

## ارایه یک الگوریتم ابتکاری جدید برای حل مساله مکان‌یابی پوشش کلی

ستار رجب‌پور صنعتی<sup>۱</sup>، علی نعیمی صدیق<sup>۲\*</sup>

۱- کارشناس ارشد، دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکده مهندسی صنایع، تهران، ایران

۲- استادیار، پژوهشگاه علوم و فناوری اطلاعات ایران (ایرانداک)، پژوهشکده فناوری اطلاعات، تهران، ایران

رسید مقاله: ۲۳ فروردین ۱۳۹۶

پذیرش مقاله: ۱۴ شهریور ۱۳۹۶

### چکیده

مساله پوشش مجموعه، از دسته مسایل سخت محسوب می‌شود که در کاربردهای مختلفی مانند سیستم اورژانس، مکان‌یابی تسهیلات خرده‌فروشی، بیمارستان‌ها، واحدهای دفاعی کشوری، پایگاه‌های نظامی، دستگاه‌های رادار و ... مورد استفاده قرار می‌گیرد. هدف از پوشش مجموعه، یافتن یک زیرمجموعه به گونه‌ایست که اجتماع اعضای این زیرمجموعه، کل مجموعه را پوشش دهد. در این مقاله یک الگوریتم ابتکاری برای حل مساله پوشش مجموعه پیشنهاد شده است. در الگوریتم پیشنهادی، برای هر یک از رئوس گراف، یک مقدار منسوب به میزان بهبود محاسبه می‌شود که بر اساس آن تصمیم بر حضور یا عدم حضور راس متناظر در مجموعه پوشش گرفته می‌شود. با توجه به تخصیص تسهیل و اثر متقابل بر پوشش یا عدم پوشش رئوس مجاور، در هر مرحله مقادیر بهبود به روز می‌شود و این روند به طور تکراری ادامه می‌یابد تا آنکه در خاتمه‌ی الگوریتم، مجموعه پوشش نزدیک به بهینه به دست آید. جهت ارزیابی الگوریتم پیشنهادی در مقایسه با سایر روش‌های متداول، یک الگوریتم شبیه‌سازی تبرید جهت حل ارایه شد و پارامترهای آن به روش تاگوچی تنظیم گردید. نتایج به دست آمده در مقایسه با نتایج به دست آمده از الگوریتم شبیه‌سازی تبریدی برای آزمایش‌های مختلف حاکی از موفقیت الگوریتم پیشنهادی به ویژه در مسایل با ابعاد بالا در مهار رشد زمان حل است.

**کلمات کلیدی:** مساله پوشش، الگوریتم ابتکاری، الگوریتم شبیه‌سازی تبرید، روش تاگوچی.

### ۱ مقدمه

مکان‌یابی یکی از شاخه‌های علم تحقیق در عملیات است که توجه به آن سبب کاهش هزینه‌ها و موفقیت واحدهای صنعتی می‌شود. مکان‌یابی مراکز (مکان‌یابی ساختمان‌ها و مراکز) شامل انتخاب مکان برای یک یا چند مرکز، با در نظر گرفتن محل قرارگیری سایر مراکز و محدودیت‌های موجود می‌شود، به گونه‌ای که هدف ویژه‌ای بهینه شود. این هدف می‌تواند هزینه حمل‌ونقل، پوشش منطقه وسیع‌تری از بازار، ارایه خدمات عادلانه به مشتریان و غیره باشد. مکان‌یابی تسهیلات یک موضوع مهم برای شرکت‌های دولتی و خصوصی است. به همین

\* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: naimi@irandoc.ac.ir

علت لازم است که در زمینه‌های مختلف هزینه و فاصله نقاط تقاضا بررسی شود. تعداد زیادی مدل برای پاسخگویی به این نیاز ساخته شدند و افراد بسیاری هم در این زمینه کار کردند [۱].

یکی از پرتعدادترین مدل‌ها در مکان‌یابی تسهیلات مدل پوشش است که به دلیل کاربردی بودن این مدل‌ها در جهان واقعی بسیار جذاب است. تسهیلات اورژانسی و خدماتی از این قبیل کاربردها می‌باشند. در بسیاری از مسایل پوشش، مشتریان بر اساس فاصله آن‌ها از تسهیلات خدمات دریافت می‌کنند. هر مشتری به شرطی قادر به دریافت خدمات از تسهیلات است که فاصله بین آن‌ها از یک عدد از پیش تعیین شده کم‌تر باشد که به این عدد از پیش تعیین شده فاصله پوشش گفته می‌شود [۲].

مساله پوشش مجموعه برای حل مسایل مختلفی در کاربردهایی چون شبکه‌های کامپیوتری، سامانه‌های حمل‌ونقل، زمان‌بندی، بیو انفورماتیک، مسیریابی و ... استفاده شده است [۳ و ۴]. با توجه به دانش نویسندگان، مساله پوشش برای اولین بار توسط حکیمی معرفی گردید که مدل ارائه شده در آن، حداقل تعداد پلیس مورد نیاز برای پوشیدن گره‌های شبکه بزرگراه‌ها را مورد بررسی قرار می‌داد. او این مساله را به صورت مساله پوشش راسی در یک گراف مدل نمود [۲]. با توجه به ذات مساله پوشش که از دسته مسایل سخت محسوب می‌شود عملاً در ابعاد واقعی این مساله به صورت دقیق قابل حل نیست از این رو در این مقاله یک الگوریتم ابتکاری جدید پیشنهاد شده است که می‌تواند مساله واقعی را در زمان چندجمله‌ای حل نماید. همچنین برای بررسی کارایی الگوریتم پیشنهادی، الگوریتم شبیه‌سازی تبریدی نیز برای حل مساله در ابعاد بزرگ به کار گرفته شده است و برای بهتر تنظیم شدن پارامترهای الگوریتم شبیه‌سازی تبرید از روش تاگوجی استفاده شده است.

بنابراین در ادامه در بخش دوم پیشینه پژوهش مورد بررسی قرار می‌گیرد، سپس در بخش سوم مدل ریاضی مساله بیان می‌گردد. در بخش چهارم و پنجم به ترتیب الگوریتم شبیه‌سازی تبرید و الگوریتم ابتکاری جدید به صورت مبسوط شرح داده خواهند شد. برای مقایسه کارایی الگوریتم پیشنهادی در قسمت ششم نتایج محاسباتی گنجانده شده است و در نهایت نتیجه‌گیری و پیشنهاد برای مطالعات آتی در قسمت هفتم مورد بحث قرار می‌گیرد.

## ۲ مرور ادبیات

اولین مدل ریاضی در مساله پوشش توسط تورگاس و همکاران توسعه یافت که در مدل آن‌ها مکان تسهیلات خدماتی اورژانسی بررسی گردیده است و هدف مساله حداقل سازی تعداد تسهیلات مستقر شده است [۵]. نعیمی صدیق و همکاران [۶] در تحقیقی مساله پوشش یال مکمل را که یکی از مسایل پوشش لبه‌ای است، مورد مطالعه قرار دادند. ایشان در مقاله خود یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی خطی عدد صحیح ترکیبی جدید برای مساله ارایه کردند. همچنین تعدادی قوانین کاهش اندازه پیشنهاد کردند که باعث افزایش سرعت در رسیدن به جواب بهینه می‌گردد. طالبیان شریف و همکاران [۷] در تحقیقی به ارایه مدلی برای توزیع کالاهای امدادی پرداختند. هدف مساله ایشان برآورده سازی تقاضا در حداقل زمان ممکن بود. در نهایت مدل مطرح شده در آن تحقیق، با

روش‌های دقیق و روش ابتکاری حل شد. نتایج تحقیق نشان داد که روش ابتکاری در مقایسه با روش‌های دقیق قادر به ارائه جواب‌های با کیفیت بسیار خوب در زمانی اندک است.

برزین‌پور و همکاران [۸] در تحقیقی یک مدل برنامه‌ریزی چندهدفه امکانی برای مکان‌یابی دوره‌ای انبارهای موقت و تخصیص آن‌ها به مناطق آسیب‌دیده برای توزیع کالاهای امدادی ارائه کردند. دو هدف اصلی مدل ایشان، حداقل کردن هزینه‌های راه‌اندازی و هزینه‌های جابه‌جایی بین مراکز تامین، انبارهای موقت و مناطق آسیب‌دیده و همچنین حداکثر کردن مجموع حداقل نسبت‌های تقاضای پوشش یافته برای رعایت انصاف در توزیع کالا است. در این تحقیق دو الگوریتم فرا ابتکاری ژنتیک و شبیه‌سازی تبرید برای حل مدل ارائه شد که در نهایت، نتایج محاسباتی اهمیت و کارایی مدل طراحی شده را برای مسایل واقعی نشان داد. بنکوزی و همکاران [۹] در تحقیق خود برای مساله پوشش مشروط یک الگوریتم کارآمد ارائه کردند. همچنین آن‌ها برای تحقیقات آتی طراحی الگوریتم با زمان چندجمله‌ای برای گراف‌های پیچیده‌تر سازه‌ها، مانند نمودار فاصله و نمودار سریال و موازی پیشنهاد کردند.

محمدی و همکاران [۱۰] در تحقیق خود یک الگوریتم رقابت امپریالیستی چندهدفه جدیدی را برای حل مدل چندحالتی تصادفی پیشنهاد کرده‌اند. مدل مساله، پوشش شبکه هاب بود که با توجه به محل خطر، به حداقل رساندن هزینه‌های سرمایه‌گذاری فعلی و به حداقل رساندن زمان حمل‌ونقل بین هر جفت از گره‌ها در شبکه توپی را در نظر گرفته است. ماری و وی [۱۱] در تحقیق خود برای مساله مکان‌یابی پوشش، یک راه‌حل برای اطمینان از پوشش کامل منطقه با حداقل تعداد تسهیلات پیشنهاد کرده‌اند که خطای بالقوه را از بین می‌برد. همچنین برای نمایش کارایی راه‌حل پیشنهادی، روش مذکور در این پژوهش برای مسایل کاربردی آژیر هشدار اضطراری و مکان‌یابی ایستگاه آتش‌نشانی توسعه یافته است. حسینی‌نژاد و همکاران [۱۲] در مقاله‌ای مدل مکان‌یابی پوشش پیوسته را با در نظرگیری ریسک پیشنهاد می‌کنند. در این مدل شعاع پوشش و درجه رضایت مشتری از پوشش با استفاده از مفهوم فازی تعریف شده است. همچنین ایشان در تحقیق خود به معرفی یک روش تجزیه و تحلیل ریسک بر اساس سطح پاسخ می‌پردازند.

