مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال دوازدهم، شماره دوم (پیاپی ٤٥)، تابستان ٩٤، ص ص ٥٩-٣٧
شاپا ٧٢٨٦-٢٢٥١

بهینه‌سازی هندسی تحت معادلات با مشتقات جزیی با داده‌های تصادفی

علی محمودی نهرانی[1]، محمد کیانپور*[2]
۱- دانشجوی دکترای، دانشگاه گیلان، گروه ریاضی کاربردی، رشت، ایران
۲- استادیار، دانشگاه گیلان، گروه ریاضی کاربردی، رشت، ایران

رسید مقاله: ۹ اسفند ۱۳۹۳
پذیرش مقاله: ۷ مرداد ۱۳۹۴

چکیده
مقاله حاضر بهینه‌سازی شکل هندسی سازه‌هایی را در نظر گرفته است که توسط معادلات با مشتقات جزیی در حضور داده‌های تصادفی، مدل‌سازی شده است. داده‌های تصادفی در پارامترها و ورودی‌های معادله با مشتقات جزیی، ظاهر می‌شود. مبانی نظری ارایه‌شده و با استفاده از آشفتگی روش همانی، مساله بهینه‌سازی شکل به دامنه ثابت تبدیل‌شده و سپس به‌صورت یک مساله کنترل بهینه تصادفی فرمول‌بندی شده است. داده‌های تصادفی به‌صورت میدان تصادفی در نظر گرفته‌شده و با استفاده از توسیع کارهونن-لویو[1] تقریب زده‌شده است. کمی سازی عدم قطعیت توسط روش‌های غیر نفوذی مانند هم‌محلی تصادفی صورت پذیرفت. روش گرادیان برای بهینه‌سازی به کار گرفته و مثال عددی برای نشان دادن قابلیت کاربرد روش ارایه شده است.

کلمات کلیدی: بهینه‌سازی هندسی، معادله با مشتقات جزیی تصادفی، گسسته‌سازی تصادفی، کنترل بهینه.

۱ مقدمه
مساله بهینه‌سازی شکل که در بخش‌های مختلفی از علوم مهندسی و فناوری مطرح است به‌صورت زیر بخش‌بندی می‌شود:

- مدل: اغلب به‌صورت معادله با مشتقات جزیی بیان می‌شود و به ما اجازه می‌دهد تا رفتار مکانیکی سازه‌ها را محاسبه و تحلیل کنیم.
- تابع هدف: که به دنبال یافتن مقدار کمینه و یا مقدار بیشینه آن هستیم.
- جهت قابل قبول بهینه‌سازی: که با در نظر گرفتن محدودیت‌هایی که روی دامنه اعمال‌شده، به دست می‌آید.

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی:Keyanpour@guilan.ac.ir

[1] Karhunen-Loeve

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

بهینه‌سازی شکل در بسیاری از صنایع، کاربردهای فراوانی دارد؛ اما بسیار پیچیده‌تر از بهینه‌سازی معمولی است و در آن‌ها متغیرها، ویژگی‌های مکانیکی مواد هستند. مساله‌های بهینه‌سازی شکل را به سه دسته کلی می‌توان تقسیم کرد:

- بهینه‌سازی شکل پارامتری: که در آن شکل‌ها با استفاده از تعداد کاهش یافته‌ای از متغیرها، پارامتری می‌شود (به‌عنوان مثال ضخامت، قطر و یا بعد)، که محدودیت آن‌ها تعداد قابل توجهی از شکل‌های قابل قبول را در نظر می‌گیرد [۱].
- بهینه‌سازی شکل هندسی: که در آن با شروع از یک شکل اولیه و با تغییرات قابل قبول مرزهای شکل (بدون این‌که توپولوژی شکل را تغییر دهیم) به شکل بهینه می‌رسیم[۲].
- بهینه‌سازی توپولوژی: در آن بدون محدودیت صریح و یا ضمنی، شکل بهینه را جستجو می‌کنیم و تغییرات توپولوژی شکل نیز در نظر گرفته می‌شود[۳].

بهینه‌سازی توپولوژی، کلی‌تر و درعین‌حال دشوارترین نوع بهینه‌سازی شکل است. در این مقاله به مطالعه بهینه‌سازی هندسی سازه‌ها با در نظر گرفتن پارامترهای تصادفی خواهیم پرداخت.

اولین بار هادامارد در سال ۱۹۱۰ از فرمول‌بندی ریاضی برای تحلیل حساسیت معادله با مشتقات جزیی، نسبت به شکل دامنه استفاده کرد که به زمینه تحقیقاتی جدیدی به نام "طراحی بهینه شکل" انجامید. موضوع طراحی بهینه شکل که امروزه استفاده می‌شود از نتایج نظریه کنترل و بهینه‌سازی روی سیستم‌های توزیعی حاصل شده است [۴] و لذا بهینه‌سازی شکل را می‌توان شاخه‌ای از نظریه کنترل و بهینه‌سازی دانست. طراحی با استفاده از کمینه‌سازی یک معیار انجام می‌پذیرد که به متغیر حالت به‌عنوان جواب معادله با مشتقات جزیی و تابع کنترل به‌عنوان شکل وابسته است.

برای محاسبه شرایط بهینگی، پیرونیو [۵]، سوکولوسکی [۶] و سیا [۷] برای مساله‌های پیوسته، ماروکو و دیگران [۸] برای مساله‌های گسسته، روش‌هایی را ارایه کرده‌اند. نتایج نظری برای وجود جواب در مقالات [۱۲-۹] به‌دست آمده است. برای مطالعه نظری مساله و بررسی وجود و یکتایی جواب و همچنین به دست آوردن شرایط بهینگی، دشواری‌هایی وجود دارد و برای حل آن‌ها لازم است توپولوژی مناسبی روی دامنه‌های شدنی اعمال گردد. راه‌حل مستقیمی برای این کار وجود ندارد؛ ولی روش‌هایی مانند نمایش دامنه به‌صورت توابع تراز [۱۴,۱۳] و یا استفاده از تبدیل‌های مناسب [۱۶,۱۵] معرفی شده است. توپولوژی‌های مختلفی نیز برای این کار پیشنهاد شده است که از میان آن‌ها می‌توان به توپولوژی کورانت [۱۷] که با توابع فاصله ایجاد شده است (مانند توابع مشخصه، اندازه هاسدورف و همچنین $W^{1,p}$-توپولوژی)، اشاره کرد. برای این‌که بتوانیم از نتایج به‌دست‌آمده در زمینه حساب دیفرانسیل در اینجا استفاده کنیم و به تحلیل پیوستگی و دیفرانسیل پذیری شکل‌ها بپردازیم، ابتدا باید فضاهایی با ساختار خطی معرفی شود. دو روش معمول برای تعریف مشتق‌های شکل در حیطه تبدیل‌ها عبارت است از:

- روش سرعت که توسط زولزیو معرفی شد [۱۸].
- روش آشفتگی همانی که توسط مورات و سیمون ارایه گردید [۱۶,۱۵].

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

با توجه به این‌که در مسایل مهندسی، صنعتی و غیره، مدل‌ها شامل پارامترهای تصادفی است، مساله بهینه‌سازی شکل با در نظر گرفتن پارامترها و یا بارهای تصادفی توجه محققان را به خود جلب کرده است. مدل‌سازی این مساله‌ها با بهینه‌سازی شکل بر پایه قابلیت اعتماد آغاز شد که در آن محدودیت‌های قابلیت اعتماد بر اساس احتمال شکست معرفی می‌شود [۱۹]. به دلیل مشکلاتی که در تعریف تابع شکست وجود دارد، روش بهینه‌سازی استوار به‌عنوان جایگزین، توسعه داده شده است که اغلب برای سیستم‌ها بدترین حالت را در نظر می‌گیرد و به دنبال جواب غیر حساس نسبت به پارامترها می‌گردد [۲۲-۲۰]. برخی محققان نیز از روش برنامه‌ریزی تصادفی برای حل مسایل بهینه‌سازی شکل استفاده کرده‌اند [۲۳]. کم‌تر منبعی یافت می‌شود که پارامترهای تصادفی را به‌صورت میدان تصادفی در نظر بگیرد [۲۴].

در مقاله حاضر بر آنیم تا روشی که "آشفتگی همانی" نامیده می‌شود و توسط مورات و سیمون [۱۶,۱۵] ارایه‌شده است در فضاهای بخنر[1] برای حل مساله بهینه‌سازی شکل تصادفی توسعه دهیم. روش ذکرشده چارچوب روشنی را بر اساس فضای توابع ارایه می‌دهد که شیوه‌های کنترل بهینه تصادفی (نام‌گذاری که برای مساله کنترل بهینه با داده‌های تصادفی به کار می‌بریم) را قابل استفاده می‌کند. در ادامه نشان خواهیم داد که با این روش چگونه گرادیان شکل به دست می‌آید.

با استفاده از فرمول‌بندی اشاره شده، این امکان را خواهیم داشت که از روش‌های کنترل بهینه تصادفی در بهینه‌سازی شکل تصادفی استفاده کنیم که در سال‌های اخیر توسعه داده شده است [۲۷-۲۵]. برای گسسته سازی تصادفی از روش نمونه‌گیری مونت کارلو و روش هم‌محلی تصادفی [۲۹,۲۸] استفاده کرده‌ایم. در پایان روش به‌دست‌آمده برای حل مساله بهینه‌سازی نازل با ورودی تصادفی به‌کاربرده شده و نتایج به‌دست‌آمده با شکل ارایه شده است.

ساختار مقاله به‌این‌ترتیب است: در بخش دوم فرمول‌بندی عمومی مساله به همراه روش آشفتگی همانی برای پارامتری کردن مساله ارایه شده است. در بخش سوم، مساله در دامنه ثابت فرمول‌بندی شده و شرایط بهینگی به‌دست‌آمده است. در بخش چهارم گسستگی تصادفی را مرور کرده‌ایم. بهینه‌سازی هندسی مقید به معادله با مشتقات جزیی برای یک مدل خاص در بخش پنجم ارایه شده است و در بخش شش به‌عنوان مثال عددی، مساله بهینه‌سازی شکل نازل حل و نتیجه‌گیری از مقاله در بخش هفت گنجانده شده است.

۲ فرمول‌بندی مساله

۲-۱ فرمول‌بندی مساله

مساله بهینه‌سازی شکل عموماً به‌صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$\underset{\mathcal{S}\in\mathcal{O}_{ad}}{Min}\ \{J(\mathcal{S},u)\,|\,E(\mathcal{S},u)=0,\mathcal{S}\in\mathcal{O}_{ad},u\in\mathcal{U}\},\qquad(1)$$

[1] Bochner space

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

که در آن $\mathcal{U}$ فضای حالت مساله است و زیر فضایی از فضای هیلبرت انعکاسی در نظر گرفته خواهد شد. در مساله (۱)، $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$ مرز آزاد[1] (پارامتر طراحی) است و $\mathcal{D}$ دامنه یا همان شکل موردنظر است. در ادامه برای سادگی در فرمول نویسی پارامتر طراحی را نیز با $\mathcal{D}$ نمایش خواهیم داد. $\mathcal{O}_{ad}$ مجموعه همه شکل‌های شدنی است. $\mathcal{D}$ شامل مرزهای آزاد است و در طول فرایند بهینه‌سازی، تغییر می‌کند و درنتیجه شکل سازه موردنظر نیز تغییر می‌کند. E در (۱) نشان دهنده معادله حالت می‌باشد. در این نوع مسایل غالباً مجموعه شکل‌های شدنی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{O}_{ad} \coloneqq \{\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d : \partial\mathcal{D} \subset \mathcal{D}, \int_{\mathcal{D}} dx = V_0\}. \qquad (۲)$$

که $d \in \{۲,۳\}$ عددی طبیعی است. همان‌طور که گفته شد پارامتر طراحی، مرزهای آزاد دامنه است که در اینجا برای جلوگیری از زیاد شدن تعداد متغیرها، با همان دامنه $\mathcal{D}$ نشان می‌دهیم در ادبیات کنترل بهینه دامنه $\mathcal{D}$ درواقع همان کنترل موردنظر است که ضمن برقراری معادله حالت و قیود فضای شدنی، باید تابع هدف مساله، J، را کمینه کند. برای فرمول‌بندی مساله بهینه‌سازی شکل با پارامترهای تصادفی، متغیر حالت جواب یک معادله با مشتقات جزیی تصادفی در دامنه $\mathcal{D}$ است. اغلب متغیر حالت به فضای باناخ (انعکاسی) $X(\mathcal{D})$ از توابع تعلق دارد. معادله با مشتقات جزیی را که متغیر حالت در آن صدق می‌کند می‌توانیم با عملگر $\hat{E}(\tilde{u},\mathcal{D}) = ۰$ نشان دهیم، فرض می‌کنیم که $\hat{E}$ شرایط اولیه (در صورت وجود) و مرزی را شامل می‌شود.

