مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال چهاردهم، شماره چهارم (پیاپی ۵۵)، زمستان ۹۶، ص ص ۱۲۷-۱۰۹
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

# یک روش عددی مبتنی بر روش پاسکولتی- سرافینی برای تعیین مرزبهینه پارتو در مسایل بهینه‌سازی چندهدفه

**آرمین قانع کنفی[۱]، اسماعیل خرّم*[۲]**
۱- دانشجوی دکتری، دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج، گروه ریاضی، کرج، ایران.
۲- دانشیار، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، تهران، ایران.

رسید مقاله: ۱ اردیبهشت ۱۳۹۶
پذیرش مقاله: ۴ مهر ۱۳۹۶

## چکیده
یکی از مهمترین کاربردهای علوم ریاضی در صنعت و مهندسی، تعیین مجموعه‌ای از نقاط بهینه پارتو در مسایل بهینه‌سازی چندهدفه در حضور دستِ‌کم دو تابع هدف نامتناسب و متضاد است. در این مقاله، یک روش عددی مبتنی بر روش پاسکولتی-سرافینی به منظور تعیین تقریبی از مرز بهینه پارتو در مسایل بهینه‌سازی چندهدفه ارایه می‌شود. ارتباط بین جواب‌های بهینه‌ی مساله‌ی بهینه‌سازی کمی‌شده و نقاط غیرمغلوب مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه را با استفاده از چندقضیه نشان می‌دهیم و در بخش شبیه‌سازی‌های عددی مقایسه‌ای از کارایی و اعتبار روش پیشنهادی با روش‌های محدودیت نرمال و روش اشتراک مرزی نرمال اصلاح شده را در قالب دو مساله‌ی نمونه‌ای معروف که دارای مرز بهینه‌پارتو نامحدب و گسسته هستند، می‌آوریم.

**کلمات کلیدی:** بهینه‌سازی چندهدفه، مرز پارتو، کمی‌سازی پاسکولتی-سرافینی، بهینه‌سازی غیرخطی و نامحدب.

## ۱ مقدمه
در حوزه‌ی بهینه‌سازی اغلب با مسایلی مواجه هستیم که دارای چندین تابع هدف غیرخطی و متعارض با یکدیگر هستند [۱-۵]. در این نوع مسایل، تصمیمات بهینه نیازمند ارایه بده‌بستان‌های متفاوت بین اهداف گوناگون است. برای مثال در خط تولید یک کارخانه، کم کردن مدت زمان فرآیند تولید یک محصول، افزایش کیفیت محصول خروجی و کاهش استهلاک تولید تحت یک سری محدودیت‌های خاص، نمونه‌ای از یک مساله‌ی بهینه‌سازی سه هدفه است که اولاً مقیاس توابع هدف متفاوت از یکدیگر بوده و ثانیاً جواب بهینه‌ی آن‌ها منطبق بریکدیگر نمی‌باشند. در این حالت با مجموعه‌ای از بده‌بستان‌ها مابین توابع هدف مواجه هستیم که شامل بهترین انتخاب‌های توابع هدف فردی و تمام حالت‌های بینابین می‌شود. این مجموعه را مجموعه‌ی بهینه پارتو می‌نامیم. این مجموعه

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: eskhor@aut.ac.ir



[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-01 ]
[ DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.4.2.3 ]

در حالت کلی نامعلوم است و از آن‌جایی که عموماً یک رابطه‌ی غیرخطی بین مجموعه‌ی شدنی در فضای تصمیم و مجموعه‌ی شدنی در فضای معیار برقرار است، به‌دست آوردن یک نگاشت روی آن بسیار پیچیده یا معمولاً غیرممکن است. تمام روش‌های بهینه‌سازی چندهدفه (MOP) در جستجوی راه‌هایی هستند که بتوانند این مجموعه را بهتر توصیف نمایند. اگر چه تولید کل این مجموعه (سطح بهینه پارتو) به دلیل هزینه‌های محاسباتی مقرون به‌صرفه نیست؛ بنابراین روش‌هایی قابل پذیرش خواهند بود که قادر به تولید نقاط بهینه‌پارتو با توزیع یکنواخت و در سرتاسر سطح بهینه‌پارتو (و نه بخشی از آن) باشند و توصیف بهتری از مرز بهینه پارتو واقعی را ارایه دهند. اگر چه در این بین نیز کاهش تعداد ارزیابی‌های تابع نیز دارای اهمیت است.

حوزه‌ی مربوط به تصمیم‌گیری‌های چندمعیاره (MCDM) به سرعت درحال رشد می‌باشد که در کارهای محققین در این چنددهه اخیر به‌خوبی نمایان است [۶-۱۲]. محققین معمولاً مسایل در حوزه‌ی بهینه‌سازی چندهدفه را از جهات مختلف مورد مطالعه قرار می‌دهند و در نتیجه رویکردهای متفاوت و اهداف گوناگونی پیرامون آن وجود دارد. یک رویکرد ممکن است یافتن یک مجموعه از جواب‌های بهینه پارتو و/یا تعیین مقدار بده‌بستان که در اهداف مختلف صدق می‌نماید و/یا یافتن یک جواب باشد که خواسته‌های تصمیم‌گیرنده را برآورده سازد.

برخی از روش‌ها، مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه را به یک مساله‌ی بهینه‌سازی یک‌هدفه پارامتری (SOP) تبدیل می‌نمایند [۱۳]. چنین مساله‌ای را یک مساله‌ی بهینه‌سازی کمی‌شده می‌نامند. اگر کمی‌سازی به دقت انجام پذیرد، بهینگی پارتو جواب‌های به‌دست آمده از آن تضمین خواهد شد [۱۳].

روش‌های حل مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه به چهار کلاس تقسیم می‌شوند [۱۳] که عبارتند از:

۱. روش‌های بدون اطلاعات ارجحیت که از تصمیم‌گیرنده استفاده نمی‌شود.
۲. روش‌های پیشینی
۳. روش‌های پسینی
۴. روش‌های تعاملی

در روش‌هایی که تصمیم‌گیرنده در دسترس نیست، طبیعتاً جواب‌های توافقی بدون اطلاعات ارجحیت به‌دست می‌آیند. در این روش‌ها، تمام توابع هدف بدون آن‌که نظر تصمیم‌گیرنده تاثیر داشته باشد در درون یک تابع هدف جمع می‌شوند. سپس یک مساله‌ی بهینه‌سازی کمی‌شده حل شده و جواب بهینه ارایه می‌گردد که تصمیم‌گیرنده ممکن است آن‌را بپذیرد و یا رد نماید. مزیت این روش آن است که تصمیم‌گیرنده در توزیع جواب‌های به‌دست آمده دخالتی ندارد و به آسانی پیاده‌سازی می‌شود. عیب این روش آن است که تصمیم‌گیرنده کنترلی بر کیفیت جواب ندارد. در روش‌های پیشینی، اطلاعات ترجیحی در ابتدا توسط تصمیم‌گیرنده اعمال شده و سپس بهترین جواب که در این ارجحیت‌ها صدق نماید، به‌دست می‌آید. در یک روش پسینی، در ابتدا یک مجموعه از جواب‌های بهینه‌پارتو به‌دست می‌آید و سپس تصمیم‌گیرنده باید از میان آن‌ها یکی را برگزیند. در روش‌های تعاملی، تصمیم‌گیرنده به‌طور مکرر در فرآیند حل مساله تاثیرگذار است.

روش پیشنهادی ارایه شده در این مقاله مبتنی بر روش‌های پسینی می‌باشد.



[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-01 ]

[ DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.4.2.3 ]

یک مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه در حالت کلی به صورت زیر است:

$$\underset{x\in X}{Min}\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\left(f_1(\boldsymbol{x}),f_2(\boldsymbol{x}),...,f_p(\boldsymbol{x})\right),\ p\geq 2 \qquad (1)$$

که $\boldsymbol{X}\subset R^n$ مجموعه‌ی شدنی ناتهی و $\boldsymbol{f}$ یک تابع مقدار برداری تشکیل یافته از $p$ $(p\geq 2)$ تابع مقدار حقیقی است. تصویر $X$ تحت نگاشت $\boldsymbol{f}$ را با نماد $\boldsymbol{Y}:=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})\subseteq R^p$ نشان داده و آن‌را فضای تصویر می‌نامیم. برای $\boldsymbol{y},\hat{\boldsymbol{y}}\in R^p$،

- $\boldsymbol{y}<\hat{\boldsymbol{y}}$ به معنای آنست که به ازای هر $k=1,2,\ldots,p$ داریم $y_k<\hat{y}_k$.
- $\boldsymbol{y}\leqq\hat{\boldsymbol{y}}$ به معنای آنست که به ازای هر $k=1,2,\ldots,p$ داریم $y_k\leq\hat{y}_k$.
- $\boldsymbol{y}\leq\hat{\boldsymbol{y}}$ به معنای آنست که $\boldsymbol{y}\leqq\hat{\boldsymbol{y}}$ اما $\boldsymbol{y}\neq\hat{\boldsymbol{y}}$.

در این مقاله از ترتیب‌های مولفه‌ای فوق برای فضای هدف استفاده می‌شود و مخروط $R^p_{\leqq}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$R^p_{\leqq}=\left\{\boldsymbol{x}\in R^p\,\middle|\,\boldsymbol{x}\leqq\circ\right\} \qquad (2)$$

**تعریف ۱:** بردار تصمیم $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}$ غالب بر $\boldsymbol{x}'\in\boldsymbol{X}$ است اگروفقطاگر به ازای هر $k=1,2,...,p$ داشته باشیم $f_k(\boldsymbol{x})\leq f_k(\boldsymbol{x}')$ و دست‌کم در یک اندیس نامساوی به‌صورت اکید باشد؛ در این حالت می‌نویسیم $\boldsymbol{x}\leq\boldsymbol{x}'$. اگر هیچ جوابی به‌طور اکید از $\boldsymbol{x}$ بهتر نباشد، آن‌گاه $\boldsymbol{x}$ را جواب غیرمغلوب (یا جواب بهینه پارتو) می‌گوییم.