شو شیه [۱۳] در تحقیق خود یک روش جدید برای حل مساله پوشش ارائه می‌کند. الگوریتم پیشنهاد شده برای حل مساله پوشش با بهره‌گیری از روش عقب‌گرد برای تولید هر پوشش جزئی، عمل می‌کند بدون آن که در آن هیچ تکراری یا غیر پوشش جزئی وجود داشته باشد. گلوور [۱۴] در تحقیق خود مدل‌های متعددی از مساله کوله‌پشتی از جمله مساله پوششی که در آن موجودیت‌ها باید اختصاص داده شوند و همچنین کوله‌پشتی چندبعدی را که در آن استراتژی جایگزینی محدودیت‌ها به کار می‌رود، ارائه می‌کند. پسو و همکاران [۱۵] در تحقیق خود برای مساله پوشش با هدف توسعه و پیشبرد وضعیت فعلی فناوری هوشمند هیبریدی و ترکیب فرا ابتکاری با آزادسازی لاگرانژی، پیشنهاد به کارگیری ترکیب روش جستجوی تطبیقی تصادفی حریصانه

(GRASP<sup>1</sup>) و ابتکاری لاگرانژی مبتنی بر بهینه سازی زیر گرادیان<sup>2</sup> را برای فرار از بهینه محلی و پیدا کردن جواب های بهتر ارایه کردند.

ناجی عظیمی و سالاری [۱۶] در تحقیق خود بر روی زمان مساله پوشش فروشنده و موقعیت یابی مساله تاکید دارند. ایشان در تحقیق خود یک مدل برنامه ریزی خطی عدد صحیح به عنوان روش بهبود طراحی کرده و تلاش بر بهبود کیفیت راه حل داشتند. زنجیرانی فراهانی و همکاران [۱۷] در تحقیق خود مدل مساله پوشش سنتی را توسعه دادند که برای حالات اختلال مانند وقوع سیل و زلزله می توانند تسهیلات را در رساندن خدمات دچار اختلال کنند. سپس از الگوریتم کلونی زنبور جهت حل مساله طرح شده استفاده کردند و از طریق مقایسه نتایج با الگوریتم های دقیق برای نمونه مسایل کوچک به اعتبارسنجی الگوریتم پرداختند. اورسینگو [۱۸] در تحقیق خود یک روش جدید برای انتخاب نقطه عطفی<sup>۳</sup> ناظر به داخل همسایگی برای مساله پوشش وزن دار (WSCP) ارایه کرد. در نتیجه پژوهش وی نشان داده شد مساله پوشش مجموعه با استفاده از روش ابتکاری مبتنی بر آزادسازی لاگرانژی با بهینه سازی زیر گرادیان به جواب می رسد. برزین پور و همکاران [۱۹] در پژوهشی یک مدل ریاضی چندهدفه ارایه کردند که حداقل کردن مجموع زمان های رسیدن به مناطق آسیب دیده و همچنین حداکثر کردن رضایت مناطق آسیب دیده با اولویت بالاتر و حداقل کردن هزینه ها شامل هزینه های راه اندازی، جابه جایی و هزینه کمبود از اهداف آن است. در این پژوهش برای حل این مدل چندهدفه از روش معیار جامع برای تک هدفه کردن مدل استفاده شده است.

فلوریس و ماوروتاس [۲۰] در مقاله ای یک مدل ریاضی چندهدفه ارایه کردند که قادر به تولید تمام جواب های پارتو برای مسایل بهینه سازی ترکیبی چندهدفه - از جمله دو مساله معروف فروشنده دوره گرد چندهدفه و مساله پوشش چندهدفه - بود. دهری و همکاران [۲۱] در مطالعه خود یک الگوریتم فرا ابتکاری ترکیبی بر مبنای متغیر جستجوی همسایگی و برنامه ریزی عدد صحیح برای حل مساله مسیریابی وسایل نقلیه با پنجره زمانی ارایه کردند. در الگوریتم ارایه شده توسط ایشان، ترکیبی از یک روش فرا ابتکاری (VNS<sup>۴</sup>) و دقیق به صورت مشترک و درهم تنیده استفاده شده است.

مساله پوشش راسی کمینه دارای پیچیدگی نمایی است و جزو مسایل NP-hard است [۲۲ و ۲۳]؛ بنابراین یافتن راه حلی که بتواند در زمان چند جمله ای به جواب بهینه برسد، تقریباً ناممکن است [۲۴ و ۲۵]. اصولاً از آنجایی که هرگونه فرموله کردن (مدل سازی ریاضی) مسایل دنیای واقعی جهت انطباق و کنترل هرچه بیش تر رفتار پدیده های در حال اتفاق است؛ لذا لازم است که مسایل طوری فرموله شوند تا جنبه های مختلف مساله در مدل نمایان شود؛ بنابراین مدل سازی مسایل دنیای واقعی و روبه رو شدن با ابعاد بزرگ آن و یا مسایلی با چندین تابع هدف است که این موضوع در قالب شبیه سازی رفتاری پدیده ها می تواند سبب افزایش زمان حل مساله گردد. میزان زمان لازم جهت حل مسایل بزرگ، یکی از معیارهای ارزیابی تکنیک حل مساله است.

<sup>1</sup> Greedy Randomized Adaptive Search Procedures

<sup>2</sup> Subgradient

<sup>3</sup> landmark

<sup>4</sup> Variable Neighborhood Search

همان‌طور که در مقالات متعدد بررسی گردید بیش تر مقالات به مدل‌سازی مساله در حالت‌های مختلف پرداخته شده است و با توجه به ماهیت مساله پوشش در نهایت با الگوریتم‌های فرا ابتکاری حل گردیده‌اند. در این مقاله سعی شده است تا با ارایه یک الگوریتم ابتکاری جدید، هم‌زمان با مهار سرعت رشد زمان حل در مسایل بزرگ، در مدت زمان منطقی و مناسب با کیفیت جواب قابل قبولی به مساله پاسخ داده شود، به‌طوری‌که مساله در ابعاد کوچک با روش دقیق و در مسایل بزرگ با الگوریتم شبیه‌سازی تبرید مورد مقایسه قرار گرفته‌است.

### ۳ مساله پوشش

مساله پوشش مجموعه سعی در حداقل‌سازی هزینه سطح مشخصی از پوشش‌دهی مکان دارد. این مدل را مدل پوشش مجموعه وزنی (WSCP) گویند. اگر هزینه استقرار همه تسهیلات برابر باشد تابع هدف مدل به‌صورت حداقل‌سازی تعداد تسهیلات مستقر شده درمی‌آید که به آن مدل مساله حداقل پوشش اساسی مجموعه (MCSCP) می‌گویند [۱].

### ۳-۱ مفروضات، پارامترها و متغیرهای تصمیم

در این مقاله، WSCP گسسته مدنظر است. بدین معنی که نقاط تقاضا به‌صورت نقطه‌ای و غیر پیوسته در نظر گرفته می‌شود. در مدل گسسته WSCP، مساله در قالب شبکه‌ای از مشتریان به‌عنوان گره که هم‌زمان امکان استقرار تسهیل بر روی هر یک وجود دارد، تعریف و همه تسهیلات یکسان در نظر گرفته می‌شود. محدودیت در ارایه خدمات از سوی تسهیلات به مشتریان وجود ندارد و هر مشتری می‌تواند هم‌زمان تحت پوشش چندین تسهیل قرار گیرد.

$i$  : اندیس نقاط تقاضا

$j$  : اندیس نقاط کاندیدای استقرار

$m$  : تعداد نقاط تقاضا

$n$  : تعداد نقاط کاندیدای استقرار

$f_j$  : هزینه استقرار یک وسیله در مکان کاندیدای استقرار  $j$

اگر نقطه کاندیدای استقرار  $j$  بتواند  $i$  را پوشش دهد.  

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$
  
 در غیر این‌صورت

اگر وسیله‌ای در مکان  $j$  مستقر شود.  

$$x_j = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$
  
 در غیر این‌صورت

### ۳-۲ مدل مساله

طبق آنچه پیش تر گفته شد در این مساله می خواهیم تمام نقاط تقاضا را با حداقل هزینه ممکن پوشش دهیم؛ لذا مدل ریاضی مساله [۲] به صورت زیر خواهد بود:

$$\text{Min} \sum_{j=1}^n f_j . x_j \quad (1)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} . x_j \geq 1, \quad \forall i, \quad (2)$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad \forall j. \quad (3)$$

تابع هدف (۱) مجموع هزینه های استقرار تسهیلات را کمینه می نماید و محدودیت (۲) تضمین می کند که تمام نقاط تقاضا پوشش داده خواهند شد. باید توجه داشت که سمت چپ محدودیت (۲) بیانگر تعداد تسهیلات مستقر شده ای است که می توانند تقاضای  $i$  را پوشش دهند. به عبارت دیگر محدودیت (۲) بیان می کند که برای هر نقطه تقاضای  $i$  باید حداقل در یکی از مکان هایی که می توانند آن نقطه تقاضا را پوشش دهند، یک وسیله مستقر کنیم.