فضای کامل احتمال را با $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ نشان می‌دهیم، مجموعه Ω را در مقاله حاضر مجموعه پیشامدهای ω در نظرخواهیم گرفت، $\mathcal{F}$ سیگما جبری از پیشامدهاست و $\mu : \mathcal{F} \to [۰,۱]$ اندازه احتمال است. مساله بهینه‌سازی شکل را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف ۱: فرض کنید $\mathcal{O}_{ad} \in \Lambda(\mathbb{R}^d)$ مجموعه‌ای شامل دامنه‌های شدنی باشد (Λ مجموعه همه زیر مجموعه‌هاست)، $\mathcal{D}$ را دامنه کران‌دار با مرز لیپشیتس[2] در نظر بگیرید. به‌علاوه برای هر $\mathcal{D} \in \mathcal{O}_{ad}$ فضاهای بخنر $L^۲(\Omega; X(\mathcal{D}))$ و $L^۲(\Omega; Z(\mathcal{D}))$ را روی $\mathcal{D}$ در نظر می‌گیریم. فرض کنید $\tilde{J}$ تابع هدف موردنظر باشد

$$\hat{J} : \{(\tilde{u},\mathcal{D}) \mid \tilde{u} \in L^۲(\Omega; X(\mathcal{D})), \mathcal{D} \in \mathcal{O}_{ad}\} \to \mathbb{R},$$

و $\tilde{E}$ عملگری بین مجموعه‌هایی از فضاهای توابع شدنی باشد

$$\hat{E} : \{(\tilde{u},\mathcal{D}) \mid \tilde{u} \in L^۲(\Omega; X(\mathcal{D})), \mathcal{D} \in \mathcal{O}_{ad}\} \to \{\tilde{z} \mid \tilde{z} \in L^۲(\Omega; Z(\mathcal{D}))\},$$

آنگاه

$$\min \hat{J}(\tilde{u},\mathcal{D}) \text{ s.t. } \{\hat{E}(\tilde{u},\mathcal{D}) = ۰,\ \mathcal{D} \in \mathcal{O}_{ad}\}, \qquad (۳)$$

را مساله بهینه‌سازی شکل تصادفی می‌نامیم.

برای بررسی مسایل بهینه‌سازی شکل ابتدا لازم است تا یک توپولوژی مناسب روی مجموعه دامنه‌های شدنی، $\mathcal{O}_{ad} \in \Lambda(\mathbb{R}^d)$ قرار دهیم؛ ولی همان‌طور که اشاره شد، راه‌حل مستقیمی برای این کار وجود ندارد. برای به دست آوردن متغیرهایی از جنس زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}^d$، محققان روش‌های مختلفی را برای بیان دامنه‌ها پیشنهاد

[1] Free boundary
[2] Lipschitz

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

کرده‌اند. روشی که در اینجا به کار می‌بریم، تصویر تبدیلی[1] از دامنه مرجع (که آن را با $\mathcal{D}_{ref}$ نشان خواهیم داد) است که توسط مورات و سیمون [۱۶,۱۵] معرفی‌شده است. بسته به نحوه نمایش دامنه، مفاهیم توپولوژیکی متفاوتی را می‌توان به کاربرد. در اینجا از اندازه کورانت و $W^{1,p}$ -توپولوژی استفاده می‌کنیم و با کمک روش آشفتگی همانی به فرمول‌بندی مساله در فضاهای بخنر می‌پردازیم.

۲-۲ روش آشفتگی همانی

ابتدا دامنه مرجع کران‌دار $\mathcal{D}_{ref} \in \mathcal{O}_{ad}$ را ثابت می‌گیریم. فرض کنیم دامنه شدنی $\mathcal{D} \in \mathcal{O}_{ad}$ می‌تواند با استفاده از تبدیل متناظر مناسب $\tau \in T(\mathcal{D}_{ref})$ مشخص شود به‌طوری‌که $\tau(\mathcal{D}_{ref}) = \mathcal{D}$ در اینجا $T(\mathcal{D}_{ref}) = \{\tau : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \mid (\tau - id) \in S\}$ را فضای آفینی از تبدیل‌ها در نظر می‌گیریم که روی $\mathcal{D}_{ref}$ تعریف‌شده است و S فضای باناخ مناسبی است. به‌علاوه تبدیل‌های $\tau \in T(\mathcal{D}_{ref})$ را به مجموعه T_{ad} از توابع بیلیپشیتس[2] محدود می‌کنیم که $(\tau - id)$ به زیرمجموعه باز از S تعلق دارد. برای مرتبط کردن این روش با دامنه‌های شدنی، فرض می‌کنیم $T_{ad} = \{\tau \in T(\mathcal{D}_{ref}) \mid \tau(\mathcal{D}_{ref}) \in \mathcal{O}_{ad}\}$. با استفاده از این فرمول‌بندی، بهینه‌سازی شکل به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف **۲:** فرض کنید $T_{ad} \subset T(\mathcal{D}_{ref})$ مجموعه‌ای از تبدیل‌های شدنی از دامنه مرجع $\mathcal{D}_{ref} \in \mathcal{O}_{ad}$ باشد. به‌علاوه برای هر $\tau \in T_{ad}$ فرض کنیم $L^2(\Omega; X(\tau))$ و $L^2(\Omega; Z(\tau))$ فضای بخنر باشند که روی $\tau(\mathcal{D}_{ref})$ تعریف شده است. $\tilde{J} : \{(\tilde{u}, \tau) \mid \tilde{u} \in L^2(\Omega; X(\tau)),\ \tau \in T_{ad}\} \to \mathbb{R}$ تابع هدف است و $\tilde{E}$ عملگری بین مجموعه‌هایی از فضاهای توابع شدنی است:

$$\tilde{E} : \{(\tilde{u}, \tau) \mid \tilde{u} \in L^2(\Omega; X(\tau)),\ \tau \in T_{ad}\} \to \{\tilde{z} \mid \tilde{z} \in L^2(\Omega; Z(\tau))\}.$$

در این صورت

$$\min \tilde{J}(\tilde{u}, \tau),\ \text{s.t.}\ \tilde{E}(\tilde{u}, \tau) = 0,\ \tau \in T_{ad}, \qquad (۴)$$

را مساله بهینه‌سازی شکل تصادفی با تبدیل‌ها می‌نامیم.

برای رسیدن به خوش‌تعریفی مساله باید در نظر بگیریم که با فرض $\tau_1, \tau_2 \in T_{ad}$ که $\hat{\mathcal{D}} := \tau_1(\mathcal{D}_{ref}) = \tau_2(\mathcal{D}_{ref})$، آنگاه برای جواب‌های u_1 و u_2 از $\tilde{E}(u_1, \tau_1) = 0$ و $\tilde{E}(u_2, \tau_2) = 0$ داریم $\hat{u} = u_1 o \tau_1^{-1} = u_2 o \tau_2^{-1}$. این فرض ضروری است؛ زیرا تبدیل‌های مختلفی که دامنه یکسان $\hat{\mathcal{D}}$ را بیان می‌کنند باید متغیر حالت یکسان $\hat{u}$ را معرفی کنند، به‌طوری‌که $\tilde{E}(\hat{u}, \hat{\tau}) = 0$ تضمین شده باشد. باوجوداین، معمولاً این فرض به‌راحتی برقرار می‌شود. با این ساختار، τ متعلق به فضای آفین تبدیل‌هاست؛ ولی $\hat{u}$ در مجموعه $\bigcup_{\tau \in T_{ad}} L^2(\Omega; X(\tau))$ قرار می‌گیرد که هنوز به هیچ توپولوژی‌ای مجهز نشده است. هدف تبدیل فضای $L^2(\Omega; X(\tau))$ به فضای $L^2(\Omega; X_{ref})$ است که توابع آن در دامنه مرجع $\mathcal{D}_{ref}$ تعریف شده است. درواقع

[1] Projecting transformation
[2] biLipschitz

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

متغیر $\tilde{u} \in L^2(\Omega; X(\tau))$ با استفاده از تبدیل τ می‌تواند به متغیر $u = \tilde{u} o \tau$ که روی $\mathcal{D}_{ref}$ تعریف شده است تبدیل شود. برای رسیدن به این منظور $u = \tilde{u} o \tau$ که روی $\mathcal{D}_{ref}$ و در فضای آفینی از تبدیل‌ها $T(\mathcal{D}_{ref})$ و فضای بخنر $\tau \in L^2(\Omega; X(\tau))$ قرار دارد، باید با دقت انتخاب شود. برای دست یافتن به این منظور معمولاً تبدیل‌ها طوری انتخاب می‌شود که درجه مشخصی از هموار بودن را داشته باشد. اغلب مجموعه تبدیل‌های شدنی T_{ad} باید به اندازه کافی کوچک انتخاب شود به این معنی که تنها آشفتگی‌های کوچک از دامنه مورد قبول قرار گیرد. برای این‌که بتوانیم فضای مناسبی از تبدیل‌ها $T(\mathcal{D}_{ref})$ را تعریف کنیم، متناظر با فضای باناخ S فضای سوبولوف[1] $S = \mathbf{W}^{k,\infty}(\mathbb{R}^d) = W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d)^d$ را در نظر می‌گیریم. با به کار بردن $T(\mathcal{D}_{ref})$ به فرم فضای $\mathcal{V}^{k,\infty}$ خواهد بود که توسط مورات و سیمون در [۱۶] به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$\mathcal{V}^{k,\infty} := \{\tau : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \mid (\tau - id) \in \mathbf{W}^{k,\infty}(\mathbb{R}^d)\}.$$

که در آن $k \geq 1$. در اینجا برای هر تبدیل $\tau \in \mathcal{V}^{k,\infty}$ جابه‌جایی متناظر $(\tau - id) \in \mathbf{W}^{k,\infty}(\mathbb{R}^d)$ را در نظر می‌گیریم. توجه کنید که $id \in \mathcal{V}^{1,\infty}$، از آنجاکه $id - id \in \mathbf{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$، درحالی‌که $id \notin \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathbf{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$، به‌روشنی داریم

$$\mathcal{V}^{k,\infty} = \{\tau : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \mid (\tau - id) \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^d), D^\alpha \tau \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^d), \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \ 1 \leq |\alpha| \leq k\}, \quad (۵)$$

به‌علاوه $\mathcal{V}^{k,\infty}$ می‌تواند به‌صورت زیر تعریف شود [۱۰و۱۶]:

$$\mathcal{V}^{k,\infty} = \{\tau : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \mid (\tau - id) \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^d), D^\alpha \tau \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^d),$$
$$\sup_{x,y \in \mathbb{R}^d, x \neq y} \frac{\| D^\alpha \tau(y) - D^\alpha \tau(x) \|}{\| y - x \|} < +\infty, \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \ 1 \leq |\alpha| \leq k\},$$

حداقل فرض لازم برای تبدیل‌ها، به این صورت است که T_{ad} زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{T}^{k,\infty} := \{\tau : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \mid \tau \in \mathcal{V}^{k,\infty}, \tau^{-1} \in \mathcal{V}^{k,\infty}\}$ باشد که $k \geq 1$؛ بنابراین رابطه زیر را داریم:

$$T_{ad} \subset \mathcal{T}^{k,\infty} \subset \mathcal{V}^{k,\infty} = T(\mathcal{D}_{ref}) = \{\tau : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \mid (\tau - id) \in S\}.$$

که در آن $S = \mathbf{W}^{k,\infty}(\mathbb{R}^d)$ فضای سوبولوف است. توجه کنید که فضای آفین $T(\mathcal{D}_{ref})$ (و بنابراین T_{ad}) می‌تواند به توپولوژی‌ای که از فضای جابه‌جایی S به ارث رسیده، مجهز شود. با توجه به حفظ هموار بودن مرز و منظم بودن توابع تبدیل، مورات و سیمون در [۱۶] نتایج پایه‌ای را برای تکمیل بحث بررسی کرده‌اند.

