

## یک روش تعاملی مبتنی بر غیر فازی سازی پارامترها برای حل مساله حمل و نقل چند هدفه

الهام بهمنش<sup>\*</sup>، سید هادی ناصری<sup>۲</sup>

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی، دانشگاه مازندران، گروه ریاضی، بابلسر، ایران

۲- استادیار دانشگاه مازندران، گروه ریاضی، بابلسر، ایران

رسید مقاله: ۴ بهمن ۱۳۹۱

پذیرش مقاله: ۲۸ خرداد ۱۳۹۲

### چکیده

در جهان واقعی مسایل تصمیم گیری برنامه ریزی حمل و نقل (TPD) عموماً با داده‌های نادقیق (فازی) سروکار دارد که ناشی از عدم کامل بودن اطلاعات و یا غیرقابل دسترس بودن داده‌هاست. در این مقاله یک مدل برنامه ریزی خطی چند هدفه فازی ارائه می‌شود که قصد دارد به طور همزمان مجموع هزینه‌ی تولیدات، حمل و نقل و زمان انتقال کالا از مبدا به مقصد را با توجه به ظرفیت موجودی در هر منبع و تقاضای پیش‌بینی شده در هر مقصد کمینه کند و یک جواب کارایی مورد انتظار برای تصمیم گیرندگان، متناسب با سطح رضایتمندی آن‌ها به دست آورد. این مدل یک کاربرد عملی برای مسایل تصمیم گیری برنامه ریزی حمل و نقل است.

**کلمات کلیدی:** مساله برنامه ریزی حمل و نقل فازی، اعداد فازی، رتبه‌بندی، روش تعاملی، غیر فازی سازی.

### ۱ مقدمه

یکی از مهم‌ترین مدل‌های برنامه ریزی خطی مدل حمل و نقل است که کاربردهای وسیعی در بسیاری از حوزه‌های تصمیم گیری همچون برنامه ریزی تولید، توزیع منابع آب و نگهداری تجهیزات دارد. مدل‌های حمل و نقل نقشی مهم در پشتیبانی و مدیریت زنجیره عرضه برای کاهش هزینه، کاهش زمان و بهبود خدمات دارند. مطالعه مسایل حمل و نقل به طور واقعی قبل از توسعه کلی برنامه ریزی خطی مورد بحث قرار گرفت. هیچکاک در سال ۱۹۴۱ نخستین بار مساله حمل و نقل کلاسیک را معرفی کرد. این مساله به عنوان زیرمجموعه‌ای از مساله برنامه ریزی خطی در نظر گرفته می‌شود که در آن تمام محدودیت‌ها از نوع معادله هستند [۱]. در ابتدا هیچکاک [۱] و کانتروویچ [۲] مدل حمل و نقل را توسعه دادند. سپس هالی [۳ و ۴] روند حل مساله حمل و نقل را گسترش داد. آرشام و خان [۵] یک نوع الگوریتم سیمپلکس را برای حل مساله حمل و نقل کلاسیک ارائه نمودند. از

\* عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: Behmanesh@stu.umz.ac.ir

طرفی مواردی وجود دارد که مساله حمل و نقل به صورت دقیق ارایه نمی شود. از این رو مطالعاتی برای حل مساله حمل و نقل فازی توسط چاناس و کوچتا [۶] صورت گرفت. هم چنین چاناس و همکاران روشی برای حل مساله حمل و نقل با مقادیر عرضه و تقاضای فازی ارایه کردند که در این روش از رویکرد برنامه ریزی پارامتری بر حسب عملگر بلمن - زاده کمک گرفته شد [۷]. بیت و همکاران [۸] تکنیک برنامه ریزی خطی فازی را برای مسایل چند هدفه به کار بردند. ورما و بیسوال [۹] یک روش بر اساس رویکرد برنامه ریزی فازی با تابع عضویت نمایی و هایپربولیک برای حل مسایل حمل و نقل چند هدفه ارایه دادند. جیمز و وردگای [۱۰] مساله حمل و نقل فازی را از طریق گسترش برنامه ریزی خطی کمکی پیشنهاد شده توسط چاناس و همکاران [۱۱] حل کردند. حسین [۱۲] مطالعاتی را برای از بین بردن مشکلات حمل و نقل چند هدفه با ضرایب احتمالی تابع هدف انجام داد. کاسانا و کومار [۱۳] در توسعه رویکردهایی متفاوت برای تولید راه حل های کارآمد جهت رفع مشکلات مسایل چند هدفه حمل و نقل نقشی اساسی داشتند. لیانگ [۱۴] پیشنهاد یک مدل برنامه ریزی خطی چند هدفه فازی تعاملی را برای حل مشکلات حمل و نقل یکپارچه در زنجیره تامین ارایه نمود. در این مقاله مسایل برنامه ریزی خطی چند هدفه حمل و نقل که دارای پارامترهای فازی هستند؛ مورد بررسی قرار گرفته می شود. در بخش بعدی به بیان پیش نیازها و تعاریف مرتبط می پردازیم و مدل های مساله ی برنامه ریزی چند هدفه را در حالت های کلاسیک و فازی معرفی می کنیم. سپس در بخش سوم به تشریح مدل برنامه ریزی خطی چند هدفه ی حمل و نقل مورد بحث این مقاله پرداخته و روش حل این مدل را ارایه می نماییم. در ادامه با ارایه مثال عددی در بخش چهارم، نشان داده می شود که چگونه می توان مدل و روش فوق را در مسایل برنامه ریزی حمل و نقل اعمال نمود. بخش پنجم نیز به نتیجه گیری اختصاص دارد.