با توجه به مدل، هدف محاسبه مقادیر  $x_j$  ها به گونه ای است که تمامی محدودیت های (۲) ارضاء شده و مقدار تابع هدف کمینه گردد. در این مقاله محاسبات برای ۲۰ نمونه مساله از این نوع در ابعاد مختلف با استفاده از دو روش حل با استفاده از الگوریتم شبیه سازی تبریدی (SA) و الگوریتم پیشنهادی ارایه شده صورت گرفته و نتایج آن ارایه گردیده است. به این منظور ابتدا به طور خلاصه نحوه عملکرد الگوریتم ها تشریح و سپس محاسبات ارایه می شود.

### ۴ الگوریتم شبیه سازی تبرید

شبیه سازی تبرید (SA) رویکردی است بر مبنای مدل مونت کارلو که برای مطالعه رابطه بین ساختار اتمی، آنروپی و دما در طول تبرید یک ماده استفاده می شود. این الگوریتم فرایند سرد شدن مواد را با کاهش تدریجی دما تا رسیدن به یک نقطه تعادل دمایی شبیه سازی می کند. این روش با ایجاد و ارزیابی جواب های متوالی به صورت گام به گام به سمت جواب بهینه حرکت می کند. برای حرکت، یک همسایگی جدید به صورت تصادفی ایجاد و ارزیابی می شود. در این روش به بررسی نقاط نزدیک به نقطه داده شده در فضای جستجو می پردازیم. در صورتی که نقطه جدید، نقطه بهتری باشد (تابع هزینه را کاهش دهد) به عنوان نقطه جدید در فضای جستجو انتخاب می شود و اگر بدتر باشد (تابع هزینه را افزایش دهد) بر اساس یک تابع احتمالی انتخاب می شود. به عبارت ساده تر، برای کمینه سازی تابع هزینه، جستجو همیشه در جهت کم تر شدن مقدار تابع هزینه صورت می گیرد؛ اما این امکان وجود دارد که گاه حرکت در جهت افزایش تابع هزینه باشد. معمولاً برای پذیرفتن نقطه بعدی از معیاری به نام معیار متروپلیس استفاده می شود:

$$p\{accept\} = \begin{cases} 1 & \Delta f \leq 0 \\ e^{\frac{-\Delta f}{c}} & \Delta f \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

$P$ : احتمال پذیرش نقطه بعدی:

$C$ : یک پارامتر کنترلی:

$\Delta f$ : تغییر هزینه:

روش بهینه‌سازی SA به این ترتیب است که با شروع از یک جواب اولیه تصادفی برای متغیرهای تصمیم‌گیری، جواب جدید در مجاورت جواب قبلی با استفاده از یک ساختار همسایگی مناسب به طور تصادفی تولید می‌شود؛ بنابراین یکی از مسایل مهم در SA روش تولید همسایگی است. برای پیاده‌سازی الگوریتم شبیه‌سازی حرارتی به چند عامل اساسی نقطه شروع، مولد حرکت، تولید همسایگی و معیار پذیرش و شرط توقف نیازمندیم [۲۶ و ۲۷].

#### ۴-۱ نمایش ساختار جواب

ساختار جواب، مبین یک نقطه از فضای شدنی مساله است به طوری که نحوه نمایش آن در هر رویکرد فرا ابتکاری حائز اهمیت است. در WSCP، یک جواب شدنی باید نشان دهد که در هر مکان، تسهیل مستقر شده است یا خیر. بنابراین ساختار جواب را می‌توان به صورت یک بردار صفر و یک در نظر گرفت به طوری که وجود عنصر یک در خانه  $i$  ام مبین استقرار تسهیل در مکان  $i$  است. ساختار فوق در شکل (۱) نشان داده شده است.

|   |   |   |       |   |   |   |   |   |
|---|---|---|-------|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۱ | ۱ | ..... | ۰ | ۱ | ۰ | ۰ | ۱ |
|---|---|---|-------|---|---|---|---|---|

شکل ۱. ساختار جواب

#### ۴-۲ تنظیم پارامترها به روش تاگوچی

روش طراحی آزمایش‌های تاگوچی در سال ۱۹۶۰ توسط پروفیسور تاگوچی معرفی گردید [۲۸]. این روش می‌تواند با کم‌ترین تعداد آزمایش‌ها، شرایط بهینه را تعیین کند و باعث کاهش چشمگیر زمان و هزینه انجام آزمایش‌ها مورد نیاز می‌گردد. در روش تاگوچی با توجه به تعداد پارامترهای انتخابی و سطوح مربوطه، از آرایه‌های متعامد (ارتوگونال) مختلفی به عنوان ماتریس آزمایش‌ها استفاده می‌شود. در این روش تغییرات با عاملی به نام نسبت سیگنال به نویز (S/N) معرفی می‌گردد و شرایط آزمایشی که دارای بیش‌ترین مقدار سیگنال به نویز باشد به عنوان شرایط بهینه انتخاب می‌شود [۲۸ و ۲۹]. برای تنظیم عامل‌های ضریب کاهش دما، تکرار در هر دما، دمای نهایی، ماکزیمم تکرار حلقه اصلی و دمای آغازین از روش تاگوچی استفاده شده است. بر این اساس برای هر عامل ۳ سطح به صورت جدول ۱ تعریف شد.

بر این اساس برای هر عامل ۳ سطح تعریف شد. در نتیجه ۲۷ سناریو برای ارزیابی این عوامل وجود دارد که به جداول تاگوچی معروف می‌باشند. از آنجایی که هدف مساله مینیمم کردن هزینه تخصیص تسهیلات به نقاط

تقاضا است تابع زیان و مقادیر سیگنال به نویز (S/N) از رابطه (۵) و سپس از رابطه (۶) محاسبه می‌شوند. مقادیر مورد نظر برای تنظیم پارامترها بر روی نمونه مساله‌ای با ۱۰۰۰ گره محاسبه گردید.

$$SB = \frac{1}{n} \sum y_i^2 \quad (5)$$

$$SN = -10 * \log(L_i) \quad (6)$$

جدول ۱. پارامترهای مساله و تعداد سطوح آن‌ها

| پارامتر                            | سطح ۱ | سطح ۲ | سطح ۳ |
|------------------------------------|-------|-------|-------|
| ضریب کاهش دما (alfa)               | ۰/۹۹۹ | ۰/۹۵  | ۰/۹   |
| تکرار در هر دما (TekTemp)          | ۱۰۰   | ۵۰    | ۲۰    |
| دمای آغازین ( $T_0$ )              | ۰/۵   | ۱     | ۱۰    |
| دمای نهایی ( $T_f$ )               | ۰/۰۰۱ | ۰/۱   | ۰/۲   |
| ماکزیمم تکرار حلقه اصلی (max_iter) | ۲۰۰۰  | ۱۰۰۰  | ۵۰۰   |

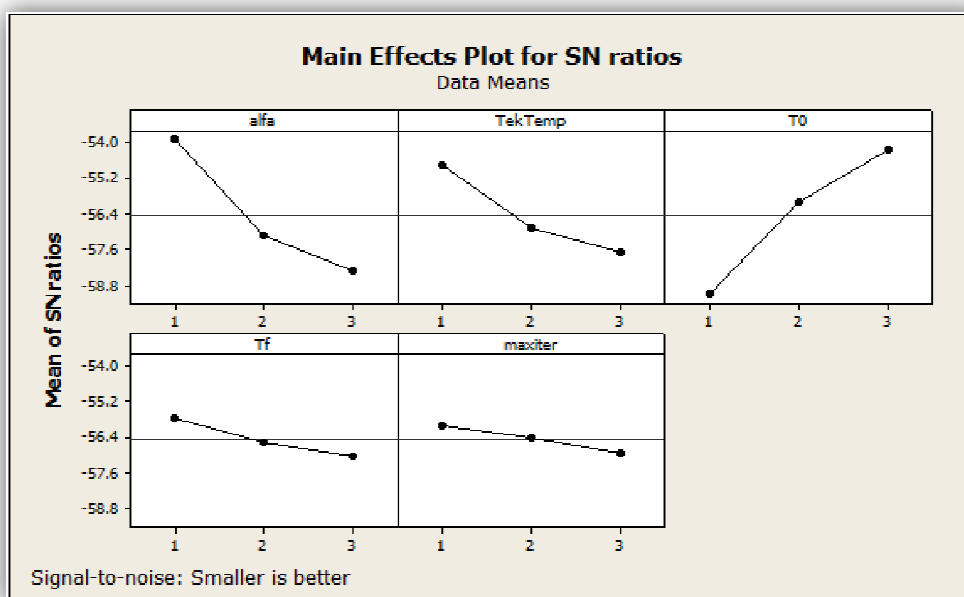
جدول ۲. نتایج نهایی مقادیر (S/N)