[1] Sobolev space

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

۲-۳ دامنه‌های تبدیل، مرزها و توابع

برای دامنه کران‌دار $\mathcal{D}_{ref}$ و $\tau \in \mathcal{T}^{k,\infty}$ مجموعه $\tau(\mathcal{D}_{ref})$ نیز دامنه کران‌دار است. به‌علاوه برای منظم بودن دامنه‌ها نتایج زیر را داریم:

لم ۱: فرض کنید $\mathcal{D}_{ref}$ دامنه کران‌داری با مرز $W^{k,\infty}$ باشد که $k \geq 1$. و همچنین فرض کنیم $\tau \in \mathcal{T}^{k,\infty}$ در این صورت $\tau(\mathcal{D}_{ref})$ دامنه‌ای با مرز $W^{k,\infty}$ خواهد بود [۱۶].

درصورتی‌که تبدیل‌های $\mathbf{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ به‌اندازه کافی کوچک باشند، دامنه‌های لیپشیتس حفظ می‌شود (ر.ک. لم ۳ در [۳۰]).

لم ۲: فرض کنید $\mathcal{D}_{ref}$ دامنه کران‌داری با مرز لیپشیتس باشد در این صورت ثابت $0 < c(\mathcal{D}_{ref}) < 1$ وجود دارد که برای هر $\tau \in \mathbf{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ داریم: $\| \tau - id \|_{\mathbf{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)} < c(\mathcal{D}_{ref})$ و $\tau(\mathcal{D}_{ref})$ دامنه کران‌داری با مرز لیپشیتس است [۳۰].

اکنون تبدیل توابع به دامنه مرجع را تحلیل می‌کنیم. فرض کنید $\tilde{f} : \Omega \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$ تابعی با دامنه $\mathcal{D} = \tau(\mathcal{D}_{ref})$ باشد که $\tilde{f} \in L^2\left(\Omega; L^1(\tau)\right)$. برای نگاشت داده شده $\tau \in \mathcal{T}^{k,\infty}$ تابع تبدیل متناظر زیر را تعریف می‌کنیم:

$$f : \Omega \times \mathcal{D}_{ref} \to \mathbb{R}^m, \qquad f(\omega; x) := (\tilde{f} o \tau)(\omega; x) = \tilde{f}(\omega; \tau(x)), \qquad \forall \omega \in \Omega,$$

در این صورت f یک بازگشت[1] از $\tilde{f}$ به $\mathcal{D}_{ref}$ با τ است. اگر f دیفرانسیل پذیر باشد، مشتق‌ها را به‌صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$D_{\tilde{x}} \tilde{f}(\omega; \tau(x)) = D_x f(\omega; x) \tau'(x)^{-1}, \nabla_{\tilde{x}} \tilde{f}(\omega; \tau(x)) = \tau'(x)^{-T} \nabla_x f(\omega; x), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

که در آن $\tilde{x} = \tau(x)$ متغیر فضای معین روی $\tau(\mathcal{D}_{ref})$ است. مورات و سیمون تأثیر تبدیل، روی منظم بودن تابع را بررسی کرده‌اند. مشابه لم ۴.۱ از [۱۶] داریم:

لم ۳: فرض کنید $\mathcal{D}$ دامنه‌ای باز باشد همچنین $\tau \in \mathcal{T}^{1,\infty}$ و $1 \leq p \leq \infty$ آنگاه

$$f \in L^p(\Omega; \tau(\mathcal{D})) \Leftrightarrow f o \tau \in L^2(\Omega; L^p(\mathcal{D})),$$
$$f \in L^2\left(\Omega; W^{1,p}(\tau(\mathcal{D}))\right) \Leftrightarrow f o \tau \in L^2(\Omega; W^{1,p}(\mathcal{D})),$$
$$f \in L^2\left(\Omega; W_0^{1,p}(\tau(\mathcal{D}))\right) \Leftrightarrow f o \tau \in L^2\left(\Omega; W_0^{1,p}(\mathcal{D})\right) \text{ آنگاه } p \in (1, +\infty) \text{ اگر}.$$

این لم بسیاری از ابزارهای مورد نیاز برای بهینه‌سازی شکل را (که در آن متغیر حالت معادله با مشتقات جزیی موردنظر به فضاها بخنر $L^2(\Omega; L^p(\mathcal{D}))$ یا $L^2(\Omega; W^{1,p}(\mathcal{D}))$ تعلق دارد) فراهم می‌کند.

[1] pulback

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

۳ فرمول‌بندی در دامنه ثابت

اکنون می‌توانیم مساله بهینه‌سازی را به‌طور کامل روی دامنه ثابت $\mathcal{D}_{ref}$ (مرجع) تعریف کنیم. این کار با انتقال معادله با مشتقات جزیی موردنظر بر روی دامنه مرجع، انجام می‌گیرد. با توجه به مساله (۴) عملگر $\tilde{E}$ بین فضاها به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$\tilde{E}:\{(\tilde{u},\tau)\,|\tilde{u}\in L^2(\Omega;X(\tau)),\ \tau\in T_{ad}\}\to\{\tilde{z}\,|\,\tilde{z}\in L^2(\Omega;Z(\tau))\}.$$

در ادامه از نماد T_{ref} برای نمایش $T(\mathcal{D}_{ref})$ استفاده خواهیم کرد. اکنون فضاهای $L^2(\Omega;X(\tau))$ و $L^2(\Omega;Z(\tau))$ را به فضاهای ثابت $L^2(\Omega;X_{ref})$ و $L^2(\Omega;Z_{ref})$ منتقل کرده‌ایم، $L^2(\Omega;X_{ref})=\{\tilde{u}o\tau:\tilde{u}\in L^2(\Omega;X(\tau))\}$. همچنین $E:L^2(\Omega;X_{ref})\times T_{ref}\to L^2(\Omega;Z_{ref})$ حال $\tilde{u}\in L^2(\Omega;X(\tau))\mapsto u:=\tilde{u}o\tau\in L^2(\Omega;X_{ref})$ عملگر تبدیل شده است، به‌طوری که برای همه $\tau\in T_{ad}$ و هر $\tilde{u}\in L^2(\Omega;X(\tau))$ داشته باشیم $E(u,\tau)=0\Leftrightarrow\tilde{E}(\tilde{u},\tau)=0$.

به‌طور مشابه تابع هدف $J:X_{ref}\times T_{ref}\to\mathbb{R}$ برای $u=\tilde{u}o\tau\in L^2(\Omega;X_{ref})$ و $\tau\in T_{ad}$ به‌صورت $J(u,\tau)=\tilde{J}(\tilde{u},\tau)$ تعریف می‌شود. همچنین فرض می‌کنیم که $L^2(\Omega;Z(\tau))$ می‌تواند به‌طور مشابه منتقل شود. اکنون مساله (۴) را می‌توانیم به‌صورت زیر بیان کنیم:

تعریف **۳:** مساله کمینه‌سازی

$$\min J(u,\tau)\qquad \text{s.t. } E(u,\tau)=0,\ \tau\in T_{ad}, \tag{۶}$$

که در آن $J:L^2(\Omega;X_{ref})\times T_{ref}\to\mathbb{R}$ تابع هدف است و $E:L^2(\Omega;X_{ref})\times T_{ref}\to L^2(\Omega;Z_{ref})$ مساله بهینه‌سازی شکل با تبدیل‌ها روی دامنه ثابت نامیده می‌شود.

در این فرمول‌بندی یک مساله بهینه‌سازی روی دامنه ثابت در فضای توابع خواهیم داشت که در آن τ نقش متغیر کنترل را در مساله دارد؛ بنابراین می‌توانیم شیوه‌های کنترل بهینه را برای به دست آوردن شرایط بهینگی به کار بریم و در ادامه از الگوریتم‌های بهینه‌سازی برای حل آن استفاده کنیم. توجه داریم که در مقابل سایر بردها و فضاهای تصویر از J و E، فضای آفین T_{ref} فضای برداری نخواهد بود. در واقع داریم:

$$T_{ref}=\{\tau:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d\,|\,(\tau-id)\in S\}=\{\tau:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d\,|\,\tau=id+\hat{\tau},\hat{\tau}\in S\}=:id+S,$$

با وجود این، ازآنجاکه یک نگاشت یک- به- یک بین تبدیل $\tau\in T_{ref}$ و جابه‌جایی متناظر $\hat{\tau}=\tau-id$ داریم، می‌توانیم T_{ref} را با فضای باناخ S مشخص کنیم. ازآنجاکه می‌خواهیم از شیوه‌های کنترل بهینه برای تحلیل مساله بهینه‌سازی شکل استفاده کنیم، می‌توانیم از این موضوع که برای E و J مشتقات جهتی نسبت به τ در تمام جهت‌ها، در فضای باناخ S قابل محاسبه هستند، استفاده کنیم. بنابراین می‌توانیم از جفت دوگان برای فضای باناخ S در همه جهت‌ها نسبت به τ استفاده کنیم. به‌عبارت‌دیگر $\langle J_\tau(u,\tau),v\rangle_{S^*,S}$ برای هر $u\in L^2(\Omega;X_{ref})$ و $\tau\in T_{ad}$ و $v\in S$ خوش‌تعریف است. اکنون معادله حالت را با فرم تغییری

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

$$\langle \tilde{E}(\tilde{u},\tau),\tilde{v}\rangle_{L^2(\Omega;Z(\tau))}=0,\qquad \forall \tilde{v}\in L^2(\Omega;Z(\tau)^*), \tag{۷}$$

بیان می‌کنیم. نماد $\langle .,. \rangle$ زوج دوگان است و $Z(\tau)^*$ فضای مناسبی از توابع آزمون است که بر روی $\mathcal{D}=\tau(\mathcal{D}_{ref})$ با $\tau\in T_{ad}$ تعریف شده است. مانند متغیر حالت، توابع آزمون را نیز از $\mathcal{D}$ به $\mathcal{D}_{ref}$ برای هر $x\in\mathcal{D}_{ref}$ با استفاده از بازگشت $v(x):=(\tilde{v}o\tau)(x)$ تبدیل می‌کنیم که در آن $\tilde{v}$ توابع آزمون برای مساله‌ای هستند که روی $\mathcal{D}=\tau(\mathcal{D}_{ref})$ تعریف شده است. حال $E(u,\tau)$ برای هر $\tilde{v}\in L^2(\Omega;Z(\tau)^*)$ و هر $\tau\in T_{ad}$ به‌صورت زیر است:

$$\langle E(\tilde{u}o\tau,\tau),\tilde{v}o\tau\rangle_{L^2(\Omega;Z_{ref})}:=\langle \tilde{E}(\tilde{u},\tau),\tilde{v}\rangle_{L^2(\Omega;Z(\tau))},\ \forall \tilde{u}\in L^2(\Omega;X(\tau)),$$

مفروضات زیر را داریم:

- برای هر $\tau\in T_{ad}$، $L^2(\Omega;X_{ref})$ را طوری انتخاب می‌کنیم که

$$L^2(\Omega;X_{ref})\subset\{\tilde{u}o\tau\,|\,\tilde{u}\in L^2(\Omega;X(\tau))\}.$$

- برای هر $\tau\in T_{ad}$، $L^2(\Omega;Z_{ref})$ را طوری انتخاب می‌کنیم که

$$L^2(\Omega;Z_{ref}^*)=\{\tilde{v}o\tau\,|\,\tilde{v}\in L^2(\Omega;Z(\tau)^*)\}.$$

- جواب $\tilde{u}(\tau)$ از معادله

$$\tilde{E}(\tilde{u}(\tau),\tau)=0. \tag{۸}$$

برای هر $\tau\in T_{ad}$ در رابطه $\tilde{u}o\tau\in L^2(\Omega;X_{ref})$ صدق می‌کند.