## ۲ پیش نیازها

### ۲-۱ مساله برنامه ریزی خطی چند هدفه [MOLP]

مساله برنامه ریزی خطی چند هدفه را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} \text{Max } f(x) &= (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))^T \\ \text{s.t. } & \\ x \in X &= \{x \in R^n \mid g_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m\}. \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن  $f_1(x), \dots, f_k(x)$  تابع هدف و  $X$  یک مجموعه شدنی از محدودیت ها هستند.

**تعریف ۱:**  $x^*$  یک جواب کامل برای (۱) است اگر یک  $x^* \in X$  وجود داشته باشد؛ به طوری که:

$$f_i(x^*) \geq f_i(x), \text{ برای } i = 1, \dots, k, \text{ به ازای هر } x \text{ متعلق به } X.$$

**تعریف ۲:**  $x^* \in X$  یک جواب بهینه پارتو برای (۱) است اگر هیچ  $x \in X$  ( $x \neq x^*$ ) وجود نداشته باشد

به طوری که  $f_i(x^*) \leq f_i(x)$ ،  $i = 1, \dots, k$  و حداقل برای یک  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ ،  $f_j(x^*) < f_j(x)$ .

**تعریف ۳:**  $x^* \in X$  یک جواب بهینه پارتو ضعیف برای (۱) است اگر هیچ  $x \in X$  ( $x \neq x^*$ ) وجود نداشته باشد به طوری که  $f_i(x^*) \leq f_i(x)$ ،  $i=1, \dots, k$ .

**نکته ۱:** در کلیه تعاریف بالا برای حالت کمینه سازی تابع هدف، علامت‌ها برعکس بیشینه سازی خواهد شد.

## ۲-۲ اعداد فازی

**تعریف ۴:** اعداد فازی ذوزنقه‌ای

عدد فازی  $\tilde{a}$  بر  $R$  یک عدد فازی ذوزنقه‌ای است اگر اعداد حقیقی  $a^L, a^U$  و  $\alpha, \beta \geq 0$  وجود داشته باشد به طوری که:

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} \frac{x - (a^L - \alpha)}{\alpha}, & a^L - \alpha \leq x \leq a^L, \\ 1, & a^L \leq x \leq a^U, \\ \frac{(a^U + \beta) - x}{\beta}, & a^U \leq x \leq a^U + \beta, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2)$$

در این تعریف اگر  $a^L = a^U$  باشد؛ عدد فازی ذوزنقه‌ای تبدیل به عدد فازی مثلثی می‌شود [۱۵].

## ۲-۳ مساله برنامه‌ریزی خطی چند هدفه فازی [FMOLP]

مساله برنامه‌ریزی چند هدفه فازی را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\text{Max } \tilde{Z}_r = \sum_j \tilde{c}_{ij} x_j \quad (3)$$

s.t.

$$\sum_j \tilde{a}_{ij} x_j \leq \tilde{b}_i,$$

$$x_j \geq 0,$$

$$r = 1, 2, \dots, q, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

که در آن  $\tilde{b}_i, \tilde{a}_{ij}$  و  $\tilde{c}_{ij}$  اعداد فازی ذوزنقه‌ای یا مثلثی هستند.

**تعریف ۵:**  $x \in X$  یک جواب شدنی برای مساله FMOLP (۳) است هرگاه در محدودیت‌های مساله (۳) صدق کند.

**تعریف ۶:**  $x^* \in X$  یک جواب بهینه پارتو برای (۳) است اگر هیچ  $x \in X$  ( $x \neq x^*$ ) وجود نداشته باشد به طوری که  $\tilde{Z}_i(x) \geq \tilde{Z}_i(x^*)$ ،  $i=1, \dots, q$  و برای حداقل یک  $j \in \{1, 2, \dots, q\}$ ،  $\tilde{Z}_j(x) > \tilde{Z}_j(x^*)$ .

**نکته ۲:** هرگاه توابع هدف در مدل (۳) از نوع کمینه سازی باشد؛ کلیه علامت‌ها برعکس خواهند شد.

## ۲-۴ رتبه بندی اعداد فازی

تابع رتبه بندی ارایه شده توسط روبن و فورتمپز [۱۶] به صورت زیر تعریف می شود:

$$R(\tilde{a}) = \frac{1}{\gamma} \int_0^1 (\inf \tilde{a}_\alpha + \sup \tilde{a}_\alpha) d\alpha \quad (۴)$$

به سادگی می توان دید که تعریف بالا به صورت زیر مدل سازی می شود:

$$R(\tilde{a}) = \frac{1}{\gamma} (a^L + a^U + \frac{1}{\gamma} (\beta - \alpha)) \quad (۵)$$

برای هر دو عدد فازی  $\tilde{a}$  و  $\tilde{b}$  داریم:

$$\begin{aligned} \tilde{a} \geq \tilde{b} & \text{ iff } R(\tilde{a}) \geq R(\tilde{b}) \\ \tilde{a} > \tilde{b} & \text{ iff } R(\tilde{a}) > R(\tilde{b}) \\ \tilde{a} = \tilde{b} & \text{ iff } R(\tilde{a}) = R(\tilde{b}) \end{aligned} \quad (۶)$$