| شماره تکرار\ شماره آزمایش | ۱    | ۲    | ۳    | SB       | S/N      |
|---------------------------|------|------|------|----------|----------|
| ۱                         | ۴۵۷  | ۴۷۶  | ۴۴۹  | ۲۱۲۳۴۲   | -۵۳/۲۷۰۴ |
| ۲                         | ۵۲۱  | ۵۸۳  | ۴۷۹  | ۲۸۰۲۵۷   | -۵۴/۴۷۵۶ |
| ۳                         | ۵۱۴  | ۵۳۱  | ۵۹۳  | ۲۹۹۲۶۸/۷ | -۵۴/۷۶۰۶ |
| ۴                         | ۴۶۳  | ۴۴۵  | ۴۵۸  | ۲۰۷۳۸۶   | -۵۳/۱۶۷۸ |
| ۵                         | ۴۴۴  | ۴۵۷  | ۴۷۶  | ۲۱۰۸۵۳/۷ | -۵۳/۲۳۹۸ |
| ۶                         | ۷۰۵  | ۵۵۰  | ۵۶۸  | ۳۷۴۰۴۹/۷ | -۵۵/۷۲۹۳ |
| ۷                         | ۴۵۱  | ۴۸۰  | ۴۳۸  | ۲۰۸۵۴۸/۳ | -۵۳/۱۹۲۱ |
| ۸                         | ۴۷۱  | ۴۸۴  | ۴۸۷  | ۲۳۱۰۸۸/۷ | -۵۳/۶۳۷۸ |
| ۹                         | ۵۲۰  | ۴۶۳  | ۵۱۶  | ۲۵۰۳۴۱/۷ | -۵۳/۹۸۵۳ |
| ۱۰                        | ۷۰۰  | ۶۳۳  | ۵۷۸  | ۴۰۸۲۵۷/۷ | -۵۶/۱۰۹۳ |
| ۱۱                        | ۶۵۵  | ۵۱۷  | ۶۰۵  | ۳۵۴۱۱۳   | -۵۵/۴۹۱۴ |
| ۱۲                        | ۵۷۴  | ۵۵۹  | ۶۰۶  | ۳۳۶۳۹۷/۷ | -۵۵/۲۶۸۵ |
| ۱۳                        | ۴۵۲  | ۵۵۹  | ۵۱۲  | ۲۵۹۶۴۳   | -۵۴/۱۴۳۸ |
| ۱۴                        | ۴۸۸  | ۶۱۳  | ۵۹۳  | ۳۲۱۸۵۴   | -۵۵/۰۷۶۶ |
| ۱۵                        | ۵۳۲  | ۵۱۱  | ۵۸۸  | ۲۹۶۶۲۹/۷ | -۵۴/۷۲۲۱ |
| ۱۶                        | ۱۳۸۶ | ۱۱۴۷ | ۱۰۳۴ | ۱۴۳۵۲۵۴  | -۶۱/۵۶۹۳ |
| ۱۷                        | ۹۷۰  | ۱۱۶۱ | ۱۰۲۵ | ۱۱۱۳۱۴۹  | -۶۰/۴۶۵۵ |
| ۱۸                        | ۱۰۴۲ | ۱۵۱۰ | ۱۰۴۰ | ۱۴۸۲۴۸۸  | -۶۱/۷۰۹۹ |
| ۱۹                        | ۵۴۶  | ۵۴۲  | ۵۱۱  | ۲۸۴۳۳۳/۷ | -۵۴/۵۳۸۳ |
| ۲۰                        | ۵۸۸  | ۵۴۳  | ۵۱۱  | ۳۰۰۵۷۱/۳ | -۵۴/۷۷۹۵ |

| شماره تکرار/شماره آزمایش | ۱    | ۲    | ۳    | SB       | S/N      |
|--------------------------|------|------|------|----------|----------|
| ۲۱                       | ۵۲۰  | ۵۸۱  | ۴۶۸  | ۲۷۵۶۶۱/۷ | -۵۴/۴۰۳۸ |
| ۲۲                       | ۵۷۰  | ۱۰۱۴ | ۱۰۹۱ | ۸۴۷۷۹۲/۳ | -۵۹/۲۸۲۹ |
| ۲۳                       | ۱۴۳۱ | ۱۵۱۵ | ۱۲۳۷ | ۱۹۵۷۷۱۸  | -۶۲/۹۱۷۵ |
| ۲۴                       | ۱۴۱۳ | ۱۳۹۵ | ۱۳۷۸ | ۱۹۴۷۱۵۹  | -۶۲/۸۹۴  |
| ۲۵                       | ۷۷۳  | ۸۳۴  | ۸۰۵  | ۶۴۷۰۳۶/۷ | -۵۸/۱۰۹۳ |
| ۲۶                       | ۷۶۵  | ۶۲۴  | ۹۲۵  | ۶۱۰۰۷۵/۳ | -۵۷/۸۵۳۸ |
| ۲۷                       | ۹۶۰  | ۸۱۵  | ۱۰۵۹ | ۹۰۲۴۳۵/۳ | -۵۹/۵۵۴۲ |

استراتژی کلی برای بهینه کردن سطوح پارامترهای قابل کنترل به صورت زیر است:

اثرات عوامل کنترل را روی نسبت سیگنال به نویز (S/N) و میانگین ارزیابی می کنیم. در واقع طرح آزمایش عاملی مناسب را روی نسبت سیگنال به نویز و میانگین صفت مورد نظر اعمال می کنیم. در این حالت می توان از روش طراحی آزمایشی کمک گرفت.



شکل ۲. نمودار مقایسه سطح ها

برای عواملی که دارای اثر معنی دار روی نسبت سیگنال به نویز هستند، سطوحی انتخاب می شود که سیگنال به نویز (S/N) را حداکثر نماید. برای عواملی که دارای اثر معنی دار روی نسبت سیگنال به نویز (S/N) نیستند و اثر معنی دار روی میانگین دارند، به عنوان عامل (پارامتر) تعدیل در نظر گرفته شده و سطوحی انتخاب می شوند که میانگین به هدف نزدیک تر باشد. عواملی که نه روی نسبت (S/N) اثر دارند و نه روی میانگین به عنوان عامل اقتصادی در نظر گرفته و سطوحی انتخاب می شوند که عملکرد را بهبود دهد.

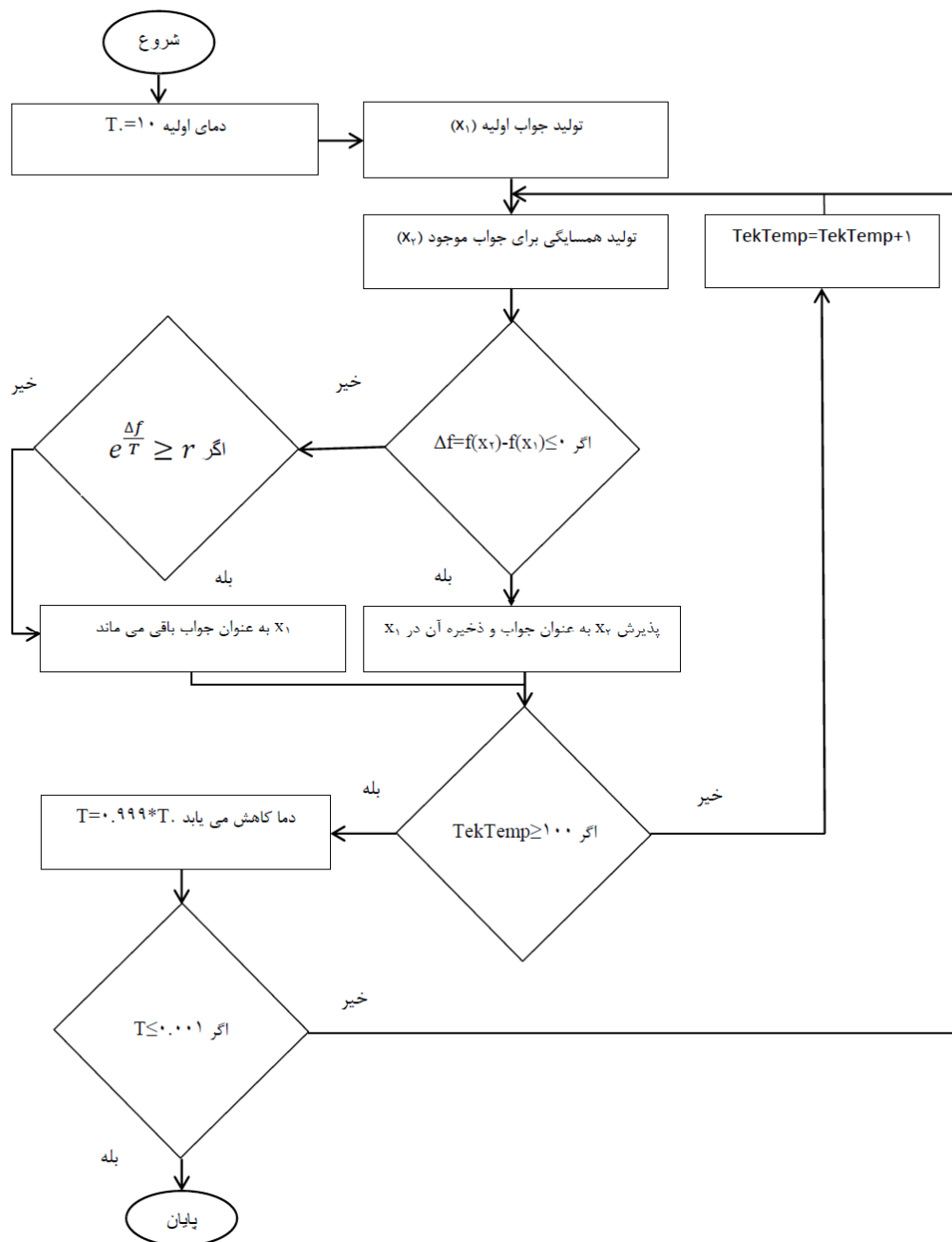
حال به مقایسه سطح‌ها پرداخته می‌شود تا مشخص شود برای هر پارامتر از کدام سطح استفاده شود که نتایج آن با استفاده از نمودارهای شکل ۲ مشخص شده است. نتایج حاصل در این نمودارها از اجرای روش تاگوچی در نرم‌افزار Minitab برای محاسبه S/N در حالتی که کوچک‌تر معرف بهینه می‌باشد به دست آمده است. همان‌طور که از نمودارها مشخص است برای پارامتر ضریب کاهش دما، مطابق نمودار ردیف اول سمت چپ مقدار سطح یک که برابر ۰/۹۹۹ است تعیین می‌گردد. به همین ترتیب پارامتر تکرار در هر دما طبق نمودار ردیف اول وسط، مقدار ۱۰۰ را به خود اختصاص می‌دهد. برای پارامتر دمای آغازین طبق نمودار ردیف اول سمت راست مقدار سطح سه که برابر ۱۰ است، تنظیم می‌شود. دمای نهایی نیز مطابق نمودار ردیف دوم سمت چپ مقدار سطح یک، برابر ۰/۰۰۱ و همچنین برای پارامتر ماکزیمم تکرار حلقه اصلی، مقدار سطح یک آن که برابر ۲۰۰۰۰ است، تعیین گردید.

#### ۴-۳ فلوجارت الگوریتم شبیه‌سازی تبرید

نمای کلی از نحوه عملکرد الگوریتم شبیه‌سازی تبرید به همراه پارامترهای تنظیم شده برای حل مساله مورد نظر مطابق شکل ۳ در ادامه آورده شده است.

