مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال دهم، شماره چهارم (پیاپی ۳۹)، زمستان ۹۲، ص ص ۹-۱
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

روشی برای حل مساله جدول برنامه هفتگی مدارس با استفاده از رویکرد تجزیه در برنامه‌ریزی ریاضی

امین وحیدی منفرد*[۱]، علیرضا علی احمدی[۲]
۱- دانشجوی دکترا مهندسی صنایع دانشگاه علم و صنعت، تهران، ایران
۲- دانشیار دانشگاه علم و صنعت، تهران، ایران

رسید مقاله: ۲۸ فروردین ۱۳۹۲
پذیرش مقاله: ۲۶ شهریور ۱۳۹۲

چکیده
برنامه‌ریزی مدارس یکی از دغدغه‌های مدیران و حتی دبیران در ابتدای سال تحصیلی است. در مقاله‌ی حاضر با استفاده از برنامه‌ریزی ریاضی این مساله مدل شده است. به دلیل تعداد بسیار بالای متغیرهای ۰ و ۱ مساله، یک مساله NP-complete است و مدل‌سازی عادی چندان عملی نخواهد بود. سه تکه (تجزیه) کردن مساله می‌تواند راه‌حل مناسبی برای غلبه براین مشکل باشد. در تکه (فاز) اول این مدل تعیین می‌شود که هر دبیر در چه روزهایی باید در این مدرسه باشد و در فاز دوم تعیین می‌شود که دبیر در هر یک از این روزهای تعیین شده چه درسی را باید به چه کلاسی بدهد و در فاز سوم تعیین می‌شود که این دروس تعیین شده در هر روز برای هر کلاس در چه ساعتی باید توسط دبیر مربوط تدریس شود.

کلمات کلیدی: جدول زمانی، برنامه‌ریزی صفر و یک، مدل‌سازی ریاضی، تجزیه.

۱ مقدمه
برنامه‌ریزی دبیران در مدارس یعنی مشخص کردن این که هر دبیر در چه روزی و در چه ساعتی چه درسی را به چه کلاسی بدهد به طوری که هر دبیر درسی را که تبحر دارد درس دهد [1] و هم‌چنین زمان مورد نیاز هر کلاس برای هر درس تامین و همه‌ی ساعت کار دبیران در یک مدرسه استفاده شود.

حل این مساله‌ی پیچیده به صورت دستی مشکلات زیر را دارد:

۱. برنامه‌ریزی مدارس یکی از مشکلات ابتدای سال تحصیلی برای مدیران است. برنامه‌ریزی یک مدرسه نه چندان بزرگ چیزی حدود یک هفته از وقت یک فرد خبره را می‌گیرد.
۲. علاوه براین جواب حاصل شده به دلایلی هم‌چون اشتباهات فردی و... لزوماً خوب نیست.
۳. گاهی اوقات در جواب حاصل شده به تغییر بی‌مورد روزهای مطلوب دبیران می‌انجامد.
۴. برخورد ناعادلانه با مدارس:

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: vahidi@iust.ac.ir

مدارس معتبرتر به راحتی و انعطاف بیشتری برنامه خود را تعیین می‌کنند و به علت اعتبار خود، دبیران را مجبور می‌نمایند و یا دبیران ترجیح می‌دهند برنامه این مدارس را همان‌گونه که مدیر این مدارس به آن‌ها می‌گویند پر کنند و روزهای مورد نظر مدیران را ارایه دهند و این باعث می‌شود برنامه مدارس پایین شهر و با اعتبار کمتر را تغییر دهند و برنامه این مدارس به سختی پر شود.

۵. چون در سازمان‌دهی دبیران رشته‌های مختلف به ترتیب سازمان‌دهی می‌شوند؛ ترجیحات دبیرانی که ابتدا سازمان‌دهی می‌گردند بدون دلیل بر ترجیحات دبیران بعدی ارجحیت می‌یابد.