به وضوح برای هر  $\tilde{a}, \tilde{b} \in F(\mathfrak{R})$  و هر  $k \in \mathfrak{R} - \{0\}$ ، تابع رتبه بندی خطی  $R$  دارای ویژگی زیر است:

$$R(k\tilde{a} + \tilde{b}) = kR(\tilde{a}) + R(\tilde{b})$$

حال با استفاده از رتبه بندی تعریف شده در بالا مساله  $FMOLP$  داده شده در (۳) به یک مساله  $MOLP$  متداول تبدیل خواهد شد:

$$Max \quad R(\tilde{Z}_r) = \sum_j R(\tilde{c}_{ij}) x_j \quad (۷)$$

*s.t.*

$$\sum_j R(\tilde{a}_{ij}) x_j \leq R(\tilde{b}_i),$$

$$x_j \geq 0,$$

$$r = 1, 2, \dots, q, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

از این رو مساله  $FMOLP$ ، معادل با مساله کمکی ذیل است:

$$Max \quad Z'_r = \sum_j c'_{ij} x_j \quad (۸)$$

*s.t.*

$$\sum_j a'_{ij} x_j \leq b'_i,$$

$$x_j \geq 0,$$

$$r = 1, 2, \dots, q, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

که در آن  $b'_i, a'_{ij}, c'_{ij}$  به ترتیب اعداد متناظر با اعداد فازی  $\tilde{b}_i, \tilde{a}_{ij}, \tilde{c}_{ij}$  هستند که به وسیله رابطه (۵) به دست می آیند.

در ذیل نتایجی ارائه می‌گردد که ارتباط جواب بهینه به دست آمده از حل مساله کمکی را با مساله برنامه ریزی خطی چند هدفه نشان می‌دهد.

**لم ۱:** مجموعه جواب بهینه پارتو (۳) و (۸) یکسان هستند [۱۷].

**برهان:** فرض کنیم  $W_1$  و  $W_2$  به ترتیب مجموعه جواب‌های شدنی (۳) و (۸) باشند. از  $x \in W_1$  داریم:

$$\sum_j \tilde{a}_{ij} x_j \leq \tilde{b}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (9)$$

بر اساس رابطه (۶) و با به کارگیری یک تابع رتبه بندی خطی  $R$  روی مجموعه معادلات خطی فازی داده شده در (۹) خواهیم داشت:

$$\sum_j R(\tilde{a}_{ij}) x_j \leq R(\tilde{b}_i), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

اگر و تنها اگر

$$\sum_j a'_{ij} x_j \leq b'_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

که در آن  $b_i = R(\tilde{b}_i)$  و  $a_{ij} = R(\tilde{a}_{ij})$  و  $i = 1, 2, \dots, m$  و  $j = 1, 2, \dots, n$ .

در نتیجه  $x \in W_2$  و بنابراین  $W_1 = W_2$ .

حال فرض کنید  $x^*$  یک جواب بهینه پارتو برای مساله (۳) باشد. طبق تعریف ۲ هیچ  $x \in X$  وجود ندارد به طوری که  $\tilde{Z}_i(x^*) \leq \tilde{Z}_i(x)$ ، برای  $i = 1, \dots, q$  و برای حداقل یک  $l$ ،  $\tilde{Z}_l(x^*) < \tilde{Z}_l(x)$ . با در نظر گرفتن تابع رتبه بندی خطی  $R$  به طور معادل می‌توان گفت، هیچ  $x \in X$  وجود ندارد به طوری که  $R(\sum_j \tilde{c}_{ij} x_j^*) \leq R(\sum_j \tilde{c}_{ij} x_j)$ ، برای  $i = 1, \dots, q$  و برای حداقل یک  $l$ ،  $R(\sum_j \tilde{c}_{lj} x_j^*) < R(\sum_j \tilde{c}_{lj} x_j)$ . نتیجه هیچ  $x \in X$  وجود ندارد به طوری که  $\sum_j R(\tilde{c}_{ij}) x_j^* \leq \sum_j R(\tilde{c}_{ij}) x_j$ ، برای  $i = 1, \dots, q$  و برای حداقل یک  $l$ ،  $\sum_j R(\tilde{c}_{lj}) x_j^* < \sum_j R(\tilde{c}_{lj}) x_j$ ، و به همین ترتیب، هیچ  $x \in X$  وجود ندارد به طوری که  $\sum_j c'_{ij} x_j^* \leq \sum_j c'_{ij} x_j$ ، برای  $i = 1, \dots, q$  و برای حداقل یک  $l$ ،  $\sum_j c'_{lj} x_j^* < \sum_j c'_{lj} x_j$ . نتیجه اخیر تعریف جواب بهینه پارتو برای مساله (۸) است و بنابراین حکم به اثبات می‌رسد.

### ۳ فرمول بندی مدل و روش حل آن

#### ۳-۱ تشریح مساله و فرضیات

در این بخش ابتدا مساله تصمیم‌گیری حمل و نقل به طور عام تشریح می‌شود.

