مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال چهاردهم، شماره سوم (پیاپی ۵۴)، پاییز ۹۶، ص ص ۵۳-۳۵
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

استوارسازی مدل‌های DEA برای شناسایی واحدهای دارای بدترین عملکرد

علی اصغر عرب مالدار*[1]، فرانک حسین‌زاده سلجوقی[2]
۱- دانشجوی دکتری، دانشگاه سیستان و بلوچستان، گروه ریاضی کاربردی، زاهدان، ایران
۲- استادیار، دانشگاه سیستان و بلوچستان، گروه ریاضی کاربردی، زاهدان، ایران

رسید مقاله: ۲۰ اسفند ۱۳۹۵
پذیرش مقاله: ۸ مرداد ۱۳۹۶

چکیده
مدل‌های کلاسیک تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) هر یک از واحدهای تصمیم‌گیرنده (DMU) را براساس مطلوب‌ترین حالت برای شناسایی واحدهای دارای بهترین عملکرد مورد ارزیابی قرار می‌دهند. در واقع، مدل‌های کلاسیک DEA کارایی هر واحد را در مقایسه با کاراترین واحد اندازه‌گیری می‌کنند و چون در این روش کارایی نسبی محاسبه می‌شود؛ بنابراین حداقل یکی از واحدها روی مرز کارایی قرار دارد. در مقابل مدل‌های DEA کلاسیک، مدل‌های دیگری وجود دارند که DMUها را براساس نامطلوب‌ترین حالت مورد ارزیابی قرار می‌دهند و با تشکیل مرز ناکارایی، واحدهای دارای بدترین عملکرد را شناسایی می‌کنند. در این مقاله با استفاده از رویکرد بهینه‌سازی استوار، دو مدل برای ارزیابی عملکرد DMUها تحت نامطلوب‌ترین حالت ارایه می‌شود و هدف به‌دست آوردن واحدهای دارای بدترین عملکرد با داده‌های دارای عدم قطعیت و بازه‌ای می‌باشد. همچنین برای تعیین واحدهای دارای بدترین عملکرد، مفهوم ابرکارایی را به کار بردیم و آن را ابرناکارایی نامیدیم. با استفاده از دو مثال عددی قابلیت مدل‌های پیشنهادی در ارایه رتبه‌بندی مورد اطمینان و شناسایی واحدهای دارای بدترین عملکرد مورد بررسی قرار گرفته است.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، بهینه‌سازی استوار، عدم قطعیت، رتبه‌بندی، بدترین عملکرد.

۱ مقدمه
تحلیل‌پوششی‌داده‌ها[2] (DEA) روشی ناپارمتریک براساس برنامه‌ریزی خطی است که متشکل از چندین مجموعه مشابه از ورودی‌ها و خروجی‌ها برای اندازه‌گیری کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده[3] (DMU) متجانس استفاده می‌شود. برای اولین بار چارنز، کوپر و رودز (CCR) [۱] مدل DEA تحت بازده به مقیاس ثابت را ارایه کردند و سپس بنکر، چارنز و کوپر[4] (BCC) [۲] مدل DEA تحت بازده به مقیاس متغیر را ارایه نمودند. مدل‌های DEA را

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: Aliasghar.Arabmaldar@gmail.com

[2] Data envelopment analysis
[3] Decision making units
[4] Banker, Charnes and Cooper

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-01]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.3.4.3]

می‌توان به طورکلی به دو دسته مدل‌های شعاعی و غیرشعاعی طبقه‌بندی کرد. مدل‌های DEA کلاسیک را می‌توان برای شناسایی واحدهای دارای بهترین عملکرد[1] در مطلوب‌ترین (بهترین) حالت مورد استفاده قرار داد. واحدهای کارا دارای مقدار کارایی ماکزیمم یک می‌باشند و روی مرزکارایی قرار دارند. برای رتبه‌بندی واحدهای کارا، اندرسن و پترسن [۳] روش ابرکارایی در DEA را پیشنهاد کردند. در روش ارایه شده توسط آن‌ها واحدهای روی مرز کارایی می‌توانند مقادیرکارایی بیش تر از یک به‌دست آورند که با حذف واحد تحت ارزیابی از مجموعه واحدها نتیجه می‌شود. برای شناسایی واحدهای دارای عملکرد بد، مانند بنگاه‌های ورشکسته در نامطلوب‌ترین (بدترین) حالت، رویکرد مشابهی به نام ارزیابی بدترین کارایی (ناکارایی) وجود دارد که از مرز تولید ناکارا برای تعیین بدترین مقدارکارایی نسبی ممکن که می‌توان به هرDMU اختصاص داد، استفاده می‌کند. بنابراین DMUهای واقع شده بر مرز تولید ناکارا به عنوان ناکارای بدبینانه معرفی می‌شوند[۴].

کاربردهایی از روش‌های DEA براساس بدترین حالت عملکرد را می‌توان در تحقیقات انجام گرفته توسط پارادی و همکاران [۵]، شائو و لی [۶] و لیو و چن [۷] یافت. بعد از آن که پارادی و همکاران [۵] برای اولین بار مفهوم DEA بدترین عملکرد[2] (WP-DEA) را پیشنهاد کردند، این مفهوم برای مواجهه با داده‌های نادقیق توسط شائوو لی [۶] به کاربرده شد. سپس لیو وچن [۷] مدل شعاعی را براساس مرز بدترین عملکرد DEA توسعه دادند. همچنین لیو و چن [۸] مدلی براساس اندازه‌گیری ناکارایی براساس متغیرهای کمکی را برای یافتن واحدهای دارای بدترین عملکرد پیشنهاد دادند. عزیزی و آجیرلو [۹] مدل‌هایی را برای اندازه‌گیری بدترین عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری در حضورعوامل غیراختیاری و داده‌های نادقیق براساس مدل‌های ارایه شده توسط وانگ و همکاران [۱۰] که در مورد بررسی کارایی بازه‌ای مدل‌های DEA است، ارایه کردند. در واقع WP-DEA عملکرد شرکت‌ها را در بدترین حالت مورد ارزیابی قرار می‌دهد. این مفهوم روش مناسبی برای مساله ارزیابی ریسک سرمایه‌گذاری است که در آن نیاز به شناسایی شرکت‌هایی با بدترین عملکرد (مستعد ورشکستگی) است. در واقع با این مفهوم می‌توان برای جلوگیری از ورشکستگی شرکت‌های دارای بدترین عملکرد، پیشگوئی انجام داد و تصمیمات بهتری برای بهبود عملکرد این واحدها اتخاذ کرد.

در دنیای واقعی با موقعیت‌هایی مواجهه می‌شویم که پارامترها دارای عدم‌قطعیت هستند و به کارگیری مدل‌های DEA کلاسیک در این موقعیت‌ها منجر به رتبه‌بندی غیرقابل اعتماد می‌شود. رویکرد بهینه‌سازی استوار برای حل مسایل برنامه‌ریزی خطی با داده‌های دارای عدم قطعیت، اولین بار توسط سویستر [۱۱] پیشنهاد شده‌است. تحت این رویکرد، تصمیم‌گیرنده به دنبال جوابی بهینه برای مقادیر اسمی داده‌ها است که با در نظرگرفتن تغییرات در داده‌ها، جواب به دست‌آمده همچنان شدنی و نزدیک بهینه باقی بماند. بن-تال و نمیروسکی [۱۲و۱۳] نشان دادند که حتی انحرافی کوچک در محدودیت‌ها باعث تغییری بزرگ در جواب خواهد شد. روش‌های زیادی، که رویکرد بهینه‌سازی استوار نامیده می‌شود، برای مواجهه با مسایلی که دارای عدم قطعیت در پارامترهای خود هستند در [۱۴] پیشنهاد شده است. ال-قویی و لبرت [۱۵] ، و ال-قویی و همکاران [۱۶] رویکرد بهینه‌سازی استوار

[1] Best-Practice
[2] Worst-practice DEA

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-01]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.3.4.3]

را برای مسایل برنامه‌ریزی خطی با مجموعه‌های دارای عدم قطعیت بیضوی به کاربردند. برتسیماس و سیم [۱۷] روشی را پیشنهاد دادند که امکان انعطاف‌پذیری و تعامل بین بدترین وضعیت و هزینه وارد شده بر اثر این آشفتگی در داده‌ها بر مقدار تابع هدف را می‌دهد. در ادامه، مروری در مورد کارهای انجام‌گرفته در زمینه وجود داده‌های غیرقطعی در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها که با استفاده از رویکرد بهینه‌سازی استوار انجام شده‌اند، آورده شده است.

