۱۷].

برای تولید اقلام فاسدشدنی تصمیم گیرندگان می‌بایست موجودی را در سیاست تولید ملاحظه نمایند. پیشنهاد تصمیم موجودی تولید کارا جهت افزایش رقابت پذیری شرکت‌ها گرفته شده است [۱۸]. بسیاری از محققان به صورت گسترده‌ای در این حوزه مطالعه نمودند. مانند [۱۹-۲۳]. با فرض نرخ تقاضا، نرخ تولید و نرخ فاسدشدنی به صورت ثابت در مقالات [۲۴, ۲۵] مدل موجودی تولید برای اقلام فاسدشدنی تحت شرایطی که تامین کننده اعتبار تجاری برای خرده‌فروش تدارک می‌نماید. در مقاله‌ی [۲۶] مدل سفارش تولید بهینه برای اقلام فاسد شدنی در حالتی که نرخ تقاضا وابسته به قیمت فروش و سطح موجودی و نرخ فاسد شدنی ثابت، تاسیس گردید. یانگ و مینگ موجودی تولید برای اقلام فاسد شدنی مدلسازی نمودند. در این مقاله نرخ تولید و تقاضا به

صورت ثابت در نظر گرفته شده [۲۷]. مدیریت تولید فرصت‌هایی جهت استفاده‌های متفاوت در زمان‌های فروش فصلی بین بازارهای جغرافیایی پراکنده، برای اقلام فاسد شدنی جهت بهبود سودآوری شرکت امری مهم تلقی می‌شود. یونگ و شو مدل موجودی تولید اقلام فاسد شدنی را با ملاحظات چند بازاری و فصول فروش متفاوت برای کسب زمان بازپرسازی بهینه برای مواد اولیه و برنامه ریزی تولید برای کالاهای نهایی مطالعه نمودند [۲۸].

۳ نمادگذاری و مفروضات

در ادامه به تشریح نمادها و مفروضات جهت مدل‌سازی مساله تولیدکننده پرداخته شده است:

۳-۱ نمادها

Q_i موجودی در انتهای دوره i ام بعد از تحویل سفارش.

t شاخص زمان.

M نرخ تولید در واحد زمان.

$\theta(t)$ تابع توزیع فاسد شدن.

α, β پارامترهای ثابت تابع توزیع وایبول.

q اندازه دسته سفارش خرده فروش.

A_p هزینه ثابت راه اندازی در هر دوره تولیدکننده.

A_s هزینه ثابت ارسال کالا برای خرده فروش در هر ارسال.

ch هزینه نگهداری هر واحد کالا در واحد زمان.

cp هزینه تولید یک واحد کالا برای تولیدکننده.

$I_{p,i}(t)$ سطح موجودی تامین در زمان t در دوره i ام.

n_p تعداد تحویل در طی زمان t_p.

t' مدت زمان از انتهای n_p تا زمانی که تولید خاتمه یابد.

t_p مدت زمانی که تولید داریم $t_P = n_P \times T_b + t'$.

T_b مدت یک سفارش تا سفارش بعدی خرده فروش (λ).

T_p یک دوره کامل تولید کننده.

t_d مدت زمانی که مصرف داریم و تولید نداریم.

N تعداد ارسالات تولیدکننده $N \times T_b = t_p + t_d$.

TCA_p کل هزینه راه اندازی و ارسال در هر دوره.

TCH_p کل هزینه نگهداری انبار در هر دوره.

TCP_p کل هزینه تولید محصول در هر دوره.

$\mathrm{Revenue}_p$ کل درآمد حاصل از فروش در هر دوره.

$profit_p$ کل سود حاصل از فروش در هر دوره.

۳-۲ مفروضات

در تمامی مدل‌هایی که در زمینه کنترل موجودی وجود دارند؛ فرض‌هایی در نظر گرفته می‌شود که بخشی از این فرضیات واقعی هستند و بخشی دیگر جنبه تئوری دارند که بیشتر برای ساده‌سازی محاسبات و جلوگیری از پیچیدگی مدل‌ها ارایه می‌گردد. فرضیات در نظر گرفته شده در مدل‌ها به صورت کلی در ادامه آمده است:

۱- نرخ فاسد شدن وابسته به زمان و از توزیع وایبول دو پارامتری پیروی می کند به گونه ای که اگر $\theta(t)$ نرخ فاسد شدن کالا در واحد زمان باشد؛ $\theta(t)=\alpha\times\beta\times t^{\beta-۱}; ۰<\alpha<۱,\ \ \beta>۰$.