فرض کنیم که یک مرکز پخش‌کننده قصد دارد برنامه‌ای برای انتقال یک کالا از  $m$  منبع به  $n$  مقصد را تعیین کند. هر منبع یک موجودی قابل دسترس از این کالا برای توزیع به مقاصد گوناگون و هم‌چنین هر مقصد یک تقاضای پیش‌بینی شده را از این کالا برای دریافت از منابع مختلف دارد. طبق آنچه گفته شد مساله

تصمیم‌گیری برنامه‌ریزی حمل و نقل پیشنهادی قصد دارد یک مقدار بهینه برای حمل کالا از هر منبع به هر مقصد تعیین کند به طوری که هزینه کل تولیدات، حمل و نقل و همچنین زمان تحویل کالا کمینه شود.

این مدل ریاضی توسعه یافته بر اساس فرضیات زیر تشریح می‌گردد:

- کلیه توابع هدف با سطوح انتظار نادقیق فازی می‌شوند.
  - همه‌ی توابع هدف و قیود توابع خطی هستند.
  - هزینه‌های حمل و نقل و زمان تحویل در یک مسیر مشخص به طور مستقیم با واحدهای (کالاها) انتقال داده شده متناسب می‌باشد.
  - کل موجودی در دسترس در همه‌ی منابع برابر با کل احتیاجات متقاضیان در مقاصد می‌باشد.
  - توابع عضویت خطی به منظور ارایه کلیه مجموعه‌های فازی تخصیص داده شده است.
- فرض اول فازی بودن توابع هدف را در مسایل کاربردی برنامه‌ریزی تصمیم‌گیری حمل و نقل بیان می‌کند و به منظور یکپارچه کردن اختلاف نظر تصمیم‌گیرندگان برای جواب مساله بهینه سازی چند هدفه فازی در قالب یک سطح آرمان فازی آورده شده است. فرضیات دوم و سوم خواص خطی بودن و متناسب بودن را نشان می‌دهد که در یک مساله برنامه‌ریزی خطی استاندارد صدق می‌کند. فرض چهارم یک قید موثر و ضروری برای وجود یک جواب شدنی برای مسایل برنامه‌ریزی تصمیم‌گیری حمل و نقل است و در نهایت با وجود فرض پنجم امکان معادل سازی مساله برنامه‌ریزی چند هدفه خطی فازی را به یک مساله برنامه‌ریزی خطی فراهم می‌آورد که در نتیجه امکان حل مساله اصلی به شکل مطلوب توسط روش سیمپلکس استاندارد میسر می‌گردد.

### ۲-۳ فرمول بندی مساله

این بخش به تشریح فرآیند مدل‌سازی مساله برنامه‌ریزی خطی چند هدفه فازی و روش حل آن اختصاص دارد.

#### ۱-۲-۳ توابع هدف

مدل پیشنهادی این مقاله شامل دو تابع هدف است که به طور همزمان در مساله برنامه‌ریزی خطی چند هدفه فازی آورده می‌شود:

کمینه کردن هزینه کل تولیدات و حمل و نقل:

$$\text{Min } Z_1 \cong \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (p_{ij} + c_{ij}) Q_{ij} \quad (10)$$

کمینه کردن کل زمان تحویل کالا:

$$\text{Min } Z_2 \cong \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{t}_{ij} Q_{ij} \quad (11)$$

که در آن داریم:

$Z_1$  هزینه کل تولیدات و حمل و نقل (دلار).

$Z_2$  کل زمان تحویل (دقیقه).

$Q_{ij}$  واحد حمل و نقل از منبع  $i$  به مقصد  $j$ .

$P_{ij}$  هزینه تولید برای هر واحد از منبع  $i$  به مقصد  $j$ .

$c_{ij}$  هزینه حمل و نقل برای هر واحد از  $i$  منبع به مقصد  $j$ .

$\tilde{t}_{ij}$  زمان حمل کالا برای هر واحد از منبع  $i$  به مقصد  $j$ .

لازم به ذکر است که علامت " $\cong$ " شکل فازی " $=$ " است و به فازی بودن سطح آرمان (سطح رضایت مندی تصمیم گیرندگان) اشاره می کند. در جهان واقعی مسایل برنامه ریزی تصمیم گیری حمل و نقل، ضرایب محیط و پارامترهای عملیاتی معمولاً نادقیق هستند؛ زیرا بعضی از اطلاعات و داده های مساله نادقیق و یا غیر قابل دسترس و خارج از افق برنامه ریزی می باشند. معادله (۱۰) با سطح آرمان نادقیق، فازی و معادله (۱۱) با سطح آرمان نادقیق و پارامتر زمان نادقیق، فازی است.

### ۳-۲-۲ محدودیت ها

- محدودیت کل موجودی قابل دسترس برای هر منبع:

$$\sum_{j=1}^n Q_{ij} = S_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (12)$$

- محدودیت کل تقاضا برای هر متقاضی:

$$\sum_{i=1}^m Q_{ij} = D_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

- نامنفی بودن متغیرهای تصمیم:

$$Q_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (14)$$

که در آن  $S_i$  کل موجودی قابل دسترس (بر حسب واحد) در منبع  $i$  و  $D_j$  کل تقاضا از هر متقاضی  $j$  است. پس از اعمال تابع رتبه بندی بیان شده در ۲-۴، مساله به صورت زیر در می آید:

$$\text{Min } Z_1 \cong \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (p_{ij} + c_{ij}) Q_{ij} \quad (15)$$

$$\text{Min } Z_2 \cong \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{t}_{ij}' Q_{ij}$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n Q_{ij} = S_i,$$

$$\sum_{i=1}^m Q_{ij} = D_j,$$

$$Q_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

که در آن  $\tilde{t}_{ij}$  عدد حقیقی متناظر با عدد فازی  $\tilde{t}_{ij}$  می باشد.