وانگ و وی [۱۸]، مواردی را بررسی کردند که با وجود داده‌های غیرقطعی در مدل های DEA رتبه‌بندی‌ها و مقادیر کارایی به‌دست‌آمده قابل اطمینان نیستند و سپس براساس رویکرد بن-تال و نمیروسکی [۱۳] و با در نظرگرفتن مدل‌های DEA در ماهیت‌های ورودی و خروجی، مدل‌هایی استوار برای مواجهه چنین مسایلی را ارایه کردند. سجادی و عمرانی [۱۹] با در نظرگرفتن عدم‌قطعیت در پارامترهای خروجی و براساس رویکرد بن-تال و نمیروسکی [۱۳] و برتسیماس و سیم [۱۷] دو مدل DEA استوار برای فرم مضربی CCR پیشنهاد دادند. آن ها از این روش برای تخمین کارایی و به‌دست آوردن رتبه‌بندی برای شرکت‌های توزیع برق در ایران استفاده کردند و آن را با نتایج به‌دست آمده با مدل تحلیل مرز تصادفی (SFA)[1] مقایسه‌کردند. سجادی و عمرانی [۲۰] همچنین مدل DEA استوار بوت استرپ (BRDEA)[2] را با در نظرگرفتن عدم قطعیت در داده‌های خروجی برای شرکت‌های ارتباطی در ایران پیشنهاد دادند. در این روش ابتدا مقادیر کارایی استوار محاسبه شده و سپس با تکنیک بوت‌استرپ مقادیرکارایی و رتبه بندی‌های به‌دست آمده تصحیح می‌شوند. شکوهی و همکاران [۲۱] مدل‌های DEA استواری را ارایه کردند که عدم‌قطعیت را برای ورودی و خروجی به صورت داده‌های بازه‌ایی در نظرگرفتند و می‌توان آن‌ها را به عنوان روشی جایگزین برای مدل‌های DEA بازه‌ایی و فازی مورد استفاده قرارداد. سجادی و همکاران [۲۲] مدلDEA ابرکارایی[3] را براساس رویکرد بن-تال و نمیروسکی [۱۳] که مدلی مخروطی درجه دوم می‌باشد ارایه کردند و از این روش برای رتبه‌بندی واحدهای‌گاز استان‌های ایران استفاده کردند. سجادی و همکاران [۲۳] مدل DEA تعاملی استوار برای تعیین اهداف جایگزین در شرکت‌های توزیع برق ایران معرفی‌کردند. عمرانی [۲۴] مدل DEA استوار برای تعیین مجموعه وزن‌های مشترک با در نظرگرفتن وجود عدم‌قطعیت که به طور همزمان در ورودی‌ها و خروجی‌های مساله واحدهای تحت ارزیابی موجود باشد، معرفی‌کردند. چونگ-چن لو [۲۵] با در نظر گرفتن مدل BCC و براساس رویکرد بهینه‌سازی استوار بن-تال و نمیروسکی [۱۳] و برتسیماس و سیم [۱۷] دو مدل استوار برای تعیین ترکیب‌های کارا از عملگرهای الگوریتمی پیشنهاد دادند. همچنین صلاحی و همکاران [۲۶] با فرض بازده به مقیاس ثابت مدل استوار تحلیل پوششی داده‌ها ارایه کردند و اخیرا نیز صلاحی و همکاران [۲۷] همتای استوار مدل CCR در فرم پوششی را پیشنهاد کردند و نشان دادند که این مدل مشابه با همتای خوشبینانه مدل مضربی CCR است. سپس، از رویکرد پشنهاد شده برای به‌دست آوردن وزن‌های مشترک استفاده کردند.

[1] Stochastic Frontier Analysis
[2] Bootstrapped Robust Data Envelopment Analysis
[3] Super-Efficiency

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-01]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.3.4.3]

ادامه مقاله به صورت زیر بخش‌بندی می‌شود. در بخش ۲ مدل‌های مضربی و پوششی برای ارزیابی ناکارایی مدل CCR را بیان می‌کنیم. در بخش‌های ۳ و۴ مباحث اصلی مقاله ارایه شده است. در بخش ۳، جزئیات ریاضی مدل استوار شده براساس رویکرد برتسیماس و سیم [۱۷] برای ارزیابی عملکرد در بدترین حالت برای مدل پوششی CCR ارایه شده است. همچنین در بخش ۴ با استفاده از رویکرد برتسیماس و سیم [۱۷] مدلی دیگر برای ارزیابی ناکارایی با داده‌های بازه‌ایی ارایه شده است. در بخش ۵ با استفاده از نتایج عددی قابلیت و کاربردی بودن مدل‌های ارایه شده در این مقاله را برای تعیین واحدهای ناکارا نشان داده شده است.

۲ مدل CCR برای ارزیابی بدترین عملکرد داده‌های دقیق و بازه‌ایی

برای ارایه فرم برنامه‌ریزی ریاضی بدترین عملکرد مساله برنامه‌ریزی‌خطی‌کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$Min\ e_o = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}}$$

$$s.t. \qquad (1)$$

$$\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \le 1, \qquad j = 1,...,n,$$

$$u_r, v_i \ge 0, \qquad r = 1,...,s, \qquad i = 1,...,m.$$

که در آن x_{ij} و y_{rj} به ترتیب ورودی iام و خروجی rام از $\mathrm{DMU_j}\ (j = 1,...,n)$ می‌باشند. محدودیت‌ها در مدل (۱) بیان می‌کنند که نسبت مجموع وزن‌دار خروجی‌ها به مجموع وزن‌دار ورودی‌ها برای هر DMU باید بزرگ‌تر از یک باشند. در واقع جواب‌های بهینه $(\mathbf{v}^*, \mathbf{u}^*)$ که از مدل (۱) به‌دست می‌آیند نامطلوب‌ترین وزن‌ها برای $\mathrm{DMU_o}$ در حالت می‌نیمم‌سازی را نتیجه می‌دهند. به هر یک از DMUها نامطلوب‌ترین وزن‌ها اختصاص می‌یابد که مقادیرشان برای DMUهای متفاوت، متمایز می‌باشند. مدل برنامه‌ریزی‌کسری (۱) را می‌توان با استفاده از تبدیل چارنز و کوپر [۲۸] به مدل برنامه‌ریزی خطی زیر (فرم مضربی) تبدیل کرد:

$$Min\ e_o = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} s$$

$$s.t. \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} = 1,$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \ge 0, \qquad j = 1,...,n,$$

$$u_r, v_i \ge 0, \qquad r = 1,...,s, \qquad i = 1,...,m.$$

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-01]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.3.4.3]

برخلاف مدل‌های اصلی DEA، در مدل‌های DEA بازه‌ای فرض می‌شود که برخی مقادیر ورودی‌های x_{ij} و خروجی‌های y_{rj} نامعلوم هستند و تنها می‌دانیم که مقادیر ورودی و خروجی در بازه‌های معینی قرار دارند؛ یعنی $x_{ij} \in \left[x_{ij}^L, x_{ij}^U \right]$ و $y_{rj} \in \left[y_{rj}^L, y_{rj}^U \right]$، که در آن کران‌های بالا و پایین بازه‌ها معلوم می‌باشند و فرض می‌شود که $x_{ij}^L > 0$ و $y_{rj}^L > 0$.

$$
\begin{aligned}
&Min\ \theta_o^L = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}^L \\
&s.t. \\
&\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^U - \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^L \le 0, \qquad j = 1,\dots,n, \\
&\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}^U = 1, \\
&u_r, v_i \ge 0, \qquad r = 1,\dots,s, \qquad i = 1,\dots,m.
\end{aligned}
\tag{۳}
$$

$$
\begin{aligned}
&Min\ \theta_o^U = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}^U \\
&s.t. \\
&\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^U - \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^L \le 0, \qquad j = 1,\dots,n, \\
&\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}^L = 1, \\
&u_r, v_i \ge 0, \qquad r = 1,\dots,s, \qquad i = 1,\dots,m.
\end{aligned}
\tag{۴}
$$

در مدل‌های (۳) و (۴)، θ_o^L بدترین کارایی نسبی تحت نامطلوب‌ترین شرایط و θ_o^U بدترین کارایی نسبی تحت مطلوب‌ترین شرایط می‌باشند. در واقع این دو مقدار بازه‌ی کارایی بدبینانه $\left[\theta_o^L, \theta_o^U \right]$ را می‌سازند. خوانندگان علاقه‌مند برای اطلاعات بیش‌تر در مورد کارایی بازه‌ایی به وانگ و همکاران [۱۰] ارجاع داده می‌شوند.

با معرفی متغیرهای دوگان برای محدودیت تساوی و محدودیت‌های نامساوی در مدل (۲) به ترتیب با θ_o و $\lambda_j (j = 1,\dots,n)$، فرم پوششی دوگان مدل (۲) برای ارزیابی ناکارایی واحدها به صورت زیر به دست می‌آید که آن را با نام(WP-DEA) نشان می‌دهیم:

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-01]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.3.4.3]

$$
\begin{aligned}
&(WP\text{-}DEA):\\
&Max\ \ \theta^{*}=\theta_{o}\\
&s.t.\\
&\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\lambda_{j}\geq\theta_{o}x_{io}, \qquad i=1,\ldots,m,\\
&\sum_{j=1}^{n}y_{rj}\lambda_{j}\leq y_{ro}, \qquad r=1,\ldots,s,\\
&\lambda_{j}\geq 0, \qquad j=1,\ldots,n,\ \theta_{o}\ free.
\end{aligned}
\tag{۵}
$$

قضیه ۱. مقدار θ^{*} در مدل (۵) همواره بزرگتر از یا مساوی یک می‌باشد.