در صورت انجام این کار به صورت کامپیوتری علاوه بر حل مشکلات مذکور سالانه حدوداً ۳۰۰ میلیون تومان از هزینه‌های آموزش و پرورش در کل کشور کاسته می‌شود.

در این پژوهش با استفاده از برنامه‌ریزی ریاضی مساله مدل شده است. این مدل نوع گسترش‌یافته‌ای از مدل تخصیص است [۲] و برای مسایل جداول زمانی مانند جدول زمانی دروس دانشگاه و یا زمان‌بندی امتحانات نیز می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. هم‌چنین این مدل شباهت بسیاری به برنامه‌ی سیستم‌های توزیع محصولات فاسدشدنی مانند لبنیات دارد. به همین دلیل می توان از کلیت چنین مدلی برای حل این مساله نیز که یکی از مسایل اساسی در سیستم‌های توزیعی است؛ استفاده کرد [۳].

در پروژه حاضر با استفاده از برنامه‌ریزی ریاضی این مساله مدل شده است. به دلیل تعداد بسیار بالای متغیرهای ۰ و۱ مساله، یک مساله NP-complete می‌باشد [۴]. سه تکه کردن مساله می‌تواند راه‌حل مناسبی برای غلبه براین مشکل باشد. در تکه (فاز) اول این مدل تعیین می‌شود که هر دبیر در چه روزهایی باید در این مدرسه باشد و در فازدوم تعیین می‌شود که دبیر در هر یک از این روزهای تعیین شده چه درسی را به چه کلاسی باید بدهد و در فاز سوم تعیین می‌شود که این دروس تعیین شده در هر روز برای هر کلاس در چه ساعتی باید توسط دبیر مربوط تدریس شود. علاوه بر این مدل جامعی برای حل فاز اول این مساله برای کل مدارس یک شهر ارایه شده است.

برای وارد کردن این مدل در کامپیوتر برنامه GAMS انتخاب شده زیرا با برنامه Access به راحتی ارتباط برقرار می‌کند و در قسمت‌هایی از کار لازم است که اطلاعات ورودی از Access خوانده و اطلاعات خروجی به Access داده شود. هم‌چنین این برنامه توان بالایی برای حل برنامه‌ریزی صفر و یک دارد.

در این مقاله، یک دبیرستان (روزانه ۶ ساعت) با ۱۵ کلاس با ۱۵ درس در هر کلاس، ۳۰ دبیر و ۶ روز در هفته در نظر می‌گیریم و مدل مربوط به آن را ارایه می‌دهیم.

۲ مراحل حل

فاز اول

در این فاز تعیین می‌کنیم هر دبیر در چه روزی در مدرسه است. متغیر صفر و یک X_{ij} مشخص می‌کند که آیا دبیر i ام در روز j ام در مدرسه کلاس دارد یا خیر. و متغیر صفر و یک X'_{ij} مشخص می‌کند که آیا دبیر iام در روز j ام

در مدرسه ساعات باقی مانده‌اش را دارد یا خیر (ساعت باقی مانده یعنی باقی مانده‌ی تقسیم ساعات کل تدریس یک دبیر در مدرسه تقسیم بر ۶. این تقسیم‌بندی در جهت رفاه حال دبیران و حضور کمتر آن‌ها انجام می گردد).

حدود ۳۰ دبیر(i) و ۶ روز داریم پس در کل حدود ۱۸۰ متغیر صفر ویک X_{ij} و ۷۰ متغیر صفر ویک $X'_{i'j}$ در این فاز خواهیم داشت.

P_i: اولویت دبیر i ام (که به صورت نسبی و با تکنیک‌هایی نسبت به سایر دبیران تعیین می‌شود.)

P_{ij}: ترجیح دبیر iام برای حضور در روز jام.