مجدداً می توان مساله اخیر را به صورت روابط فازی به شکل زیر نشان داد:

$$\text{Min } \tilde{Z}_1 \cong \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (p_{ij} + c_{ij}) Q_{ij} < Z_1^{\circ} \quad (16)$$

$$\text{Min } \tilde{Z}_2 \cong \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t'_{ij} Q_{ij} < Z_2^{\circ}$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n Q_{ij} = S_i,$$

$$\sum_{i=1}^m Q_{ij} = D_j,$$

$$Q_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

$Z_1^{\circ}$  و  $Z_2^{\circ}$  به ترتیب حد مطلوبی است که تصمیم گیرنده در نظر دارد  $Z_1$  و  $Z_2$  تقریباً از آن کوچکتر باشند. زیمرمن [۱۸] مساله چند هدفه فازی اخیر را با جداسازی کلیه اهداف به مقادیر حداکثر  $Z^+$  و حداقل  $Z^-$  به صورت زیر فرموله کرد:

$$Z_g^+ = \text{Max } Z_g, \quad x \in X_a, \quad (17)$$

$$Z_g^- = \text{Min } Z_g, \quad x \in X, \quad (18)$$

$$g = 1, 2.$$

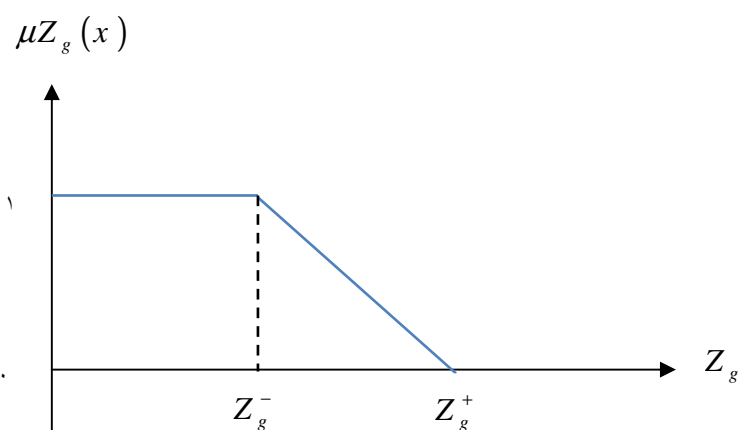
در ابتدا  $Z_g^-$  را با حل مساله چند هدفه به صورت یک سری مسایل تک هدفه با استفاده از یک هدف و حذف دیگر اهداف در هر مرحله به دست می آوریم ( $X_a$ ) و سپس با قرار دادن مقادیر بهینه به دست آمده در  $Z_g$ ، بیشترین مقدار  $Z_g$  حاصل می شود که همان  $Z_g^+$  است [۱۹].

### ۳-۳ تابع عضویت خطی

تابع عضویت  $Z_g$  به صورت زیر فرموله شده است:

$$\mu_{Z_g}(x) = \begin{cases} 1, & Z_g \leq Z_g^- \\ \frac{Z_g^+ - Z_g}{Z_g^+ - Z_g^-}, & Z_g^- \leq Z_g \leq Z_g^+ \\ 0, & Z_g \geq Z_g^+ \\ g = 1, 2. \end{cases} \quad (19)$$

شکل ۱ نمودار تابع عضویت خطی را برای (۱۹) نشان می دهد.



شکل ۱. تابع عضویت خطی

### ۳-۴ تصمیم‌گیری فازی از بلمن و زاده

فرض کنید که  $X$  یک مجموعه از همه‌ی جواب‌های ممکن برای یک مساله تصمیم‌گیری باشد. یک هدف فازی  $G$  یک مجموعه فازی روی  $X$  است که با تابع عضویت زیر مشخص می‌شود:

$$\mu_G : X \rightarrow [0, 1] \quad (20)$$

یک قید فازی  $C$  یک مجموعه فازی روی مجموعه  $X$  است که با تابع عضویت زیر مشخص می‌شود:

$$\mu_C : X \rightarrow [0, 1] \quad (21)$$

آن‌گاه ترکیب  $G$  و  $C$  برای تولید یک تصمیم فازی  $D$  روی  $X$  که هر کدام یک مجموعه فازی هستند اشتراک  $G$  و  $C$  را نتیجه می‌دهد که با تابع عضویت زیر مشخص می‌شود [۲۰]:

$$L = \mu_D(x) = \mu_G(x) \wedge \mu_C(x) = \text{Min}(\mu_G(x), \mu_C(x)) \quad (22)$$

بیشینه تصمیم متناظر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{Max } L = \text{Max } \mu_D(x) = \text{MaxMin}(\mu_G(x), \mu_C(x)) \quad (23)$$

به‌طور کلی فرض کنید که تصمیم فازی  $D$  نتیجه  $k$  هدف فازی  $G_1, \dots, G_k$  و  $m$  قید  $C_1, \dots, C_m$  باشد. آن‌گاه تصمیم فازی  $D$  اشتراک  $G_1, \dots, G_k$  و  $C_1, \dots, C_m$  است که با تابع عضویت زیر مشخص می‌شود:

$$\begin{aligned} L = \mu_D(x) &= \mu_{G_1}(x) \wedge \mu_{G_2}(x) \wedge \dots \wedge \mu_{G_k}(x) \wedge \mu_{C_1}(x) \wedge \dots \wedge \mu_{C_m}(x) \\ &= \text{Min} \{ \mu_{G_1}(x), \dots, \mu_{G_k}(x), \mu_{C_1}(x), \dots, \mu_{C_m}(x) \} \end{aligned} \quad (24)$$