برهان. جواب شدنی $\theta_{o}=1$ ، $\lambda_{o}=1$ و $\lambda_{j}=0\ (j\neq o,\ j=1,\ldots,n)$ را در نظر بگیرید. از آنجایی که به ازای این جواب شدنی مقدار بهینه θ برابر یک است، بنابراین از این جواب شدنی نتیجه می‌شود که جواب بهینه مدل (۵) همواره بزرگتر از یا مساوی با یک می‌باشد. □

در مورد مدل (۵) ذکر این نکته ضروری است که مقدار بهینه یک نشان دهنده واحدهای ناکارا است (ناکارای کامل) که روی مرز ناکارایی قرار دارند و هرچه این مقدار از یک بیش‌تر باشد به معنای کاهش ناکارایی واحد تحت ارزیابی می‌باشد. از آنجایی‌که در مدل (۵) چند DMU می‌توانند مقدار یک را بگیرند؛ بنابراین نمی‌توانند واحدها را به طور کامل رتبه‌بندی‌کنند. برای غلبه بر این مشکل، در اینجا از روش پیشنهاد شده توسط اندرسن و پترسن [۳] برای مدل‌های کارایی که منجر به مفهوم ابرکارایی شده است استفاده می‌کنیم. در این مقاله این مفهوم برای مدل ناکارایی را ابرناکارایی می‌نامیم. مقدار ناکارایی از این مدل با حذف واحد تحت ارزیابی از مجموعه واحدها به‌دست می‌آید. مدل حاصل به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&(WP\text{-}SDEA):\\
&Max\ \ \theta^{*}=\theta_{o}\\
&s.t.\\
&\sum_{\substack{j=1\\ j\neq o}}^{n}x_{ij}\lambda_{j}\geq\theta_{o}x_{io}, \qquad i=1,\ldots,m,\\
&\sum_{\substack{j=1\\ j\neq o}}^{n}y_{rj}\lambda_{j}\leq y_{ro}, \qquad r=1,\ldots,s,\\
&\lambda_{j}\geq 0, \qquad j=1,\ldots,n,\ \theta_{o}\ free.
\end{aligned}
\tag{۶}
$$

مدل (۶) برای رتبه‌بندی واحدهای ناکارا که روی مرز ناکارایی قرار دارند و از مدل (۵) نتیجه شده‌اند، معرفی شده است. مقادیر ناکارایی حاصل از مدل (۶) از مقادیر ناکارایی مدل (۵) کم‌تر هستند و برای واحدهای روی مرز ناکارایی، مقدار ناکارایی با استفاده از مدل (۶) کم‌تر از یک می‌شوند.

برای نشان دادن تفاوت بین مرز بهترین عملکرد و بدترین عملکرد از یک مثال عددی با دو ورودی و یک خروجی که داده‌های آن در جدول ۱ آمده است و از [۸] گرفته شده است استفاده می‌کنیم.

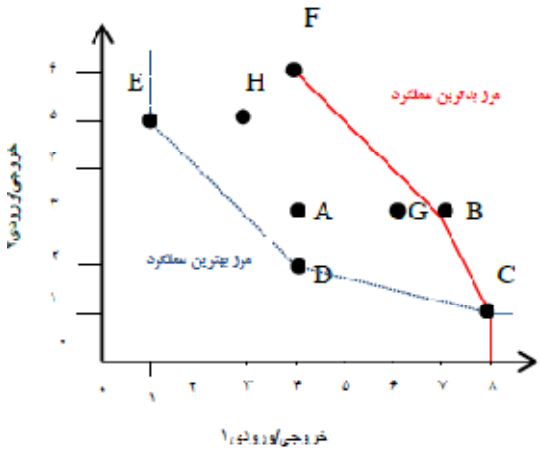
[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-01]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.3.4.3]

جدول ۱. داده‌های مثال

شاخص‌ها	نماد	DMU							
		A	B	C	D	E	F	G	H
ورودی۱	x_1	۴	۷	۸	۴	۱	۴	۶	۳
ورودی۲	x_2	۳	۳	۱	۲	۵	۶	۳	۵
خروجی	y	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

مرز بهترین عملکرد و بدترین عملکرد در شکل ۱ نشان داده شده‌اند. براساس مرز بهترین عملکرد واحدهای C، D و E که مرز کارایی را تشکیل می‌دهند، به عنوان واحدهای کارا تشخیص داده می‌شوند(خط نقطه چین) و واحدهای A، B، F، G و H در مقایسه با واحدهای کارا، کارایی کم‌تری دارند. همچنین براساس مرز بدترین عملکرد B، C و F به عنوان واحدهای ناکارا، مرز ناکارایی را تشکیل می‌دهند (خط توپر) و DMU های A، D، E، G و H کارایی بیش‌تری دارند.



شکل ۱. مرز بهترین و بدترین عملکرد برای داده‌های جدول ۱

مدل‌های ارایه شده در این بخش برای مسایلی می‌باشند که داده‌های آن قطعی هستند. در بخش بعدی مدل‌هایی را ارایه می‌کنیم که قابلیت برخورد با مسایلی را دارند که درآن ها پارامترهای دارای عدم قطعیت وجود دارند. برای این کار از رویکرد بهینه‌سازی استوار برای مسایل برنامه‌ریزی خطی ارایه شده توسط برتسیماس و سیم [۱۷] استفاده می‌کنیم.

۳ بهینه‌سازی استوار برای ارزیابی بدترین عملکرد مدل پوششی DEA

در این بخش همتای استوار مدل (۵) را بر اساس رویکرد برتسیماس وسیم [۱۷] ارایه می‌دهیم. فرض کنید J_i و J_r به ترتیب مجموعه ضرائب x_{ij} $(i \in J_i)$ و y_{rj} $(r \in J_r)$ متناظر با محدودیت‌های ورودی و خروجی در مدل (۳) باشند که دارای عدم‌قطعیت هستند؛ یعنی داده‌های ورودی و خروجی $\tilde{x}_{ij}, \tilde{y}_{rj}$ $(i,r \in J_i, J_r)$ که در آن $J_i = \{i \mid \hat{x}_{ij} > 0\}$ و $J_r = \{r \mid \hat{y}_{rj} > 0\}$ می باشند، مقادیر خود را براساس توزیعی متقارن و با میانگین معادل

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-01]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.3.4.3]

با مقادیر اسمی x_{ij} و y_{ij} به ترتیب در بازه‌های $\tilde{x}_{ij} \in \left[x_{ij} - \hat{x}_{ij}, x_{ij} + \hat{x}_{ij} \right]$ و $\tilde{y}_{rj} \in \left[y_{rj} - \hat{y}_{rj}, y_{rj} + \hat{y}_{rj} \right]$ اختیار می‌کنند. متناظر با داده‌های دارای عدم قطعیت $\tilde{x}_{ij}$ یا $(\tilde{y}_{rj})$، متغیر تصادفی $\eta_{ij} = \left(\tilde{x}_{ij} - x_{ij}\right) / \hat{x}_{ij}$ یا $\left(\eta_{rj}\right)$ را که از توزیعی نامعلوم اما متقارن پیروی می‌کنند تعریف می‌کنیم که مقادیرشان در بازه‌ی [۱،۱-] قرار دارد. برای هر یک از $i = ۱,...,m$ (یا $r = ۱,...,s$) پارامترهای Γ_i یا ($\Gamma_r^{'}$) که لزوما صحیح نیستند را معرفی می‌کنیم که مقدار آن ها در بازه $\left[۰,|J_i| \right]$ یا $\left(\left[۰,|J_r| \right]\right)$ قرار دارند. ایده معرفی Γ_i ($\Gamma_r^{'}$) این است که اغلب غیرممکن است که همه ضرائب دارای عدم قطعیت به طور همزمان بدترین مقدار خود را در بازه مورد نظر بگیرند، بهتراست تا درمحدودیت متناظر، پارامترهای دارای عدم قطعیت حداکثر به تعداد $[\Gamma_i]$ ($[\Gamma_r^{'}]$) بدترین مقدار خود را بگیرند و یک پارامتر، مثلا t، به مقدار $(\Gamma_i - [\Gamma_i])\hat{x}_{it}$ یا $\left((\Gamma_r^{'} - [\Gamma_r^{'}])\hat{y}_{rt}\right)$ تغییر کند، که در آن [ ] به معنای جزصحیح است. به عبارت دیگر تنها نیاز است که زیرمجموعه‌ای از ورودی‌ها و خروجی‌ها تغییرکنند تا جواب استوار بهینه تعریف شده توسط برتسیماس و سیم [۱۷] جواب موثری را نتیجه دهد. بنابراین با در نظر گرفتن روش بهینه‌سازی استوار معرفی شده توسط برتسیماس و سیم [۱۷]، می‌توان مدل (۵) را به صورت زیر نوشت:

$$Max \ \ \theta^* = \theta_o$$
$$s.t.$$
$$\sum_{\substack{j=۱ \\ j \neq o}}^{n} x_{ij}\lambda_j + (\lambda_o - \theta_o)x_{io} - \beta_i(\lambda, \theta, \Gamma_i) \geq ۰, \qquad i = ۱,...,m, \tag{۷}$$
$$\sum_{\substack{j=۱ \\ j \neq o}}^{n} y_{rj}\lambda_j + (\lambda_o - ۱)y_{ro} + \beta_r(\lambda, \Gamma_r^{'}) \leq ۰, \qquad r = ۱,...,s,$$
$$\lambda_j \geq ۰, \qquad j = ۱,...,n, \ \ \theta_o \ free.$$

که در آن

(۸)

$$\beta_i(\lambda, \theta, \Gamma_i) = Max_{\{S_i \cup \{t_i\} | S_i \subset J_i, |S_i| = \Gamma_i, t_i \in J_i \setminus S_i\}} \left\{ \sum_{j \neq o \in S_i} \lambda_j \hat{x}_{ij} + \left(\Gamma_i - [\Gamma_i]\right)\lambda_{t_i}\hat{x}_{it_i} + (\lambda_o - \theta_o)\hat{x}_{io} + \left(\Gamma_i - [\Gamma_i]\right)(\lambda_o - \theta_o)\hat{x}_{io} \right\}$$

و با فرض صحیح بودن Γ_i رابطه (۸) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\beta_i(\lambda, \theta, \Gamma_i) = \mathrm{Max}_{\{S_i | S_i \subset J_i, |S_i| = \Gamma_i\}} \left\{ \sum_{j \neq o \in S_i} \lambda_j \hat{x}_{ij} + (\lambda_o - \theta_o)\hat{x}_{io} \right\} \tag{۹}$$

که به عنوان تابع محافظت شناخته می‌شود. به طور مشابه می‌توان تابع محافظت را برای محدودیت‌های خروجی تعریف کرد.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-01]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.3.4.3]

ذکر این نکته ضروری است که اگر $\Gamma_i = ۰$ آنگاه $\beta_i(\boldsymbol{\lambda}, \theta, \Gamma_i) = ۰$ و مدل (۵) نتیجه می‌شود. همچنین اگر، $\Gamma_i = |J_i|$ آنگاه حداکثر محافظه‌کاری در مقابل پارامترهای عدم قطعیت را داریم که معادل با روش سویستر [۱۱] است، بنابراین با تغییر $\Gamma_i \in [۰, |J_i|]$، در واقع انعطاف پذیری روش پیشنهاد شده توسط برتسیماس و سیم [۱۷] برای محافظت جواب مساله در مقابل عدم قطعیت را می‌توان تنظیم کرد. توجه داریم که مساله (۷) یک مساله برنامه‌ریزی غیرخطی می‌باشد. قضیه زیر نشان می‌دهد که مساله (۷) را می‌توان به یک مساله برنامه‌ریزی خطی تبدیل کرد.