#### ۵ الگوریتم پیشنهادی

در این الگوریتم بر خلاف الگوریتم‌های فرا ابتکاری که از یک جواب اولیه تصادفی شروع کرده و با یک مکانیسم ساخت همسایگی در هر مرحله به ازای جواب‌های شدنی مقدار تابع هدف را محاسبه کرده و در نهایت بهترین جواب را گزارش می‌دهند، خود مستقیماً طی مکانیسم تعریف شده اقدام به ساخت جوابی می‌نماید که طی منطقی، سعی می‌کند نزدیک‌ترین حالت به بهینه را به دست آورد. در روش‌های فرا ابتکاری موجود طی تکرارهای تعریف شده باید از بین  $2n$  حالت ممکن جواب برای مساله با ایجاد یک جواب اولیه و بهبود آن طی فرآیند حل به جواب بهینه رسید، در صورتی که الگوریتم پیشنهادی با تصمیم‌گیری بر استقرار یا عدم استقرار یک تسهیل در یک نقطه (گره) یا به عبارتی صفر یا یک شدن هر یک از متغیرها حداکثر  $2n$  حالت جهت بررسی پیش رو دارد. این در حالتی است که الگوریتم در بدترین حالت با این تعداد مواجه خواهد شد، به عبارت دیگر با توجه به آنکه تعداد مراحل برای رسیدن به جواب برابر  $2n$  است. در ادامه اشاره خواهد شد که در برخی مراحل همزمان بر قطعیت تعیین مقدار چندین متغیر با هم تصمیم‌گیری می‌شود که این خود بر عملکرد بهتر این الگوریتم کمک می‌کند. آنچه در بالا ذکر شد بر رشد چندجمله‌ای الگوریتم پیشنهادی اشاره می‌کند که نشان‌دهنده مطلوبیت در این خصوص با توجه به انتظارات عملکردی از آن است. در مسایل پوششی که ضریب هزینه استقرار برای هر متغیر در تابع هدف یکسان و یک مقدار معین است، بدیهی است که پاسخ بهینه برابر است با حداقل تعداد تسهیلات ممکن که ارضای تمامی محدودیت‌ها را به همراه دارد. با تغییر ضرایب در تابع هدف و اختصاص مقادیر مختلف به آن‌ها طبیعی است که پاسخ بهینه حداقل تعداد تسهیلات ممکن نخواهد بود و تحت این شرایط درک مساله و یافتن پاسخ، دیگر به سادگی حالت پیشین نیست.



شکل ۳. فلوجارت الگوریتم شبیه‌سازی تبریدی ارایه‌شده

در این حالت باید یک توازن بین دو دیدگاه تابع هدف و محدودیت‌ها برقرار شود، به این ترتیب که از منظر تابع هدف انتخاب متغیرهایی مطلوب‌تر است که مقدار ضریب آن‌ها در تابع هدف کم‌تر است. از طرفی از نگاه محدودیت‌ها به مساله انتخاب متغیرهایی مطلوب‌تر است که همزمان باعث ارضای تعداد بیش‌تری محدودیت می‌شود که عملاً حذف آن‌ها از بررسی در مراحل بعدی را به همراه دارد که سرعت تصمیم‌گیری را افزایش می‌دهد. برای ایجاد چنین بالانسی جهت انتخاب بهترین گزینه برای انتخاب استقرار، در الگوریتم پیشنهادی مکانیسمی طراحی شده است که طی آن پارامتری منسوب به مقدار بهبود برای هر متغیر در هر مرحله محاسبه

می گردد که به ازای آن وزن و اهمیت هر متغیر از نظر مطلوبیت برای مساله مشخص می شود. بر اساس آنچه گفته شد، الگوریتم باید بتواند بین دو متغیری که یکی از آن ها شش محدودیت را ارضا می کند درحالی که مقدار ضریب آن در تابع هدف ۱۰ است و متغیری که پنج محدودیت را ارضا می کند درحالی که ضریب آن در تابع هدف مقدار ۸ است، تفاوت و تمیز قائل شده و بهترین انتخاب را تشخیص دهد. طبق منطق به کار گرفته شده، زمانی که استقرار تسهیل در مکان  $j$  می تواند همزمان چند نقطه ی دیگر را نیز پوشش دهد، عملاً ما را از استقرار تسهیل جدید در آن نقاط پوشش یافته، معاف می کند تا هزینه ی استقرار معادل آن ها را که در تابع هدف با ضریب  $f_j$  لحاظ شده اند را متحمل نشویم. مگر در صورتی که نقاط تقاضای دیگری نیز وجود داشته باشند که برای پوشش آن ها با توجه به هزینه ای که دارند برای ما به صرفه تر باشد که در این نقاط پوشش یافته توسط تسهیل استقرار یافته در نقطه ی  $j$ ، تسهیل دیگری استقرار دهیم، تا تقاضای آن نقاط را ارضا کرده باشیم. این معافیت از استقرار تسهیلات در آن نقاط و یا به بیان دیگر صرفه جویی در استقرار تسهیلات را به واسطه ی استقرار تسهیل در مکان  $j$  داریم که خود به میزان  $f_j$ ، هزینه به همراه خواهد داشت. به این ترتیب تعریف کلی از میزان بهبود به ازای هر متغیر را به صورت ذیل خواهیم داشت که با نماد  $b(x_j)$  نمایش داده می شود.

$$(V) \quad \text{ضریب } x_j \text{ در تابع هدف} - (\text{مجموع ضرایب متغیرهایی که توسط } x_j \text{ پوشش داده می شوند در تابع هدف}) = b(x_j)$$

$$b(x_j) = \sum_{k \in R_j} f_k - f_j \quad (A)$$

در رابطه ی شماره ۸،  $R_j$  مجموعه اندیس متغیرهایی است که توسط  $x_j$  پوشش داده می شوند. همان طور که پیش تر اشاره شد، نقاطی که قبلاً پوشش یافته اند معاف از استقرارند؛ اما همچنان کاندیدای استقرار باقی خواهند ماند، تا زمانی که به جز نقاط پوشش یافته نقاط دیگری را پوشش ندهند.

نحوه عملکرد الگوریتم به این صورت است که در گام اول برای تمامی نقاط کاندیدای استقرار، پارامتر بهبود  $b(x_j)$  محاسبه می شود. سپس متغیری که ماکزیمم بهبود را به خود اختصاص داده است به عنوان نقطه استقرار تسهیل در این گام انتخاب می شود و مقدار یک را به خود می گیرد. در مرحله بعد مقادیر بهبود به روزرسانی می شوند با این تفاوت که ضریب متغیرهایی که پیش تر توسط تسهیلات استقرار یافته، پوشش داده شده اند در قسمت  $\sum f_j$  برای محاسبه مقادیر بهبود لحاظ نمی گردند. در این مرحله متغیرهایی که توسط تسهیل مستقر شده پوشش می یابند در صورتی که پس از به روزآوری، متغیری به جز متغیرهایی که تا این مرحله پوشش یافته اند را پوشش ندهد، مقدار صفر را به خود می گیرند. این روند تا زمانی که تصمیم برای استقرار یا عدم استقرار همه متغیرها قطعی شود تکرار خواهد شد. پارامتر  $b(x)$  به عبارتی بیانگر میزان مطلوبیت متغیر  $x$  را برای استقرار نشان می دهد. به این صورت که می دانیم با استقرار تسهیل در نقطه مورد نظر سه متغیر (گروه) دیگر نیز پوشش می یابد در نتیجه عملاً عدم استقرار تسهیل دیگر در این سه، مطلوب ما خواهد بود چرا که همزمان پوشش این نواحی ارضا شده است و در عین حال به میزان ضرایب این سه متغیر در تابع هدف، کاهش هزینه خواهیم داشت. این کاهش هزینه در محاسبه بهبود به صورت  $\sum f_j$  آمده است، همچنین از آن جا که با استقرار

تسهیل در نقطه مورد نظر، به مقدار ضریب آن در تابع هدف متحمل هزینه خواهیم شد این مقدار نیز در محاسبه بهبود کسر می شود.

### ۵-۱ شبه کد الگوریتم پیشنهادی

به طور خلاصه، گام های اجرایی الگوریتم پیشنهادی در قالب شبه کد به شرح شکل ۴ خواهد بود. مطابق آنچه گفته شد، ابتدا مجموعه ی متغیرهایی که مقدار آن ها تخصیص داده نشده است تشکیل داده می شود که این مجموعه در مرحله نخست برابر با مجموعه اندیس تمامی متغیرها خواهد بود. در گام دوم، مجموعه های متشکل از اندیس متغیرهایی که توسط هر یک از متغیرهای گام اول پوشش داده می شوند، محاسبه می شوند. در گام سوم، مقدار بهبود به ازای متغیرهای گام اول محاسبه می شود. در گام بعد، اندیس متغیری که دارای بیش ترین بهبود است تعیین می گردد.

```

F= Set of objective function coefficients
A1= set of all Variable index
Repeat
  For j=A1 do
     $R_j \leftarrow$  set of Variable index that cover with  $x_j$ 
     $B(x_j) \leftarrow \text{Sum}(F, R_j) - F(j)$ 
  End
   $Y \leftarrow \text{Find}(\max(B(x_j)))$ 
   $x_y \leftarrow 1$ 
   $A2(\text{end}+1) \leftarrow y$ 
  For  $j=R_y$  do
     $B(x_j) \leftarrow \text{Sum}(F, R_j - R_y) - F(j)$ 
    If  $(B(x_j) \leq 0)$  then  $x_j \leftarrow 0$ 
     $A2(\text{end}+1) \leftarrow j$ 
  End
End
 $A1 \leftarrow A1 - A2$ 
Until  $\text{size}(A1) = 0$ 

```

شکل ۴. شبه کد الگوریتم ابتکاری پیشنهادی

در گام پنجم، به متغیری که بیش ترین مقدار بهبود را دارا است، مقدار ۱ و به متغیرهایی که توسط آن متغیر پوشش داده می شوند و میزان بهبود برای آن ها بدون در نظرگیری متغیرهای پوشش داده شده کم تر مساوی صفر است، مقدار صفر اختصاص می یابد. گام های یک تا پنج تا مادامی که به تمامی متغیرها مقدار اختصاص یابد، تکرار خواهد شد.