و بیشینه تصمیم متناظر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{Max } L &= \text{Max } \mu_D(x) \\ &= \text{MaxMin} \{ \mu_{G_1}(x), \dots, \mu_{G_k}(x), \mu_{C_1}(x), \dots, \mu_{C_m}(x) \} \end{aligned} \quad (25)$$

در این متد که روش حداکثر-حداقل دستیابی توابع عضویت نامیده می‌شود برای پیدا کردن جواب بهینه می‌توان از مساله معادل خطی زیر استفاده کرد [۱۹].

$$\text{Max } \lambda_g \quad (26)$$

s.t.

$$\lambda_g \leq f_{\mu_{z_g}},$$

$$\sum_{j=1}^n Q_{ij} = S_i,$$

$$\sum_{i=1}^m Q_{ij} = D_j,$$

$$Q_{ij} \geq 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad g = 1, 2.$$

که در آن متغیر کمکی  $\lambda_g$  درجه رضایت مندی تصمیم گیرنده را با مقدار ضرایب مشخص شده‌ی تابع هدف نشان می‌دهد.

روند کلی پیشنهادی برای حل مسایل برنامه‌ریزی تصمیم‌گیری حمل و نقل در زیر آمده است:

- ✓ **گام اول.** فرمول‌بندی مدل اولیه برنامه‌ریزی چند هدفه فازی برای مسایل تصمیم‌گیری حمل و نقل.
- ✓ **گام دوم.** تبدیل پارامترهای فازی به پارامترهای قطعی با روش رتبه‌بندی.
- ✓ **گام سوم.** فرمول‌بندی مدل برنامه‌ریزی چند هدفه با پارامترهای قطعی.
- ✓ **گام چهارم.** تعیین تابع عضویت خطی متناظر به ازای همه‌ی توابع هدف.
- ✓ **گام پنجم.** معرفی متغیر کمکی  $\lambda$  و تبدیل مساله برنامه‌ریزی چند هدفه فازی با استفاده از عملکرد مینیمم به یک مساله برنامه‌ریزی خطی تک هدفه معادل.
- ✓ **گام ششم.** حل مساله برنامه‌ریزی خطی و به دست آوردن جواب مورد انتظار تصمیم‌گیرندگان.

#### ۴ مدل‌سازی و حل یک مساله

فرض کنید شرکتی برای ارایه یک محصول خود به پنج مرکز پخش کننده از یک کالا، از سه کارخانه‌ی تولید کننده این محصول در شهرهای مختلف استفاده می‌کند که به‌طور کامل در جدول ۱ نشان داده شده است. مقادیر ستون مقادیر سمت راست و آخرین سطر این جدول به ترتیب نشان دهنده‌ی موجودی قابل دسترس از این کالا در هر کارخانه و تقاضای هر مرکز پخش است. هر درایه از این جدول نشان‌دهنده یک مسیر از یک کارخانه خاص به یک مرکز پخش خاص است که هزینه حمل و نقل و زمان انتقال یک واحد را از این کالا در یک مسیر خاص و متناسب با یک وسیله نشان می‌دهد. از آن جایی که هزینه حمل و نقل، بیشترین هزینه را داراست؛ مدیر شرکت تصمیم به مطالعاتی برای کاهش این هزینه دارد. اهداف مورد انتظار برای حل این مساله تصمیم‌گیری حمل و نقل، کمینه کردن هزینه تولیدات و زمان انتقال کالا است. از آن جایی که در واقعیت، زمان انتقال کالا را نمی‌توان به طور دقیق بیان کرد؛ فازی در نظر گرفتن ضریب تابع زمان انتقال کالا آن چیزی است که ما را به مسایل واقعی نزدیک‌تر می‌سازد.

جدول ۱. اطلاعات مربوط به مساله

	۱	۲	۳	۴	۵	عرضه
۱	۱۰\$	۱۲\$	۱۶\$	۲۰\$	۳۰\$	۱۸
	۳۶۰.min	۴۸۰.min	۷۲۰.min	۹۶۰.min	۲۴۰۰.min	
۲	۱۲\$	۷\$	۱۳\$	۲۴\$	۳۶\$	۲۴
	۶۶۰.min	۶۶۰.min	۹۶۰.min	۱۳۲۰.min	۱۹۲۰.min	
۳	۱۴\$	۱۶\$	۲۰\$	۱۰\$	۳۲\$	۱۰
	۷۲۰.min	۹۶۰.min	۱۶۸۰.min	۶۶۰.min	۱۸۰۰.min	
تقاضا	۱۰	۸	۱۲	۱۶	۶	۵۲