قضیه ۲. مدل (۷) معادل با مساله برنامه ریزی‌خطی زیر می‌باشد:

$$
\begin{aligned}
&(WP\text{-}DEA\text{-}BS):\\
&Max\ \ \theta_R^* = \theta_o^R\\
&s.t.\\
&\sum_{j=۱}^{n} x_{ij}\lambda_j - \Gamma_i p_i - \sum_{j=۱}^{n} q_{ij} \geq x_{io}\theta_o^R, \quad i = ۱,...,m,\\
&\sum_{j=۱}^{n} y_{rj}\lambda_j + \Gamma_r' p_r' + \sum_{j=۱}^{n} q_{rj}' \leq y_{ro} \qquad r = ۱,...,s, \qquad (۱۰)\\
&p_i + q_{ij} \geq \hat{x}_{ij}\lambda_j, \qquad i = ۱,...,m,\ \ j = ۱,...,n,\ j \neq o,\\
&p_i + q_{io} \geq \hat{x}_{io}\beta_{io}, \qquad i = ۱,...,m,\\
&p_r' + q_{rj}' \geq \hat{y}_{rj}\lambda_j, \qquad r = ۱,...,s,\ \ j = ۱,...,n,\ j \neq o,\\
&p_r' + q_{ro}' \geq \hat{y}_{ro}\alpha_{ro}, \qquad r = ۱,...,s,\\
&-\beta_{io} \leq \lambda_o - \theta_o \leq \beta_{io}, \qquad i = ۱,...,m,\\
&-\alpha_{ro} \leq \lambda_o - ۱ \leq \alpha_{ro}, \qquad r = ۱,...,s,\\
&\lambda_j, \alpha_{ro}, \beta_{io} \geq ۰, \qquad i = ۱,...,m,\ r = ۱,...,s,\ \ j = ۱,...,n\\
&p_i, p_r', q_{ij}, q_{rj}' \geq ۰, \qquad i = ۱,...,m,\ r = ۱,...,s,\ \ j = ۱,...,n
\end{aligned}
$$

برهان. بدون از دست دادن کلیت، محدودیت‌های متناظر با ورودی‌ها را در مدل (۷) را در نظر می‌گیریم. برای بردارهای معلوم λ^* و θ^* ، تابع $\beta_i(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\theta}^*, \Gamma_i)$ در مدل (۸) معادل با تابع هدف مساله برنامه‌ریزی خطی زیر می‌باشد:

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-01]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.3.4.3]

$$\beta_i(\lambda^*,\theta^*,\Gamma_i)=Max\ \sum_{j\neq o\in J_i}\hat{x}_{ij}\,|\lambda_j^*|\,|\eta_{ij}|+\hat{x}_{io}\,|(\lambda_o^*-\theta_o^*)|\,|\eta_{io}|$$

$$s.t.$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\neq o\in J_i}|\eta_{ij}|+|\eta_{io}|\le\Gamma_i, && i=1,\dots,m,\\
&|\eta_{ij}|\le 1, && i=1,\dots,m,\ \ j=1,\dots,n,\ \ j\neq o,\\
&|\eta_{io}|\le 1, && i=1,\dots,m,\\
&\eta_{ij}\ge 0, && i=1,\dots,m,\ \ j=1,\dots,n.
\end{aligned}\qquad (11)$$

زیرا مقدار جواب بهینه مدل (۱۱)؛ یعنی $\left(\eta_{ij}^*,\eta_{io}^*\right),\forall i,j\neq o$ شامل $[\Gamma_i]$ متغیر با مقدار ۱ و یک متغیر با مقدار $\Gamma_i-[\Gamma_i]$ می‌باشد و این معادل با انتخاب از زیرمجموعه $\{S_i\cup\{t_i\}\,|\,S_i\subset J_i,|S_i|=\Gamma_i,t_i\in J_i\setminus S_i\}$ با تابع هدف متناظر زیر است.

$$\sum_{j\neq o\in S_i}\lambda_j\hat{x}_{ij}+\left(\Gamma_i-[\Gamma_i]\right)\lambda_{t_i}\hat{x}_{it_i}+(\lambda_o-\theta_o)\hat{x}_{io}+\left(\Gamma_i-[\Gamma_i]\right)(\lambda_o-\theta_o)\hat{x}_{io}$$

حال فرض کنید p_i، $q_{ij}(j\neq o)$ و q_{io} به ترتیب متغیرهای دوگان متناظر با محدودیت‌های اول، دوم و سوم مدل (۱۱) باشند. مساله دوگان مساله برنامه‌ریزی‌خطی (۱۱) به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$Min\ \Gamma_i p_i+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq o}}^{n}q_{ij}+q_{io}=\Gamma_i p_i+\sum_{j=1}^{n}q_{ij}$$

$$s.t.\qquad (12)$$

$$\begin{aligned}
&p_i+q_{ij}\ge\hat{x}_{ij}\,|\lambda_j^*|, && i=1,\dots,m,\ \ j=1,\dots,n,j\neq o,\\
&p_i+q_{io}\ge\hat{x}_{io}\,|(\lambda_o^*-\theta_o^*)|, && i=1,\dots,m,\\
&p_i\ge 0,\ q_{ij}\ge 0, && i=1,\dots,m,\ \ j=1,\dots,n,\\
&\lambda_j\ge 0, && j=1,\dots,n.
\end{aligned}$$

درمحدودیت اول مدل (۱۲)، از آنجایی‌که $\forall j$، $\lambda_j\ge 0$، بنابراین می‌توان علامت قدر مطلق را برداشت. همچنین در محدودیت دوم مدل (۱۲) برای حذف قدر مطلق از تغییر $|(\lambda_o-\theta_o)|\le\beta_{io}$ استفاده می‌کنیم. در نتیجه، با توجه به قضیه قوی دوگانی و از آنجایی که مدل (۱۱) برای هر $\Gamma_i\in[0,|J_i|]$ شدنی و کراندار است بنابراین مساله دوگان آن، یعنی مدل (۱۲)، نیز شدنی و کراندار است و مقدار تابع هدف آن‌ها برابر می‌باشد. بنابراین تابع $\beta_i(\boldsymbol{\lambda}^*,\boldsymbol{\theta}^*,\Gamma_i)$ معادل با تابع هدف مساله دوگان (۱۲) است. با جایگزینی مدل‌خطی (۱۲) در مدل غیرخطی (۷) و با روندی مشابه برای محدودیت‌های متناظر با خروجی‌های مدل (۷)، مساله برنامه‌ریزی‌خطی (۱۰) که مدل ارزیابی بدترین عملکرد براساس رویکرد برتسیماس و سیم [۱۷] می باشد [1](WP-DEA-BS) به‌دست می‌آید.

قضیه ۳. جواب بهینه مدل (۱۰) ؛ یعنی θ_R^* بزرگتر از یا مساوی یک می‌باشد.

[1] Worst-Practice-DEA-Bertsimas and Sim

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-01]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.3.4.3]

برهان. جواب شدنی مدل (۱۰) را به صورت $(\lambda_o, \theta_o, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{q}^{'}) = (1, 1, 0, 0, 0)$ و $\boldsymbol{\lambda}_{j \neq o} = 0$ در نظر بگیرید. چون برای این نقطه شدنی مقدار تابع هدف برابر یک است و مساله از نوع ماکزیمم‌سازی می‌باشد؛ بنابراین جواب بهینه مدل (۱۰) همواره بزرگ‌تر یا مساوی یک می‌باشد.

همچنین از آنجایی که در مدل پیشنهادی (۱۰) متغیرهای اضافه شده به محدودیت‌های مساله و همچنین Γ_i همگی نامنفی هستند؛ بنابراین فضای شدنی مساله کوچک‌تر خواهد شد و چون مساله ماکزیمم‌سازی است؛ اما در بدترین حالت، بنابراین جواب مساله جدیدکم‌تر یا مساوی با مساله (۵) خواهد شد. همچنین اگر $\Gamma_i = 0$ مدل (۱۰) تبدیل به مدل (۵) می‌شود و با افزایش Γ_i میزان کارایی کاهش می‌یابد.