۲- جای‌گزین نمودن و یا تعمیر اقلام فاسد شده مجاز نمی‌باشد.

۳- کمبود برای تولیدکننده مجاز نمی‌باشد.

۴- زمان تدارک صفر و نرخ بازپرسازی نامحدود می‌باشد.

۵- افق زمانی به صورت نامحدود فرض می‌شود.

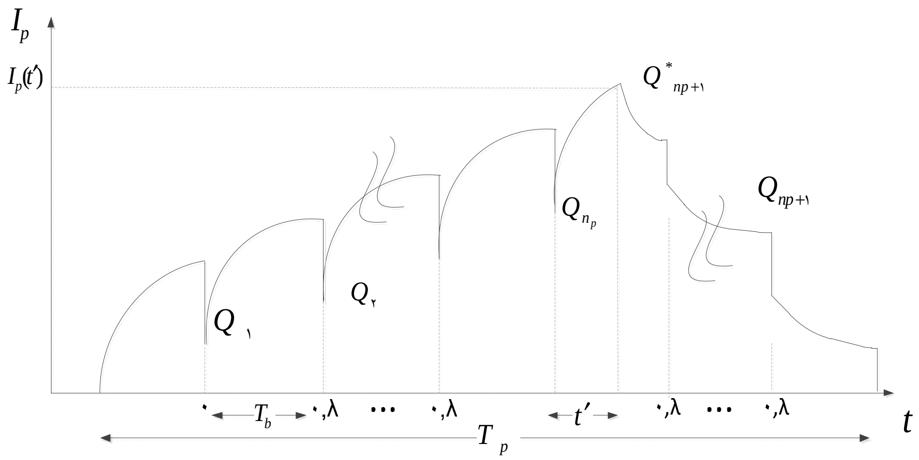
۶- نرخ تولید محدود و برابر M می‌باشد و نرخ تولید بزرگ‌تر از مجموع نرخ تقاضا و نرخ فاسد شدن است.

۷- تولیدکننده از دوره خرده‌فروش و مقدار سفارش اقتصادی او اطلاع کامل دارد و سیاست ارسال تولیدکننده به صورت ارسال محموله‌های مساوی در طول دوره تولیدکننده است.

٤ مدلسازی ریاضی

جهت درک بهتر مفاهیم ریاضی و مدلسازی تولیدکننده، مساله به صورت شماتیک به نمایش داده می‌شود.

سطح موجودی کالای تولیدشده توسط تولیدکننده در شکل ۲ نشان داده شده است. فرض گردیده تولیدکننده در زمانی قبل از سفارش مشتری شروع به تولید نموده؛ در زمانی که خرده‌فروش سفارش می‌دهد؛ کالا را ارسال می‌نماید.



شکل ۱. نمایش گرافیکی سیستم موجودی تولیدکننده

تولیدکننده به صورت انباشته‌ای به تولید می‌پردازد و در هر T_b پریود زمانی q_B واحد از موجودی تولیدکننده به خرده‌فروش منتقل می‌شود. سطح موجودی برای دوره iام در سه قسمت به‌دست آمده است. قسمت اول در دوره‌های که تولید وجود دارد. قسمت دوم در دوره‌ای که تولید در طی آن متوقف می‌شود و قسمت سوم برای دوره‌های که در آن‌ها محصول تولید نشده و از موجودی انبار جهت تامین تقاضا تا انتهای دوره‌ی خرده فروش استفاده می‌شود.