## ۵-۲ حل نمونه مساله‌ای با استفاده از الگوریتم پیشنهادی

برای نمایش چگونگی عملکرد الگوریتم پیشنهادی، در این بخش نمونه مساله‌ای به صورت گام به گام با این الگوریتم حل خواهد شد. به این منظور، به عنوان نمونه فرض کنید مجموعه متغیرهای  $\{x_1, x_2, \dots, x_v\}$  را داریم.

$D_c$  شعاع پوشش و  $d(x_i, x_j)$  فاصله دو متغیر از هم است. همچنین داشته باشیم:

$$\{x_2, x_3, x_4\} = \{x \mid d(x, x_1) \leq D_c\} \quad (9)$$

$$\{x_1, x_4\} = \{x \mid d(x, x_2) \leq D_c\} \quad (10)$$

$$\{x_1, x_4\} = \{x \mid d(x, x_3) \leq D_c\} \quad (11)$$

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{x \mid d(x, x_4) \leq D_c\} \quad (12)$$

$$\{x_4\} = \{x \mid d(x, x_5) \leq D_c\} \quad (13)$$

$$\{x_4\} = \{x \mid d(x, x_6) \leq D_c\} \quad (14)$$

$$\{\} = \{x \mid d(x, x_v) \leq D_c\} \quad (15)$$

به فرض در مرحله اول  $x_1$  مقدار ۱ را به خود تخصیص می‌دهد. در مرحله دوم بهبود برای متغیرهای باقی مانده به ترتیب زیر محاسبه می‌شود:

$$b(x_2) = R_2 - f_2 = -f_2, \quad R_2 = (f_4 + f_1) \quad (16)$$

$$b(x_3) = R_3 - f_3 = -f_3, \quad R_3 = (f_4 + f_1) \quad (17)$$

$$b(x_4) = (f_5 + f_6 + R_4) - f_4 = (f_5 + f_6) - f_4, \quad R_4 = (f_4 + f_1) \quad (18)$$

$$b(x_5) = R_5 - f_5 = -f_5, \quad R_5 = (f_4) \quad (19)$$

$$b(x_6) = R_6 - f_6 = -f_6, \quad R_6 = (f_4) \quad (20)$$

$$b(x_v) = R_v - f_v = -f_v, \quad R_v = () \quad (21)$$

مقادیر  $R_j$ ، مجموع ضرایب در تابع هدف متغیرهایی است که پوشش داده شده‌اند و در بهبود محاسبه نمی‌شوند. برای متغیرهای  $x_2$  و  $x_3$  چون پیش‌تر (توسط  $x_1$ ) پوشش داده شده‌اند مقدارشان صفر است مگر این که در این مرحله برای ما بهبودی به همراه داشته باشند که در این نمونه این گونه نیست و تصمیم بر صفر شدن آن‌ها خواهد بود. متغیر  $x_4$  نیز مانند  $x_2$  و  $x_3$  بررسی می‌شود. متغیر  $x_4$  در صورت داشتن هزینه‌ای کم‌تر مساوی و یا حتی بیش‌تر از  $x_5, x_6, x_v$  در صورتی که مقدار بهبود مثبتی داشته باشد مقدار ۱ را به خود می‌گیرد.

مرحله سوم:

$$b(x_5) = R_5 - f_5 = -f_5, \quad R_5 = (f_4) \quad (22)$$

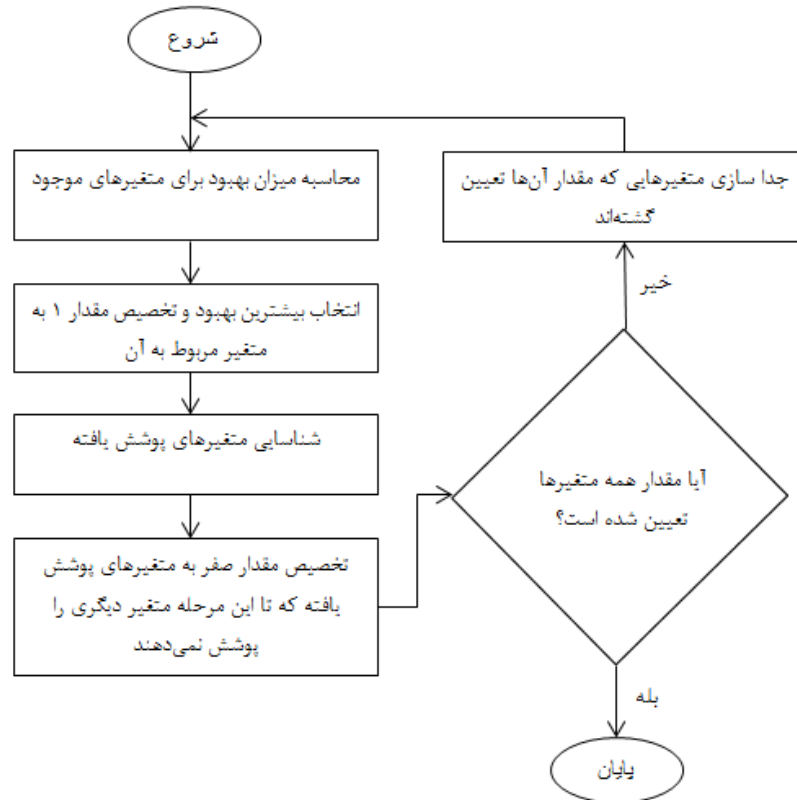
$$b(x_6) = R_6 - f_6 = -f_6, \quad R_6 = (f_4) \quad (23)$$

$$b(x_v) = R_v - f_v = -f_v, \quad R_v = () \quad (24)$$

برای متغیرهای  $x_5$  و  $x_6$  چون پیش‌تر (توسط  $x_4$ ) پوشش داده شده‌اند مقدارشان صفر است مگر این که در این مرحله برای ما بهبودی به همراه داشته باشند که در اینجا این گونه نیست و تصمیم بر صفر شدن آن‌ها خواهد بود. متغیر  $x_v$  نیز بدون رقیب مقدار ۱ را به خود اختصاص خواهد داد.

### ۳-۵ فلوچارت الگوریتم پیشنهادی

برای درک بهتر از چگونگی عملکرد الگوریتم پیشنهادی ارائه شده، شمای کلی آن در شکل ۵ آمده است.



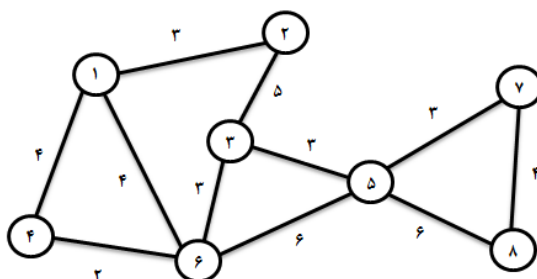
شکل ۵. فلوچارت الگوریتم ابتکاری پیشنهادی

### ۶ نتایج محاسباتی

جهت ارزیابی عملکرد الگوریتم پیشنهادی در این مقاله، گزارش اجرای کد متلب<sup>۱</sup> این الگوریتم بر روی ۲۰ نمونه مساله طرح شده در ابعاد مختلف ثبت شده و همراه با نتایج اجرای الگوریتم فرا ابتکاری شبیه سازی تیریدی برای این مسایل پس از ۱۰ بار اجرای برنامه، بهترین جواب های ثبت شده در جدول شماره ۳ آمده است. مساله اصلی مورد استفاده در این مقاله، مساله پوشش کاملی با ۱۰۰۰ متغیر  $(x_j)$  و ۲۰۰ محدودیت کاربردی که تضمین کننده پوشش یافتن تمامی ۱۰۰۰ نقطه تقاضا است. ضرایب این مساله به صورت آماده و از پیش تعیین شده در وبسایت OR-library موجود است که مجموعه ضرایب هزینه استقرار و شماره اندیس متغیرهایی  $a_{ij} = 1$  که است در زیر مجموعه های مساله Set Covering Problem با نام های SCP41، SCP51 و ... موجود است. سایر مسایل مورد استفاده در این مقاله به صورت تصادفی طراحی و آزمون شده است. همچنین ابتدا، نمونه مساله ای در ابعاد کوچک برای درک روند حل الگوریتم پیشنهادی و مقایسه آن با جواب دقیق به دست آمده از نرم افزار گمز<sup>۲</sup>، در ادامه حل شده است.

<sup>۱</sup> Matlab

<sup>۲</sup> GAMS



شکل ۶. یک نمونه مساله پوشش با ابعاد ۸ گره و ۱۱ یال

نمونه مساله ای مطابق شکل ۶ را در نظر بگیرید که فاصله پوشش برای آن برابر  $D_c = 6$  و تابع هزینه ی آن به شکل زیر است:

$$\text{Min } Z = 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 3x_6 + 4x_7 + 4x_8 \quad (25)$$

با توجه به شکل، محدودیت های این مساله به ترتیب زیر خواهد بود:

s.t.