فرض کنید $\tau\in T_{ad}$ در این صورت معادله حالت تبدیل یافته، در فرم تغییری به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\langle E(u,\tau),v\rangle_{L^2(\Omega;Z_{ref})}=0,\qquad \forall v\in L^2(\Omega;Z_{ref}^*), \tag{۹}$$

با این ترتیب معادله (۹) درواقع برابر(۸) است؛ $\tilde{u}(\tau)$ مساله (۸) را حل می‌کند اگر و فقط اگر $u=\tilde{u}(\tau)o\tau$ مساله (۹) را حل کند. برعکس $u(\tau)\in L^2(\Omega;X_{ref})$ مساله (۹) را حل می‌کند اگر و فقط اگر $\tilde{u}(\tau):=u(\tau)o\tau^{-1}$ مساله (۸) را حل کند.

۳-۱ تبدیل فرم تغییری به معادله حالت

معمولاً یک فرم تغییری صرف بعد از تبدیل به دامنه مرجع، با استفاده از قاعده تبدیل برای انتگرال‌ها و مشتق‌ها، از معادله حالت اولیه به دست می‌آید. فرض کنید $\tau\in\mathcal{T}^{1,\infty}$ و $\tilde{f}\in L^2(\Omega;L^1(\mathcal{D}_{ref}))$، سپس با استفاده از قاعده تبدیل برای انتگرال‌ها $f=(\tilde{f}o\tau)\,|\det\tau'|$ روی $\Omega\times\mathcal{D}_{ref}$ انتگرال‌پذیر است:

$$\int_\Omega\int_{\mathcal{D}_{ref}}(\tilde{f}o\tau)(\omega;x)dx\mu(d\omega)=\int_\Omega\int_{\tau(\mathcal{D}_{ref})}f(\omega;x)\,|\det(\tau^{-1})'(x)|\,dx\mu(d\omega), \tag{۱۰}$$

در تحلیل ویژگی‌های دیفرانسیل پذیری مساله بهینه‌سازی (۶) بررسی دیفرانسیل پذیری $E(u,\tau)$ نسبت به u و τ بسیار مفید خواهد بود. برای انتقال فرم تغییری معادله حالت از دامنه $\tau(\mathcal{D}_{ref})$ به دامنه مرجع $\mathcal{D}_{ref}$، قاعده

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

تبدیل برای انتگرال‌ها به کار می‌رود. در این حالت دیفرانسیل پذیری نگاشت‌های $\tau \to |\det \tau'|$ و $\tau \to (\tau^{-1})'$ باید توجه شود؛ بنابراین لم زیر را خواهیم داشت:

لم ٤: (الف) فرض کنید $\tau \in \mathcal{T}^{1,\infty}$ آنگاه $\delta > 0$ وجود دارد که

$$|\det \tau'| \geq \delta, \qquad a.a.\ x \in \mathbb{R}^d,$$

(ب) فرض کنید $k \geq 1$، نگاشت $g_1(\tau) = |\det \tau'|$ برای هر $\tau \in \mathcal{T}^{k,\infty}$ از $\mathcal{T}^{k,\infty}$ به $W^{k-1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ دیفرانسیل پذیر است. به‌علاوه برای هر $\varphi \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d)^d$ داریم:

$$g_1'(\tau)\varphi = tr((\tau^{-1})'\varphi')\,|\det \tau'|, \tag{11}$$

(پ) فرض کنید $k \geq 1$، نگاشت $g_2(\tau) = (\tau^{-1})'$ برای هر $\tau \in \mathcal{T}^{k,\infty}$ از $\mathcal{T}^{k,\infty}$ به $W^{k-1,\infty}(\mathbb{R}^d)^{d\times d}$ دیفرانسیل پذیر است. به‌علاوه برای هر $\varphi \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d)^d$ داریم:

$$g_2'(\tau)\varphi = -(\tau^{-1})'\varphi'(\tau^{-1})', \tag{12}$$

برهان. (الف) از قسمت (ii) در برهان لم ۴.۲ در مرجع [۱۶] آمده است. دیفرانسیل پذیری فرشت در قسمت (ب) و (پ) نیز از لم‌های ۴.۲ و ۴.۳ همین منبع به دست می‌آید.

اگر تبدیل τ دامنه‌ای را نشان دهد که بسیار به دامنه مرجع نزدیک است، آنگاه $\det \tau' \geq \delta > 0$ و می‌توانیم قدر مطلق را از (۱۱) حذف کنیم.

۳-۲ مساله کاهش یافته، وجود جواب‌ها و شرایط بهینگی

فرض کنید $L^2(\Omega; X_{ref})$ و $L^2(\Omega; Z_{ref})$ فضاهای بخنر باشند و $T_{ref} = id + S$ در این صورت مساله (۶) یک مساله کنترل بهینه با کنترل τ و حالت $u(\tau)$ است و می‌توانیم از نظریه کنترل بهینه برای تحلیل وجود جواب و شرایط بهینگی استفاده کنیم. مطابق معمول ابتدا مجموعه‌های شدنی، جواب‌های بهینه و عملگر کنترل-به-حالت (عملگر طراحی-به-حالت) را معرفی می‌کنیم.

تعریف ٤: مجموعه $\mathcal{G} = \{(u,\tau) \in L^2(\Omega; X_{ref}) \times T_{ref} \mid E(u,\tau) = 0,\ \tau \in T_{ad}\}$ مجموعه شدنی مساله (۶) می‌نامیم. به‌علاوه $(\bar{u},\bar{\tau})$ را جواب بهینه سرتاسری می‌نامیم هرگاه: $\forall (u,\tau) \in \mathcal{G} \quad J(\bar{u},\bar{\tau}) \leq J(u,\tau)$.

همچنین $(\bar{u},\bar{\tau}) \in \mathcal{G}$ را جواب‌های بهینه موضعی می‌نامیم اگر $\epsilon > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$J(\bar{u},\bar{\tau}) \leq J(u,\tau), \qquad \forall (u,\tau) \in \mathcal{G} \cap L^2(\Omega; X_{ref}) \times B_{\|.\|_S}(\bar{\tau},\epsilon),$$

اگر برای هر $\tau \in T_{ad}$، حالت یکتای $u(\tau) \in L^2(\Omega; X_{ref})$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $E(u(\tau),\tau) = 0$، آنگاه عملگر یکتای طراحی-به- حالت زیر را معرفی می‌کنیم:

$$S_u : T_{ad} \to L^2(\Omega; X_{ref}), \qquad \tau \to u(\tau),$$

به‌علاوه می‌توانیم مساله بهینه‌سازی شکل کاهش یافته را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$\min j(\tau) := \min J(S_u(\tau),\tau) \quad \text{s.t. } \tau \in T_{ad}. \tag{13}$$

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

براندنبرگ در [۳۱] چارچوبی را معرفی کرده است که وجود جواب برای مساله بررسی می‌شود:

لم ۵: فرض کنید S فضای باناخ باشد، $T_{ref} = id + S$ و T_{ad} ناتهی، بسته و کران‌دار و $L^2(\Omega; X_{ref})$ فضای بخنر انعکاسی باشد. به‌علاوه معادله حالت $E : L^2(\Omega; X_{ref}) \times T_{ref} \to L^2(\Omega; Z_{ref})$ و تابع هدف $J : L^2(\Omega; X_{ref}) \times T_{ref} \to \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم. عملگر جواب $S_u : T_{ad} \to L^2(\Omega; X_{ref})$ را پیوسته در نظر می‌گیریم. همچنین فرض کنید $\overline{S}$ فضای باناخ انعکاسی با جانشانی فشرده $S \mapsto \overline{S}$ باشد و $\overline{T}_{ad} \subset id + \overline{S}$ ناتهی، بسته، کران‌دار و محدب باشد که $\overline{T}_{ad} \cap T_{ad} \neq \emptyset$ آنگاه مساله بهینه‌سازی شکل (۱۳) در $\overline{T}_{ad} \cap T_{ad}$ جواب بهینه سرتاسری دارد.

برهان لم در منبع [۳۱] با استفاده از شیوه کنترل بهینه ارایه شده است.

برای به دست آوردن شرایط بهینگی فرض زیر را داریم:

فرض ۱:

۱. مجموعه $T_{ad} \subset T_{ref}$ ناتهی، بسته و محدب است.

۲. تابع هدف $J : L^2(\Omega; X_{ref}) \times T_{ref} \to \mathbb{R}$ و $E : L^2(\Omega; X_{ref}) \times T_{ref} \to L^2(\Omega; Z_{ref})$ به‌طور پیوسته دیفرانسیل پذیر هستند.

۳. همسایگی باز $\tilde{T}_{ref}$ از T_{ad} با $T_{ad} \subset \tilde{T}_{ref} \subset T_{ref}$ وجود دارد به‌طوری‌که عملگر طراحی-به-حالت $S_u : \tilde{T}_{ref} \to L^2(\Omega; X_{ref})$ موجود و S_u به‌طور پیوسته دیفرانسیل پذیر است.

۴. مشتق $E_u(u(\tau), \tau)$ برای هر $\tau \in T_{ad}$ یک-به-یک است و $u(\tau) = S_u(\tau)$.

برای به دست آوردن شرایط بهینگی، تابع لاگرانژ $\mathcal{L} : L^2(\Omega; X_{ref}) \times T_{ref} \times L^2(\Omega; Z_{ref}^*) \to \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$\mathcal{L}(u, \tau, \lambda) := J(u, \tau) + \langle \lambda, E(u, \tau) \rangle_{L^2(\Omega; Z_{ref})}, \qquad (۱۴)$$

تحت فرض ۱، جواب بهینه موضعی $(\overline{u}, \overline{\tau}) \in L^2(\Omega; X_{ref}) \times T_{ad}$ از مساله (۱۳) با در نظر گرفتن حالت الحاقی مناسب $\overline{\lambda} \in L^2(\Omega; Z_{ref}^*)$ در شرایط لازم بهینگی مرتبه اول زیر که شرایط کاروش-کان-تاکر نیز نامیده می‌شود، صدق می‌کند:

$$\langle \mathcal{L}_\lambda(\overline{u}, \overline{\tau}, \overline{\lambda}), \delta\lambda \rangle_{L^2(\Omega; Z_{ref})} = \langle E(\overline{u}, \overline{\tau}), \delta\lambda \rangle_{L^2(\Omega; Z_{ref})} = 0,$$

$$\langle \mathcal{L}_u(\overline{u}, \overline{\tau}, \overline{\lambda}), \delta u \rangle_{L^2(\Omega; X_{ref})} = \langle J_u(\overline{u}, \overline{\tau}), \delta u \rangle_{L^2(\Omega; X_{ref})} + \langle \overline{\lambda}, E_u(\overline{u}, \overline{\tau}) \delta u \rangle_{L^2(\Omega; Z_{ref})} = 0,$$

$$\langle \mathcal{L}_\tau(\overline{u}, \overline{\tau}, \overline{\lambda}), \hat{\tau} - \overline{\tau} \rangle_S = \langle J_\tau(\overline{u}, \overline{\tau}) + E_\tau(\overline{u}, \overline{\tau}) \overline{\lambda}, \hat{\tau} - \overline{\tau} \rangle_S \geq 0, \quad \forall \hat{\tau} \in T_{ad},$$

که در آن اولین معادله، معادله حالت سیستم است و دومین معادله، معادله الحاقی است. معادله آخر برای ساختارهای مناسب S و T_{ad} می‌تواند به‌صورت معادله طراحی نوشته شود.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

۳-۳ محاسبه مشتق شکل مرتبه اول

تحت فرض ۱ مشتق‌های تابع هدف کاهش یافته $j(\tau) := J(u(\tau),\tau)$ را می‌توان مانند معمول با استفاده از قاعده زنجیره‌ای محاسبه کرد و $u(\tau) = S_u(\tau)$ می‌تواند به‌صورت نماد جایگزینی برای عملگر طراحی-به- حالت به کار رود. در حقیقت برای مشتق‌های $j \in \tau \in T_{ad}$ در جهت $\delta\tau$ داریم:

$$\langle j'(\tau), \delta\tau\rangle_S = \langle J_u(u(\tau),\tau), u'(\tau)\delta\tau\rangle_{L^2(\Omega;X_{ref})} + \langle J_\tau(u(\tau),\tau), \delta\tau\rangle_S,$$

$$= \langle u'(\tau)^* J_u(u(\tau),\tau), \delta\tau\rangle_S + \langle J_\tau(u(\tau),\tau), \delta\tau\rangle_S,$$

$$= \langle u'(\tau)^* J_u(u(\tau),\tau) + J_\tau(u(\tau),\tau), \delta\tau\rangle_S,$$