قسمت اول: در دوره‌های تولید در حالت $0 \le t \le \lambda,\ 1 \le i \le n_p$

در این حالت محصولات تولید شده وارد انبار تولیدکننده می شود. موجودی با نرخ تولید M افزایش یافته؛ موجودی داخل انبار با نرخ وابسته به زمان که از تابع توزیع وایبوال $\theta(t)=\alpha\beta t^{\beta-1}$ با پارامترهای $\beta>0$ و $0<\alpha<1$ فاسد می‌شود. بر این اساس موجودی تولیدکننده در این فاصله زمانی برای دوره i به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{dI_{P,i}(t)}{dt}=M-\theta(t)I_{P,i}(t) \qquad (1)$$
$$I_{P,i}(0)=Q_{i-1}$$

با حل معادله دیفرانسیل فوق با شرط $I_{P,i}(0)=Q_{i-1}$ و تغییر متغیر y داریم:

$$\begin{aligned}I_{p,i}(t)&=\left(\int_0^t M e^{\alpha y^{\beta}}dy+Q_{i-1}\right)e^{-\alpha t^{\beta}}\\&=\int_0^t M e^{\alpha\left(y^{\beta}-t^{\beta}\right)}dy+Q_{i-1}e^{-\alpha t^{\beta}}\end{aligned} \qquad (2)$$

همان‌طور که برای خرده‌فروش بحث گردید با استفاده از بسط تابع تیلور و با نادیده فرض کردن توان‌های α^2 و بالاتر، مدل موجودی را مدل‌سازی می‌نماییم و تابع $I_{p,i}(t)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$I_{p,i}(t)=M\left(t-\frac{\alpha\beta t^{\beta+1}}{\beta+1}\right)-Q_{i-1}e^{-\alpha t^{\beta}} \qquad (3)$$

همان‌طور که ملاحظه شد؛ مقدار سطح موجودی در انتهای پریود iام ($1\le i\le n_p$) بعد از تحویل کالا به مشتری برابر خواهد بود با $Q_i=I_{P,i}(\lambda)-q_B$، که این تعداد به عنوان سطح اولیه برای دوره $i+1$ام می‌باشد. هم‌چنین فرض شده که در ابتدای دوره‌ی تولید کالایی در انبار نباشد؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}Q_0=0\\Q_1=I_{P,1}(\lambda)-q_B\\Q_2=I_{P,2}(\lambda)-q_B\\\qquad\vdots\\Q_{n_p}=I_{P,n_p}(\lambda)-q_B\end{cases} \qquad (4)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۳) و (۴) و با اثبات استقرای فوق مقدار موجودی انبار Q_i نتیجه می گردد:

$$Q_i = M\,(\lambda - \frac{\alpha\lambda^{\beta+1}}{\beta+1}) + M\,(\lambda - \frac{\alpha\lambda^{\beta+1}}{\beta+1})(1+(e^{-\alpha t^{\beta}}(1+e^{-\alpha t^{\beta}}\ldots = $$
$$M\,(\lambda - \frac{\alpha\lambda^{\beta+1}}{\beta+1})(e^{-0\times\alpha t^{\beta}} + e^{-1\times\alpha t^{\beta}} + e^{-2\times\alpha t^{\beta}} + \ldots) = M\,(\lambda - \frac{\alpha\lambda^{\beta+1}}{\beta+1})(\sum_{j=0}^{j=i-1} e^{-j\alpha t^{\beta}}) \qquad (5)$$

قسمت دوم: در آخرین دوره تولید که تولید در طی آن متوقف خواهد شد (دوره n_{p+1})

فرض شده که تولید در دوره n_P+1 تا جایی ادامه یابد که تمام کالای مورد نیاز خرده‌فروش را تا زمان T_p بتوان با مقدار انباشته تولید تامین کرد. فرض می‌کنیم این زمان t' باشد. بنابراین مقدار تولید انباشته شده در زمان t' در پریود n_P+1ام به صورت زیر به‌دست می‌آید. مساله در حالتی که در آن t بین $0 \le t \le t'$ و $t' \le t \le \lambda$ باشد بررسی شده است:

الف) $0 \le t \le t'$ و $i = n_p + 1$, $0 \le t' \le \lambda$

از آن‌جایی که در این بازه در داخل انبار کالا داریم و محصول در حال تولید است؛ معادله موجودی همانند معادله(۳) به دست می‌آید.

$$I_{p,i}(t) = M\left(t - \frac{\alpha\beta t^{\beta+1}}{\beta+1}\right) - Q_{i-1}\,e^{-\alpha t^{\beta}} \qquad (6)$$