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_6 \geq 1 \quad (26)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \quad (27)$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 1 \quad (28)$$

$$x_1 + x_3 + x_4 + x_6 \geq 1 \quad (29)$$

$$x_2 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 1 \quad (30)$$

$$x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 1 \quad (31)$$

$$x_2 + x_5 + x_7 + x_8 \geq 1 \quad (32)$$

$$x_5 + x_7 + x_8 \geq 1 \quad (33)$$

در صورت حل مساله با استفاده از الگوریتم پیشنهادی، در گام اول با محاسبه مقادیر بهبود برای هر متغیر خواهیم داشت:

$$b(x_1) = 2+3+3-2=6 \quad (34)$$

$$b(x_2) = 2+6-2=6 \quad (35)$$

$$b(x_3) = 2+3+4+3+4-6=10 \quad (36)$$

$$b(x_4) = 2+6+3-3=8 \quad (37)$$

$$b(x_5) = 6+3+4+4-4=13 \quad (38)$$

$$b(x_6) = 2+6+3+4-3=12 \quad (39)$$

$$b(x_7) = 6+4+4-4=10 \quad (40)$$

$$b(x_8) = 4 + 4 - 4 = 4 \quad (41)$$

در این مرحله متغیر  $x_8$  مقدار ۱ را به خود اختصاص داده و مقادیر بهبود برای گام دوم به روزرسانی می شود. در نتیجه برای مقادیر بهبود در گام دوم خواهیم داشت:

$$b(x_1) = 2 + 3 - 2 = 3 \quad (42)$$

$$b(x_7) = 2 - 2 = 0 \quad (43)$$

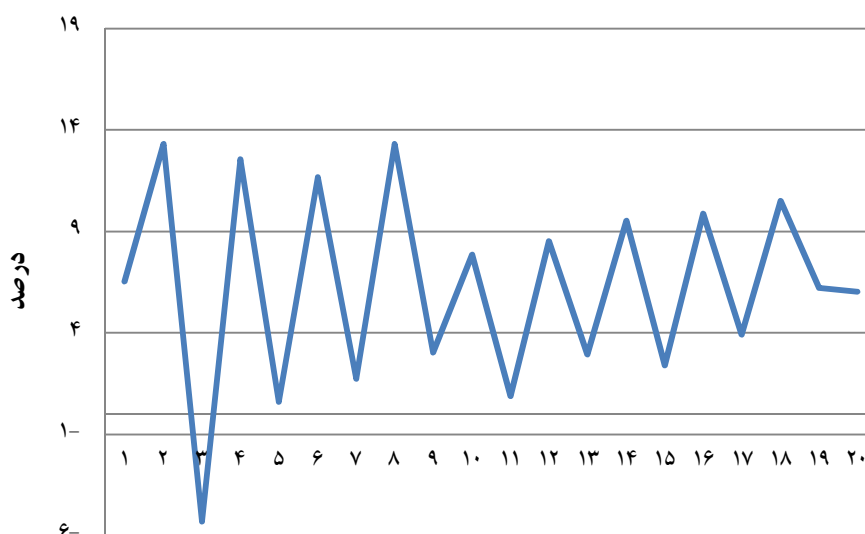
$$b(x_9) = 2 - 3 = -1 \quad (44)$$

در این مرحله نیز متغیر  $x_1$  مقدار ۱ را به خود اختصاص داده و با پوشش تمامی نقاط تقاضا، الگوریتم به پایان می رسد. در نهایت مقدار تابع هدف برای این مساله با توجه به الگوریتم پیشنهادی برابر با  $Z = 2 + 4 = 6$  خواهد شد.

مقادیر جواب برای این مساله از روش های حل دقیق آن در نرم افزار گمز، یکسان و برابر ۶ به دست می آید که این موضوع بر عملکرد خوب و قابل قبول الگوریتم پیشنهادی صحنه می گذارد.

نقطه قوت الگوریتم در مسایل با ابعاد بالا مشخص می گردد که در جدول ۳ بدان تاکید شده است. با توجه به این موضوع، در مسایل با ابعاد کوچک چندان اهمیت الگوریتم به لحاظ زمانی قابل درک نیست؛ بلکه در ابعاد بزرگ مساله است که می توان از این الگوریتم ابتکاری برای زمان بسیار مناسب و کیفیت مطلوب جواب استفاده نمود.

برای مقایسه بهتر عملکرد روش های حل استفاده شده برای مسایل مختلف جدول ۳، درصد کاهش میزان هزینه تابع هدف توسط الگوریتم پیشنهادی به کاهش میزان هزینه تابع هدف با استفاده از الگوریتم شبیه سازی تبریدی محاسبه شده و در نمودار شکل ۷ به ازای مسایل مختلف ترسیم شده است. آنچه در نمودار شکل ۷ قابل مشاهده است، الگوریتم پیشنهادی در اغلب مسایل، جواب بهتری نسبت به الگوریتم شبیه سازی تبریدی به دست آورده است.



شکل ۷. درصد کاهش مقدار تابع هدف توسط الگوریتم پیشنهادی نسبت به SA

**جدول ۳.** نتایج اجرای ۲۰ نمونه مساله طرح شده

| نمونه مساله     | تعداد نقاط تقاضا (node) | تعداد یالها | مجموع ضرایب تابع هدف | نتایج حل مساله با الگوریتم SA |                        |                   | نتایج حل مساله با الگوریتم پیشنهادی |                        |                   |
|-----------------|-------------------------|-------------|----------------------|-------------------------------|------------------------|-------------------|-------------------------------------|------------------------|-------------------|
|                 |                         |             |                      | مقدار تابع هدف                | تعداد نقاط تخصیص یافته | زمان اجرا (ثانیه) | مقدار تابع هدف                      | تعداد نقاط تخصیص یافته | زمان اجرا (ثانیه) |
| ۱               | ۱۰۰                     | ۳۲۹         | ۴۴۶                  | ۹۲                            | ۲۲                     | ۰/۶۸              | ۸۶                                  | ۲۲                     | ۰/۰۳              |
| ۲               | ۱۰۰                     | ۳۳۳         | ۱۴۶۴                 | ۲۹۳                           | ۲۳                     | ۰/۷۴              | ۲۵۴                                 | ۲۲                     | ۰/۰۳              |
| ۳               | ۲۰۰                     | ۶۷۴         | ۱۸۳۰                 | ۳۵۸                           | ۴۱                     | ۱/۰۱              | ۳۷۷                                 | ۴۴                     | ۰/۰۸              |
| ۴               | ۲۰۰                     | ۶۶۵         | ۲۸۶۷                 | ۵۸۹                           | ۴۶                     | ۰/۸۲              | ۵۱۵                                 | ۴۲                     | ۰/۰۷              |
| ۵               | ۳۰۰                     | ۱۰۰۴        | ۴۳۹۲                 | ۸۳۹                           | ۶۶                     | ۰/۹۵              | ۸۳۴                                 | ۶۷                     | ۰/۱۶              |
| ۶               | ۳۰۰                     | ۹۹۸         | ۴۲۸۲                 | ۸۷۴                           | ۶۹                     | ۰/۹۰              | ۷۷۲                                 | ۶۵                     | ۰/۱۷              |
| ۷               | ۴۰۰                     | ۱۳۵۱        | ۸۰۶۵                 | ۱۵۵۹                          | ۸۳                     | ۱/۵۶              | ۱۵۳۲                                | ۸۹                     | ۰/۳۲              |
| ۸               | ۴۰۰                     | ۱۳۳۰        | ۵۸۵۶                 | ۱۱۷۲                          | ۹۲                     | ۱/۰۴              | ۱۰۱۶                                | ۸۸                     | ۰/۳۴              |
| ۹               | ۵۰۰                     | ۱۶۸۰        | ۸۵۱۱                 | ۱۶۵۹                          | ۱۰۶                    | ۱/۸۸              | ۱۶۰۹                                | ۱۱۱                    | ۰/۷۰              |
| ۱۰              | ۵۰۰                     | ۱۶۷۱        | ۶۴۵۸                 | ۱۲۲۳                          | ۱۱۱                    | ۱/۲۴              | ۱۱۲۷                                | ۱۰۹                    | ۰/۷۲              |
| ۱۱              | ۶۰۰                     | ۲۰۲۵        | ۹۸۹۵                 | ۱۹۱۷                          | ۱۲۴                    | ۲/۳۸              | ۱۹۰۰                                | ۱۳۳                    | ۱/۳۷              |
| ۱۲              | ۶۰۰                     | ۱۹۹۹        | ۶۹۰۴                 | ۱۳۲۶                          | ۱۳۴                    | ۱/۵۱              | ۱۲۱۳                                | ۱۳۱                    | ۱/۳۹              |
| ۱۳              | ۷۰۰                     | ۲۳۵۵        | ۱۲۴۵۷                | ۲۴۲۸                          | ۱۴۸                    | ۲/۸۶              | ۲۳۵۷                                | ۱۵۶                    | ۲/۳۳              |
| ۱۴              | ۷۰۰                     | ۲۳۳۶        | ۹۳۲۵                 | ۱۸۱۵                          | ۱۵۷                    | ۱/۸۱              | ۱۶۴۲                                | ۱۵۱                    | ۲/۲۴              |
| ۱۵              | ۸۰۰                     | ۲۶۹۸        | ۱۵۸۹۴                | ۳۱۱۸                          | ۱۶۷                    | ۳/۲۱              | ۳۰۴۳                                | ۱۷۸                    | ۳/۴۷              |
| ۱۶              | ۸۰۰                     | ۲۶۶۹        | ۱۰۷۴۰                | ۲۰۹۷                          | ۱۸۰                    | ۲/۰۳              | ۱۸۹۰                                | ۱۷۳                    | ۳/۴۷              |
| ۱۷              | ۹۰۰                     | ۲۹۳۰        | ۱۷۴۸۸                | ۳۵۴۶                          | ۱۹۷                    | ۳/۵۲              | ۳۴۰۷                                | ۲۰۲                    | ۴/۶۵              |
| ۱۸              | ۹۰۰                     | ۳۰۰۱        | ۱۲۳۱۴                | ۲۳۹۵                          | ۲۰۳                    | ۲/۳۰              | ۲۱۴۳                                | ۱۹۷                    | ۴/۶۴              |
| ۱۹ <sup>a</sup> | ۱۰۰۰                    | ۳۲۶۱        | ۱۹۷۱۱                | ۳۹۶۹                          | ۲۲۰                    | ۱/۸۲              | ۳۷۲۲                                | ۲۲۷                    | ۶/۶۲              |
| ۲۰ <sup>b</sup> | ۱۰۰۰                    | ۳۳۵۱        | ۱۴۹۶۹                | ۲۹۱۱                          | ۲۱۶                    | ۴/۰۶              | ۲۷۳۶                                | ۲۲۰                    | ۶/۳۶              |

a و b به ترتیب از زیرمجموعه‌های مساله Set Covering Problem با نام‌های SCP41، SCP51 از وبسایت OR-library آورده شده است. سایر مسایل توسط نویسندگان بازتولید شده است.