که در آن $u'(\tau)^* \in \Upsilon(L^2(\Omega;X_{ref}^*), S^*)$ عملگر الحاقی $u'(\tau) \in \Upsilon(S, L^2(\Omega;X_{ref}))$ است (توجه کنید که در اینجا $\Upsilon(.,.)$ مجموعه همه عملگرهای خطی پیوسته بین دو فضا است)؛ بنابراین مشتق کاهش یافته $j'(\tau) \in S^*$ برابر خواهد بود با

$$j'(\tau) = u'(\tau)^* J_u(u(\tau),\tau) + J_\tau(u(\tau),\tau). \qquad (۱۵)$$

اغلب محاسبه کارای عبارت دوم در(۱۵) در دسترس است. برای عبارت اول از روش الحاقی استفاده خواهیم کرد تا از محاسبه مستقیم $u'(\tau)$خودداری شود. کاربرد روش الحاقی در کنترل بهینه معمول و بر اساس ملاحظات زیر است:

مشتق معادله حالت $E(u(\tau),\tau) = 0$ نتیجه می‌دهد:

$$E_u(u(\tau),\tau)u'(\tau) = -E_\tau(u(\tau),\tau), \qquad (۱۶)$$

و بنابراین $u'(\tau)^* E_u(u(\tau),\tau)^* = -E_\tau(u(\tau),\tau)^*$. حال معادله الحاقی زیر را معرفی می کنیم:

$$E_u(u(\tau),\tau)^* \lambda = -J_u(u(\tau),\tau).$$

اکنون با فرض ۱، عملگر $E_u(u(\tau),\tau)^*$ پوشاست. بنابراین معادله الحاقی دارای جواب $\lambda \in L^2(\Omega;Z_{ref}^*)$ است. اکنون از عبارت اول (۱۵) داریم:

$$u'(\tau)^* J_u(u(\tau),\tau) = u'(\tau)^* \left(E_u(u(\tau),\tau)^* \lambda\right) = E_\tau(u(\tau),\tau)^* \lambda.$$

درنتیجه برای محاسبه مشتقات کاهش‌یافته به رابطه ساده زیر خواهیم رسید:

$$j'(\tau) = E_\tau(u(\tau),\tau)^* \lambda + J_\tau(u(\tau),\tau).$$

در مسایل بهینه‌سازی شکل، $j'(\tau)$ را مشتق شکل می‌نامیم. الگوریتم محاسبه مشتق شکل در زیر خلاصه شده است:

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

الگوریتم محاسبه گرادیان مرتبه اول

۱. فرض کنید $\tau \in T_{ad}$ داده شده باشد، متغیر حالت $u \in L^2(\Omega; X_{ref})$ با حل معادله حالت به دست می‌آید:

$$\langle E(u(\tau),\tau), v\rangle_{L^2(\Omega;Z_{ref})} = 0, \qquad \forall v \in L^2(\Omega; Z_{ref}^*).$$

۲. متغیر الحاقی متناظر $\lambda \in L^2(\Omega; Z_{ref}^*)$ را با حل معادله الحاقی زیر به دست آورید:

$$\langle \lambda, E_u(u(\tau),\tau)v\rangle_{L^2(\Omega;Z_{ref})} = -\langle J_u(u(\tau),\tau), v\rangle_{L^2(\Omega;X_{ref})}, \qquad \forall v \in L^2(\Omega; X_{ref}^*),$$

۳. مشتق کاهش یافته $j'(\tau)$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\langle j'(\tau), \delta\tau\rangle_S = \langle \lambda, E_\tau(u(\tau),\tau)\delta\tau\rangle_{L^2(\Omega;Z_{ref})} + \langle J_\tau(u(\tau),\tau), \delta\tau\rangle_S \qquad \forall \delta\tau \in S^*.$$

٤ گسسته سازی تصادفی

٤-١ فرض نویز متناهی

متغیر تصادفی $y_k : \Omega \to \Gamma_k \subset \mathbb{R}$ را برای $k = 1,2,...M$ با $M < +\infty$، حقیقی مقدار در نظر می‌گیریم که دارای تابع چگالی احتمال $\rho_k : \Gamma_k \to \mathbb{R}^+$ است. اکنون $\rho(y) = \prod_{k=1}^{M} \rho_k(y_k)$ را چگالی توأم $y \in \Gamma \equiv \prod_{k=1}^{M} \Gamma_k \subset \mathbb{R}^M$ تعریف می‌کنیم، همچنین می‌دانیم $y = [y_1, y_2, ..., y_M]^T$ برداری با بعد متناهی است. در حل معادلات با مشتقات جزیی با روش‌های عددی، فرض متناهی بودن پارامترهای تصادفی بسیار حیاتی است. در این پژوهش این فرض را در نظر گرفته و برای سادگی نمایش روابط، از نمادگذاری فضاهای متناهی استفاده می‌کنیم. با این فرض تابع منبع تصادفی f به تعداد متناهی از متغیرهای تصادفی وابسته خواهند بود. به‌طور نمادین می‌توانیم بنویسیم $f(y(\omega), x) = f(y_1(\omega), \ldots, y_M(\omega); x)$ که در آن $y = (y_1, ..., y_\pi)$ یک بردار تصادفی است. فرض می‌کنیم که y_k برای $k = 1, ..., M$ دارای میانگین صفر و واریانس واحد هستند و همچنین دو به دو از هم مستقل‌اند. با فرض وابستگی خطی f به y، خواهیم داشت:

$$f(y, x) = \mathbb{E}[f](x) + \sum_{k=1}^{M} f_k(x) y_k(\omega),$$

که در آن f_k برای $k = 1, ..., M$ به‌طور یکنواخت کران‌دار هستند. این گسترش همان توسیع کارهونن-لویو است. در این مقاله برای این گسترش‌ها توسیع کارهونن-لویو را به کار بسته‌ایم. این فرمول‌بندی برای انتگرال‌گیری بسیار مفیدتر خواهد بود. ابتدا برای فرمول‌بندی در فضای متناهی، با استفاده از قضیه دووب-دینکین[1] داریم [۳۲]:

$$\int_\Omega \int_{\mathcal{D}} f(\omega, x)\, dx \mu(d\omega) = \int_\Gamma \int_{\mathcal{D}} f(y, x)\, dx \rho(y) dy.$$

[1] Doob-Dynkin

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

این فرمول‌بندی را برای استفاده از روش‌های عددی در ادامه به‌کار خواهیم بست. نحوه محاسبه توسیع کارهونن-لویو در [۳۳] مطالعه شد.

٤-۲ روش نمونه‌گیری مونت‌کارلو

روش نمونه‌گیری مونت‌کارلو بر اساس ایجاد سیستمی از متغیرهای تصادفی y است که مستقل و با توزیع یکسان می‌باشد؛ بنابراین حل سیستم (۹) به‌صورت حل M سیستم معین، برای M حقیقی سازی متفاوت از Yاست و بنابراین M جواب $u^i(\tau)=u(y^j;\tau)$ را به دست خواهیم آورد که y^i ، i-امین حقیقی سازی y است. زمانی که M جواب محاسبه شد با استفاده از آن‌ها می‌توان آماره‌های مورد نیاز را تخمین زد. برای مثال می‌توان میانگین را با استفاده از قضیه لم مرکزی به‌صورت $\bar{u}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}u^i(\tau)$ تخمین زد. نرخ همگرایی این روش نسبتاً کند و برابر است با $o(M^{-\frac{1}{2}})$ [۲۸].

٤-۳ روش‌های هم‌محلی تصادفی

روش هم‌محلی تصادفی، در حالت کلی بر اساس توسیع چندجمله‌ای و به‌ویژه، درونیاب لاگرانژ است. ایده کلی، انتخاب مجموعه نقاط هم‌محلی $y_M=\{y^j\}_{j=1}^{M}$ در فضای تصادفی است. بر این اساس معادله (۹) در هریک از نقاط y^j باید برقرار باشد، به این معنی که سیستم زیر برای $j=1,2,...,M$ حل می‌شود:

$$E(u(y^j;\tau),\tau)=0, \qquad (۱۷)$$

برای هر j ، (۱۷) یک سیستم معین است و درنتیجه روش هم‌محلی شامل حل M سیستم معین خواهد بود. البته این یک تعریف گسترده برای روش هم‌محلی است که روش نمونه‌گیری مونت‌کارلو را نیز شامل می‌شود. معمولاً زمانی که روش‌های هم‌محلی به کار می‌رود، انتخاب هوشمندانه نقاط هم‌محلی انجام می‌گیرد. جواب معادله با مشتقات موردنظر را می‌توان با استفاده از توابع درونیاب لاگرانژ نمایش داد. اکنون جواب معادله حالت (۱۷) با استفاده از درونیابی به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\tilde{u}(y)\equiv\mathcal{I}(u)=\sum_{j=1}^{M}u(y^j)h_j(y)v\ ,$$

که در آن h_j چندجمله‌ای‌های لاگرانژ است و $u(y^j)=u(y^j;\tau)$. یادآوری می‌کنیم که چندجمله‌ای‌های لاگرانژ در فضای درونیابی مناسب، تعریف می‌شود و برای هر $i,j\in\{1,2,...,M\}$ داریم $h_i(y^j)=\delta_{i,j}$. درنتیجه درونیابی $\tilde{u}(y)$ برابر جواب دقیق در هر M نقطه هم‌محلی است. با استفاده از جواب‌های معین در نقاط هم‌محلی، آماره‌های درونیابی را می‌توان محاسبه کرد و بنابراین می‌توان آماره‌های جواب تصادفی (۱۷) را به دست آورد. میانگین درونیابی $\hat{u}$ برای مثال می‌تواند به‌صورت زیر نمایش داده شود:

$$\mathbb{E}[\tilde{u}]=\sum_{j=1}^{M}u(y^j)\int_{\Gamma}h_j(y)\rho(y)dy. \qquad (۱۸)$$

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

محاسبه امید ریاضی می‌تواند به‌صورت غیر بدیهی به دست آید که برای این کار اطلاعات چندجمله‌ای‌های لاگرانژ مورد نیاز است. یک روش استفاده از ماتریس وارون از نوع واندرموند، است که به محاسبات زیادی نیاز دارد. روش دیگر استفاده از قاعده انتگرال‌گیری[1] برای به دست آوردن انتگرال است که به رابطه زیر می‌انجامد:

$$\mathbb{E}[\tilde{u}] = \sum_{j=1}^{M} u(y^j) \sum_{k=1}^{M} h_j(y_k)\rho(y_k)\, w_k,$$

که در آن y_k نقاط و w_k وزن‌های انتگرال‌گیری هستند. تقریب انتگرال در (۱۸) دقیق خواهد بود؛ زیرا چندجمله‌ای لاگرانژ از مرتبه M هستند و انتگرال‌گیری درجه دوم برای چندجمله‌ای‌هایی از این مرتبه دقیق است. رابطه به‌دست‌آمده برای میانگین درونیابی را می‌توان با انتخاب هوشمندانه نقاط هم‌محلی، ساده‌تر کرد. با تابع مشخصه چندجمله‌ای‌های لاگرانژ برای $h_i(y^j) = \delta_{i,j}$ که برابر $i, j \in \{1,2,...,M\}$، است و بازنویسی روابط، میانگین به رابطه زیر کاهش می‌یابد:

$$\mathbb{E}[\tilde{u}] = \sum_{j=1}^{M} u(y^j)\rho(y^j)w_j,$$

به همین ترتیب واریانس درونیابی می‌تواند به‌صورت زیر محاسبه شود:

$$\mathrm{Var}[\tilde{u}] = \sum_{k=1}^{M} \Big(\sum_{j=1}^{M} u(y^j)\delta_{i,j}(y_k) - \mathbb{E}[\tilde{u}]\Big)^2 \rho(y_k)\, w_k$$

$$= \sum_{k=1}^{M} \big(u(y_k) - \mathbb{E}[\tilde{u}]\big)^2 \rho(y_k)\, w_k$$

۵ بهینه‌سازی هندسی با قید معادله با مشتقات جزیی بیضوی تصادفی

روش ارایه‌شده در بخش‌های قبلی را برای حل مساله بهینه‌سازی

$$J(\mathcal{D}) = \int_\Gamma \int_{\mathcal{D}} j(u(\mathcal{D}))\, dxdy. \qquad (۱۹)$$