تابع عضویت اعداد فازی نوشته شده در جدول بالا به صورت زیر است:

$$\mu_{\tilde{t}_{11}}(x) = \begin{cases} \frac{x - 356}{4}, & 356 \leq x \leq 360, \\ \frac{370 - x}{10}, & 360 \leq x \leq 370, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad \mu_{\tilde{t}_{12}}(x) = \begin{cases} \frac{x - 474}{6}, & 474 \leq x \leq 480, \\ \frac{494 - x}{14}, & 480 \leq x \leq 494, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{t}_{21}}(x) = \begin{cases} \frac{x - 713}{7}, & 713 \leq x \leq 720, \\ \frac{735 - x}{15}, & 720 \leq x \leq 735, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad \mu_{\tilde{t}_{22}}(x) = \begin{cases} \frac{x - 950}{10}, & 950 \leq x \leq 960, \\ \frac{974 - x}{14}, & 960 \leq x \leq 974, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{t}_{31}}(x) = \begin{cases} \frac{x - 2360}{40}, & 2360 \leq x \leq 2400, \\ \frac{2480 - x}{80}, & 2400 \leq x \leq 2480, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad \mu_{\tilde{t}_{32}}(x) = \begin{cases} \frac{x - 580}{20}, & 580 \leq x \leq 600, \\ \frac{620 - x}{20}, & 600 \leq x \leq 620, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{t}_{41}}(x) = \begin{cases} \frac{x - 570}{30}, & 570 \leq x \leq 600, \\ \frac{630 - x}{30}, & 600 \leq x \leq 630, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad \mu_{\tilde{t}_{42}}(x) = \begin{cases} \frac{x - 880}{20}, & 880 \leq x \leq 900, \\ \frac{920 - x}{20}, & 900 \leq x \leq 920, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{r}_1}(x) = \begin{cases} \frac{x-1300}{20}, & 1300 \leq x \leq 1320, \\ \frac{1356-x}{36}, & 1320 \leq x \leq 1356, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad \mu_{\tilde{r}_2}(x) = \begin{cases} \frac{x-1890}{30}, & 1890 \leq x \leq 1920, \\ \frac{1962-x}{42}, & 1920 \leq x \leq 1962, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{r}_3}(x) = \begin{cases} \frac{x-710}{10}, & 710 \leq x \leq 720, \\ \frac{738-x}{18}, & 720 \leq x \leq 738, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad \mu_{\tilde{r}_4}(x) = \begin{cases} \frac{x-955}{5}, & 955 \leq x \leq 960, \\ \frac{977-x}{17}, & 960 \leq x \leq 977, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{r}_5}(x) = \begin{cases} \frac{x-1000}{80}, & 1000 \leq x \leq 1080, \\ \frac{1120-x}{40}, & 1080 \leq x \leq 1120, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad \mu_{\tilde{r}_6}(x) = \begin{cases} \frac{x-595}{5}, & 595 \leq x \leq 600, \\ \frac{613-x}{13}, & 600 \leq x \leq 613, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{r}_7}(x) = \begin{cases} \frac{x-1770}{30}, & 1770 \leq x \leq 1800, \\ \frac{1862-x}{62}, & 1800 \leq x \leq 1862, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

### فرآیند حل:

**گام اول:** فرمول بندی مدل *FMOLP* برای مساله تصمیم گیری حمل و نقل مطابق با معادله های (۱۰) تا (۱۴).

**گام دوم:** تبدیل پارامترهای فازی به پارامترهای قطعی طبق (۵).

**گام سوم:** فرمول بندی مدل *MOLP* برای مساله تصمیم گیری حمل و نقل مطابق با معادله (۱۵).

**گام چهارم:** تعیین تابع عضویت خطی متناظر با همه ی توابع هدف. ابتدا یک جواب آغازین برای هر یک از توابع هدف با استفاده از حل کلاسیک برنامه ریزی تک هدفه به دست می آوریم.

نتیجه ی به دست آمده در این مثال برابر است با:

$$Z_1 = 720\$ \quad Z_7 = 42178 \min$$

سپس تابع عضویت خطی برای هر یک از توابع هدف با استفاده از معادله (۱۹) به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mu_{Z_1}(x) = \begin{cases} 1 & , \quad Z_1 \leq 720, \\ \frac{754-x}{34} & , \quad 720 \leq Z_1 \leq 754, \\ 0 & , \quad Z_1 \leq 754. \end{cases}$$

$$\mu_{Z_2}(x) = \begin{cases} 1 & , \quad Z_2 \leq 42178, \\ \frac{46412-x}{4234} & , \quad 42178 \leq Z_2 \leq 46412, \\ 0 & , \quad Z_2 \leq 46412. \end{cases}$$

**گام پنجم:** مساله چند هدفه را از روش عملگر مینیمم به یک مساله تک هدفه معادل تبدیل می کنیم:

$$\text{Max } \lambda_1 + \lambda_2 \quad (27)$$

s.t.

$$\lambda_1 \leq \frac{754-x}{34},$$

$$\lambda_2 \leq \frac{46412-x}{4234},$$

$$\sum_{j=1}^n Q_{ij} = S_i,$$

$$\sum_{i=1}^m Q_{ij} = D_j,$$

$$Q_{ij} \geq 0,$$

$$0 \leq \lambda_g \leq 1,$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad g = 1, 2.$$

**گام ششم:** با حل مساله (۲۷) خواهیم داشت:

جدول ۲. جواب مساله (۲۷)