بنابراین هر چه P_i و P_{ij} بیشتر شوند در نتیجه مضرب این دو بیشتر می‌شود بنابراین احتمال یک شدن X_{ij} با توجه به نوع تابع هدف مساله بیشتر می‌شود.

$$Max \sum_i \sum_j P_i P_{ij} (X_{ij} + m_i * X'_{i'j})$$

تابع هدف

m_i برابر است با ساعت باقی‌مانده‌ی دبیر i ام تقسیم بر کل ساعت یک روز (۶ ساعت). مثلاً اگر دبیر i ام کلاً ۱۷ ساعت کلاس داشته باشد $m_i = \frac{۵}{۶}$ خواهد باشد.)

محدودیت‌ها

رابطه‌ی ۱ یعنی هر دبیر به تعداد روزهای کاری کاملش (خارج قسمت تقسیم کل ساعت او بر ۶) در مدرسه باشد.

$$\sum_j X_{ij} = d_i \qquad \forall i$$

رابطه‌ی ۲ یعنی دبیر i ام یک و فقط یک روز ناکامل (روزی که ساعات باقی‌مانده‌اش را در آن روز تدریس می کند) داشته باشد.

$$\sum_j X'_{i'j} = ۱ \qquad \forall i'$$

رابطه‌ی ۱و۲ سبب می‌شود هر دبیر به تعداد کل ساعتش در مدرسه کلاس داشته باشد.

رابطه‌ی ۳ بیانگر رابطه‌ی بین دو دسته متغیر است و به این معنی است که هر روز برای هر دبیر هم روز کامل و هم روز ناکامل نباشد.

$$X_{ij} + X'_{i'j} \le ۱ \qquad \forall i, j$$

رابطه‌ی ۴ بیانگر این است که تعداد دبیرهای کامل هر روز به تعداد کلاس‌های مدرسه باشد تا دبیرهای مورد نیاز هر روز تامین شود.

تعداد کلاس‌های این مدرسه m:

$$\sum_i (X_{ij} + m_i * X'_{i'j}) = n$$

فاز دوم

با تخصیص دبیران به روزهای مختلف در این فاز به تخصیص دبیران به هر درس هر کلاس می‌پردازیم. برای این منظور متغیرهایی را برای فاز ۲ تعریف می‌کنیم که متغیرهای متناسب آن‌ها در فاز اول ۱ شده است. متغیر صفر و یک X_{ilc} مشخص می‌کند که آیا دبیر iام درس l کلاس c را دارد یا خیر.

درس‌ها را به صورت زوج مرتب (c,l) در نظر می‌گیریم در این حالت ۲ = l در (۳و۲) با ۲ = l در (۴و۲) فرق خواهد داشت.

حدوداً ۳۰ دبیر(i) داریم که هر یک به طور میانگین ۲ درس را می‌توانند درس دهند (l) و حدود ۱۵ کلاس داریم (c). پس این دسته متغیر حدود ۹۰۰ متغیر را شامل می‌شود. متغیر صفر و یک X_{ijlc} مشخص می‌کند که آیا دبیر iام در روز jام یک زنگ درس l را با کلاس cام دارد یا خیر.

حدوداً ۳۰ دبیر(i) داریم که هر یک به طور میانگین ۲ درس را می‌توانند درس دهند (l) و معمولاً ۳ روز از هفته را به این مدرسه می‌آید (j) و حدوداً به طور میانگین می‌تواند به ۱۰ کلاس نیز درس دهد (c)، پس این دسته متغیر حدود ۱۸۰۰ متغیر را شامل می‌شود و کل متغیرها ۲۷۰۰ متغیر خواهد بود.