و قید معادله با مشتقات جزیی زیر به کار می‌گیریم:

$$-\Delta u(y;x) + bu(y;x) = f(y;x), \qquad in\ \Gamma\times\mathcal{D}, \qquad (۲۰)$$

با توجه به این‌که استخراج معادله حالت و الحاقی نیازی به انتقال دامنه ندارد، ابتدا آن‌ها را با معرفی لاگرانژین برای مساله بالا به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\mathcal{L}(\mathcal{D}, u(y;\mathcal{D}), p(y;\mathcal{D})) = \int_\Gamma \int_{\mathcal{D}} j(u(\mathcal{D}))dxdy$$
$$+ \int_\Gamma \int_{\mathcal{D}} p(y;\mathcal{D})\big(-\Delta u(y;x) + bu(y;x) - f(y;x)\big)dxdy.$$

[1] Quadrature Rule

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

به‌راحتی می‌توان دید که انتقال این انتگرال‌ها به دامنه ثابت با استفاده از تبدیل‌های $\tau \in T_{ad}$ و رابطه (۱۰) انجام می‌پذیرد. همچنین توجه کنید که در اینجا برای سادگی، از فرمول‌بندی بر اساس دامنه استفاده می‌کنیم (توجه کنید که $\mathcal{D} = (\tau + I)(\mathcal{D}_{ref})$) برای مساله بهینه‌سازی ساختار، غالباً متناظر قید معادله با مشتقات جزیی، با دو نوع شرایط مرزی سروکار داریم: شرط مرزی دیریکله و شرط مرزی نیومن که به‌طور جداگانه به بررسی آن‌ها خواهیم پرداخت.

۵-۱ شرط مرزی نیومن

فرض کنیم u جواب سیستم (۲۰) با شرط مرزی نیومن زیر باشد:

$$\nabla u.n = g_N(y,x), \qquad on\ \Gamma \times \partial\mathcal{D}_N \tag{۲۱}$$

با تشکیل لاگرانژین برای مساله (۲۰) با شرط مرزی (۲۱) خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}(\mathcal{D},u,p) = \int_\Gamma \int_{\mathcal{D}} j(u)dxdy + \int_\Gamma \int_{\mathcal{D}} \nabla p\ \nabla u + bpu - p\ f\ dxdy - \int_\Gamma \int_{\partial\mathcal{D}} p\, g_N dxdy,$$

که در آن u و p به فضای بخنر $L^2(\Gamma; H^1(\mathbb{R}^d))$ تعلق دارند و $d \in \{2,3\}$. باید توجه داشت که فضای $H^1(\mathbb{R}^d)$ به دامنه $\mathcal{D}$ وابسته نیست و درنتیجه متغیرهای تابعک لاگرانژین از یکدیگر مستقل هستند. با محاسبه مشتق‌های جهتی لاگرانژین می‌توانیم سیستم بهینگی مساله کنترل بهینه به‌دست‌آمده را تشکیل دهیم. ابتدا مشتق جزیی $\mathcal{L}$ نسبت به p و در جهت δp برابر خواهد بود با:

$$\mathcal{L}_p(\mathcal{D},u,p)(\delta p) = \int_\Gamma \int_{\mathcal{D}} \nabla \delta p \nabla u + b\delta p u - \delta p\ f\ dxdy - \int_\Gamma \int_{\partial\mathcal{D}} \delta p\, g_N dxdy, \tag{۲۲}$$

که وقتی صفر می‌شود درواقع فرم تغییری معادله حالت را به دست می‌دهد. اکنون مشتق جزیی $\mathcal{L}$ نسبت به u و در جهت $\delta u \in L^2(\Gamma; H^1(\mathbb{R}^d))$ برابر خواهد بود با:

$$\mathcal{L}_u(\mathcal{D},u,p)(\delta u) = \int_\Gamma \int_{\mathcal{D}} j'(u)\delta u\, dxdy + \int_\Gamma \int_{\mathcal{D}} \nabla p \nabla \delta u + bp\delta u\, dxdy, \tag{۲۳}$$

که وقتی صفر می‌شود فرم تغییری معادله الحاقی را به دست می‌دهد. اکنون برای محاسبه مشتق شکل باید مشتق جزیی $\mathcal{L}$ را نسبت به دامنه $\mathcal{D}$ با فرض این‌که متغیرهای u و p ثابت هستند در جهت τ محاسبه کنیم:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D},u,p)(\tau) = \int_\Gamma \int_{\partial\mathcal{D}_{ref}} \tau.n\Big(j(u) + \nabla p \nabla u + bpu - pf + \frac{\partial(pg_N)}{\partial n} + Hpg_N\Big)dsdy, \tag{۲۴}$$

که در آن H خمیدگی میانگین است. اکنون باید توجه داشت که با متغیر حالت $u(\mathcal{D}_{ref})$ و الحاقی p دقیقاً به گرادیان تابع هدف (مشتق شکل) دست خواهیم یافت:

$$J'(\mathcal{D}_{ref})(\tau) = \mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}_{ref}, u(\mathcal{D}_{ref}), p)(\tau) + \int_\Omega \int_{\mathcal{D}_{ref}} \mathcal{L}_u u(\mathcal{D}_{ref}, u(\mathcal{D}_{ref}), p)u'(\mathcal{D}_{ref})\tau dsdy,$$

در اینجا u به دامنه $\mathcal{D}$ وابسته و از متغیر الحاقی، p مستقل است. توجه کنید که از قضیه مشتق ترکیبی برای مشتق شکل استفاده کردیم. با قرار دادن $p(\mathcal{D}_{ref})$ که جواب معادله الحاقی است، عبارت دوم حذف می‌شود و درنتیجه خواهیم داشت:

$$J'(\mathcal{D}_{ref})(\tau) = \mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}_{ref}, u(\mathcal{D}_{ref}), p(\mathcal{D}_{ref}))(\tau). \tag{۲۵}$$

که مشتق‌پذیری تابع هدف نسبت به دامنه را برای محاسبه مشتق ترکیبی نیاز داریم.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

۵-۲ شرط مرزی دیریکله

اکنون سیستم (۲۰) را با شرط مرزی دیریکله زیر در نظر می‌گیریم:

$$u = g_D(\omega, x), \qquad in \ \ \Omega\times\partial\mathcal{D}. \tag{۲۶}$$

با توجه به این‌که شرط مرزی دیریکله تغییری نیست درنتیجه واردکردن آن در فضای تابعی و به دست آوردن تابعک لاگرانژین پیچیده خواهد بود. یک راه‌حل جایگزین برای حل این مشکل، استفاده از ضریب لاگرانژ مکمل است. به‌عبارت‌دیگر برای λ لاگرانژین $(u, p, \lambda)\in\left(L^2(\Gamma; H^1(\mathbb{R}^d))\right)^3$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{L}(\mathcal{D}, u, p, \lambda) = \int_\Gamma\int_{\mathcal{D}} j(u)dxdy + \int_\Gamma\int_{\mathcal{D}} \nabla p.\nabla u + bpu - p\ f\ dxdy + \int_\Gamma\int_{\partial\mathcal{D}} \lambda(u - g_D)dsdy.$$

در رابطه بالا متغیرها از یکدیگر مستقل هستند؛ زیرا متغیرهای (u, p, λ) به فضایی تعلق دارند که به دامنه $\mathcal{D}$ وابسته نیست. همچنین مشتق جزیی لاگرانژین $\mathcal{L}$ نسبت به متغیرهای p و u λ (با توجه به تعریف) به ترتیب به فرم تغییری معادله‌های حالت و شرط مرزی دیریکله می‌انجامد. برای به دست آوردن فرم تغییری معادله الحاقی، مشتق جزیی لاگرانژین را نسبت به u و در جهت $\delta u \in L^2(\Gamma; H^1(\mathbb{R}^d))$ محاسبه می‌کنیم:

$$\mathcal{L}_u(\mathcal{D}, u, p, \lambda)(\delta u) = \int_\Gamma\int_{\mathcal{D}} j'(u)\delta u\, dxdy + \int_\Gamma\int_{\mathcal{D}} p\Delta\delta u + bp\delta u\, dxdy + \int_\Gamma\int_{\partial\mathcal{D}} \lambda\delta u\, dsdy. \tag{۲۷}$$

با استفاده از انتگرال‌گیری جزیی مجدداً خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}_u(\mathcal{D}, u, p, \lambda)(\delta u) = \int_\Gamma\int_{\mathcal{D}} (j'(u) - \Delta p + bp)\delta u\, dxdy + \int_\Gamma\int_{\partial\mathcal{D}} (\nabla p.n + \lambda)\delta u\, dsdy + \int_\Gamma\int_{\partial\mathcal{D}} p\nabla\delta u.n\, dsdy,$$

حال شرط $\mathcal{L}_u\left(\mathcal{D}, u, p, \lambda\right)(\delta u) = 0$ برای همه $\delta u \in L^2(\Gamma; H^1(\mathbb{R}^d))$ به سه رابطه خواهد انجامید. ابتدا δu را با محمل فشرده در $\Omega\times\mathcal{D}_{ref}$ نظر می‌گیریم. درنتیجه خواهیم داشت:

$$-\Delta p + bp = -j'(u), \qquad \Omega\times\mathcal{D}_{ref},$$

اکنون با صفر گرفتن δu روی $\Omega\times\partial\mathcal{D}_{ref}$ و با مقدار دلخواه برای $\nabla\delta u.n$ در فضای $L^2(\Omega; L^2(\partial\mathcal{D}_{ref}))$ روی $\Omega\times\partial\mathcal{D}_{ref}$ خواهیم داشت: $p = 0$. سرانجام با دلخواه گرفتن δu در فضای $L^2(\Omega; H^1(\mathcal{D}_{ref}))$ روی $\Omega\times\partial\mathcal{D}_{ref}$ خواهیم داشت: $\nabla p.n + \lambda = 0$، به‌این‌ترتیب دوباره به رابطه الحاقی خواهیم رسید. اکنون برای محاسبه مشتق شکل باید مشتق جزیی $\mathcal{L}$ را نسبت به $\mathcal{D}$ و در جهت τ به دست آوریم. با در نظر گرفتن جواب‌های u، p و ضریب لاگرانژ λ خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}, u, p)(\tau) = \int_\Gamma\int_{\partial\mathcal{D}_{ref}} \tau.n\left(j(u) + \nabla p.\nabla u + bpu - pf + \frac{\partial(\lambda(u - g_D))}{\partial n} + H\,\lambda(u - g_D)\right)dsdy.$$

با در نظر گرفتن شرایط مرزی $u = g_D$ ، $p = 0$ و همچنین $\lambda = -\nabla p.n$ روی $\Omega\times\partial\mathcal{D}_{ref}$ خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}_{ref}, u, p)(\tau) = J'(\mathcal{D}_{ref})(\tau) + \int_\Gamma\int_{\mathcal{D}_{ref}} \mathcal{L}_u(\mathcal{D}_{ref}, u(\mathcal{D}_{ref}), p)u'(\mathcal{D}_{ref})\tau\, dsdy.$$

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

یادآوری می‌کنیم که برای به دست آوردن این رابطه، با توجه به استقلال متغیرهای p و ضریب لاگرانژ λ از دامنه $\mathcal{D}$ با استفاده از قضیه مشتق ترکیبی به دست آمد. اکنون با جایگذاری مقادیر $p = p(\mathcal{D}_{ref})$ و $\lambda = \nabla p(\mathcal{D}_{ref}).n$ که در آن جواب معادله الحاقی است، عبارت دوم حذف می‌شود و درنتیجه مشتق شکل موردنظر به دست می‌آید:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}_{ref}, u, p)(\tau) = J'(\mathcal{D}_{ref})(\tau). \qquad (۲۸)$$