**تعریف ۲:** جواب شدنی $\hat{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{X}$ را یک جواب کارای مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه (۱) می‌گویند اگر جواب $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}$ وجود نداشته باشد به‌طوری‌که $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\leq\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}})$. اگر $\hat{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{X}$ کارا باشد در این‌صورت $\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}})$ را یک نقطه‌ی غیرمغلوب می‌نامند.

**تعریف ۳:** جواب شدنی $\hat{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{X}$ را یک جواب کارای ضعیف مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه (۱) می‌گویند اگر جواب $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}$ وجود نداشته باشد به‌طوری‌که $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})<\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}})$. اگر $\hat{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{X}$ کارای ضعیف باشد در این‌صورت $\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}})$ را یک نقطه‌ی غیرمغلوب ضعیف می‌نامند.

مجموعه‌ی تمام جواب‌های کارا و کارای ضعیف مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه (۱) را به ترتیب با نمادهای $\boldsymbol{X}_E$ و $\boldsymbol{X}_{WE}$ نشان می‌دهیم و تصاویرشان را به ترتیب مرز پارتو و مرز پارتو ضعیف می‌نامیم و با $\boldsymbol{Y}_N$ و $\boldsymbol{Y}_{WN}$ نشان می‌دهیم.

**تعریف ٤:** نقطه‌ی $f^*=(f_1^*,f_2^*,\ldots,f_p^*)^T$ که $f_k^*=\underset{x\in X}{Min}\,f_k(\boldsymbol{x})$ برای $k=1,2,\ldots,p$ را نقطه‌ی ایده‌آل مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه (۱) می‌گویند.

**تعریف ۵:** برای مجموعه $\boldsymbol{I}\subset\boldsymbol{X}$، فیلتر پارتو مجموعه $\boldsymbol{I}$ به‌صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\text{Pareto}(\boldsymbol{I}):=\left\{\boldsymbol{x}\middle|\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{I},\nexists\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{I},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\leq\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\right\}$$

یک روش معمول برای تعیین جواب‌های یک مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه، دوباره فرموله کردن آن در غالب یک مساله‌ی بهینه‌سازی تک‌هدفه پارامتری است. یک مساله‌ی بهینه‌سازی کمی‌شده پارامتری در حالت کلی به صورت زیر است:



[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-01 ]

[ DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.4.2.3 ]

$$\underset{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}_\theta}{Min}\, g\left(f_1(\boldsymbol{x}),\ldots,f_p(\boldsymbol{x}),\theta\right) \qquad (۳)$$

که در آن $\theta$ پارامتر برداری است و مجموعه‌ی $\boldsymbol{X}_\theta \subseteq \boldsymbol{X}$ وابسته به پارامتر $\theta$ است و $g: R^{p+1} \to R$ یک تابع می‌باشد.

به وسیله‌ی حل مساله‌ی بهینه‌سازی (۳) به ازای پارامترهای مختلف می‌توان به تمام جواب‌های بهینه پارتو از مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه دست یافت. به منظور مطالعه‌ای بر مجموعه روش‌های مبتنی بر کمی‌سازی و همچنین غیر کمی‌سازی به [۱۴] مراجعه نمایید.

در این مقاله، تمرکز اصلی بر روی تکنیک کمی‌سازی پاسکولتی-سرافینی (PS) می‌باشد و یک روش عددی مبتنی بر روش فوق برای تولید تقریب مناسبی از مرز بهینه‌پارتو یک مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه در حالت کلی ارایه می‌دهیم. یکی از مزیت‌های روش PS آنست که بسیار جامع می‌باشد و بسیاری از روش‌های کمی‌سازی مانند روش چبیشف وزن‌دار شده، روش اشتراک مرزی نرمال اصلاح شده (mNBI) و روش $\varepsilon$-محدودیت حالت‌های خاصی از آن می‌باشند [۸]. برای مثال، فرمول روش اشتراک مرزی نرمال اصلاح شده (mNBI) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &\underset{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X},\, s\in R}{Max} \quad s \\ &s.t. \\ &\quad \boldsymbol{\Phi\beta} + s\,\bar{\boldsymbol{n}} \geqq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \end{aligned} \qquad (۴)$$

که $\boldsymbol{\beta} \in R^p_{\geqq}$ یک پارامتر است و $\sum_{k=1}^{p} \beta_k = 1$. اگر قرار دهیم $a = \boldsymbol{\Phi\beta}$، $s = -t$ و $\bar{\boldsymbol{n}} = -\boldsymbol{r}$ در این صورت روش mNBI و PS معادل خواهند بود. به عنوان مثال دیگر، روش چبیشف وزن‌دار شده به صورت زیر است:

$$\underset{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}}{Min}\ \underset{k=1,\ldots,p}{Max}\ w_k\left(f_k(\boldsymbol{x}) - a_k\right), \qquad (۵)$$

که $w_k > 0$، $k = 1,2,\ldots,p$ و $a \in R^p$. اگر قرار دهیم $r_k = \frac{1}{w_k}$، آن‌گاه روش چبیشف وزن‌دار شده و روش کمی‌سازی پاسکولتی-سرافینی معادل خواهند بود.

در ادامه مقاله به صورت زیر سازماندهی می‌گردد. در بخش ۲، روش پاسکولتی-سرافینی به‌طور خلاصه یادآوری می‌گردد و برخی از خواص آن آورده می‌شود. در بخش۳، یک روش جدید در انتخاب پارامتر $a$ در روش پاسکولتی-سرافینی برای حل مسایل بهینه‌سازی چندهدفه ارایه می‌شود. در بخش ۴، روش پیشنهاد شده را روی دو مساله‌ی نمونه‌ای معروف پیاده‌سازی کرده و نتایج حاصل از آن را با نتایج به‌دست آمده از روش‌های محدودیت نرمال و اشتراک مرزی نرمال اصلاح شده مقایسه می‌نماییم. در نهایت، نتیجه‌گیری در بخش ۵ آورده می‌شود.

## ۲ روش کمی‌سازی پاسکولتی- سرافینی

روش کمی‌سازی PS از دو پارامتر $a$ و $\boldsymbol{r}$ که به ترتیب از $R^p$ و $R^p \setminus \{0\}$ انتخاب می‌شوند، برای تعیین جواب‌های کارای ضعیف و کارای مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه (۱) نسبت به مخروط ترتیبی $R^p_{\geqq}$ استفاده



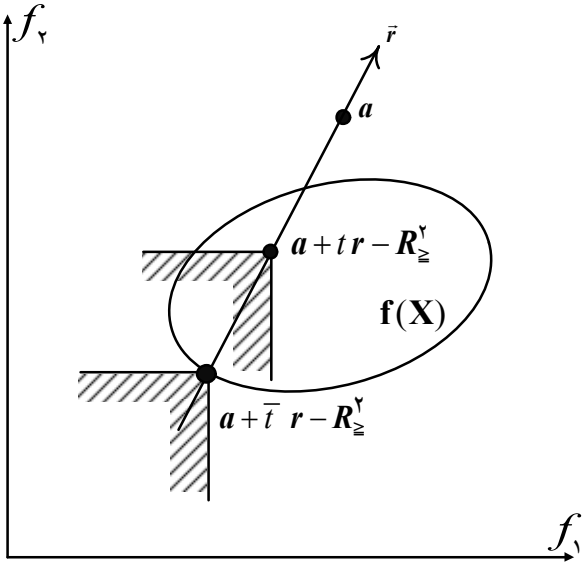
[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-01 ]

[ DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.4.2.3 ]

می‌کند:

$$\begin{aligned} \mathrm{PS}(a,r) \quad & \underset{t\in R, x\in X}{Min} \quad t, \\ & s.t. \\ & a+tr \geqq f(x), \end{aligned} \tag{۶}$$

به منظور حل مساله‌ی (۶) مخروط ترتیبی $-R_{\leqq}^{p}$ را در جهت $r$ (یا $-r$) روی شعاع $a+tr$ با شروع از نقطه‌ی $a$ حرکت می‌دهیم تا این‌که مجموعه‌ی $(a+tr-R_{\leqq}^{p})\cap f(\mathbf{X})$ به مجموعه‌ی تهی تقلیل یابد. کوچک‌ترین مقدار $\bar{t}$ که به ازای آن $(a+\bar{t}r-R_{\leqq}^{p})\cap f(\mathbf{X})\neq\varnothing$ می‌باشد را یک مقدار مینیمال از مساله‌ی بهینه‌سازی کمی‌شده‌ی (۶) می‌گویند، شکل ۱ طرز کار روش PS را برای یک مساله‌ی بهینه‌سازی دوهدفه نشان می‌دهد.




**شکل ۱.** طرز کار روش PS برای یک مساله‌ی بهینه‌سازی دوهدفه

خواص روش PS را می‌توانید در [۸و ۱۵] ببینید. در ادامه یک قضیه از [۱۵] آورده می‌شود.

**قضیه ۱:** مخروط محدب نوک‌دار بسته $R_{\leqq}^{p}$ را در نظر بگیرید.

الف) فرض کنید $\bar{x}$ یک جواب کارای مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه (۱) باشد، در این‌صورت $(\circ,\bar{x})$ یک جواب بهینه (۶) است که در آن $a=f(\bar{x})$ و $r\in R_{\leqq}^{p}\setminus\{\circ\}$ یک جهت دلخواه است.