باید اشاره شود که در این مقاله، برای رتبه‌بندی واحدهای ناکارا که روی مرز ناکارایی قرار می‌گیرند و دارای مقدار ناکارایی یک می‌باشند و همچنین برای بررسی تحلیل حساسیت ناکارایی واحدها با استفاده از مدل (۱۰) و رتبه‌بندی کامل واحدها از رویکرد اندرسن و پترسن [۳] استفاده می‌کنیم. به این صورت که مدل ابرناکارایی استوار حاصل از مدل (۱۰) (WP-DEA-BS) که با حذف واحد تحت ارزیابی از مجموعه واحدها به‌دست می‌آید مورد استفاده قرار می‌دهیم و آن را با WP-SDEA-BS نام‌گذاری می‌کنیم.

٤ بهینه‌سازی استوار برای ارزیابی بدترین عملکرد DEA با داده‌های بازه‌ای

در این بخش با استفاده از رویکرد بهینه‌سازی استوار برتسیماس و سیم [۱۷] و ایده به کار گرفته شده در مدل ارایه شده توسط شکوهی و همکاران [۲۱]، که برای ارزیابی کارایی مدل‌های DEA با داده‌های دارای عدم قطعیت بازه‌ایی است، مدلی جدید برای ارزیابی بدترین عملکرد می‌باشد، ارایه می‌کنیم. $\mathrm{DMU_j}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید J_j^x و J_j^y به ترتیب اندیس مجموعه‌های مقادیر ورودی‌ها و خروجی‌های نادقیق هستند. علاوه براین پارامترهای γ_j^x و γ_j^y که لزوما صحیح نیستند در نظر بگیرید که فرض می‌شود مقادیر خود را در بازه‌های کراندار $\left[\left\lfloor |J_j^x| \right\rfloor, 0\right]$ و $\left[\left\lfloor |J_j^y| \right\rfloor, 0\right]$ اختیار می‌کنند که در آن، $|.|$ عدد اصلی یک مجموعه است. نقش پارامترهای γ_j^x و γ_j^y، تنظیم انعطاف‌پذیری جواب مدل پیشنهاد شده در مقابل عدم قطعیت می‌باشد. در واقع، نامحتمل است که همه ورودی‌ها و خروجی‌های نادقیق یا دارای عدم‌قطعیت $\left(i \in J_j^x,\ r \in J_j^y\right)$ به طور همزمان تغییرکنند، بلکه تمایل به این است که در مقابل تغییرات همه ترکیبات $\left[\gamma_j^x\right]$ و $\left[\gamma_j^y\right]$ و تغییرات در $x_{t^x j}$ و $y_{t^y j}$ به ترتیب توسط $\left(x_{t_j^x j}^U - x_{t_j^x j}^L\right)\left(\gamma_j^x - \left[\gamma_j^y\right]\right)$ و $\left(y_{t_j^y j}^U - y_{t_j^y j}^L\right)\left(\gamma_j^y - \left[\gamma_j^y\right]\right)$ محافظت شود. آنگاه با در نظرگرفتن رویکرد بهینه‌سازی استوار برتسیماس و سیم [۱۷] برای مدل (۳)، مدل زیر را داریم:

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-01]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.3.4.3]

$$
\begin{aligned}
&Min\ \theta_o = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}^{L} + \beta_p^{y}, \\
&s.t. \\
&\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{U} - \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{L} + \beta_j^{x} + \beta_j^{y} \le 0, \quad j = 1,\dots,n, \\
&\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}^{U} + \beta_o^{x} = 1, \\
&u_r, v_i \ge 0, \qquad\qquad r = 1,\dots,s,\ \ i = 1,\dots,m.
\end{aligned}
\tag{۱۳}
$$

از رویکرد بهینه‌سازی استوار برای معرفی $\beta_j^{x}\left(x,\gamma_j^{x}\right)$ و $\beta_j^{x}\left(y,\gamma_j^{y}\right)$ استفاده می‌کنیم تا از کران پایین ناکارایی به کران بالای ناکارایی حرکت کنیم. به عبارت دیگر، این متغیرها از محدودیت‌ها در مقابل داده‌های عدم‌قطعیت محافظت می‌کنند و آنها را شدنی نگه می‌دارند. اگر:

$$C_j^{y} = \left\{ S_j^{y} \cup \left\{ t_j^{y} \right\} \mid S_j^{y} \subseteq J_j^{y}, \mid S_j^{y} \mid = \lfloor \gamma_j^{y} \rfloor, t_j^{y} \in J_j^{y} \setminus S_j^{y} \right\}$$

آنگاه:

$$\beta_j^{y}\left(y,\gamma_j^{y}\right) = \underset{C_j^{y}}{Max} \left\{ \sum_{r \in S_j^{y}} u_r \left(y_{rj}^{U} - y_{rj}^{L} \right) + \left(\gamma_j^{y} - \lfloor \gamma_j^{y} \rfloor \right) u_{t_j^{y}} \left(y_{t_j^{y} j}^{U} - y_{t_j^{y} j}^{L} \right) \right\}$$

واگر:

$$C_j^{x} = \left\{ S_j^{x} \cup \left\{ t_j^{x} \right\} \mid S_j^{x} \subseteq J_j^{x}, \mid S_j^{x} \mid = \lfloor \gamma_j^{x} \rfloor, t_j^{x} \in J_j^{x} \setminus S_j^{x} \right\}$$

آنگاه:

$$\beta_j^{x}\left(y,\gamma_j^{x}\right) = \underset{C_j^{x}}{Max} \left\{ \sum_{i \in S_j^{x}} v_i \left(x_{ij}^{U} - x_{ij}^{L} \right) + \left(\gamma_j^{x} - \lfloor \gamma_j^{x} \rfloor \right) v_{t_j^{x}} \left(x_{t_j^{x} j}^{U} - x_{t_j^{x} j}^{L} \right) \right\}$$

اگر $\gamma_j^{y} = 0$ و $\gamma_j^{x} = 0$ آنگاه $\beta_j^{y}\left(y,\gamma_j^{y}\right) = 0$ و $\beta_j^{x}\left(x,\gamma_j^{x}\right) = 0$. بنابراین، محدودیت‌های(۱۲) با محدودیت‌های مدل (۳) معادل هستند (کران پایین) و به‌طورمشابه، وقتی $\gamma_j^{x} = \mid J_j^{x} \mid$ و $\gamma_j^{y} = \mid J_j^{y} \mid$ آنگاه $\beta_j^{y}\left(y,\gamma_j^{y}\right) = \sum_{r=1}^{s} u_r \left(y_{rj}^{U} - y_{rj}^{L} \right)$ و $\beta_j^{x}\left(x,\gamma_j^{x}\right) = \sum_{r=1}^{s} v_i \left(x_{ij}^{U} - x_{ij}^{L} \right)$، طوری که محدودیت‌ها معادل با محدودیت‌های مدل (۴) (کران بالا) هستند. با استفاده از رویکرد بهینه‌سازی استوار برتسیماس و سیم [۱۷] مساله غیرخطی (۱۲) به مساله‌ای با محدودیت‌های خطی زیر تبدیل می‌شود:

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-01]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.3.4.3]

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^U - \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^L + z_j^y \gamma_j^y + z_j^x \gamma_j^x + \sum_{r=1}^{s} p_{rj} + \sum_{i=1}^{m} q_{ij} \le 0 \\
&z_j^y + p_{rj} \ge u_r \left(y_{rj}^U - y_{rj}^L \right) \\
&z_j^x + q_{ij} \ge v_i \left(x_{ij}^U - x_{ij}^L \right) \\
&z_j^x, z_j^y, q_{ij}, p_{rj} \ge 0
\end{aligned} \qquad (۱۴)$$

به‌طورمشابه، دیگر محدودیت‌ها و تابع هدف در مدل (۱۲) تغییر می‌کنند. برای کاهش پیچیدگی، با جایگزینی $z_j^x = z_j^y = z_j (j = 1,...,n)$ و تعریف $\Gamma_j = \gamma_j^x + \gamma_j^y (j = 1,...,n)$ و با فرض اینکه $\Gamma_j = \Gamma, \forall j$، در واقع به دخالت تصمیم‌گیرنده برای تعیین سطح محافظت $\left(\Gamma_j \right)$ نیاز نداریم. به علاوه، محدودیت $\gamma_o^x + \gamma_o^y = \Gamma$ به این دلیل به مدل (۱۴) اضافه شده است که γ_o^x و γ_o^y پارامترهایی هستند که به سطح محافظت ورودی‌ها و خروجی‌ها برای هر DMU اشاره می‌کنند و در نتیجه سطح کلی محافظت در مقابل آشفتگی $\left(\Gamma \right)$ باید با مجموع γ_o^x و γ_o^y برابر باشد. همچنین، محدودیت‌های $\gamma_o^x \le m$ و $\gamma_o^y \le s$ به‌ترتیب به این علت که γ_o^x و γ_o^y نمی‌توانند از تعداد ورودی‌ها و خروجی‌های نادقیق بزرگ‌تر باشند به مدل (۱۴) اضافه شده‌اند [۲۱]. درنتیجه، مدل DEA بدترین عملکرد براساس رویکرد برتسیماس و سیم [۱۷] (WP-RDEA) به صورت زیر مدل‌بندی می‌شود:

$$Min \quad \theta_o = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}^L + z_o \gamma_o^y + \sum_{r=1}^{s} p_{ro},$$

$$\begin{aligned}
s.t.\ & \\
& \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}^U + z_o \gamma_o^x + \sum_{i=1}^{m} q_{io} = 1, && \\
& \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^U - \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^L + z_j \Gamma + \sum_{r=1}^{s} p_{rj} + \sum_{i=1}^{m} q_{ij} \le 0, && \forall j \ne o, \\
& z_j + p_{rj} \ge u_r \left(y_{rj}^U - y_{rj}^L \right), && \forall r, j, \\
& z_j^x + q_{ij} \ge v_i \left(x_{ij}^U - x_{ij}^L \right), && \forall i, j, \\
& \gamma_o^x + \gamma_o^y = \Gamma, && \\
& \theta_o \ge 1, && \\
& \gamma_o^x \le m, && \\
& \gamma_o^y \le s, && \\
& \gamma_o^x, \gamma_o^y, v_i, u_r, z_j, q_{ij}, p_{rj} \ge 0, && \forall i, j, r.
\end{aligned} \qquad (۱۵)$$

۵ مثال کاربردی

در این بخش با استفاده از دو مثال عددی قابلیت و کاربردی بودن مدل‌های پیشنهاد شده در بخش‌های ۳ و ۴ را نشان می‌دهیم. برای این هدف، از نرم افزار GAMS[1] برای حل مدل‌ها استفاده شده است.