جهت تعیین $Q^*_{n_p+1}$ که همان بالاترین سطح موجودی تولیدکننده است؛ کافی است از معادله (۶) استفاده نموده؛ در آن t' و $i = n_P + 1$ را جای‌گذاری نماییم:

$$Q^*_{n_p+1} = I_{P,i}(t') = M\left(t' - \frac{\alpha\beta(t')^{\beta+1}}{\beta+1}\right) - Q_{n_p}\,e^{-\alpha(t')^{\beta}} \qquad (7)$$

ب) $t' \le t \le \lambda$ و $i = n_p + 1$, $0 \le t' \le \lambda$

با توجه به آن که در این بازه زمانی دیگر تولید نداریم و فقط کالا فاسد می‌شود؛ معادلات دیفرانسیل زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\frac{dI_{P,i}(t)}{dt} = -\alpha\,\beta t^{\beta+1} I_{P,i}(t)$$
$$\mathrm{I}_{p,i}(t=\lambda) = Q_{n_p+1} \qquad (8)$$

با حل معادله دیفرانسیل فوق با شرایط اولیه اشاره شده، معادله دیفرانسیل به صورت زیر حل شده است:

$$I_{P,i}(t) = e^{\alpha((\lambda)^{\beta} - t^{\beta})} Q_{n_p+1} \qquad (9)$$

به ازای $t = t'$ در معادله‌ی در معادله (۹) داریم:

$$Q^*_{n_p+1} = I_{P,i}(t') = e^{\alpha(\lambda^{\beta} - (t')^{\beta})} Q_{n_p+1} \qquad (10)$$

قسمت سوم: در دوره پس از تولید (دوره n_{p+2} تا N)

با توجه به آن که از این دوره تا انتهای دوره موجودی تولیدکننده، تولید وجود ندارد و تنها برای موجودی انباشته شده فاسد شدن وجود دارد.

$$\frac{dI_{P,i}(t)}{dt} = -\alpha\beta t^{\beta+1} I_{P,i}(t), \quad \mathrm{I}_{p,i}(t=0) = Q_{i-1} \tag{۱۱}$$

با حل معادله دیفرانسیل فوق با شرایط اولیه اشاره شده، معادله دیفرانسیل به صورت زیر حل شده است:

$$I_{P,i}(t) = e^{-\alpha t^{\beta}} Q_{i-1} \tag{۱۲}$$

در این قسمت (دوره بدون تولید) برای موجودی انبار انتهای دوره‌ها با توجه به این که در پایان دوره N، موجودی تولیدکننده به صفر خواهد رسید یعنی $Q_N = 0$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} Q_{n_p+2} = I_{P,n_p+2}(\lambda) - q_B \\ Q_{n_{p+3}} = I_{P,n_{p+3}}(\lambda) - q_B \\ \quad\vdots \\ Q_{N-1} = I_{P,N-1}(\lambda) - q_B \\ Q_N = 0 \end{cases} \tag{۱۳}$$

با استفاده از رابطه‌ی (۱۲) و (۱۳) و با اثبات استقرای فوق مقدار موجودی انبار Q_i نتیجه می‌گردد:

$$Q_i = q_B e^{\alpha t^{\beta}} + q_B e^{2\alpha t^{\beta}} + q_B e^{3\alpha t^{\beta}} + \ldots = \sum_{j=i}^{N-i} q_B e^{j\alpha t^{\beta}} \tag{۱۴}$$

در ادامه میزان هزینه‌های و درآمد سیستم محاسبه می‌گردد:

الف) هزینه راه‌اندازی و ارسال

هزینه راه‌اندازی و ارسال در یک دوره برابر خواهد بود با مجموع هزینه یک بار راه‌اندازی و N بار ارسال.

$$TCA_P = A_P + N \times A_S \tag{۱۵}$$

ب) هزینه نگهداری موجودی

در قسمت تولید کننده هزینه‌ی نگهداری موجودی به سه قسمت مختلف تقسیم می‌گردد؛ قسمت اول حالتی است که تولید کننده در حال تولید است. قسمت دوم بازه زمانی از آن‌جایی است که تولید کننده، تولید خود متوقف می‌کند (t') تا اولین سفارشی که از طرف خرده فروش دریافت کند و هم‌چنین برای قسمت سوم از زمان انتهای اولین سفارش پس از توقف تولید تا انتهای دوره تولید کننده به طول می‌انجامد:

$$TCH_{p1}+TCH_{p2}+TCH_{p3}=ch\times(\sum_{i=1}^{n_p+1}\int_{0}^{t'} M\left(t-\frac{\alpha\beta t^{\beta+1}}{\beta+1}\right)-Q_{i-1}e^{-\alpha t^{\beta}}dt + \int_{t'}^{T_b-t'} e^{\alpha((t')^{\beta}-t^{\beta})}Q_{n_p+1}\,dt+\sum_{n_p+2}^{N}\int_{0}^{T_b} e^{-\alpha t^{\beta}}Q_{i-1}\,dt) \qquad (۱۶)$$