ب) فرض کنید $(\bar{t},\bar{x})$ یک جواب بهینه (۶) باشد در این صورت $\bar{x}$ یک جواب کارای ضعیف مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه (۱) است و $a+\bar{t}r\geq f(\bar{x})$.

**قضیه ۲:** مخروط نوک‌دار محدب بسته‌ی $R_{\leqq}^{p}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید مجموعه $f(X)+R_{\leqq}^{p}$ محدب و بسته بوده و فرض کنید $Y_N\neq\varnothing$، در این‌صورت مساله‌ی بهینه‌سازی کمی‌شده (۶) به ازای هر $(a,r)\in R_{\leqq}^{p}\times R_{\leqq}^{p}\setminus\{\circ\}$ دارای عضو مینیمال است.

به عنوان یک نتیجه، اگر $f(X)+R_{\leqq}^{p}$ محدب و بسته بوده و به ازای هر انتخاب $(a,r)\in R_{\leqq}^{p}\times R_{\leqq}^{p}\setminus\{\circ\}$



[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-01 ]

[ DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.4.2.3 ]

مساله‌ی بهینه‌سازی (۶) فاقد جواب باشد آن‌گاه $\boldsymbol{Y}_N = \varnothing$.

**تبصره:** در [۱۵] اشاره شده است که مساله $PS(a,\boldsymbol{r})$ به ازای برخی انتخاب‌های $a,\boldsymbol{r} \in R^p$ از پایین بی‌کران است.

## ۲-۱ محدودسازی انتخاب پارامتر $a$

به عنوان یک نتیجه از قضیه ۱ (الف)، می‌توان تمام جواب‌های کارای یک مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه (۱) را به ازای پارامتر ثابت $\boldsymbol{r} \in R^p_{\geqq} \setminus \{\circ\}$ و تنها با تغییر پارامتر $a \in R^p$ به‌دست آورد. در [۱۵] از یک روش به منظور محدودسازی انتخاب پارامتر $a$ از $R^p$ ارایه شده است که همچنان قادر به تعیین تمام جواب‌های کارای یک مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه (۱) است. در ادامه، این روش را به‌طور خلاصه توضیح می‌دهیم.

محدودسازی انتخاب پارامتر $a$ در حالت دوهدفه- برای حالت دوهدفه $\boldsymbol{r} \in R^2 \setminus \{\circ\}$ و ابرصفحه $H = \{\boldsymbol{y} \in R^2 \,|\, b_1 y_1 + b_2 y_2 = \beta\}$ را در نظر بگیرید که $b = (b_1, b_2) \in R^2 \setminus \{\circ\}$ و $\beta \in R$.

ابتدا نقاط $\boldsymbol{f}(\overline{x}_k)$، $\overline{x}_k = \arg\min_{x \in X} f_k(\boldsymbol{x})$، $k = 1,2$ را تعیین کرده و سپس نقاط $k = 1,2$ را در جهت $\boldsymbol{r}$ روی خط $H$ تصویر می‌کنیم. تصویر این نقاط روی $H$ عبارتند از:

$$\overline{a}_k := \boldsymbol{f}(\overline{x}_k) - \boldsymbol{r} \cdot \frac{\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{f}(\overline{x}_k) - \beta}{\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{r}} \in \mathrm{H},\ k = 1,2$$

قضیه‌ی ۱۷-۲ در [۱۵] نشان می‌دهد که انتخاب پارامترهای $a$ از مجموعه‌ی $H^a = \{\boldsymbol{y} \in H \,|\, \boldsymbol{y} = \lambda \overline{a}_1 + (1-\lambda)\overline{a}_2, \lambda \in [\circ,1]\}$ یک تقریب از مرز بهینه‌ی پارتو مساله‌ی بهینه‌سازی دوهدفه را می‌دهد.

محدودسازی انتخاب پارامتر $a$ در حالت سه‌هدفه- برای حالت‌های سه‌هدفه و بالاتر، روش فوق نادرست است. در [۱۵] این موضوع در مثال ۲-۱۹ نشان داده شده است. برای رفع این مشکل در [۱۵] از یک محدودیت ضعیف‌تر از مجموعه‌ی $H$ برای پارامتر $a$ به‌وسیله تصویر کردن مجموعه‌ی تصویر $\boldsymbol{f}(X)$ در جهت $\boldsymbol{r}$ روی مجموعه $H$ پیشنهاد شده است. اطلاعات بیش‌تر در [۱۵] آورده شده است.

لازم به ذکر است که پیاده‌سازی روش PS در مسایل بهینه‌سازی با بیش از دو تابع هدف در عمل دشوار می‌باشد.

در روش پیشنهادی به‌جای آن‌که پارامتر $a$ از روی یک ابرصفحه انتخاب گردد از یک ابرکره استفاده می‌شود. یکی از مزیت‌های این روش آنست که مستقیماً برای مسایل بهینه‌سازی از هر تعداد تابع هدف به‌کار می‌رود. روش پیشنهادی از یک رویکرد پسینی با این خاصیت که یک توزیع یکنواخت از نقاط روی سطح ابرکره منجر به یک توزیع یکنواخت از نقاط بهینه‌ی پارتو روی سطح بهینه‌ی پارتو می‌گردد، استفاده می‌کند. این روش در مواجهه با مسایل بهینه‌سازی چندهدفه که مرز پارتو آن‌ها نواحی محدب با انحنای غیریکنواخت، نواحی غیرمحدب با جواب‌های غیرمغلوب و نواحی نامحدب با جواب‌های مغلوب می‌باشند، می‌تواند به‌طور موثر مفید باشد.



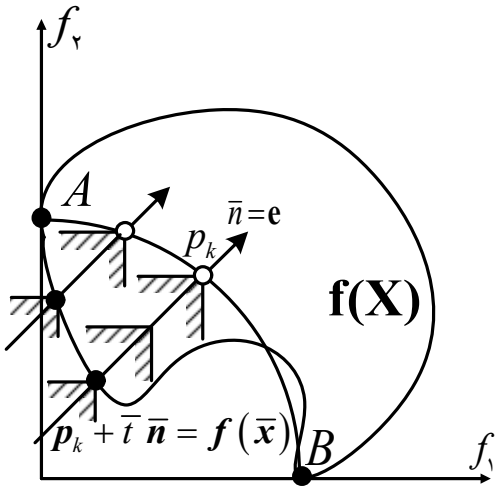
[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-01 ]

[ DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.4.2.3 ]

## ۳ توصیف روش پیشنهادی

مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه (۱) را در نظر بگیرید و فرض کنید که نقطه‌ی ایده‌آل وجود دارد. بعد از تعیین نقطه‌ی ایده‌آل، توابع هدف را نرمالایز می‌نماییم به‌طوری‌که کمینه خود را در صفر و بیشینه خود را در یک اختیار نمایند. برای سادگی فرض کنید که مبدا مختصات در فضای هدف منطبق بر نقطه‌ی ایده‌آل است و توابع هدف نامنفی باشند. مجموعه‌ی محدب $\Gamma = CL(\Lambda)$ را در نظر بگیرید که در آن $CL$ نشان‌دهنده بستار مجوعه‌ی $\Lambda = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \frac{q_i}{\|\mathbf{q}\|_2} \mathbf{e}_i \,\middle|\, \mathbf{q} \in R^p_{\geqq}, \sum_{i=1}^{p} q_i = 1 \right\}$ بوده، $\|.\|_2$ نرم اقلیدسی و $\mathbf{e}_i$ یک $p$ بردار است که مولفه‌ی $i$ آن یک و سایرین صفر می‌باشد.

جهت شبه‌نرمال ثابت $\overline{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{e}$ را در نظر بگیرید که در آن $\mathbf{e} = (1,1,...,1)^T$ یک بردار $p\times 1$ است. حال مجموعه‌ی $\Psi = \left\{ \boldsymbol{s} \middle| \boldsymbol{s} = \hat{\boldsymbol{p}} + t\,\overline{\boldsymbol{n}}; \hat{\boldsymbol{p}} \in \partial\Gamma, \overline{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{e}, t \in R \right\}$ را تعریف می‌نماییم که در آن $\boldsymbol{\Phi}$ یک ماتریس $p \times p$ شامل ستون‌های $\boldsymbol{f}(x_k) - \boldsymbol{f}^*$ ، $k = 1,2,...,p$ می‌باشد که در آن $\boldsymbol{f}^*$ نقطه‌ی ایده‌آل و $\partial\Gamma$ مرز $\Gamma$ است.




**شکل ۲.** توصیف روش پیشنهادی برای یک مساله‌ی بهینه‌سازی دوهدفه. در این‌جا $p_k$ نقاط توخالی و $\overline{\boldsymbol{n}}$ یک جهت شبه‌نرمال است.

شکل ۲ توصیفی از روش پیشنهادی را برای مسایل بهینه‌سازی دوهدفه نشان می‌دهد.

با توجه به توضیحات فوق، مساله‌ی بهینه‌سازی کمی‌شده‌ای که باید حل شود عبارت است از:

$$\begin{aligned} &\underset{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}}{Min}\ \ t, \\ &s.t. \\ &\quad \boldsymbol{s} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in R^p_{\geqq}, \\ &\quad \boldsymbol{s} \in \Psi. \end{aligned} \qquad (۷)$$



[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-01 ]

[ DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.4.2.3 ]

## ۳-۱ الگوریتم روش پیشنهادی

**ورودی:** مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه

**خروجی:** تعیین تقریبی از مرز پارتو واقعی که آن را با $\boldsymbol{Y}_A$ نشان می‌دهیم.

### گام اول: نرمالایز کردن توابع هدف

تمام توابع هدف را نرمال نمایید به‌طوری‌که کمینه خود را در صفر و بیشینه‌ی خود را در نقطه یک اختیار نمایند.