[1] General Algebraic Modeling Systems

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-01]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.3.4.3]

مثال ۱. در این بخش با یک مثال عددی از صنعت بانکداری که از [۲۹] گرفته‌شده‌است کاربردی بودن مدل ابرناکارایی حاصل از مدل (۱۰) پیشنهاد شده در بخش ۳ را نشان می‌دهیم. داده‌های مساله از گزارش‌های مالی به‌دست آمده از بانک‌های تایوان می‌باشد و دارای سه ورودی و سه خروجی است که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

ورودی‌ها: x_1 : کل سپرده x_2 : هزینه‌های بهره x_3 : هزینه‌های غیربهره

خروجی‌ها: y_1 : کل وام y_2 : درآمد حاصل از بهره y_3 : درآمد حاصل از غیربهره

از این ۲۴ بانک تجاری، بانک‌های ۲۳ و ۸ از طرف دولت به عنوان بانک‌های ورشکسته کنار گذاشته شده‌اند. در جدول۲ با استفاده از مدل‌های ارایه شده در این مقاله صحت این انتخاب را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

برای به کارگیری مدل ابرناکارایی (WP-SDEA-BS)، که با حذف واحد تحت ارزیابی از مجموعه واحدها از مدل (۱۰) نتیجه می‌شود، فرض می‌کنیم $\hat{x}_{ij} = \varepsilon_{ij} x_{ij}$ و $\hat{y}_{ij} = \varepsilon_{rj} y_{ij}$ ،که در آن ε_{ij} و ε_{rj} به ترتیب مقادیر آشفتگی برای ورودی iام و خروجی rام متناظر با واحد تحت ارزیابی jام می‌باشند. جواب مساله برنامه‌ریزی‌خطی (WP-SDEA-BS) را می‌توان با هر نرم‌افزار حل‌کننده‌ای به‌دست آورد. همچنین برای به‌دست آوردن Γ_i $\left(\Gamma_r\right)$ مناسب، می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$\Gamma_{i,r} = 1 + \Phi^{-1}\left(1 - e_{i,r}\right)\sqrt{n}$$

که درآن Φ توزیع تجمعی متغیر استاندارد گاوسی، n تعداد کل پارامترهای دارای عدم‌قطعیت در هر محدودیت و e احتمال انحراف از محدودیت متناظر ورودی یا خروجی هستند(برتسیماس و سیم [۱۷]). برای مثال اگر $n = 150$ و $e_i = 0.05$ ، در محدودیت iام باشند، آنگاه Γ_i حداقل باید برابر ۲۱/۰۸ قرار داده شود. برای محدویت‌هایی که تعداد پارامترهای دارای عدم‌قطعیت آن کم می‌باشند، لازم است که حداکثر محافظت را برای محدودیت‌ها اعمال کنیم که معادل با روش سویستر [۱۱] می‌باشد. برای مورد مطالعه در این مقاله چون تعداد محدودیت‌ها برای هر دو ورودی‌ها و خروجی‌ها کم می‌باشد، بنابراین حداکثر حفاظت در مقابل عدم-قطعیت در داده‌ها را در نظر می‌گیریم، یعنی، $\Gamma_i = \Gamma_r = 3$. همچنین برای تحلیل حساسیت مساله و یافتن ناکاراترین واحدها، مقادیرآشفتگی $\varepsilon = \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{rj} > 0$ را برابر ۰/۰۱ و ۰/۰۵ در نظر گرفته و مقادیر ناکارایی و رتبه‌بندی متناظر را در ستون‌های پنجم تا نهم به‌دست آورده‌ایم.

در جدول ۲ و در ستون‌های دوم و سوم به ترتیب نتایج حاصل از مقادیر مدل ناکارایی (۵) (WP-DEA) و رتبه‌بندی حاصل از آنها را مشاهده می‌کنیم. همان‌طور که ملاحظه می‌شود واحدهای ۵، ۶، ۷، ۸ و ۲۳ دارای مقدار ناکارایی واحد می‌باشند که به معنای ناکارا بودن این واحدها نسبت به بقیه واحدها می‌باشد، بنابراین با مدل (۵) قادر به تشخیص ناکاراترین واحدها نیستیم و به روش‌های دیگری نیاز می‌باشد. برای تعیین ناکاراترین واحدها از میان واحدهای تحت ارزیابی، ابتدا با استفاده از مدل ابرناکارایی (۶) (WP-SDEA) واحدها را مورد ارزیابی قرار می‌دهیم که نتایج آن در ستون‌های چهارم و پنجم جدول۲ آورده شده‌است. همان طور که ملاحظه می‌شود یا استفاده از مدل (۶) قادر به رتبه‌بندی کامل واحدها می‌باشیم. همچنین برای بررسی تحلیل حساسیت واحدهای

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-01]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.3.4.3]

تحت ارزیابی، که در اینجا بانک‌ها می‌باشند، مقداری آشفتگی و عدم قطعیت در داده‌های مساله در نظر می‌گیریم و با استفاده از مدل ابرناکارایی حاصل از مدل (۱۰)، یعنی (WP-SDEA-BS) به ارزیابی ناکارایی واحدها می‌پردازیم. نتایج حاصل از این مدل در ستون‌های ششم تا نهم جدول۲ نشان داده شده است. از نتایج به دست‌آمده همان طور که دیده می‌شود با استفاده از این مدل می‌توان واحدهای دارای بدترین عملکرد را به طور کامل تعیین کرد، در اینجا واحدهای ۸ و ۲۳ همانطور که از قبل انتظار داشتیم دارای بدترین کارایی می‌باشند. همچنین در این مثال با افزایش میزان آشفتگی مقدار میانگین ناکارایی کاهش پیدا می‌کند.

جدول ۲. بررسی نتایج مدل (۵) (WP-DEA) ، مدل (۶) (WP-SDEA) و مدل ابرناکارایی (WP-SDEA-BS) حاصل از مدل (۱۰)

بانک	WP-DEA	رتبه	WP-SDEA	رتبه	WP-SDEA-BS	رتبه	WP-SDEA-BS	رتبه
					(ε =۰/۰۱)		(ε =۰/۰۵)	
	ناکارایی		ناکارایی		ناکارایی		ناکارایی	
۱	۱/۱۷۶	۶	۱/۱۷۶	۶	۱/۱۵۲	۶	۱/۰۷۴	۶
۲	۱/۱۵۵	۷	۱/۱۵۵	۷	۱/۱۳۲	۷	۱/۰۶۸	۷
۳	۱/۱۳۰	۱۰	۱/۱۳۰	۱۰	۱/۱۰۷	۱۰	۱/۰۴۲	۹
۴	۱/۲۲۷	۲	۱/۲۲۷	۲	۱/۲۰۰	۲	۱/۱۱۲	۲
۵	۱	۲۰	۰/۹۱۴	۲۰	۰/۸۹۴	۲۰	۰/۸۳۲	۲۰
۶	۱	۲۰	۰/۹۰۴	۲۱	۰/۸۸۴	۲۱	۰/۸۰۹	۲۱
۷	۱	۲۰	۰/۸۶۰	۲۲	۰/۸۴۲	۲۲	۰/۷۶۹	۲۲
۸	۱	۲۰	۰/۸۵۱	۲۳	۰/۸۳۲	۲۳	۰/۷۶۰	۲۳
۹	۱/۰۲۸	۱۷	۱/۰۲۸	۱۷	۱/۰۰۷	۱۷	۰/۹۲۷	۱۹
۱۰	۱/۲۲۲	۳	۱/۲۲۲	۳	۱/۱۹۵	۴	۱/۱۱۱	۳
۱۱	۱/۰۸۴	۱۳	۱/۰۸۴	۱۳	۱/۰۶۲	۱۳	۰/۹۹۷	۱۳
۱۲	۱/۰۲۷	۱۸	۱/۰۲۷	۱۸	۱/۰۰۶	۱۸	۰/۹۲۹	۱۷
۱۳	۱/۱۱۲	۱۱	۱/۱۱۲	۱۱	۱/۰۹۰	۱۱	۱/۰۲۶	۱۱
۱۴	۱/۰۴۳	۱۶	۱/۰۴۳	۱۶	۱/۰۲۲	۱۶	۰/۹۴۳	۱۶
۱۵	۱/۱۰۳	۱۲	۱/۱۰۳	۱۲	۱/۰۸۰	۱۲	۰/۹۹۹	۱۲
۱۶	۱/۰۶۸	۱۵	۱/۰۶۸	۱۵	۱/۰۴۶	۱۵	۰/۹۷۴	۱۵
۱۷	۱/۲۲۱	۴	۱/۲۲۱	۴	۱/۱۹۶	۴	۱/۱۰۴	۴
۱۸	۱/۱۹۳	۵	۱/۱۹۳	۵	۱/۱۶۹	۵	۱/۰۹۳	۵
۱۹	۱/۱۳۵	۸	۱/۱۳۵	۸	۱/۱۱۲	۸	۱/۰۴۳	۸
۲۰	۱/۰۱۵	۱۹	۱/۰۱۵	۱۹	۰/۹۹۴	۱۹	۰/۹۲۸	۱۸
۲۱	۱/۰۷۳	۱۴	۱/۰۷۳	۱۴	۱/۰۵۱	۱۴	۰/۹۸۹	۱۴
۲۲	۱/۳۱۱	۱	۱/۳۱۱	۱	۱/۲۸۲	۱	۱/۱۷۷	۱
۲۳	۱	۲۰	۰/۴۲۶	۲۴	۰/۴۱۵	۲۴	۰/۳۷۳	۲۴
۲۴	۱/۱۳۴	۹	۱/۱۳۴	۹	۱/۱۱۱	۹	۱/۰۳۰	۱۰
میانگین	۱/۱۰۲		۱/۰۵۸		۱/۰۳۶		۰/۹۶۲	