ج) هزینه تولید محصول در یک دوره:

$$TCP_P=Cp\times t_P\times M=Cost\times(n_P\times T_b^{*}+t')\times M \qquad (۱۷)$$

د) درآمد حاصل از فروش در دوره:

$$\mathrm{Revenue}_P=\mathrm{Price}\times N\times q_B \qquad (۱۸)$$

هـ) طول دوره تولیدکننده:

$$T_P=N\times T_b=N\times\lambda \qquad (۱۹)$$

و) کل سود حاصل از فروش تولیدکننده در دوره:

بر اساس توضیحاتی که درقسمت تعیین هزینه کل خرده فروش آمد؛ برای سود کل تولیدکننده خواهیم داشت:

$$profit_P=\frac{\mathrm{Revenue}_P-TCA_P-TCH_P-TCP_P}{T_P} \qquad (۲۰)$$

در واقع سود تولیدکننده تابعی است از میزان سفارش خرده فروش q_B و تعداد ارسالی که تولیدکننده تصمیم می‌گیرد در دوره‌اش داشته باشد. از آن‌جایی که میزان درآمد تولیدکننده به سیاست‌های سفارش‌دهی خرده فروش وابسته می‌باشد، در مدل تولیدکننده هدف ماکزیمم کردن سود در نظر گرفته شده است.

۵ الگوریتم حل

با توجه به تعریف مساله که تولید کننده می‌بایست از دوره و مقدار سفارش اقتصادی خرده‌فروش اطلاعات کافی داشته باشد لذا در ادامه الگوریتم تولید کننده پیشنهاد می‌گردد. از آن‌جایی که میزان درآمد تولیدکننده به سیاست‌های سفارش‌دهی خرده فروش و میزان موجودی تولیدکننده پس از تحویل سفارش به خرده فروش در هر دوره بستگی دارد لذا امکان اثبات بهینه سازی تئوری به صورت مشتق‌گیری وجود ندارد. در قسمت مثال عددی با استفاده از جستجو برای نقطه بهینه محلی و تحلیل حساسیت سود تولید کننده، به بهینگی و منحصر به فرد بودن جواب بهینه می‌پردازیم.

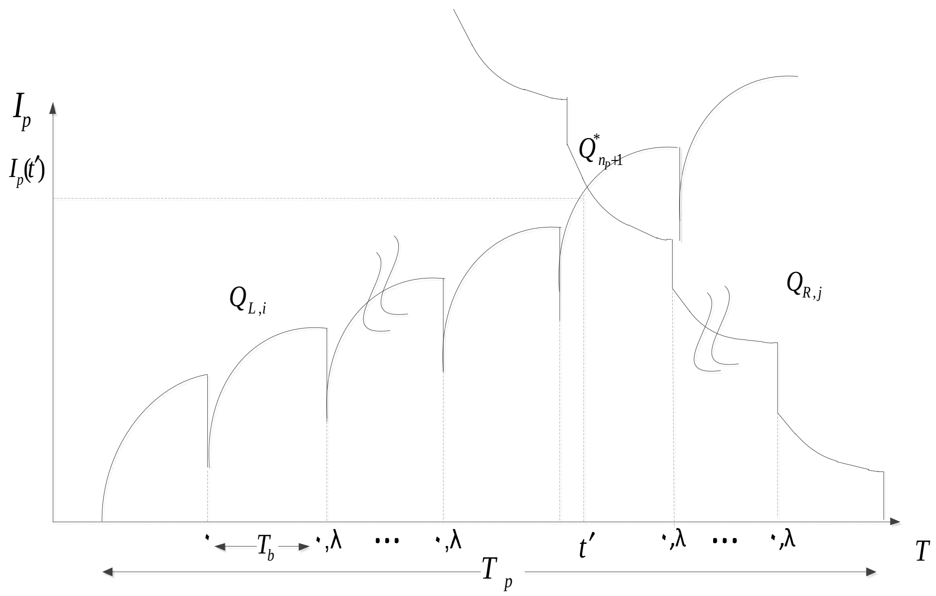
الگوریتم حل تولیدکننده

به ازای N ثابت الگوریتم زیر جهت تعیین n_P ارایه شده است. پس از تعیین n_P راهکاری برای محاسبه t' توسعه داده شد.