۱) فرض کنید $x_k^*$ جواب مساله بهینه‌سازی تک‌هدفه از $k$-امین تابع هدف $f_k$ روی محدودیت‌های $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ باشد. در این صورت نقطه‌ی ایده‌آل $\boldsymbol{y}^I \in R^p$ به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\boldsymbol{y}^I = \left(f_1(\boldsymbol{x}_1^*),...,f_p(\boldsymbol{x}_p^*)\right)^T \quad (۸)$$

که در آن $\boldsymbol{x}_k^* = \arg\min_{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}} f_k(\boldsymbol{x})$ ، $k = 1,2,...,p$ است.

۲) نقطه‌ی شبه‌ندیر $\boldsymbol{y}^N \in R^p$ را به صورت زیر به‌دست آورید.

$$\boldsymbol{y}^N = \left(f_1^{Nadir},...,f_p^{Nadir}\right)^T \quad (۹)$$

که $p$ تعداد توابع هدف بوده و هر مولفه‌ی $f_k^{Nadir}$ عبارتست از:

$$f_k^{Nadir} = \max\left\{f_k(x_1^*),...,f_k(\mathrm{x}_p^*)\right\} \quad (۱۰)$$

۳) هر یک از توابع هدف را نرمالایز نمایید.

$$f_k^{normalaize} = \frac{f_k - f_k^I}{f_k^{Nadir} - f_k^I},\ k = 1,2,...,p \quad (۱۱)$$

برای سادگی از این پس $f_k^{normalize}$ را با $f_k$ ، $k = 1,2,...,p$ نشان می‌دهیم.

### گام دوم: آماده‌سازی مقدمات اجرای الگوریتم

۴) فرض کنید $\boldsymbol{Y}_A = \varnothing$؛ که در آن $\boldsymbol{Y}_A$ مجموعه تقریبی نقاط بهینه‌پارتو به‌دست آمده از روش پیشنهادی است که در ابتدا تهی می‌باشد.

۵) تعداد نقاط بهینه پارتو توسط تصمیم‌گیرنده (DM) تعیین شده و در $m$ قرار دهید. قرار دهید $\delta = \frac{1}{m}$ و تعریف کنید $L = \{i\delta\}_{k=0}^m$ که در آن $L$ مجموعه تمام نقاط آغازین روی پوسته سیمپلکس حاصل از نقاط لنگر (مینیمم‌های منحصربه‌فرد توابع فردی) است.

۶) مجموعه‌ی $\Gamma = CL\left\{\sum_{i=1}^p \frac{q_i}{\|\boldsymbol{q}\|_2}\mathbf{e}_i \,\middle|\, \boldsymbol{q} \in R_{\geq}^p, \sum_{i=1}^p q_i = 1\right\}$ را در نظر گرفته و مجموعه‌ی نقاط $L$ را به $\partial\Gamma$ انتقال دهید و جهت شبه‌نرمال ثابت $\overline{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{e}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $p_k$ نشان‌دهنده $k$-امین عنصر $\partial\Gamma$ باشد. مجموعه نقاط روی $\partial\Gamma$ را با نماد $\overline{\Gamma}$ نشان می‌دهیم. تعداد اعضای مجموعه‌ی $\overline{\Gamma}$ را با $\left\|\overline{\Gamma}\right\|$ نشان دهید. قرار دهید $k = 1$ و فرآیند زیر را تا وقتی‌که $k = \left\|\overline{\Gamma}\right\|$ گردد تکرار نمایید.



[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-01 ]

[ DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.4.2.3 ]

**گام سوم: مراحل اصلی**

۷) نقطه‌ی آغازین $p_k \in \overline{\Gamma}$ را در نظر بگیرید و مطابق با مجموعه $\Psi$ مساله‌ی بهینه‌سازی کمی‌شده (۷) را حل کنید.

۸) **به‌روز نمودن $Y_A$:** نقطه‌ی $x_k^*$ به‌دست آمده از گام ۷ را در $f(x)$ قرار دهید و نقطه غیرمغلوب جدید را به‌دست آورید و $Y_A$ را به‌روز کنید، یعنی $Y_A := Y_A \cup \{f(x_k^*)\}$.

قرار دهید $k := k+1$، اگر $k = \|\Gamma\|$ به گام ۹ بروید در غیر این‌صورت به گام ۷ برگردید.

۹) شمارش تکمیل شده است و یک مجموعه $\mathbf{Y}_A$ تقریبی از مرز بهینه پارتو می‌باشد.

---

تاکید می‌شود که جواب‌های بهینه‌ی روش پیشنهادی دستِ‌کم نقاط کارای ضعیف مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه (۱) است. اعتبار روش پیشنهادی را توسط چهار قضیه که در ادامه آورده شده است، نشان می‌دهیم.

**قضیه ۳:** فرض کنید $\bar{x}$ یک جواب کارای ضعیف مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه (۱) باشد، در این‌صورت $(\circ, \bar{x})$ یک جواب بهینه‌ی مساله (۷) به همراه پارامتر $p := f(\bar{x}) \in \Gamma$ و جهت دلخواه $\bar{n} \in \mathrm{int}(\mathrm{R}^p_{\leqq})$ است.

**برهان:** قرار دهید $p := f(\bar{x}) \in \Gamma$ و به‌دلخواه $\bar{n} \in \mathrm{int}(\mathrm{R}^p_{\leqq})$ را انتخاب نمایید. $(\circ, \bar{x})$ یک نقطه‌ی شدنی مساله‌ی (۷) است، زیرا $p + t\bar{n} = f(\bar{x}) + \circ \cdot \bar{n} \leqq f(\bar{x})$.

همچنین یک جواب شدنی از مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه (۷) می‌باشد، زیرا با توجه به فرض قضیه $\bar{x}$ یک جواب کارای ضعیف است در نتیجه $\bar{x} \in X$. نشان می‌دهیم که نقطه‌ی $(\circ, \bar{x})$ یک جواب بهینه‌ی مساله (۷) می‌باشد، زیرا در غیر این‌صورت نقطه‌ی شدنی $(t', x')$ با $t' < \circ$ و $k' \in R^p_{\leqq}$ وجود دارد که $p + t'\bar{n} - f(x') = k' \in R^p_{\leqq}$.

از این‌رو داریم $f(\bar{x}) = f(x') + k' - t'\bar{n}$. داریم $k' - t'\bar{n} \in \mathrm{int}(R^p_{\leqq})$ در نتیجه خواهیم داشت $f(\bar{x}) \in f(x') + \mathrm{int}(R^p_{\leqq})$.

رابطه‌ی اخیر در تناقض با آن است که $\bar{x}$ یک جواب کارای ضعیف مساله بهینه‌سازی چندهدفه (۱) می‌باشد.

**قضیه ٤:** فرض کنید $\bar{x}$ یک جواب کارای مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه (۱) باشد، در این‌صورت $(\circ, \bar{x})$ یک جواب بهینه‌ی مساله (۷) به همراه پارامتر $p := f(\bar{x}) \in \Gamma$ و جهت دلخواه $\bar{n} \in R^p_{\leqq} \setminus \{\circ\}$ است.

**برهان:** قرار دهید $p := f(\bar{x}) \in \Gamma$ و به‌دلخواه $\bar{n} \in R^p_{\leqq} \setminus \{\circ\}$ را انتخاب نمایید. $(\circ, \bar{x})$ یک نقطه‌ی شدنی مساله‌ی (۷) است، زیرا $p + t\bar{n} = f(\bar{x}) + \circ \cdot \bar{n} \leqq f(\bar{x})$.

همچنین یک جواب شدنی از مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه (۱) می‌باشد، زیرا با توجه به فرض قضیه $\bar{x}$ یک جواب کارای است در نتیجه $\bar{x} \in X$. نشان می‌دهیم که نقطه‌ی $(\circ, \bar{x})$ یک جواب بهینه‌ی مساله (۷) می‌باشد، زیرا در غیر این‌صورت نقطه‌ی شدنی $(t', x')$ با $t' < \circ$ و $k' \in R^p_{\leqq}$ وجود دارد که $p + t\bar{n} - f(\bar{x}) = k' \in R^p_{\leqq}$.

از این‌رو داریم $f(\bar{x}) = f(x') + k' - t'\bar{n}$. داریم $k' - t'\bar{n} \in R^p_{\leqq}$ در نتیجه خواهیم داشت



[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-01 ]

[ DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.4.2.3 ]

$\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) \in \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}') + R_{\leqq}^{p}$.

چون $\bar{\boldsymbol{x}}$ یک جواب کارای مساله (۱) است داریم $\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{f}(\mathbf{x}')$ و در نتیجه $\boldsymbol{k}' = t'\,\bar{\boldsymbol{n}}$.

همچنین $R_{\leqq}^{p}$ یک مخروط نوک‌دار است و $\boldsymbol{k}' \in R_{\leqq}^{p}$ و $t'\,\bar{\boldsymbol{n}} \in -R_{\leqq}^{p}$، این نتیجه می‌دهد که $t'\,\bar{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{k}' = \circ$. این در تناقض با $t' < \circ$ و $\bar{\boldsymbol{n}} \neq \circ$ است.

**قضیه ۵:** فرض کنید $(\bar{t}, \bar{\boldsymbol{x}})$ یک جواب بهینه مساله بهینه‌سازی کمی‌شده (۷) باشد، در این‌صورت $\bar{\boldsymbol{x}}$ یک جواب کارای ضعیف مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه (۱) است.

**برهان:** فرض کنید $\bar{\boldsymbol{x}}$ یک جواب کارای ضعیف نیست. در این‌صورت یک نقطه‌ی شدنی $\boldsymbol{x}' \in \boldsymbol{X}$ و یک $\boldsymbol{k}' \in \mathrm{int}(R_{\leqq}^{p})$ وجود دارد که $\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}') + \boldsymbol{k}'$.