تابع هدف

تابع هدف در این فاز حداکثر کردن توانایی دبیران برای تدریس در رشته‌ها و پایه‌های مورد نظر و یکنواخت کردن سختی روزهای مختلف:

$$Max \sum_{c}\sum_{l}\sum_{i}(d_{ilc}X_{ilc}) - c*D$$

محدودیت‌ها

dilc: میزان توانایی دبیر i ام برای تدریس درس l ام در کلاس c ام (با توجه به رشته و پایه)

D یک متغیر است که نشان‌دهنده ماکزیمم سختی دروس روزهای هفته می‌باشد و c نیز ضریب وزن دادن به آن در تابع هدف است. این مولفه‌ی تابع هدف سبب می‌شود تا سختی بیشینه کاهش یابد و سختی دروس در روزهای مختلف به طور یکنواخت پراکنده شود. D_{lc} نیز سختی درس lام در کلاس cام است:

$$\sum_{i}\sum_{l}X_{ijlc}*D_{lc} \le D \qquad \forall j,c$$

$$\sum_{i}\left[X_{ilc}*h_l - \left(\sum_{j}X_{ijlc}\right)\right] = ۰ \qquad \forall(l,c)$$

$$\sum_{i}X_{ilc} = ۱ \qquad \forall(l,c)$$

رابطه‌ی ۵ یعنی هر درس را برای هر کلاس (هر (l,c)) یک دبیر درس دهد یعنی مثلاً ریاضی کلاس ۱۰ام را فقط آقای فلانی درس دهد نه این‌که دو نفر این درس را به یک کلاس خاص بدهند.

رابطه‌ی ۵ و۶ بیانگر رابطه‌ی بین دو دسته متغیر مساله است و هم‌چنین سبب می‌شود هر درسِ هر کلاس را یک نفر درس دهد و هم‌چنین نیاز هر کلاس به ساعات هر درس را نیز مرتفع می‌کند و سبب می‌شود دبیر h_l ساعت صرف این درس کند:

$$\sum_i \sum_l X_{ijlc} = ۳ \qquad \forall j, c$$

رابطه‌ی ۷ یعنی در هر روز برای هر کلاس ۳ (به تعداد زنگ‌ها) دبیر باشد:

$$\sum_i X_{ijlc} = ۱ \qquad \forall j, l, c$$

$$\sum_c \sum_l X_{ijlc} = h_{ij} \qquad \forall (i, j)$$

رابطه‌ی ۸ بیانگر این است که هر دبیر در هر روز به تعداد تعیین شده‌اش در فاز قبل (h_{ij})درس دهد. (در نرم‌افزارها مانند GAMS می‌توان برای کاهش حجم مساله این محدودیت را فقط بر روی jهای ممکن برای هر دبیر تعریف کرد. این محدودیت هم‌چنین سبب می‌شود هر دبیر در هر زنگ حداکثر در یک کلاس باشد و هم‌چنین هر کلاس در هر زنگ دبیر داشته باشد.

در صورت وجود درس تک‌زنگ برای این دروس به جای X_{ijlc}،$(X_{ijlc}+\frac{۱}{۲}X'_{ijlc})$ قرار می‌دهیم که X'_{ijlc} متغیر صفر و یکی است که نشان می‌دهد ساعت تک‌زنگ این درس در چه روزی است و نیز باید محدودیت زیر را قرار دهیم تا این متغیر فقط برای یک روز و یک دبیر یک شود:

$$\sum_j \sum_i X'_{ijlc} = ۱ \qquad \forall j, i$$

فاز سوم

در این مرحله پس از تعیین این که هر دبیر چه درسی و چند ساعت و در چه روزی به چه کلاسی درس دهد؛ باید تعیین کنیم که این درس را در چه زنگی درس دهد. در این مرحله چون نیازهای کلاس‌ها به دروس و روابط بین ساعات مختلف یک درس در فاز قبل در نظر گرفته شده است؛ می‌توانیم روزها را به طور مجزا برنامه‌ریزی کنیم.

X_{iiklc} متغیری است که نشان می‌دهد دبیر iام در کلاس cام یک زنگ درس l را در زنگ k دارد یا نه.

البته این متغیر را برای متغیرهایی که متغیر متناسب با آن یک شود؛ تعریف می‌کنیم.

برای هر درس تک‌زنگ X'_{ijkc} را مشابه تعریف گفته شده در فاز قبل تعریف می‌کنیم و به جای X_{ijkc} قرار می‌دهیم $(X_{ijkc}+\frac{۱}{۲}X'_{ijkc})$.