۱. با توجه به $Q_0=0$ در معادله موجودی تولیدکننده و با استفاده از رابطه (۵) Q_i، برای $i=1$، ...، N برای تمامی دوره‌ها تعیین شود که با $Q_{L,i}$ نمایش داده شده است.

۲. با توجه به $Q_N = ۰$ و با استفاده از رابطه (۱۴) Q_j به صورت بازگشت $(N-۱, N-۲, \ldots, N-j)$ با $Q_{R,j}$ نشان داده شده و تا زمانی محاسبه می‌شود که $Q_{R,j} \geq Q_{L,i}$.

۳. بر اساس بیشترین مقدار i که در رابطه فوق صدق نماید $n_P = i - ۱$ می‌باشد.



شکل ۲. نمایش گرافیکی الگوریتم حل

۴. با استفاده از معادله‌ی (۵) و (۷) و n_P به دست آمده از مرحله‌ی ۳، مقدار $Q^*_{n_P+۱}$ محاسبه گردد.

۵. با استفاده از برابر قرار دادن معادله‌های (۷) و (۱۰)، مقدار t' محاسبه شود.

۶. با فرض آن‌که مقدار N عدد صحیح است (در مقالات مختلف اثبات شده است.) با استفاده از جستجو برای بهینه محلی، به ازای هر N در هر مرحله n_P، t'، $price$ و متعاقباً هزینه موجودی تولیدکننده تعیین شده و بر اساس N بهینه می شود.

۶ مثال عددی و تحلیل حساسیت

در این قسمت مثالی ارایه شده و با تجزیه و تحلیل حساسیت روی پارامترهای مدل، نتایج تجزیه و تحلیل می‌شود. پارامترهای مساله در موارد مشابه از ادبیات استخراج گردیده است. بر این اساس پارامترهای مدل برای تولید کننده به شرح زیر می‌باشند:

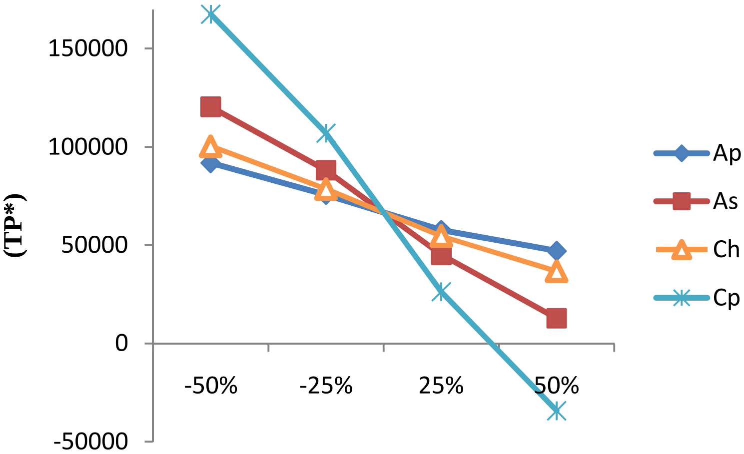
جدول ۱. متغیرها و پارامترهای تولیدکننده

M	۸۰۰ سال	A_p	۱۰۰۰
λ=T_b	۰/۰۸۵۶۱	A_s	۸۰۰
ch	۳۰	α	۰/۰۵
cp	۸۰	β	۲/۲

بر اساس پارامترهای مدل موجودی تولید کننده و الگوریتم حل ارایه شده، نتایج بهینه و تجزیه و تحلیل حساسیت توسط نرم‌افزار MATLAB انجام شده که جداول و نمودارهای آن در ادامه آمده است:

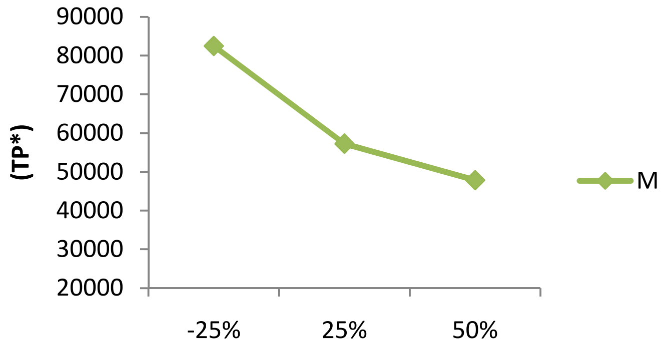
مقادیر بهینه $N^*=۵$، $t'=۰/۰۴۳$، $n_p=۲$، $t_p=۰/۲۱۸۵۲$، $price=۱۹۶/۲۲۵$، $t_d=۰/۲۰۹۵۳$، $T_p^*=۰/۴۲۸۰۵$ و $profit_p=۶۶۵۹۸/۸۷$ به دست آمده است.

وقتی که مقادیر هزینه‌ها افزایش یابد؛ مقدار سود کاهش می‌یابد. به بیان دیگر تمامی هزینه ها با سود رابطه معکوسی دارند. نکته قابل توجه آن که سود نسبت به قیمت خرید حساسیت بالاتری را نشان می‌دهد و همان‌طور که در شکل زیر قابل مشاهده است؛ با ثابت ماندن مابقی پارامترها و افزایش ۵۰ درصدی هزینه خرید، مقدار سود منفی می گردد.



شکل ۳. آنالیز حساسیت سود با تغییر هزینه‌ها

با افزایش نرخ تولید میزان سود تولید کننده کاهش می‌یابد و نکته حایز اهمیت آن‌جاست که با کاهش ۵۰-٪ نرخ تولید تولید کننده دچار کمبود می‌شود و با فرض مجاز نبودن کمبود در مدل تولید کننده، از برآورد سود آن صرف نظر شده است.



شکل ٤. آنالیز حساسیت سود با تغییر نرخ تولید

۷ نتیجه‌گیری و پیشنهادات آتی

در تحقیق حاضر ابتدا با توجه به فرضیات ارایه شده، مدل موجودی برای تولیدکننده‌ای با کالای فاسد شدنی توسعه داده شد. همان‌گونه که در این تحقیق آمد، تعیین جواب های بهینه مدل با استفاده از الگوریتم‌های جستجو صورت گرفته است. جهت نشان دادن نتایج مدل از مثال عددی استفاده شده؛ جواب بهینه مدل به‌دست آمد. مدل موجودی تولیدکننده با هدف ماکزیمم نمودن سود بهینه شد. در عمل در واقع دانستن تمامی هزینه‌ها و درآمدها برای بالادستی کاری بس دشوار و شاید غیر ممکن باشد؛ لذا تحقیق فوق از دو جنبه کاربرد عملیاتی پیدا می‌کند. اولاً با توجه به آن که تولیدکننده از میزان و دوره سفارش دهی خرده فروش اطلاعات کامل پیدا می‌کند؛ این تحقیق برای زنجیره های هلدینگ اهمیت بالاتری پیدا می‌کند. ثانیاً برای خرده‌فروشی مناسب است که به جهت مناسب بودن بازار کالا و اطلاع از وضعیت تقاضا و دوره خود، تصمیم به تولید کالای مورد نظر نماید.

یکی از تحقیقاتی که می‌تواند در ادامه این مقاله انجام پذیرد؛ وارد نمودن زمان تحویل سفارش است. مورد دوم وارد نمودن تخفیفات و هم‌چنین تاخیر در پرداخت‌هاست که می‌تواند به عنوان موضوعی برای مطالعات آتی ارایه شود.