از آن‌جایی که $(\bar{t}, \bar{\boldsymbol{x}})$ یک جواب بهینه مساله بهینه‌سازی کمی‌شده (۷) است، پس یک جواب شدنی برای آن می‌باشد در نتیجه $\bar{\boldsymbol{k}} \in R_{\leqq}^{p}$ وجود دارد که $\boldsymbol{p} + \bar{t}\,\bar{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) = \bar{\boldsymbol{k}}$.

چون $\boldsymbol{k}' \in \mathrm{int}(R_{\leqq}^{p})$ و $\bar{\boldsymbol{k}} \in R_{\leqq}^{p}$ نتیجه می‌گیریم که $\bar{\boldsymbol{k}} + \boldsymbol{k}' \in \mathrm{int}(R_{\leqq}^{p})$ و یک $\varepsilon > \circ$ با $\bar{\boldsymbol{k}} + \boldsymbol{k}' + \varepsilon\,\bar{\boldsymbol{n}} \in \mathrm{int}(R_{\leqq}^{p})$ وجود دارد. از $\boldsymbol{p} + \bar{t}\,\bar{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{k}' = \bar{\boldsymbol{k}}$ نتیجه می‌گیریم که:

$\boldsymbol{p} + (\bar{t} + \varepsilon)\,\bar{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) \in \mathrm{int}(R_{\leqq}^{p})$.

بنابراین نقطه‌ی $(\bar{t} + \varepsilon, \boldsymbol{x}')$ یک جواب شدنی برای مساله بهینه‌سازی کمی‌شده (۷) است.

بنابراین $\bar{t} + \varepsilon < \bar{t}$ و این در تناقض با آن است که $(\bar{t}, \bar{\boldsymbol{x}})$ جواب بهینه مساله‌ی (۷) است.

**قضیه ٦:** نقطه‌ی $(\bar{t}, \bar{\boldsymbol{x}})$ یک جواب بهینه مساله کمی‌شده (۷) به همراه $\bar{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{e}$ و $\hat{\boldsymbol{p}} \in \Gamma$ است اگر و فقط اگر $(\bar{t}, \bar{\boldsymbol{x}})$ یک جواب بهینه مساله‌ی $\mathrm{PS}(a, \boldsymbol{r})$ از معادله (۶) با $a = \hat{\boldsymbol{p}}$ و $\boldsymbol{r} = \bar{\boldsymbol{n}}$ باشد.

**برهان:** با استفاده از پارامترهای $a$ و $\boldsymbol{r}$ بر طبق تعریف داده شده در قضیه‌ی فوق، فوراً ثابت می‌گردد که این دو مساله معادل یکدیگر می‌باشند.

## ٤ نتایج و شبیه‌سازی‌های عددی

در این بخش، کارایی الگوریتم پیشنهادی را در مقایسه با روش‌های محدودیت نرمال (NC) [۱۶] و اشتراک مرزی نرمال اصلاح شده (mNBI) [۱۷] در قالب دو مساله نمونه که از [۱۵و ۱۸] انتخاب شده‌اند، بررسی می‌کنیم. این مسایل نمونه، الگوریتم‌های حل یک مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه را از نظر کیفیت تقریب، گسترش و توزیع یکنواخت جواب‌های غیرمغلوب به‌دست آمده مورد ارزیابی قرار می‌دهد و موجب مقایسه الگوریتم‌های مختلف با یکدیگر می‌شوند. در تمام مثال‌ها، الگوریتم پیشنهادی با روش‌های NC و mNBI مورد مقایسه قرار می‌گیرند. این مقایسه‌ها در تعداد ارزیابی‌های تابع، زمان اجرای الگوریتم، کیفیت جواب‌های غیرمغلوب به‌دست آمده، کیفیت گسترش جواب‌های غیرمغلوب به‌دست آمده روی مرز پارتو واقعی و کیفیت توزیع یکنواخت جواب‌های غیرمغلوب روی مرز پارتو می‌باشد. به منظور تعیین کیفیت جواب‌های غیرمغلوب به‌دست آمده از سه معیار کیفیت تقریب، گسترش و یکنواختی که از مقاله مِنگ و همکاران [۱۹] انتخاب شده است استفاده می‌نماییم.



[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-01 ]

[ DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.4.2.3 ]

همچنین، به کمک رسم نمودار توزیع جواب‌های به‌دست آمده روی مرز پارتو را نشان می‌دهیم. به‌علاوه، برای اجرای الگوریتم پیشنهادی و الگوریتم‌های NC و mNBI روی مسایل نمونه، از بسته‌ی بهینه‌سازی GlobalOptimization و الگوریتم SQP از نرم‌افزار MAPLE 2016 استفاده شده است. به منظور راحتی در ارایه مثال‌های عددی، روش پیشنهادی را با نماد PM نشان می‌دهیم.

## ٤-١ معیارهای کیفیت برای مساله بهینه‌سازی چندهدفه

### ٤-١-١ معیار کیفیت برای تقریب مجموعه بهینه پارتو

فرض کنید $P_N,...,P_۲,P_۱$ تعداد $N$ مجموعه تقریبی از مجموعه بهینه‌پارتو از $N$ الگوریتم متفاوت برای یک مساله یکسان باشد. چون مجموعه‌ی بهینه پارتو واقعی مجهول است، فرض می‌کنیم $U=\bigcup_{i=۱}^{N} P_i$ و $\text{Pareto}(U)$ را به عنوان مجموعه بهینه پارتو در این مقاله در نظر می‌گیریم. فاصله‌ی نسلی مجموعه $P_i$ به‌صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$GD_i=\frac{\sqrt{\sum_{q\in P_i}\left(d_q^{P_i}\right)^۲}}{\left|P_i\right|}, i=۱,۲,...,N \qquad (۱۲)$$

که فاصله‌ی بین هر دو جواب در فضای هدف برابر $d_q^{P_i}=\min_{h\in \text{Pareto}(U)} d(q,h)$ و $\left|P_i\right|$ عدد اصلی مجموعه $P_i$ است. اگر $GD_i<GD_j$، $i,j=۱,۲,...,N$ آن‌گاه تقریب $P_i$ بهتر از تقریب $P_j$ است.

### ٤-١-٢ معیار کیفیت برای یکنواختی مجموعه بهینه پارتو

فرض کنید $P_۱=\left\{p_۱^۱,...,p_M^۱\right\}$ و $P_۲=\left\{p_۱^۲,...,p_M^۲\right\}$ دو مجموعه تقریبی از مجموعه بهینه پارتو به‌وسیله دو الگوریتم مختلف باشند. مراحل اصلی برای یکنواختی به شرح زیر است.

**مرحله ۱)** قرار دهید $k=۱$ و تعریف کنید:

$$P_{New}^۱=\left\{p_۱^۱=\left\{p_۱^۱\right\},...,p_N^۱=\left\{p_N^۱\right\}\right\}$$
$$P_{New}^۲=\left\{p_۱^۲=\left\{p_۱^۲\right\},...,p_M^۲=\left\{p_M^۲\right\}\right\}$$

**مرحله ۲)** محاسبه کنید:

$$d_i^۱=\min_{j=۱,...,i-۱,i+۱,...,N} D(p_i^۱,p_j^۱),\ \bar{d}_k^۱=\frac{\sum_{i=۱}^{N} d_i^۱}{N},\ SP_k^۱=\sqrt{\frac{\sum_{i=۱}^{N}\left(۱-F\left(d_i^۱,\bar{d}_k^۱\right)\right)^۲}{N-۱}}$$

و

$$d_i^۲=\min_{j=۱,...,i-۱,i+۱,...,M} D(p_i^۲,p_j^۲),\ \bar{d}_k^۲=\frac{\sum_{i=۱}^{M} d_i^۲}{M},\ SP_k^۲=\sqrt{\frac{\sum_{i=۱}^{M}\left(۱-F\left(d_i^۲,\bar{d}_k^۲\right)\right)^۲}{M-۱}}$$

که در آن



[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-01 ]

[ DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.4.2.3 ]

$$F(x,y)=\begin{cases}\frac{x}{y} & ,x>y\\ \frac{y}{x} & ,x\le y\end{cases}$$

و $D(P,Q)$ فاصله در فضای هدف بین هر دو جواب در مجموعه $P$ و $Q$ است.

**مرحله ۳)** اگر $SP_k^{۱}>SP_k^{۲}$ باشد، آن‌گاه یکنواختی $P_۲$ بهتر از $P_۱$ است. اگر $SP_k^{۱}<SP_k^{۲}$ باشد، آن‌گاه یکنواختی $P_۱$ بهتر از $P_۲$ است. در غیر این‌صورت $SP_k^{۱}=SP_k^{۲}$.

فرض کنید $D(P_l^{۱},P_m^{۱})=\min\left\{d_۱^{۱},...,d_N^{۱}\right\}$ و اجتماع $P_m^{۱}$ و $p_l^{۱}$ را به‌دست آورید که منتج به $P_{New}^{۱}=\left\{p_۱^{۱},p_۲^{۱},...,p_{N-۱}^{۱}\right\}$ می‌شود. از طریق مشابه $P_{New}^{۲}$ را تشکیل دهید. فرض کنید $k=k+۱$، $N=N-۱$ و $M=M-۱$. اگر $k<\min\left(N-۱,M-۱\right)$ است به مرحله ۲ بروید.

**مرحله ٤)** اگر $SP_k^{۱}>SP_k^{۲}$ باشد، آن‌گاه یکنواختی $P_۲$ بهتر از $P_۱$ است. اگر $SP_k^{۱}<SP_k^{۲}$ باشد، آن‌گاه یکنواختی $P_۱$ بهتر از $P_۲$ است. در غیر این‌صورت $SP_k^{۱}=SP_k^{۲}$ و یکنواختی $P_۱$ و $P_۲$ یکسان است.