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-01]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.3.4.3]

مثال ۲. در این مثال مساله معرفی شده توسط وانگ [۱۰] که برای اندازه‌گیری عملکرد هفت DMUs که داده‌های آن در جدول ۱ داده شده است را در نظر می‌گیریم. ورودی‌ها مساله شامل سرمایه و کارگر و خروجی‌ها شامل مقدار تولید ناخالص می‌باشند.

جدول ۳. مجموعه داده‌های بازه ایی و کارایی‌هایی بازه‌ای هفت DMU

DMU	ورودی‌ها		خروجی	بازه کارایی
	سرمایه	کارگر	مقدار تولید ناخالص	
۱	[۶۲۱۷۵۵،۵۶۴۴۰۳]	[۶۷۴۱۱۱،۷۴۳۲۸۱]	[۸۰۶۵۴۹،۸۶۶۰۶۳]	[۱/۰۰۰۰،۱/۱۸۳۴]
۲	[۶۱۴۳۷۱،۶۶۹۶۶۵]	[۶۸۵۹۴۳،۷۴۲۳۴۵]	[۹۱۷۵۰۷،۹۸۵۴۲۴]	[۱/۰۹۳۷ ،۱/۲۷۶۳]
۳	[۷۶۲۲۰۳،۷۹۸۴۲۸]	[۷۶۲۲۰۷،۸۰۵۶۷۷]	[۱۱۷۱۴۲،۱۱۹۵۵۶۲]	[۱/۱،۱۶۴۳/۳۱۰۴]
۴	[۸۶۲۰۱۶،۹۳۷۰۴۴]	[۷۷۹۸۹۴،۸۴۶۴۹۶]	[۱۲۰۶۱۷۹،۱۲۶۱۰۳۱]	[۱/۱۲۱۷،۱/۲۷۴۰]
۵	[۱۰۱۶۸۹۸،۱۰۸۲۶۶۲]	[۷۹۹۷۱۴،۸۷۷۱۳۷]	[۱۳۸۱۳۱۵،۱۴۶۲۵۴۳]	[۱/۱۶۰۱،۱/۳۲۲۴]
۶	[۱۱۶۴۳۵۰،۱۲۶۷۹۷۰]	[۸۰۷۱۷۲،۸۸۹۴۱۶]	[۱۴۶۷۶۷۹،۱۶۵۲۷۸۷]	[۱/۱۳۱۳، ۱/۳۶۵۱]
۷	[۱۷۳۱۹۱۶،۱۸۱۶۰۰۸]	[۸۱۸۰۹۰،۸۹۵۷۴۶]	[۱۷۰۲۲۴۹،۱۸۱۲۶۵۵]	[۱/۰۰۰۰،۱/۱۱۶۶]

در این مثال به این دلیل که دو ورودی دارای عدم قطعیت و یک خروجی دارای عدم قطعیت وجود دارد Γ می‌تواند در بازه $[0,3]$ تغییرکند. مدل (۱۵) را برای مقادیر متفاوت Γ و با طول هر گام ۰/۱ حل می‌کنیم. سپس، مقایسه‌ای بین WP-RDEA پیشنهاد شده در این مقاله و روش پیشنهادشده توسط عزیزی و آجیرلو [۹] انجام می‌دهیم. مقادیرکارایی بازه‌ایی $\left[\theta_o^L, \theta_o^U\right]$ با استفاده از مدل‌های (۳) و (۴) در جدول ۳ داده شده‌اند.

در ادامه مدل پشنهاد شده (۱۵) در بخش ۴ را برای مثال۲ به کار می‌بریم. همان طور که در جدول ۴ نشان داده شده است، هنگامی که $\Gamma = 0$، مقادیر کارایی به‌دست آمده DMUها تقریبا برابرکران پایین مقادیر کارایی مدل (۳) می‌باشد. از طرف دیگر، وقتی $\Gamma = 3$، کارایی‌های به‌دست آمده از روش پیشنهاد شده در این مقاله تقریبا مشابه کران بالای مقادیر کارایی نتیجه شده از مدل (۴) است. با استفاده از روش ارایه شده در این مقاله تصمیم‌گیرنده می‌تواند رتبه‌بندی DMUها را برای هر گاما امتحان کند، در حالی که روش پیشنهاد شده توسط عزیزی و آجیرلو [۹] از مقدارکران پایین کارایی $\left(\theta_o^L\right)$ و کران بالای کارایی $\left(\theta_o^U\right)$ برای رتبه‌بندی واحدها استفاده می‌کند.

٦ نتیجه‌گیری و پیشنهاد برای ادامه‌کار

در این مقاله، با استفاده از رویکرد بهینه‌سازی استوار برتسیماس و سیم [۱۷] دو مدل برای ارزیابی ناکارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده و تعیین واحدهای ناکارا ارایه کردیم. با استفاده از مدل‌های ارایه شده می‌توان تاثیر وجود همزمان عدم قطعیت در ورودی‌ها و خروجی‌های مساله را بررسی‌کرد و با تحلیل حساسیت داده‌ها نسبت به آشفتگی، مقادیر ناکارایی و رتبه‌بندی قابل اطمینان‌تری را به‌دست آورد. همچنین با استفاده از مثال عددی کاربردی بودن و دقیق بودن روش را نشان دادیم. از ایده به کار رفته در این مقاله می‌توان برای مدل‌های دیگر

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-01]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.3.4.3]

DEA مانند مدل راسل و اندازه‌گیری مبتنی بر کمکی‌ها استفاده‌کرد و مدل‌های دیگری که قابلیت مواجهه با وجود عدم‌قطعیت در داده‌ها را دارا باشند، ارایه‌کرد.