به‌طور کلی می‌توان گفت با توجه به جدول ۳ و نمودار شکل ۷، الگوریتم پیشنهادی در مقایسه با الگوریتم SA که توسط روش تاگوچی پارامترهای آن تنظیم یافته‌اند از کیفیت جواب بهتری برخوردار است. همچنین شایان ذکر است، نقطه قوت الگوریتم پیشنهادی در مسایل با ابعاد بالا (Np-hard) با تعداد تکرار چندجمله‌ای است که در این مقاله بدان تاکید شده است. از آنجا که بهترین جواب به‌دست آمده از الگوریتم SA با توجه به ذات تصادفی آن پس از ۱۰ بار اجرا آورده شده است، عملاً زمان حل الگوریتم ۱۰ برابر مقدار فعلی خواهد بود که برای بررسی بدینانه الگوریتم از آن چشم‌پوشی شده است. به عبارت دیگر بهترین جواب الگوریتم پس از ۱۰ بار اجرا آورده شده است در صورتی که زمان یک‌بار اجرای الگوریتم گزارش شده است؛ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که از منظر کیفیت جواب الگوریتم ابتکاری پیشنهادی در مجموع ۱۰ بار اجرای الگوریتم SA بهتر عمل می‌نماید و به لحاظ زمانی با الگوریتم SA قابل رقابت است.

## ۷ نتیجه گیری

در این مقاله یک الگوریتم جدید برای حل مساله پوشش مجموعه با استفاده از محاسبه مقادیر بهبود و وزن دهی ارائه شد. چنانچه که ذکر شد با توجه به پیچیدگی زمانی این مساله، الگوریتم های ابتکاری با شروع از یک نقطه معین از موفقیت بیشتری برخوردار بوده اند. در الگوریتم پیشنهادی با استفاده از مکانیسم تعریف شده، در هر گام مجموعه پوشش ایجاد شده و با استفاده از مکانیسم بهبود، راه حل بهبود یافته و نتایج مطلوبی برای پوشش مجموعه در حالت راسی به دست آمده است. با توجه به پیچیدگی نمایی مساله پوشش، نمی توان در یک زمان منطقی، به جواب بهینه دست یافت. برای حل نمونه مسایل ارائه شده در این مقاله به روش دقیق با استفاده از نرم افزار گمز خطای محدودیت منابع مشاهده شد. از این رو در این مقاله تنها به ارائه مقایسه نتایج به دست آمده از روش های فرا ابتکاری برای مسایل بزرگ اکتفا شد. در نتایج آزمایش ها نشان داده شد که الگوریتم پیشنهادی، نسبت به روش های دیگر، که به عنوان نمونه در این مقاله یک الگوریتم شبیه سازی تیریدی که با استفاده از روش تاگوچی به تنظیم پارامترهای آن پرداخته شد، ارائه گشت، از بهبود نسبی برخوردار است. به عبارت دیگر الگوریتم پیشنهادی از کیفیت جواب مطلوب تری نسبت به الگوریتم SA برخوردار است و از لحاظ زمانی نیز کاملاً قابل رقابت است. همچنین جهت مطالعات آتی در این زمینه پیشنهاد می شود الگوریتم ارائه شده برای مسایل دیگر از جمله حالت عدم قطعیت توسعه داده شود، از این روش و تعمیم آن برای سایر مسایل Np-hard استفاده شود، به بررسی این که آیا از تلفیق این الگوریتم با سایر الگوریتم ها می توان به روشی کارآمدتر دست یافت یا خیر، پرداخته شود.

## منابع

- [۷] طالبیان شریف، م.، سالاری، م.، اشتهدی، ر.، الهیاری، س.، (۱۳۹۱). ارائه روشی ابتکاری برای مساله مسیریابی - پوشش وسیله ی نقلیه ی ظرفیت دار، نهمین کنفرانس بین المللی مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران.
- [۸] برزین پور ف.، صفاریان م.، تیموری ا.، (۱۳۹۳). الگوریتم فرا ابتکاری برای حل مدل برنامه ریزی چندهدفه مکان یابی و تخصیص سه سطحی در لجستیک امداد. تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۱ (۲)، ۵۰-۲۷
- [۱۹] برزین پور ف.، صفاریان م.، ماکویی ا.، تیموری ا.، (۱۳۹۳). مدل مکان یابی - مسیریابی چندهدفه در مدیریت زنجیره ی امداد با رویکرد دوره ای. تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۱ (۳): ۹۱-۷۱
- [۲۶] خیری نیا، ع.، (۱۳۸۲)، حل یک مساله مکان یابی - تخصیص با استفاده از یکی روش های فوق ابتکاری (SA)، پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی صنایع، دانشگاه تهران.

- [1] Zanjirani Farahani, R., Asgari, N., Heidari, N., Hosseini, M., Goh, M., (2012). Covering problems in facility location: A review. Computers & Industrial Engineering, 62, 368-407.
- [2] Fallah, H., NaimiSadigh, A., Aslanzadeh, M., (2009). Covering problem. In Facility location: Concepts, models, algorithms and case studies. Heidelberg, Germany: Physica Verlag.
- [3] Lee, G., Murray, A. T., (2010). Maximal covering with network survivability requirements in wireless mesh networks. Computers, Environment and Urban Systems, 34, 49-57.
- [4] Bouamama, S., Blum, C., Boukerram, A., (2012). A population-based iterated greedy algorithm for the minimum weight vertex cover problem. Applied Soft Computing, 12(6), 1632-1639.
- [5] Jain, A. K., Khare, V. K., Mishra, P. M., (2013). Facility Planning and Associated Problems: A Survey, International Conference on Recent Trends in Applied Sciences with Engineering Applications, Innovative Systems Design and Engineering, 4(6), 1-8.

- [6] Naimi Sadigh, A., Mozafari, M., Husseinzadeh Kashan, A., (2010). A mixed integer linear program and tabu search approach for the complementary edge covering problem. *Advances in Engineering Software* 41(5), 762-768.
- [9] Benkoczi, R., Bhattacharya, B., Hu, Y., Lin, C. H., Shi, Q., Wang, B. F., (2012). Efficient algorithms for the conditional covering problem. *Information and Computation*, 219, 34-57.
- [10] Mohammadi, M., Jolai, F., Tavakkoli-Moghaddam, R., (2013). Solving a new stochastic multi-mode p-hub covering location problem considering risk by a novel multi-objective algorithm. *Applied Mathematical Modelling*, 37(24), 10053-10073.
- [11] Murray, A. T., Wei, R., (2013). A computational approach for eliminating error in the solution of the location set covering problem. *European Journal of Operational Research*, 224, 52-64.
- [12] Hosseini-zhad, S. J., Jabalameli, M. S., Jalali Naini, S. G., (2013). A continuous covering location model with risk consideration. *Applied Mathematical Modelling*, 37(23), 9665-9676.
- [13] Shieh, B., (2013). Solution to the covering problem. *Information Sciences*, 222, 626-633.
- [14] Glover, F., (2013). Advanced greedy algorithms and surrogate constraint methods for linear and quadratic knapsack and covering problems. *European Journal of Operational Research*, 230(2), 212-225.
- [15] Luciana S. P., Resende, M. G. C., Ribeiro, C. C., (2013). A hybrid Lagrangean heuristic with GRASP and path-relinking for set k-covering. *Computers & Operations Research*, 40(12), 3132-3146.
- [16] Naji-Azimi, Z., Salari, M., (2014). The time constrained maximal covering salesman problem. *Applied Mathematical Modelling*, 38, 3945-3957.
- [17] Zanjirani Farahani, R., Hassani, A., Mousavi, S. M. Baygi, M. B., (2014). A hybrid artificial bee colony for disruption in a hierarchical maximal covering location problem. *Computers & Industrial Engineering*, 75, 129-141.
- [18] Orsenigo, C., (2014). An improved set covering problem for Isomap supervised landmark Selection. *Pattern Recognition Letters*, 49, 131-137.
- [20] Florios, K., Mavrotas, G., (2014). Generation of the exact Pareto set in Multi-Objective Traveling Salesman and Set Covering Problems. *Applied Mathematics and Computation*, 237, 1-19.
- [21] Dhahri, A., Zidi, K., Ghedira, K., (2014). Variable neighborhood search based set covering ILP model for the vehicle routing problem with time windows, 14th International Conference on Computational Science, *Procedia Computer Science*, 29, 844-854.
- [22] Horak, P., McAvaney, K., (2008). On covering vertices of a graph by trees. *Discrete Mathematics*, 308(19), 4414-4418.
- [23] Chiba, S., Fujita, S., (2013). Covering vertices by a specified number of disjoint cycles, edges and isolated vertices. *Discrete Mathematics*, 313(3), 269-277.
- [24] Richter, S., Helmert, M., Gretton, C., (2007). A stochastic local search approach to vertex cover. In *KI 2007: Advances in Artificial Intelligence*, Springer, 412-426.
- [25] Halperin, E., (2002). Improved approximation algorithms for the vertex cover problem in graphs and hypergraphs. *SIAM Journal on Computing*, 31(5), 1608-1623.
- [27] Nandhini, M., Kanmani, S., (2009). A survey of simulated annealing methodology for university course timetabling. *International Journal of Recent Trends in Engineering*, 1(2), 255-257.
- [28] Mori, T., (1990). *The new experimental design, Taguchi's approach to quality engineering*, ASI Press, 1st Edition, Printed In the USA.
- [29] Park, S. H., (1995). *Robust design and analysis for quality engineering*, Chapman & Hall, 1st Edition, London.