	$Q_{11} = 10$	$Q_{14} = 6$	$Q_{15} = 2$
$Q_{ij}$	$Q_{22} = 8$	$Q_{23} = 12$	$Q_{25} = 4$
		$Q_{34} = 10$	
مقادیر تابع هدف	$Z_1 = 736\$$		
	$Z_2 = 4350.8 \text{ min}$		
	$\lambda_1 = 0.5294118$		
	$\lambda_2 = 0.68581762$		

جدول زیر به مقایسه جواب های به دست آمده اختصاص دارد:

جدول ۳. مقایسه‌ی جواب‌های به دست آمده

مدل اجرایی این مقاله	مسأله برنامه‌ریزی خطی شماره ۲	مسأله برنامه‌ریزی خطی شماره ۱
$Max \lambda_1 + \lambda_2$	$Min Z_2$	$Min Z_1$
$\lambda_1 = 53\%$ $\lambda_2 = 68\%$	٪۱۰۰	٪۱۰۰
۷۳۶	۷۵۴	۷۲۰
۴۳۵۰۸	۴۲۱۷۸	۴۶۴۱۲

### ۵ نتیجه‌گیری

در جهان واقعی مسایل تصمیم‌گیری برنامه‌ریزی حمل و نقل عموماً با داده‌های نادقیق سروکار دارد که ناشی از عدم کامل بودن اطلاعات و یا غیرقابل دسترس بودن داده‌هاست. در این مقاله، مدل حمل و نقل دارای دو تابع هدف کمینه‌سازی هزینه و زمان است به طوری که تقاضای مشتریان و میزان عرضه‌کنندگان برآورده شود. به وضوح تکنیک‌ها و روابط برنامه‌ریزی ریاضی نمی‌تواند مسایل تصمیم‌گیری حمل و نقل را با ضرایب تابع هدف فازی حل کند. این کار یک مدل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه فازی تعاملی را برای حل مسایل تصمیم‌گیری حمل و نقل با ضرایب تابع هدف فازی نشان می‌دهد. روش ارائه شده در این مقاله از انعطاف‌پذیری محاسباتی و کارایی خوبی برخوردار است.

### منابع

- [1] Hitchcock, F. L., (1941). The distribution of a product from several sources to numerous localities. *Journal of Mathematical Physics*, 20, 224-230.
- [2] Kantorovich, L. V., (1960). *Mathematical methods of organizing and planning production* (in Russian). English Translation in *Management Science*, 6, 366-422.
- [3] Haley, K. B., (1962). The solid transportation problem. *Operations Research*, 10, 448-463.
- [4] Haley, K. B., (1963). The multi index problem. *Operations Research*, 11, 368-379.
- [5] Arsham, H., Khan, A. B., (1989). A simplex type algorithm for general transportation problems: An alternative to stepping-stone. *Journal of Operation Research Society*, 40, 581-590.
- [6] Chanas, S., Cuchta, D., (1996). A concept of the optimal solution of the transportation problem with fuzzy cost coefficients. *Fuzzy Sets and Systems*, 82, 299-305.
- [7] Chanas, S., Kolodziejczyk, W., Machaj, A., (1984). A fuzzy approach to the transportation problem. *Fuzzy Sets and Systems*, 13, 211-221.
- [8] Bit, A. K., Biswal, M. P., Alam, S. S., (1993). Fuzzy programming approach to multi objective solid transportation problem. *Fuzzy Sets and Systems*, 57, 183-194.
- [9] Verma, R., Biswal, M., (1997). Fuzzy programming technique to solve multiple objective transportation problems with some nonlinear membership functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 91, 37-43.
- [10] Jimenez, F., Verdegay, J. L., (1998). Uncertain solid transportation problems, *Fuzzy Sets and Systems*, 100, 45-57.
- [11] Chanas, S., Delgado, M., Verdegay, J. L., Vila, M. A., (1993). Interval and fuzzy extension of classical transportation problems. *Transportation Planning and Technology*, 17, 203-218.
- [12] Hussein, M. L., (1998). Complete solution of multiple objective transportation problem with possibilistic coefficients. *Fuzzy Sets and Systems*, 93(3), 293-299.
- [13] Kasana, H. S., Kumar, K. D., (2000). An efficient algorithm for multi-objective transportation problems. *Asia-Pacific Operational Research*, 17, 27-40.

- [14] Liang, T. F., (2008). Interactive multi objective transportation planning decisions using fuzzy linear programming. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 25, 11-31.
- [15] Nasseri, S. H., Attari, H., Ebrahimnejad, E., (2012). Revised simplex method and its application for solving fuzzy linear programming problems. *European Journal of Industrial Engineering*, 6(3), 259-280.
- [16] Fortemps, F., Roubens, F., (1996). Ranking and defuzzification methods based on area compensation, *Fuzzy Sets and Systems*, 823, 19-330.
- [17] Mishmas Nehi, H., Hajmohamadi, H., (2012). A ranking function method for solving fuzzy multi-objective linear programming problem. *Annals of Fuzzy Mathematics Informatics*, 331-38.
- [18] Zimmermann, H. J., (1978). Fuzzy programming and linear programming with several objective function. *Fuzzy Sets and Systems*, 1, 45-55.
- [19] Amid, A., Ghodsypour, S. H., O'Brien, C., (2006). Fuzzy multi-objective linear model for supplier selection in supply chain. *International Journal of Production economics*, 104, 394-407.
- [20] Bellman, R. E., Zadeh, A., (1970). Decision-making in a fuzzy environment. *Management Science*, 17, 141-164.