### ٤-۱-۳ معیار کیفیت برای خوش‌توزیعی مجموعه بهینه پارتو

معیار خوش‌توزیعی مجموعه بهینه پارتو مطابق رویه‌ای که در ادامه می‌آید اندازه‌گیری می‌شود.

**مرحله ۱)** مجموعه جواب مرجع $P_r=\left\{\boldsymbol{f}_۱^{۱},\boldsymbol{f}_۲^{۱},...,\boldsymbol{f}_p^{۱}\right\}$ را تشکیل دهید که در آن به ازای هر $i=۱,۲,...,p$ داریم $f_i^{۱}=\left(L_۱,...,L_{i-۱},U_i,L_{i+۱},...,L_p\right)$ به‌طوری‌که $U_i=\max\limits_{\boldsymbol{x}\in \text{Pareto}(U)} f_i(\boldsymbol{x})$ و $L_i=\min\limits_{\boldsymbol{x}\in \text{Pareto}(U)} f_i(\boldsymbol{x})$ است.

**مرحله ۲)** فاصله در فضای هدف بین یک جواب مرجع $p_r\in P_r$ با مجموعه $P$ را به‌صورت $d_r^P=\min\left\{d(p_r,p)\middle|p\in P\right\}$ تعریف نمایید. مقدار کوچک‌تر $d_r^P$ به‌این معنا است که $P$ گسترش خوب‌تری روی مرز بهینه‌پارتو دارد. اندازه‌ی گسترش $P$ از رابطه‌ی زیر حاصل می‌گردد.

$$EX=\frac{\sqrt{\sum\left(d_r^P\right)^{۲}}}{p}$$

## ٤-۲ نتایج و شبیه‌سازی‌های عددی

### ٤-۲-۱ مساله‌ی بهینه‌سازی دوهدفه

مساله‌ی نمونه‌ای ZDT۳ اصلاح شده [۱۸]: مساله ZDT۳ یکی از شش مساله‌ی نمونه‌ای می‌باشد که توسط زیتزلر و همکاران (۲۰۰۰) ارایه شده است. این مسایل نمونه، توسط پژوهشگران زیادی مورد استفاده قرار گرفته است، به‌طور کلی تمام این مسایل دو تابع هدف زیر را دارند.

$$\begin{aligned}&Min\ \ f_۱(\boldsymbol{x}),\\ &Min\ \ f_۲(\boldsymbol{x})=g(\boldsymbol{x})h\left(f_۱(\boldsymbol{x}),g(\boldsymbol{x})\right).\end{aligned}\qquad(۱۳)$$

شش مساله نمونه با یکدیگر فقط در تعریف توابع $f_۱(\boldsymbol{x})$، $g(\boldsymbol{x})$ و $h(\boldsymbol{x})$ تفاوت دارند. در تمام شش مساله به جز ZDT۵ سطح بهینه پارتو با $g(\boldsymbol{x})=۱$ شکل داده شده است. در این‌جا نسخه دشوارتری از مساله‌ی ZDT۳ را مورد توجه قرار می‌دهیم که تفاوت‌هایی را با نسخه اصلی ارایه شده در زیتزلر و همکاران (۲۰۰۰) [۱۸] دارد.



[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-01 ]

[ DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.4.2.3 ]

این مساله نیز $n = ۳۰$ متغیره بوده و دارای نواحی ناپیوسته بهینه پارتو می‌باشد. مساله‌ی ZDT۳ اصلاح شده را که با نماد mZDT۳ نشان می‌دهیم به‌صورت زیر است.

$$Min\ f_۱(\boldsymbol{x}) = x_۱,$$

$$Min\ f_۲(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})\left(۱-\left(\frac{f_۱(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})}\right)^{۰/۵} - \frac{f_۱(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})}\sin ۱۰\pi x_۱\right),$$

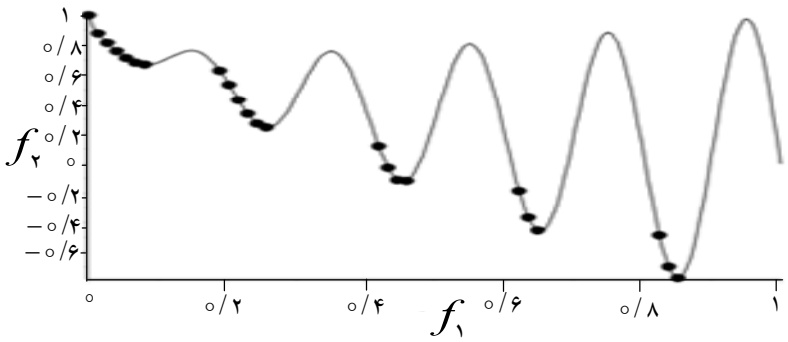
$$s.t.$$

$$g(\boldsymbol{x}) = ۱ + \frac{۹}{n-۱}\sum_{i=۲}^{n} x_i^{۲},$$

$$x_۱ \in [۰,۱], x_i \in [-۱,۱], \qquad \forall i = ۲,۳,...,n.$$

ناحیه‌ی بهینه پارتو متناظر با $۰ \le x_۱^* \le ۱$ و $x_i^* = ۰$ برای $i = ۲,۳,...,n$ می‌باشد. مشکل این مساله ناحیه بهینه پارتو ناپیوسته آن می‌باشد.

فرض کنید بخواهیم تعداد $m = ۶۴$ نقطه‌ی بهینه پارتو را روی مرز بهینه پارتو به‌دست آوریم. روش mNBI بعد از ۶۴ دفعه اجرای الگوریتم تعداد ۲۳ نقطه روی مرز پارتو مساله بهینه‌سازی mZDT۳ تولید می‌کند. تعداد ارزیابی‌های تابع در روش mNBI برابر ۵۱۹۹۲۱۰ و زمان اجرای الگوریتم ۲۵۵/۸۴ ثانیه است. شکل ۳ نتایج اجرای الگوریتم mNBI را نشان می‌دهد.




**شکل ۳.** روش mNBI برای مساله mZDT۳

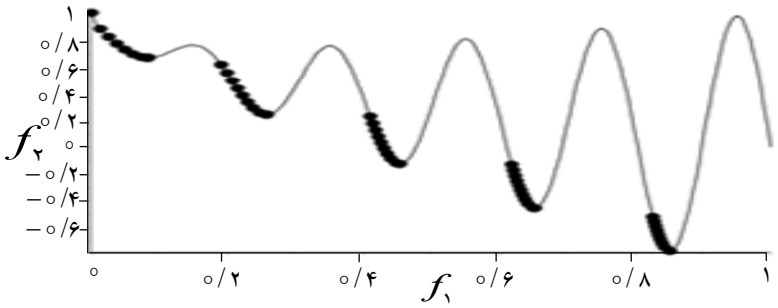
روش NC بعد از ۶۴ دفعه اجرای الگوریتم تعداد ۵۴ نقطه روی مرز پارتو مساله بهینه‌سازی mZDT۳ تولید کرد که بعد از انجام فیلتر پارتو مشخص گردید که تعداد ۴۸ عدد بهینه پارتو است. تعداد ارزیابی‌های تابع در روش NC برابر ۳۲۷۹۳۳۶۶۰ و زمان اجرای الگوریتم ۵۶ / ۵۴۰۷۵ ثانیه است. شکل ۴ نتایج اجرای الگوریتم NC را نشان می‌دهد.

روش PM بعد از ۶۴ دفعه اجرای الگوریتم تعداد ۵۵ نقطه روی مرز پارتو مساله بهینه‌سازی mZDT۳ تولید کرد. این روش همانند روش mNBI به فیلتر پارتو برای تشخیص نقاط بهینه پارتو احتیاج ندارد. تعداد ارزیابی‌های تابع در روش PM برابر ۹۶۶۲۲۹۵ و زمان اجرای الگوریتم ۴۳۹/۶۱ ثانیه است. شکل ۵ نتایج اجرای الگوریتم PM را نشان می‌دهد.

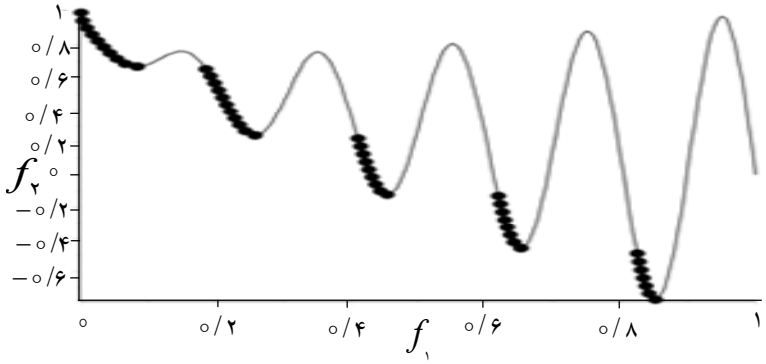


[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-01 ]

[ DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.4.2.3 ]




**شکل ٤.** روش NC بعد از اجرای فیلتر پارتو برای مساله mZDT۳




**شکل ٥.** روش PM برای مساله mZDT۳

جدول ۱ نتایج حاصل از معیارهای کیفیت و همگرایی را برای روش‌های بررسی شده در مقاله روی مساله نمونه‌ای mZDT۳ ارایه می‌دهد.

**جدول ۱.** متریک کیفیت روش‌ها در حل مساله mZDT3. دقت تقریب‌ها تا پنج رقم اعشار می‌باشد.

| متریک کیفیت | mNBI | NC | PM |
|---|---|---|---|
| GD | ۰/۰۰۰۴ | ۰ | ۰ |
| EX | ۱/۵۰۴۶۱ | ۱/۵۰۵۲۹ | ۱/۵۰۴۵۲ |
| SP | ۱/۷۰۹۸۰ | ۱/۲۲۳۵ | ۱/۱۹۹۸۵ |

نتایج به‌دست آمده از معیارهای کیفیت جواب‌های تقریبی به‌دست آمده نشان‌دهنده آن است که روش پیشنهادی در این مقاله عملکرد بهتری نسبت به دو روش دیگر داشته است.