در کل این فاز حدود ۱۵۰ متغیر صفر و یک خواهد داشت.

تابع هدف

تابع هدف در این فاز حداکثر کردن مطلوبیت دروس برای قرار گرفتن در ساعت‌ها مختلف روز مد نظر (u_{ijklc}) است:

$$Max\sum_{i}\sum_{k}\sum_{l}\sum_{c}(\text{u}_{ijklc}*X_{iklc})-c*D$$

محدودیت‌ها

به علت مساوی بودن عرضه و تقاضای ساعت در هر زنگ یک نفر یا دو نفر تک‌زنگ خواهیم داشت:

$$\sum_{c}\sum_{l}X_{ilkc}\leq ۱ \qquad \forall i,k$$

محدودیت ۹ بیانگر این است که هر نفر در هر زنگ فقط در یک کلاس باشد. به علت مساوی بودن عرضه و تقاضای ساعت، در هر زنگ یک نفر یا دو نفر تک‌زنگ خواهیم داشت و محدودیت ۹ را می‌توان حذف کرد:

$$\sum_{i}\sum_{l}X_{ilkc}=۱ \qquad \forall c,k$$

محدودیت ۱۰ بیانگر این است که هر کلاس در هر زنگ دبیر داشته باشد:

$$\sum_{k}\sum_{c}X_{ilkc}=h_{ilc} \qquad \forall i,l,c$$

h_{ilc} تعداد زنگ دبیر iام برای درس lام کلاس cام است که در فاز قبل مشخص شده است.

۳ نتیجه‌گیری

۳-۱ بررسی امکان آزادسازی خطی مساله

با توجه به این‌که باید مدل totally unimodular باشد تا چنین حالتی رخ دهد به بررسی این ویژگی در مدل‌ها می‌پردازیم [۵].

فاز یک ماتریس ضرایبش به شکل زیر می‌شود که دترمینان آن لزوماً ۱، ۱- و ۰ نمی‌گردد.

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
1 & 1 & \cdots & 1 & \vdots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\
1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
\vdots & \ddots & & \vdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
\vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & & & \cdots & & & & 1 \\
\vdots & & & & & & & \vdots \\
1 & & & \cdots & & & & 1 \\
1 & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & m_i & \\
 & 1 & & & & & &
\end{pmatrix}$$

شکل ۱. ماتریس بررسی امگان آزادسازی خطی

به علت وجود ضریب m_i در مدل totally unimodular نیست.

فاز دو نیز دترمینان آن لزوماً ۱،-۱ و ۰ نمی‌شود؛ بـه علـت وجـود ضـریب D_l و h_l در مـدل totally unimodular نیست. دترمینان فاز سه نیز به علت وجود ضریب ۰/۵ برای متغیرهای X'_{ijkc} totally unimodular نمی‌باشد.

۳-۲ اگر مساله به جواب نرسید

می‌توان محدودیت‌های غیر اصلی را غیر فعال کرد.(به ترتیب اولویت محدودیت‌ها تا جایی که به جواب برسیم.)

۱. ساعات مناسب‌تری از دبیرانی که به نظر گلوگاه می‌آیند؛ گرفت.
۲. اگر این روش جواب نداد؛ مجبوریم تعداد زنگ‌ها را به جای ۳، ۶ بگیریم.

۳-۳ محدودیت‌های فرعی

محدودیت‌های دیگری نیز در برنامه‌ریزی مدارس وجود دارد اما این محـدودیت‌هـا، محـدودیت‌هـای اصـلی ایـن مساله نیستند و از مدرسه‌ای به مدرسه‌ی دیگر فرق می‌کنند که ما در این‌جا تعدادی از مهم‌ترین‌های آن ها را ذکـر کرده؛ مدل مربوط به آن‌ها را ارایه خواهیم کرد.