منابع

[1] Wee, H. M. (1993). Economic production lot size model for deteriorating items with partial back-ordering. Computers & Industrial Engineering, 24, 449-458.
[2] Raafat, F. (1991). Survey of literature on continuously deteriorating inventory models. Journal of the Operational Research Society, 27-37.
[3] Wagner, H.M., and Whitin, T.M. (1958). Dynamic version of the economic lot size model. Management science, 5, 89-96.
[4] Ghare, P., and Schrader, G. (1963). A model for exponentially decaying inventory. Journal of Industrial Engineering, 14, 238-243.
[5] Goyal, S., Giri, B., (2001). Recent trends in modeling of deteriorating inventory. European Journal of operational research, 134, 1-16.
[6] Shah, Y., Jaiswal, M., (1977). An order-level inventory model for a system with constant rate of deterioration. Opsearch, 14, 174-184.
[7] Aggarwal, S., (1978). A note on an order-level inventory model for a system with constant rate of deterioration. Opsearch, 15, 184-187.

[8] Padmanabhan, G., Vrat, P., (1995). EOQ models for perishable items under stock dependent selling rate. European Journal of Operational Research, 86, 281-292.

[9] Bhunia, A., and Maiti, M. (1999). An inventory model of deteriorating items with lot-size dependent replenishment cost and a linear trend in demand. Applied Mathematical Modelling, 23, 301-308.

[10] Bhunia, A., Maiti, M., (1998). Deterministic inventory model for deteriorating items with finite rate of replenishment dependent on inventory level. Computers & operations research, 25, 997-1006.

[11] Mukhopadhyay, S., Mukherjee, R., Chaudhuri, K., (2004). Joint pricing and ordering policy for a deteriorating inventory. Computers & Industrial Engineering, 47, 339-349.

[12] Wee, H. M., (1999). Deteriorating inventory model with quantity discount, pricing and partial backordering. International Journal of Production Economics, 59, 511-518.

[13] Mahapatra, N., Maiti, M., (2005). Decision process for multiobjective, multi-item production-inventory system via interactive fuzzy satisficing technique. Computers & Mathematics with Applications, 49, 805-821.

[14] Tripathy, C., Mishra, U. (2010). An inventory model for Weibull deteriorating items with price dependent demand and time-varying holding cost. Applied Mathematical Sciences, 44, 2171-2179.

[15] Chakrabarty, T., Giri, B., Chaudhuri, K. (1998). An EOQ model for items with Weibull distribution deterioration, shortages and trended demand: an extension of Philip's model. Computers & Operations Research, 25, 649-657.

[16] Abad, P. L., (2001). Optimal price and order size for a reseller under partial backordering. Computers & Operations Research, 28, 53-65.

[17] Covert, R. P., Philip, G. C., (1973). An EOQ model for items with Weibull distribution deterioration. AIIE transactions, 5, 323-326.

[18] Wen, X., Zuo, L., (2007). A review of development of deteriorating inventory theory research [J]. Journal of South China Agricultural University: Social Science Edition, 6, 46-52.

[19] Goyal, S., Gunasekaran, A., (1995). An integrated production-inventory-marketing model for deteriorating items. Computers & Industrial Engineering, 28, 755-762.

[20] Jiang, D., Du, W., (1998). A study on two-stage production systems of perishable goods [J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 33, 430-435.

[21] Chen, S., Chen, S., Liu, X., (2002). A production-inventory model for deteriorating items [J]. Journal of Zhaoqing University, 23, 66-68.

[22] Gontg, Z., and Wang, C. (2005). A production-inventory arrangement model for deteriorating items in a linear increasing market [J]. Logistics Technology, 6-8.

[23] Maity, A., Maity, K., Mondal, S., Maiti, M., (2007). A Chebyshev approximation for solving the optimal production inventory problem of deteriorating multi-item. Mathematical and Computer Modelling, 45, 149-161.

[24] Liao, J. J., (2007). On an EPQ model for deteriorating items under permissible delay in payments. Applied Mathematical Modelling, 31, 393-403.

[25] Liao, J. J., (2008). An EOQ model with noninstantaneous receipt and exponentially deteriorating items under two-level trade credit. International Journal of Production Economics, 113, 852-861.

[26] Teng, J. T., Chang, C. T., (2005). Economic production quantity models for deteriorating items with price-and stock-dependent demand. Computers & Operations Research, 32, 297-308.

[27] Yang, P. C., Wee, H. M., (2003). An integrated multi-lot-size production inventory model for deteriorating item. Computers & Operations Research, 30, 671-682.

[28] He, Y., Wang, S. Y., Lai, K., (2010). An optimal production-inventory model for deteriorating items with multiple-market demand. European Journal of Operational Research, 203, 593-600.