### ٤-۲-۲ مساله بهینه‌سازی سه‌هدفه

مساله‌ی بهینه‌سازی سه‌هدفه زیر از اِچفلدر (۲۰۰۸) [۱۵] در نظر بگیرید.



[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-01 ]

[ DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.4.2.3 ]

$$Min \quad f_1(\boldsymbol{x}) = x_1,$$
$$Min \quad f_2(\boldsymbol{x}) = x_2,$$
$$Min \quad f_3(\boldsymbol{x}) = \left(1+g(\boldsymbol{x})\right)\left(3-\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{x_i}{1+g(\boldsymbol{x})}\left(1+\sin 3\pi x_i\right)\right)\right),$$

*s.t.*

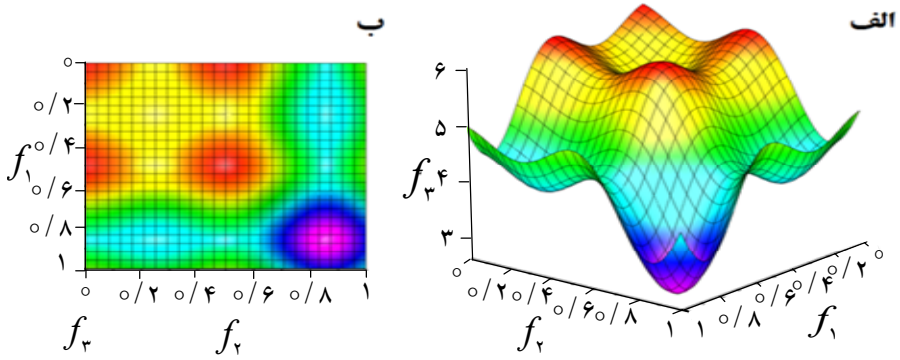
$$g(\boldsymbol{x}) = 1+\frac{9}{20}\sum_{i=3}^{22} x_i,$$
$$x_i \in [0,1], i = 1,2,\ldots,22.$$

مجموعه نقاط غیرمغلوب در فضای هدف از چهار قسمت ناهمبند تشکیل شده است. مجموعه بهینه زیر مجموعه‌ای از $\left\{\boldsymbol{x} \in R^{22} \,|\, x_i = 0, i = 3,\ldots,22\right\}$ و مجموعه بهینه پارتو زیر مجموعه‌ای از $\boldsymbol{Y}$ می‌باشد، به‌طوری که:

$$\boldsymbol{Y} = \left\{ \boldsymbol{y} \in R^3 \,\middle|\, y_1, y_2 \in [0,1], y_3 = 2\left(3-\sum_{i=1}^{2}\frac{y_i}{2}\left(1+\sin(3\pi y_i)\right)\right)\right\}$$

مجموعه‌ی $\boldsymbol{Y}$ در شکل نشان داده شده است.

فرض کنید بخواهیم تعداد $m = 57$ نقطه‌ی بهینه پارتو را روی سطح بهینه‌پارتو که در شکل نمایش داده شده است، به‌دست آوریم.



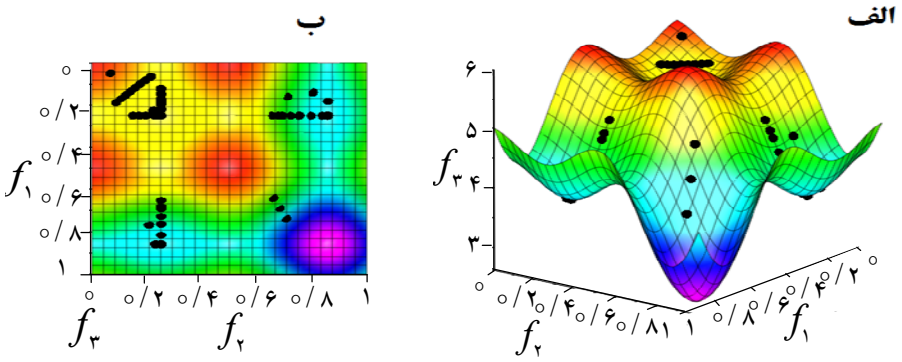

**شکل ٦.** (الف) نمایش مجموعه $Y$ و (ب) تصویر آن در صفحه دو بعدی.

روش mNBI بعد از ۵۷ دفعه اجرای الگوریتم، موفق به یافتن ۵۴ نقطه‌ی بهینه پارتو شده است. همچنین تعداد ارزیابی‌های تابع در روش mNBI برابر ۲۱۳۲۲۶۶۲ و زمان اجرای الگوریتم ۱۰۰۳/۶۱۶ ثانیه است. شکل سطح پارتو در فضای هدف و تصویر آن‌را در صفحه $f_1 f_2$ نشان می‌دهد.

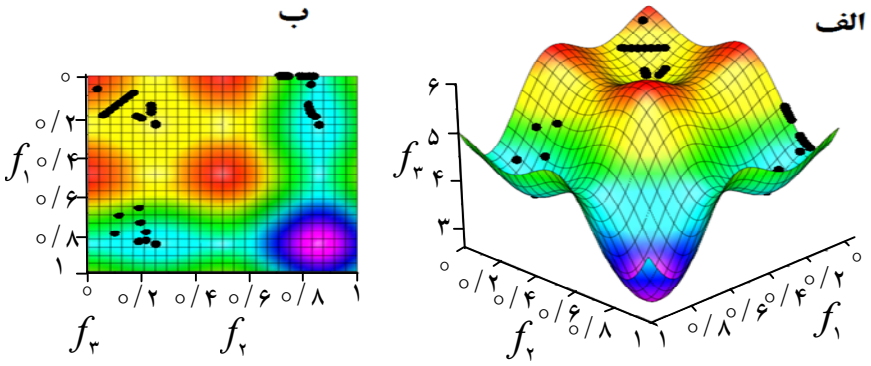
روش NC بعد از ۵۷ دفعه اجرای الگوریتم، موفق به یافتن ۵۵ نقطه بهینه پارتو شده است. همچنین، تعداد ارزیابی‌های تابع در روش NC برابر ۱۷۹۹۳۱۵۱ و زمان اجرای الگوریتم ۲۰۶۲/۹۵۸ ثانیه است.



[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-01 ]
[ DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.4.2.3 ]



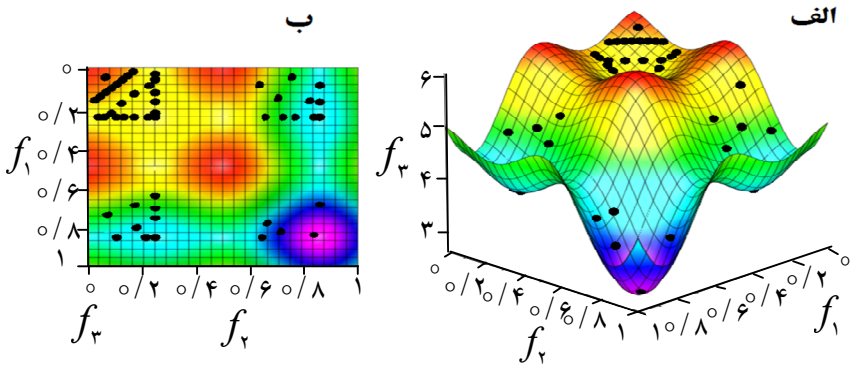

**شکل ۷.** حل مساله اچفلدر (۲۰۰۸) به روش mNBI . (الف) سطح پارتو در فضای هدف و (ب) تصویر آن در صفحه دوبعدی.




**شکل ۸.** حل مساله اچفلدر (۲۰۰۸) به روش NC . (الف) سطح پارتو در فضای هدف و (ب) تصویر آن در صفحه دوبعدی.

شکل سطح پارتو در فضای هدف و تصویر آن‌را در صفحه $f_1f_2$ نشان می‌دهد.

روش PM بعد از اجرای ۵۷ دفعه اجرای الگوریتم، موفق به یافتن ۵۷ نقطه‌ی بهینه پارتو شده است. همچنین، تعداد ارزیابی‌های تابع در روش PM برابر ۲۳۸۱۹۱۴۵ و زمان اجرای الگوریتم ۱۰۷۹/۹۱۷ ثانیه است. شکل سطح پارتو در فضای هدف و تصویر آن‌را در صفحه $f_1f_2$ نشان می‌دهد.




**شکل ۹.** حل مساله اچفلدر (۲۰۰۸) به روش PM . (الف) سطح پارتو در فضای هدف و (ب) تصویر آن در صفحه دوبعدی.



[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-01 ]

[ DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.4.2.3 ]

جدول ۲ نتایج حاصل از معیارهای کیفیت و همگرایی را برای روش‌های بررسی شده در مقاله روی مساله نمونه‌ای اچفلدر (۲۰۰۸) [۱۵] ارایه می‌دهد.

**جدول ۲.** متریک کیفیت روش‌ها در حل مساله اچفلدر (۲۰۰۸). دقت تقریب‌ها تا پنج رقم اعشار می‌باشد.

| متریک کیفیت | mNBI | NC | PM |
|---|---|---|---|
| GD | ۰/۹۲۳۹۴ | ۰/۸۳۵۴۷ | ۰/۰۰۰۰۳ |
| EX | ۱/۱۱۴۸۶ | ۱/۰۰۲۵۲ | ۰/۰۰۰۰۱ |
| SP | ۱/۲۹۳۵۸ | ۳/۰۰۲۷۱ | ۰/۰۰۰۱۱ |

نتایج به‌دست آمده از معیارهای کیفیت جواب‌های تقریبی به‌دست آمده نشان‌دهنده آن است که روش پیشنهادی در این مقاله عملکرد بهتری نسبت به دو روش دیگر داشته است.