جدول ٤. کارایی هفت DMU برای سطوح مختلف گاما با استفاده از WP-RDEA

Gamma	DMU						
	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۹۴۵	۱/۱۶۵۷	۱/۱۲۲۸	۱/۱۶۱۵	۱/۱۳۲۲	۱/۰۰۰۰
./۱	۱/۰۰۶۱	۱/۰۹۹۷	۱/۱۶۹۳	۱/۱۲۷۷	۱/۱۶۵۱	۱/۱۳۸۳	۱/۰۰۳۸
./۲	۱/۰۱۱۱	۱/۱۰۳۷	۱/۱۷۵۳	۱/۱۳۴۷	۱/۱۷۱۱	۱/۱۴۶۳	۱/۰۰۶۸
./۳	۱/۰۱۸۱	۱/۱۰۸۷	۱/۱۸۲۳	۱/۱۳۸۷	۱/۱۷۵۱	۱/۱۵۵۳	۱/۰۰۹۸
./۴	۱/۰۲۳۱	۱/۱۱۵۷	۱/۱۸۶۳	۱/۱۴۲۷	۱/۱۸۱۱	۱/۱۶۱۳	۱/۰۱۳۸
./۵	۱/۰۳۱۱	۱/۱۱۹۷	۱/۱۹۱۳	۱/۱۴۷۷	۱/۱۸۶۱	۱/۱۶۸۳	۱/۰۱۸۸
./۶	۱/۰۳۵۱	۱/۱۲۴۷	۱/۱۹۵۳	۱/۱۵۱۷	۱/۱۹۱۱	۱/۱۷۵۳	۱/۰۲۰۸
./۷	۱/۰۴۰۱	۱/۱۳۰۷	۱/۲۰۰۳	۱/۱۵۷۷	۱/۱۹۷۱	۱/۱۸۱۳	۱/۰۲۴۸
./۸	۱/۰۴۶۱	۱/۱۳۶۷	۱/۲۰۶۳	۱/۱۶۲۷	۱/۲۰۱۱	۱/۱۹۰۳	۱/۰۲۷۸
./۹	۱/۰۵۳۱	۱/۱۴۳۷	۱/۲۱۰۳	۱/۱۶۹۷	۱/۲۰۶۱	۱/۱۹۶۳	۱/۰۳۱۸
۱	۱/۰۵۹۱	۱/۱۴۷۷	۱/۲۱۶۳	۱/۱۷۴۷	۱/۲۱۲۱	۱/۲۰۱۳	۱/۰۳۳۸
۱/۱	۱/۰۶۳۱	۱/۱۵۳۷	۱/۲۱۹۳	۱/۱۷۸۷	۱/۲۱۶۱	۱/۲۰۸۳	۱/۰۳۴۸
۱/۲	۱/۰۶۸۱	۱/۱۵۸۷	۱/۲۲۳۳	۱/۱۸۳۷	۱/۲۲۳۱	۱/۲۱۶۳	۱/۰۳۸۸
۱/۳	۱/۰۷۶۱	۱/۱۶۵۷	۱/۲۲۹۳	۱/۱۸۹۷	۱/۲۳۱۱	۱/۲۲۳۳	۱/۰۴۱۸
۱/۴	۱/۰۸۳۱	۱/۱۷۲۷	۱/۲۳۴۳	۱/۱۹۳۷	۱/۲۳۶۱	۱/۲۲۸۳	۱/۰۴۳۸
۱/۵	۱/۰۸۷۱	۱/۱۷۶۷	۱/۲۳۸۳	۱/۲۰۱۷	۱/۲۴۵۱	۱/۲۳۵۳	۱/۰۴۷۸
۱/۶	۱/۰۹۴۱	۱/۱۸۲۷	۱/۲۴۳۳	۱/۲۰۴۷	۱/۲۵۲۱	۱/۲۴۳۳	۱/۰۴۹۸
۱/۷	۱/۱۰۰۱	۱/۱۸۷۷	۱/۲۵۰۳	۱/۲۰۹۷	۱/۲۵۸۱	۱/۲۴۸۳	۱/۰۵۱۸
۱/۸	۱/۱۰۷۱	۱/۱۸۸۶	۱/۲۵۴۳	۱/۲۱۳۷	۱/۲۶۳۱	۱/۲۵۵۳	۱/۰۵۲۸
۱/۹	۱/۱۱۱۱	۱/۱۹۶۶	۱/۲۶۰۳	۱/۲۱۹۷	۱/۲۶۸۱	۱/۲۶۲۳	۱/۰۵۵۸
۲	۱/۱۱۷۱	۱/۲۰۱۶	۱/۲۶۵۳	۱/۲۲۲۷	۱/۲۷۲۱	۱/۲۷۰۳	۱/۰۶۰۸
۲/۱	۱/۱۲۳۱	۱/۲۰۸۶	۱/۲۷۰۳	۱/۲۲۶۷	۱/۲۷۸۱	۱/۲۷۹۳	۱/۰۶۵۸
۲/۲	۱/۱۳۰۱	۱/۲۱۳۶	۱/۲۷۴۳	۱/۲۳۲۷	۱/۲۸۳۱	۱/۲۸۸۳	۱/۰۷۱۸
۲/۳	۱/۱۳۸۱	۱/۲۲۱۶	۱/۲۷۷۳	۱/۲۳۶۷	۱/۲۸۷۱	۱/۲۹۷۳	۱/۰۷۷۸
۲/۴	۱/۱۴۶۱	۱/۲۲۷۶	۱/۲۸۲۳	۱/۲۴۲۷	۱/۲۹۲۱	۱/۳۰۶۳	۱/۰۸۲۸
۲/۵	۱/۱۵۳۱	۱/۲۳۶۶	۱/۲۸۶۳	۱/۲۴۶۷	۱/۲۹۶۱	۱/۳۱۴۳	۱/۰۸۶۸
۲/۶	۱/۱۶۰۱	۱/۲۴۵۶	۱/۲۹۳۳	۱/۲۵۱۷	۱/۳۰۲۱	۱/۳۲۳۳	۱/۰۹۱۸
۲/۷	۱/۱۶۴۱	۱/۲۵۳۶	۱/۲۹۶۳	۱/۲۵۶۷	۱/۳۰۷۱	۱/۳۳۲۳	۱/۰۹۷۸
۲/۸	۱/۱۶۹۱	۱/۲۵۶۶	۱/۳۰۱۳	۱/۲۶۲۷	۱/۳۱۱۱	۱/۳۴۱۳	۱/۱۰۳۸
۲/۹	۱/۱۷۷۱	۱/۲۶۴۶	۱.۳۰۶۳	۱/۲۶۷۷	۱/۳۱۷۱	۱/۳۵۰۳	۱/۱۰۹۸
۳	۱/۱۸۵۱	۱/۲۷۶۳	۱/۳۲۰۳	۱/۲۸۴۱	۱/۳۳۲۱	۱/۳۷۳۲	۱/۱۱۸۶

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-01]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.3.4.3]

منابع

[۲۶] صلاحی، م.، ترابی، ن.، جمالیان، ع.، (۱۳۹۳) استوارسازی مدل تحلیل پوششی داده‌های بازده به مقیاس ثابت. تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، **۱۱**(۳)، ۱۱-۱.

[1] Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes, E., (1978). Measuring the efficiency of decision making units. European Journal of Operational Research, 2(6), 429-444.

[2] Banker, R. D., Charnes, A., Cooper, W. W., (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. Management Science, 30(9), 1078–1092.

[3] Andersen, P., Petersen, N. C., (1993). A procedure for ranking efficient units in data envelop-ment analysis. Management Science, 39(10), 1261-1264.

[4] Parkan, C., Wang, Y. M., (2000). Worst Efficiency Analysis Based on Inefficient Production Frontier, Working Paper, Department of Management Sciences, City University of Hong Kong.

[5] Paradi, J. C., Asmild, M., Simak, P. C., (2004). Using DEA and worst practice DEA in credit risk evaluation. Journal of Productivity Analysis, 21, 153–165.

[6] Shuai, J. J., Li, H. L., (2005). Using rough set and worst practice DEA in business failure prediction. Lecture notes on Computer Science .Vol. 3642. Berlin, Heidelberg: Springer, pp. 503–510.

[7] Liu, F. F., Chen, C. L., (2007). Accessing and classifying Taiwan banks with DEA models in the most favorable and worst-case scenarios, OR Spectrum.

[8] Liu, F. F., Chen, C. L., (2008). The worst-practice DEA model with slack-based measurement. Computers and Industrial Engineering.

[9] Azizi, H., Ajirlu, G. H., (2011). Measurement of the worst practice of decision-making units in the presence of non-discretionary factors and imprecise data. Applied Mathematical Modeling, 35, 4149-4156.

[10] Wang, Y. M., Greatbanks, R., Yang, J. B., (2005). Interval efficiency assessment using data envelopment analysis, Fuzzy Set. Syst. 153, 347–370.

[11] Soyster, A. L., (1973). Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. Operations Research, 21(5), 1154-1157.

[12] Ben-Tal, A., Nemirovski, A., (1999). Robust solutions of uncertain linear programs. Operations Research Letters, 25(1), 1-13.

[13] Ben-Tal, A., Nemirovski, A., (2000). Robust solution of linear programming problems contaminated with uncertain data. Mathematical programming, 88(3), 411-421.

[14] Ben-Tal, A., El-Ghaoui, L., Nemirovski, A., (2009). Robust optimization. Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton University Press, Princeton.

[15] El-Ghaoui, L., Lebret, H., (1997). Robust solutions to least-square problems to uncertain data matrices. SIAM Journal of Matrix Analysis Applications, 18,1035–1064.

[16] El-Ghaoui, L., Oustry, F., Lebret, H., (1998). Robust solutions to uncertain semi-definite programs. SIAM Journal on Optimization, 9, 33–52.

[17] Bertsimas, D., Sim, M., (2004). The price of robustness. Operations Research, 52(1), 35–53.

[18] Wang, K., Wei, F., (2010). Robust data envelopment analysis based MCDM with the consideration of uncertain data. Journal of Systems Engineering and Electronics, 21(6), 981-989.

[19] Sadjadi, S. J., Omrani, H., (2008). Data envelopment analysis with uncertain data: An application for Iranian electricity distribution companies. Energy Policy, 36(11), 4247-4254.

[20] Sadjadi, S. J., Omrani, H., (2010). A bootstrapped robust data envelopment analysis model for efficiency estimating of telecommunication companies in Iran. Telecommunication Policy, 34(4), 221-232.

[21] Shokouhi, A. H., Hatami-Marbini, A., Tavana, M., Saati, S. A., (2010). Robust optimization approach for imprecise data envelopment analysis. Computers and Industrial Engineering, 59(3), 387-397.

[22] Sadjadi, S. J., Omrani, H., Abdollahzadeh, S., Alinaghian, M., Mohammadi, H., (2011a). A robust super-efficiency data envelopment analysis model for ranking of provincial gas companies in Iran. Expert Systems with Applications, 38(9), 10875-10881.

[23] Sadjadi, S. J., Omrani, H., Makui, A., Shahanaghi, K., (2011b). An interactive robust data envelopment analysis model for determining alternative targets in Iranian electricity distribution companies. Expert Systems with Applications, 38(8), 9830-9839.

[24] Omrani, H., (2013). Common weights data envelopment analysis with uncertain data: A robust optimization approach. Computers and Industrial Engineering, 66(4), 1163-1170.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-01]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.3.4.3]

[25] Lu, C. C., (2015). Robust data envelopment analysis approaches for evaluating algorithmic performance. Computers and Industrial Engineering, 81(1), 78-89.
[27] Salahi, M., Torabi, N., Amiri, A., (2016). An optimistic robust optimization approach to common set of weights in DEA. Measurement, 93, 67-73.
[28] Charnes, A., Cooper, W. W., (1962). Programming with linear fractional functional. Naval Research Logistics Quarterly, 9(1), 67-88.
[29] Kao, C., Liu, S. T., (2004). Predicting bank performance with financial forecasts: A case of Taiwan commercial banks. Journal of Banking and Finance, 28, 2353–2368.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-01]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.3.4.3]