۳-۵ الگوریتم بهینه‌سازی عددی

در این بخش، الگوریتم گرادیان را برای بهینه‌سازی شکل موردنظر، به کار می‌بریم. برای کمینه‌سازی عددی تابع هدف $J(\mathcal{D}) = \int_{\Gamma}\int_{\mathcal{D}} j(u(\mathcal{D}))dxdy$، با قیود به‌دست‌آمده در سیستم بهینگی در نظر گرفته می‌شود. فرمول تحلیلی گرادیان تابع هدف نسبت به τ که شکل موردنظر $\mathcal{D} = \tau(\mathcal{D}_{ref}) = (I+\tau)(\mathcal{D}_{ref})$ را پارامتری می‌کند به‌صورت زیر خواهد بود:

$$J'(\mathcal{D}_{ref})(\tau) = \int_{\Gamma}\int_{\partial\mathcal{D}_{ref}} \tau.n\, j(\mathcal{D}_{ref})dxdy,$$

که در آن $j(\mathcal{D}_{ref})$ تابعی از متغیر حالت u و الحاقی p نیز است. درنتیجه می‌توانیم شکل جدید را با شروع از شکل اول $\mathcal{D}_{ref}$ به‌صورت $\mathcal{D}_S = (I+\tau_S)(\mathcal{D}_{ref})$ که $\tau_S = -sj(\mathcal{D}_{ref})n$، محاسبه کنیم که در آن s گام کاهشی است. برای s به‌اندازه کافی کوچک، می‌توان اطمینان داشت که $J(\mathcal{D}_s) \le J(\mathcal{D}_{ref})$. توجه داریم که برای به دست آوردن شکل جدید $\mathcal{D}_s$ دو مساله وجود دارد: نخست آنکه بردار $\tau_S \in T_{ad}$ باید در هر گام محاسبه شود درحالی‌که $j(\mathcal{D}_{ref})n$ پیش‌تر روی مرز $\partial\mathcal{D}_{ref}$ تعریف شده است؛ بنابراین اثر موردنظر باید به درون $\mathcal{D}_{ref}$ گسترش یابد تا بتوانیم τ_S را محاسبه کنیم. مساله دوم این است که با توجه به این‌که اغلب فرض می‌کنیم $\tau \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ و این‌که تابع $j(\mathcal{D}_{ref})$ ممکن است به‌اندازه کافی منظم نباشد، باید پارامتر موردنظر را به‌اندازه کافی منظم کنیم [۱]. مطلب دیگری که برای پیاده‌سازی عددی باید به آن توجه داشت، اعمال قید محدودیت حجم در مسایل بهینه‌سازی شکل است که در رابطه (۲) با $\int_{\mathcal{D}} dx = V_0$ مشخص‌شده و در آن V_0 حجم اولیه است. برای اعمال این دسته از قیود از ضریب لاگرانژ l استفاده می‌شود (با این ضریب می‌توان قید حجم را وارد تابع لاگرانژین کرد). با این توصیف و با در نظر گرفتن $\mathcal{D}_0 := \mathcal{D}_{ref}$ به‌عنوان شکل آغازین، قسمت اصلی الگوریتم در هر گام برابر خواهد بود با:

- محاسبه پارامتر طراحی

$$\tau_k = \begin{cases} s.n_k\left(\frac{1}{2}(u-u_d)^2 + (\nabla u.\nabla p + bup - fp) - l_k\right) & on\ \mathcal{S}, \\ 0 & on\ \partial\mathcal{D}\setminus\mathcal{S}, \end{cases} \qquad (۲۹)$$

- به هنگام سازی شکل: $\mathcal{D}_{k+1} = (I+\tau_k)(\mathcal{D}_k)$

باید توجه داشت که مقدار پارامتر طراحی روی مرزهای ثابت برابر صفر است.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

استراتژی که ما برای حل مساله کنترل بهینه روی مرز ثابت به‌کاربرده‌ایم بهینه‌سازی-سپس-گسسته سازی نامیده می‌شود. حال سیستم بهینگی محاسبه‌شده است برای اعمال روش عددی، همان‌طور که در بخش ۴ توضیح داده‌شده است، از روش هم‌محلی تصادفی برای گسسته سازی استفاده می‌کنیم. در اینجا فرض می‌کنیم که y^j برای $j = ۱,۲,...,M$ نقاط هم‌محلی باشد، $k \in \mathbb{N}$. را با $k = ۰$ به‌عنوان گام آغازین، به‌عنوان شمارنده تکرارها در نظر می‌گیریم. τ. را متناظر با $\mathcal{D}$. نقطه شروع قرار می‌دهیم. اکنون الگوریتم بهینه‌سازی عددی به‌صورت زیر خلاصه می‌شود:

۱. *حل معادلات حالت و الحاقی:* برای هر نقطه هم‌محلی y^j سیستم معین متناظر معادله با مشتقات جزیی تصادفی (۲۲) و (۲۳) ((۲۲) و (۲۷) در حالت دیریکله) را برای به دست آوردن $(u_k^j, p_k^j, \lambda_k^j)$ حل کنید.

۲. *جستجوی جهت:* با استفاده از $(u_k^j, p_k^j, \lambda_k^j)$ به‌دست‌آمده از گام (۱)، با استفاده از توسیع چندجمله‌ای (۱۸) و به کار بردن قاعده انتگرال‌گیری، مقدار $(\overline{u}_k, \overline{p}_k, \overline{\lambda}_k)$ را محاسبه کرده و با استفاده از آن و رابطه (۲۹)، پارامتر طراحی (جابه‌جایی شبکه) را به دست می‌آوریم.

۳. *به هنگام سازی:* قرار می‌دهیم، $\mathcal{D}_{k+۱} = (I + \tau_k)(\mathcal{D}_k)$ و $k := k + ۱$.

برای بیان بیش‌تر توضیحات زیر می‌تواند مفید واقع شود:

(الف) *منظم سازی:* باید توجه داشت که گرادیان تابع هدف از ضرب داخلی $\langle J'(\mathcal{D}_{ref}), \tau \rangle$ استخراج می‌کنیم که در تعریف مشتق فرشت ظاهر می‌شود. ضرب داخلی دارای ساختار هیلبرت (برای مثال $H^۱(\mathcal{D})$)است. بنابراین جهت کاهشی $d \in H^۱(\mathcal{D})$ را می‌توان به‌طور یکتا از رابطه زیر به دست آورد:

$$\int_{\mathcal{D}} \nabla d \nabla \tau + d\tau dx = \langle J'(\mathcal{D}_{ref}), \tau \rangle, \qquad (۳۰)$$

که علاوه بر این‌که منظم بودن دلخواه گرادیان به دست می‌آید، رابطه (۳۰) را می‌توان به گسترش طبیعی جابه‌جایی شبکه به همه دامنه تعبیر کرد[۱].

(ب) *محدودیت حجم:* مقدار ضریب لاگرانژین در هر تکرار به هنگام سازی می‌شود. با در نظر گرفتن مشتق شکل به‌صورت $J'(\mathcal{D}) + lV'(\mathcal{D}) = ۰$ لاگرانژین در هر گام با استفاده از رابطه زیر به هنگام می‌شود:

$$l_{k+۱} = \frac{(l_k + l)}{۲} + \varepsilon_l (V - V_۰).$$

که در آن ε_l عدد مثبت به‌اندازه کافی کوچکی است. با توجه به این‌که پارامتر تغییر شبکه و حجم پارامترهای غیر تصادفی هستند، محاسبات مانند مساله‌های معین انجام می‌پذیرد.

(پ) *محاسبه طول گام:* محاسبه طول گام در این مسایل بسیار دشوار است و محاسبات را به‌اندازه قابل‌توجه افزایش می‌دهد. با توجه به دشواری‌های قابل‌توجهی که برای استفاده از روش‌های کارایی مانند آرمیژو و ولف وجود دارد در مقاله حاضر ، طول گام را با محاسبه جهت‌های کاهشی قبلی به دست آورده‌ایم. به‌این‌ترتیب که ضرب داخلی $\langle d_k, d_{k-۱} \rangle$ معیاری برای کاهش یا افزایش طول گام در نظر گرفته می‌شود. همچنین

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

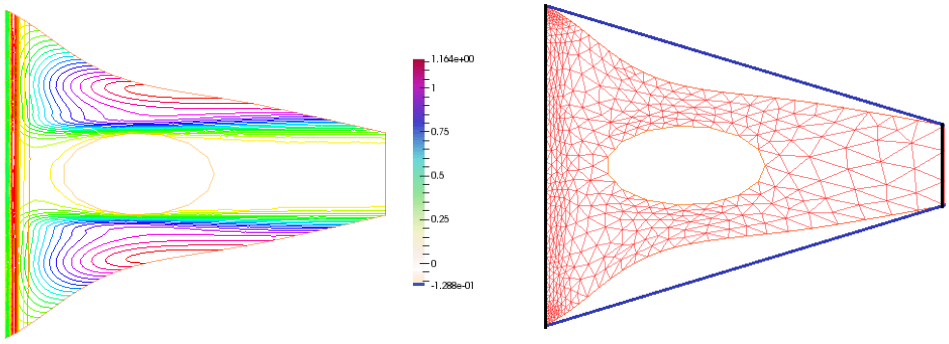
$\langle d_k, d_{k-1} \rangle$ می‌تواند معیاری را برای شرط توقف به دست دهد (درصورتی‌که جهت‌های کاهشی قبلی به‌اندازه کافی به هم نزدیک شود، می‌توان استنباط کرد که به نقطه بهینه رسیده‌ایم).

٦ مثال عددی

برای مطالعه مثال عددی، مساله آموزنده بهینه‌سازی شکل نازل را در نظر می‌گیریم. تابع هدف در رابطه (۱۹) برابر

$$J(\mathcal{D},u)=\frac{1}{2}\int_{\Gamma}\int_{\mathcal{D}}(u-u_d)^2\,dxdy+\frac{\beta}{2}\int_{\Gamma}\int_{\partial\mathcal{D}_N} g_N(y;x)udsdy,$$

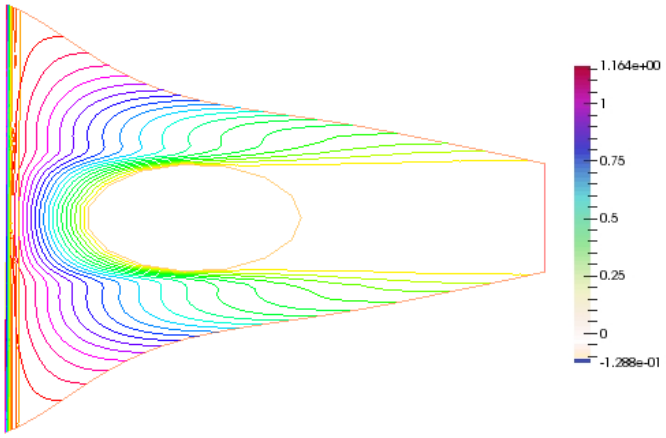
است و معادله حالت (۲۰)، با پارامترهای تصادفی، رفتار جریان در نازل را مدل‌سازی می‌کند. نازل شامل یک ورودی، یک خروجی و دیواره است. در این مساله حالت مساله تابع جریان u است و دیواره (مرز آزاد $\mathcal{S}$) پارامتر طراحی است. همچنین فرض کرده‌ایم که جریان غیر چرخشی و متقارن است. در مقاله حاضر مساله نازل همگرا در نظر گرفته‌شده و در آن به دنبال جریان یکنواخت u_d در سراسر نازل هستیم، درحالی‌که جریان خروجی نازل ناچیز باشد. شکل ایده‌آل نازل‌ها که در کاربردهای مهندسی استفاده می‌شود هموار است که البته در اینجا با انتخاب مرز لیپشیتس هموار موردنظر به دست می‌آید. نازل اولیه در شکل ۱ نشان داده‌شده است. ورودی نازل با شرط مرزی دیریکله $g_D=2y_1x_2(1-x_2)$ که یک میدان تصادفی است، مدل شده است. در اینجا y_1 دارای توزیع گاوسی با میانگین $\bar{y}_1=2$ و واریانس $Var[y_1]=0.02$ در بازه $[0,2]$ است. جریان خروجی با شرط نیومن $g_N=10^{-4}\times\xi$، مدل شده که یک متغیر تصادفی یکنواخت در بازه $[-1,1]$ با مقدار کوچک (اغتشاش) در نظر گرفته‌شده است. $b=10^{-4}\times y_2(1-x_1)$ پارامتر تصادفی است که با توسیع کارهونن-لویو (بخش ۴) تقریب شده است. تابع منبع $f=10^{-2}(1-y_2^2)x_1$ که اثر دیواره نازل بر جریان را مدل کند، نیز میدان تصادفی در نظر گرفته‌شده که در آن y_2 دارای توزیع نرمال در بازه $[-1,1]$ با میانگین و واریانس 0.2 است تا مدل مناسبی از اثر دیواره بر جریان، به دست دهد. در این مثال $\beta=1$ در نظر گرفته‌شده است. شکل ۲، جواب بهینه به‌دست‌آمده را برای نازل (که همان شکل بهینه است) نشان می‌دهد، همچنین تابع تراز میانگین جریان نیز در آن نشان داده‌شده است. در شکل ۳ نازل بهینه به همراه میانگین متغیر الحاقی نشان داده‌شده است.