مطلوبیت‌های دیگر مساله را هم می‌توان به صورت تابع هدف و یا آرمان در فاز مربوط به آن وارد نمود.

- اضافه‌کاری: برای افزودن ساعات اضافه‌کاری دبیران به برنامه باید ارجحیـت (ضـریب Pi) کمتـری بـرای دبیران اضافه‌کاری در نظر گرفت تا ابتدا ساعات مورد نظر دبیران موظفی پر شود.

اگر دبیری داشتیم که در مدرسه‌ای هم موظفی و هم اضافه‌کاری داشت می‌توان آن را دو دبیر مجـزا در نظـر گرفت و محدودیتی اضافه کرد که این دو دبیر مجازاً، مجزا بتوانند یـک سـاعت از درس را یکـی و یـک سـاعت دیگرش را دیگری درس دهد. البته بسیار کم پیش می‌آید که چنین حالتی رخ دهد.

- درس‌هایی که کمبود دبیر در آن در شهر است: به دبیران مربوط به ایـن دروس ضـرایب P_i بـزرگ‌تـری اختصاص می‌دهیم.
- محدودیت مکانی بعضی از دروس مانند کارگاه، آزمایشگاه، سایت و ورزش:

مثلاً سایت:

$$\sum_i \sum_c (Xi_{jkc} \times X_{ilc}) = n_{site} \quad \forall j,k$$

n_{site} تعداد سایت‌های مدرسه است.

- تداخل شیفت صبح و بعد از ظهر یک مدرسه: برای خالی شدن کلاس‌ها باید تعدادی از کلاس‌هـا را بـه سایت، زمین ورزش، آزمایشگاه و یا کارگاه فرستاد.

فرض کنید شماره این ۴ درس از l_1 تا l_2 باشد:

$$\sum_i \sum_{l_1}^{l_2} (X_{ij'4c} \times X_{ilc'}) = 1 \quad \forall c', j'$$

'j روزهایی که این حالت وجود دارد و 'C کلاس‌هایی که تداخل دارند.

عبارت داخل پرانتز یعنی دبیر i با کلاس c درس l را در زمان jk دارد.

- دبیری کلاس، پایه، درس و یا زمان خاصی را نمی‌خواهد:

مثلاً درس خاصی را نمی‌خواهد:

$$\sum_c X_{i_1 l_1 c} = 0$$

۳-٤ مزایای این روش به مدل عادی زمان‌بندی برای این مساله

اگر بخواهیم این مساله را به روش تخصیص معمولی حل کنیم حدود ۱۲۰۰۰۰ متغیر داریم که تعداد بسیار زیـادی است.

$$120000/_{2700} = 45$$

تعداد متغیرهای این مساله ۴۵حداکثر (فاز ۲) برابر بیشتر است. X_{ijklc} متغیری اسـت کـه نشـان مـی‌دهـد دبیـر iام در روز jام درکلاس cام یک زنگ درس l را در زنگ k دارد یا نه و حتی اگر با استفاده از روش این مسـاله بـه ازای هر i، فقط دو درس در نظر بگیرید در کل حدود ۱۶۰۰۰ متغیر خواهیم داشت.

تعداد متغیرهای این مساله حدود ۶ برابر بیشتر است.

$$16000/_{2700} \approx 6$$

منابع

[۱] سوادکوهی، عبدالعظیم، طراحی مدل برنامه‌ریزی آموزشی، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه امیرکبیر.

[2] Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J., Sherali, H. D., (2004). Linear Programming and Network Flows. Wiley-Interscience.

[3] Winston, W. L., Goldberg, J. B., (2004). Operations research: applications and algorithms. Thomson Brooks/Cole.

[4] Handbooks in operations research and management science contents of the previous volume. (1990). In D. P. Heyman & M. J. Sobel (Eds.), Handbooks in Operations Research and Management Science (Vol. Volume 2, pp. 725): Elsevier.

[5] Murty, K. G., (1983). Linear programming. Wiley.