## ٤-۳ روش اشتراک مرزی نرمال اصلاح شده (mNBI)

روش اشتراک مرزی نرمال (NBI) [۲۰] به صورتی طراحی شده بود که یک توزیع یکنواخت نقاط روی پوسته‌ی سیمپلکس مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه در فضای هدف منجر به تولید مجموعه‌ای با توزیع یکنواخت روی سطح پارتو می‌گردد. یکی از اشکالات روش NBI این است که الزاماً جواب‌های به‌دست آمده روی مرز پارتو (سطح پارتو)، غیرمغلوب نیستند و به طور ذاتی قادر به تولید نقاط مغلوب روی مرز نیز می‌باشد. دلیل آن می‌تواند در ارجحیت قرار دادن دست‌یابی روش، به مرز پایینی فضای شدنی در فضای هدف نسبت به دست‌یابی به نقاط بهینه‌پارتو باشد. همین اشکال، انگیزه‌ی ارایه روش اشتراک مرزی نرمال اصلاح‌شده (mNBI) توسط شاکلا (۲۰۰۷) [۱۷] گردید. مدل mNBI برای آن‌که بتواند یک توزیع یکنواخت از نقاط غیرمغلوب در سرتاسر سطح پارتو به‌دست آورد از اصول موجود در روش NBI استفاده می‌کند و با استفاده از مفهوم غلبه مانع از تولید نقاط مغلوب روی سطح بهینه پارتو مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه می‌شود. مدل mNBI به صورت زیر است:

$$Max_{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X},t\in R}\ t,$$

$$s.t.$$

$$\boldsymbol{\Phi\beta} + t\,\overline{\boldsymbol{n}} \geq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),$$

$$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}.$$

که در آن $\overline{\boldsymbol{n}} = -\boldsymbol{\Phi}\mathbf{e}$ و $\mathbf{e} = (1,1,...,1)^T$ یک بردار $p\times 1$ است.

همچنین، سیمپلکس به‌دست آمده به‌وسیله‌ی پوسته‌ی محدب مینیمم منحصربه‌فرد توابع منحصربه‌فرد را با $\boldsymbol{\Phi\beta}$ نشان می‌دهیم که در آن $\boldsymbol{\Phi} = \left(\boldsymbol{f}(x_1^*), \boldsymbol{f}(x_2^*),..., \boldsymbol{f}(x_p^*)\right)$ یک ماتریس $p\times p$ و $\boldsymbol{\beta} = \left\{(b_1,b_2,...,b_p)^T \,\middle|\, \sum_{i=1}^{p} b_i = 1, b_i \geq 0, i = 1,...,p\right\}$ می‌باشد. برای جزییات بیش‌تر در مورد روش mNBI به [۱۷] مراجعه نمایید.



[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-01 ]

[ DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.4.2.3 ]

## ٤-٤ روش محدودیت نرمال (NC)

روش محدودیت نرمال به منظور تعیین تقریبی از مرز بهینه پارتو با توزیع یکنواخت توسط مِساک و ماتسون (۲۰۰۴) [۱۶] برای حل مسایل بهینه‌سازی چندهدفه با هر تعداد تابع هدف معرفی شد. روش NC به لحاظ محاسباتی از روش NBI [۲۰] پایدارتر است و کم‌تر گرایش به تولید نقاط غیرپارتو و نقاط پارتو موضعی روی مرز پارتو دارد. اصل روش NC بر تعدیل ناحیه شدنی هدف در هر تکرار از مساله‌ی بهینه‌سازی استوار است. در این روش ابتدا نقاط لنگر [۱۶] را تعیین می‌نماییم. $i$-امین نقطه لنگر را با $f^{i*} = \left(f_1(x_i^*),...,f_p(x_i^*)\right)^T$ نشان می‌دهیم که در آن $x_i^* = \arg\min_{x\in X} f_i(\boldsymbol{x})$ است. نقاط لنگر در واقع همان رئوس ابرصفحه utopia (صفحه سیمپلکس شامل نقاط بهینه توابع فردی در فضای هدف) می‌باشند. مساله‌ای که به ازای یک مجموعه با توزیع یکنواخت از نقاط $p_k$ روی ابرصفحه utopia در فضای معیار حل می‌شود عبارت است از:

$$
\begin{aligned}
&Min \;\; f_j(\boldsymbol{x}),\\
&s.t.\\
&\quad v_i(f - p_k) \le 0, \forall i \in \{1,2,...,p\}\setminus\{j\},\\
&\quad v_i(f^{j*} - f^{i*}) \le 0, \;\; \forall i \in \{1,2,...,\mathrm{p}\}\setminus\{j\},\\
&\quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}.
\end{aligned}
$$

که در آن $j \in \{1,2,...,p\}$. در هر حال این روش پتانسیل تولید نقاط مغلوب را نیز دارد و پس از اجرای روش NC باید از فیلتر پارتو برای تعیین مجموعه نقاط غیر مغلوب استفاده کرد. جزییات بیش‌تر از روش NC را در [۱۶] مشاهده نمایید.

## ۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله روش پاسکولتی-سرافینی برای حل یک مساله بهینه‌سازی چندهدفه مورد بررسی قرار گرفت و اشکال روش در محدودیت انتخاب پارامتر $a$ برای مسایل بهینه‌سازی دوهدفه و بیش‌تر تشریح گردید. سپس یک پارامتر محدود کننده‌ی جدید ارایه شد که مشکلات انتخاب پارامتر در روش پاسکولتی-سرافینی را به‌طور کامل برطرف می‌ساخت. نتیجه این تغییرات، تولید نقاط غیرمغلوب روی سطح بهینه پارتو مساله بهینه‌سازی چندهدفه با توزیع یکنواخت و در سرتاسر سطح بهینه پارتو می‌باشدکه در مثال‌های عددی کاملاً مشهود است و معیارهای کیفیت موجود در مقاله، مطلوبیت نقاط غیرمغلوب به‌دست آمده را نشان می‌دهد.

### منابع


[۱] بهمنش، ا.، (۱۳۹۲). یک روش تعاملی مبتنی بر غیر فازی‌سازی پارامترها برای حل مساله حمل‌ونقل چندهدفه. مجله تحقیق در عملیات درکاربردهای آن، ۱۰(۳)، ۳۹-۲۵.

[2] Deb, K., (2001). Multi-objective optimization using evolutionary algorithms. John Wiley & Sons, 16.

[3] Luh, G. C., Chueh, C. H., (2004). Multi-objective optimal design of truss structure with immune algorithm. Computers & structures, 82, 829-844.

[4] Sandgren, E., (1994). Multicriteria design optimization by goal programming. Advances in Design Optimization, 225-265.




[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-01 ]

[ DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.4.2.3 ]

[5] Statnikov, R., Matusov, J. B., (2012). Multicriteria optimization and engineering. Springer Science & Business Media.
[6] Abo-Sinna, M., Abo-Elnaga, Y. Y., Mousa, A., (2014). An interactive dynamic approach based on hybrid swarm optimization for solving multiobjective programming problem with fuzzy parameters. Applied Mathematical Modelling,38, 2000-2014.
[7] Audet, C., Savard, G., Zghal, W., (2008). Multiobjective optimization through a series of single-objective formulations. SIAM Journal on Optimization, 19, 188-210.
[8] Eichfelder, G., (2009). An adaptive scalarization method in multiobjective optimization. SIAM Journal on Optimization,19, 1694-1718.
[9] Ghane-Kanafi, A., Khorram, E., (2015). A new scalarization method for finding the efficient frontier in non-convex multi-objective problems. Applied Mathematical Modelling, 39(23-24), 7483-7498.
[10] Khorram, E., Khaledian, K., Khaledyan, M., (2014). A numerical method for constructing the Pareto front of multi-objective optimization problems. Journal of Computational and Applied Mathematics, 261, 158-171.
[11] Siddiqui, S., Azarm, S., Gabriel, S., (2011). A modified benders decomposition method for efficient robust optimization under interval uncertainty. Structural and Multidisciplinary Optimization, 44, 259-275.
[12] Valipour, E., Yaghoobi, M., Mashinchi, M., (2014). An iterative approach to solve multiobjective linear fractional programming problems. Applied Mathematical Modelling, 38, 38-49.
[13] Hwang C. L., Masud, A. S. M., (1979). Multiple objective decision making—methods and applications.
[14] Figueira, J., Greco, S., Ehrgott, M., (2005). Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys. Springer Science & Business Media, 78, 2005.
[15] Eichfelder, G., (2008). Adaptive scalarization methods in multiobjective optimization. Springer.
[16] Messac A., Mattson, C. A., (2004). Normal constraint method with guarantee of even representation of complete Pareto frontier. AIAA journal, 42, 2101-2111.
[17] Shukla, P. K., (2007). On the normal boundary intersection method for generation of efficient front. in Computational Science–ICCS , ed: Springer, 310-317.
[18] Zitzler, E., Deb, K., Thiele, L., (2000). Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: Empirical results. Evolutionary computation, 8, 173-195.
[19] Meng, H. Y., Zhang, X. H., Liu, S. Y., (2005). New quality measures for multiobjective programming. in Advances in Natural Computation, ed: Springer, 1044-1048.
[20] Das, I., Dennis, J. E., (1998). Normal-boundary intersection: A new method for generating the Pareto surface in nonlinear multicriteria optimization problems. SIAM Journal on Optimization, v8, 631-657.

[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-01 ]

[ DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.4.2.3 ]