(ب) (الف)

شکل ۱. (الف) شکل اولیه نازل (خط‌های پر) و شکل نهایی نازل شبکه‌بندی شده است، (ب) شکل نهایی نازل که تراز میانگین متغیر الحاقی را نشان می‌دهد (سمت چپ ورودی نازل را نشان می‌دهد و سمت راست خروجی نازل است).

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]



شکل ۲. تراز میانگین حالت نهایی متناظر با شکل بهینه (سمت چپ ورودی نازل و سمت راست خروجی نازل است)

نتایج عددی به‌دست‌آمده نشان می‌دهد که برای رسیدن به جریان دلخواه (u_d) در ناحیه اندازه‌گیری (که در اینجا همه دامنه نازل دوبعدی است) با جریان ورودی تصادفی و غیر چرخشی داده‌شده g_D درحالی‌که جریان خروجی باید برابر با g_N باشد باید شکل نازل (شکل ۱) تغییر آن باید به‌گونه‌ای باشد که انرژی کمینه شود (عبارت دوم در تابع هدف) و حالت به‌دست‌آمده تا آنجا که ممکن است به حالت دلخواه نزدیک شود. در این صورت همان‌طور که انتظار می‌رود شکل نازل جمع‌تر شده است. البته با توجه به اعمال قید حجم مجاز می‌توان دید که بررسی مساله دشوار است و تنها کم کردن حجم ما را به جواب بهینه نمی‌رساند. در اینجا ضریب عبارت دوم می‌تواند مانند پارامتر منظم ساز در نظر گرفته شود بسته به این‌که کمینه کردن تابع انرژی در دامنه چه اندازه حایز اهمیت باشد. این دسته از مسایل در مهندسی کاربرد فراوانی دارد که می‌توان به طراحی تونل باد با جریان یکنواخت در داخل تونل اشاره کرد (در این صورت ضریب انرژی را نادیده می‌گیریم) درحالی‌که جریان باد ورودی رفتار تصادفی نسبت به مکان دارد.

یکی از ویژگی‌های اساسی روش‌های غیر نفوذی، در کنار قابلیت بهبود با انتخاب هوشمندانه نقاط (مانند نقاط هم‌محلی در روش هم‌محلی)، قابلیت ترکیب آن‌ها با روش‌های موجود برای حل دستگاه‌های معین است. این ویژگی به ما اجازه داده است تا از ابزارها و الگوریتم‌های کارای در دسترس برای به دست آوردن نتایج عددی استفاده کنیم. برای مقاله حاضر، کدها در سیستم‌عامل لینوکس پیاده‌سازی شده و از بسته نرم‌افزاری FEniCS [۳۴] منطبق با Python استفاده‌شده است. میانبر اصلی FEniCS بسته محاسباتی DOLFIN [۳۵] است که ابزارهای مناسبی را برای حل معادلات با مشتقات جزیی در اختیار قرار می‌دهد. برای حل مساله جابه‌جایی شبکه از افزونه FEMorph که توسط دکتر اشمیت [۳۶] توسعه داده‌شده، استفاده‌شده است. شکل‌ها با استفاده از نرم‌افزار Paraview [۳۷] ایجادشده است.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

۷ نتیجه‌گیری

در این مقاله مساله بهینه‌سازی شکل هندسی با ورودی‌های تصادفی (که آن را بهینه‌سازی هندسی تصادفی نامیدیم) ارایه‌شده است. فرمول‌بندی ما بر اساس کارهای مورات و سیمون [۱۶] برای پارامتری کردن مساله پی‌ریزی شده و با استفاده از ابزارهای کنترل بهینه تصادفی که در سال‌های اخیر توسعه داده‌شده، به بررسی و حل آن‌ها پرداختیم. برای گسسته سازی تصادفی از روش‌های غیر نفوذی مانند روش هم‌محلی تصادفی با استفاده از روش انتگرال‌گیری برای انتخاب شبکه، استفاده‌شده است و میدان‌های تصادفی را با استفاده از توسیع کارهونن-لویو تقریب زدیم. در ادامه روش ارایه‌شده را برای حل یک مساله آموزنده به کار بردیم تا کاربری روش نشان داده شود. باید توجه داشت که این روش برای حل این دسته از مسایل، در آغاز راه است و بنابراین مساله مشابهی برای مقایسه، در اختیار نبوده است؛ این نوع فرمول‌بندی برای استفاده در بهینه‌سازی، به‌خوبی انجام‌شده است اما هنوز برای بررسی کارایی روش‌های اعمال‌شده و همچنین بهبود کارایی آن‌ها باید مطالعات بیش‌تری صورت پذیرد.

منابع

[۲۲] مرادی، م.، صلاحی، م.، بردسیری، م.، جمالیان، ع.، (۱۳۹۳). یک مدل جدید استوار در طراحی شبکه زنجیره تأمین تحت عدم قطعیت. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۴۱(۲)، ۲۶-۹.

[1] Allaire, G., (2006). Conception Optimale De Structures, Mathematiques And Applications. Heidelberg: Springer.

[2] Delfour, M.C., Zolésio, J.P., (2011). Shapes and Geometries: Metrics, Analysis, Differential Calculus, And Optimization, 22, Siam.

[3] Allaire, G., (2012). Shape Optimization By The Homogenization Method: Vol. 146, Springer Science & Business Media.

[4] Lions, J.L., Lelong, P., (1968). Contrôle Optimal De Systemes Gouvernés Par Des Équations Aux Dérivées Partielles, 7, Paris: Dunod.

[5] Pironneau, O., (1973). On Optimum Profiles In Stokes Flow. Journal Of Fluid Mechanics, 59(01): 117-128.

[6] Sokolowski, J., Zolesio, J.P., (1992). Introduction To Shape Optimization, pp. 5-12. Berlin: Springer.

[7] Céa, J., (1986). Conception Optimale Ou Identification De Formes. Calcul Rapide De La Dérivée Directionnelle De La Fonction Coût, RAIRO-Modélisation Mathématique Et Analyse Numérique, 20(3): 371-402.

[8] Marrocco, A., Pironneau, O., (1978). Optimum Design With Lagrangian Finite Elements: Design Of An Electromagnet. Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering, 15(3): 277-308.

[9] Mohammadi, B., (2002). Global Optimization By The Solution Of Over-Determined Boundary Value Problems. Paris: Comptes Rendus De l'Académie Des Sciences.

[10] Delfour, M., Zolezio, J.P., (2001). Surface Derivatives. SIAM Series.

[11] Guillaume, P., Masmoudi, M., (1994). Computation Of High Order Derivatives In Optimal Shape Design. Numerische Mathematik, 67(2): 231-250.

[12] Hinze, M., Pinnau, R., Ulbrich, M., Ulbrich, S., (2009). Optimization With PDE Constraints, Vol. 23. Mathematical Modelling: Theory And Applications.

[13] Sethian, J. A., (2003). Level Set Methods And Fast Marching Methods. Journal Of Computing And Information Technology, 11(1): 1-2.

[14] Allaire, G., Jouve, F., Toader, A.M., (2002). A Level-Set Method For Shape Optimization. Comptes Rendus Mathematique, 334(12): 1125-1130.

[15] Murat, F., Simon, J., (1975). Etude Des Problèmes d'Optimum Design, Conf. IFIP, Lectures Notes In Computer Sciences, 41: 54-62.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

[16] Murat, F., Simon, J., (1974). Quelques Résultats Sur Le Contrôle Par Un Domaine Géométrique, 4, Laboratoire d'Analyse Numérique.
[17] Micheletti, A. M., (1972). Metrica Per Famiglie Di Domini Limitati E Proprieta Generiche Degli Autovalori. Annali Della Scuola Normale Superiore Di Pisa-Classe Di Scienze, 26(3): 683-694.
[18] Zolesio, J. P., (1979). Identification De Domaines Par Deformation. Dissertation. Universite De Nice.
[19] Kharmanda, G., Olhoff, N., Mohamed, A., Lemaire, M., (2004). Reliability-Based Topology Optimization. Structural And Multidisciplinary Optimization, 26(5): 295-307.
[20] Ben-Tal, A., Nemirovski, A., (2002). Robust Optimization Methodology And Applications. Mathematical Programming, 92(3): 453-480.
[21] De Gournay, F., Allaire, G., Jouve, F., (2008). Shape And Topology Optimization Of The Robust Compliance Via The Level Set Method. ESAIM: Control, Optimisation And Calculus Of Variations, 14(1): 43-70.
[23] Conti, S., Held, H., Pach, M., Rumpf, M., Schultz, R., (2009). Shape Optimization Under Uncertainty-A Stochastic Programming Perspective. SIAM Journal On Optimization, 19(4): 1610-1632.
[24] Chen, S., Chen, W., Lee, S., (2010). Level Set Based Robust Shape And Topology Optimization Under Random Field Uncertainties. Structural And Multidisciplinary Optimization,41(4): 507-524.
[25] Kouri, D. P., (2012). An Approach For The Adaptive Solution Of Optimization Problems Governed By Partial Differential Equations With Uncertain Coefficients. Dissertation. Rice University.
[26] Rosseel, E., Wells, G.N. (2012). Optimal Control With Stochastic PDE Constraints And Uncertain Controls. Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering, 213: 152-167.
[27] Keyanpou, M., Nehrani A.M., (2014). Optimal Thickness Of A Cylindrical Shell Subject To Stochastic Forces. Journal of Optimization Theory and Applications. In Publication. Doi.Org/10.1007/S10957-014-0663-Y
[28] Xiu, D., (2010). Numerical Methods For Stochastic Computations: A Spectral Method Approach. Princeton University Press.
[29] Kunoth, A., Schwab, C., (2013). Analytic Regularity And GPC Approximation For Control Problems Constrained By Linear Parametric Elliptic And Parabolic PDEs. SIAM Journal On Control And Optimization, 51(3): 2442-2471.
[30] Bello, J. A., Fernández-Cara, E., Lemoine, J., Simon, J., (1997). The Differentiability Of The Drag With Respect To The Variations Of A Lipschitz Domain In A Navier-Stokes Flow. SIAM Journal On Control And Optimization, 35(2): 626-640.
[31] Brandenburg, C., (2011). Adjoint-Based Adaptive Multilevel Shape Optimization Based On Goal-Oriented Error Estimators For The Instationary Navier-Stokes Equations. Verlag Dr. Hut.
[32] Oksendal, B., (2003). Stochastic Differential Equations. Berlin: Springer.
[33] Loeve, M., (1946). Fonctions AlEatoires De Second Ordre. Revue Scientifique. 84:195-206.
[34] FEniCS project website: http://fenicsproject.org/
[35] DOLFIN is the C++/Python interface of FEniCS: http://bitbucket.org/fenics-project/dolfin
[36] FEMorph addon for Python: http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~schmidt/femorph.php
[37] ParaView official site: http://www.paraview.org/

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]