

روش ناحیه اعتماد مخروطی برای مینیمم سازی تابع پیوسته لیپ شیتز موضعی

زهرا اکبری*

۱- استادیار، دانشگاه مازندران، دانشکده علوم ریاضی، گروه ریاضی، بابلسر، ایران

رسید مقاله: ۸ آبان ۱۳۹۵

پذیرش مقاله: ۱۸ فروردین ۱۳۹۶

چکیده

در این مقاله، یک روش ناحیه اعتماد برای مینیمم سازی تابع پیوسته لیپ شیتز موضعی ارائه می گردد. برای این منظور، با استفاده از تقریب روش تندترین کاهش، یک تابع مدل مخروطی هموار برای تابع هدف ناهموار معرفی می گردد. سپس روش ناحیه اعتماد مخروطی در حالت هموار روی مدل مخروطی ارائه شده به کار گرفته می شود. برای حل زیرمساله مخروطی، روش جستجوی منحنی به شرط آرمیژو مجهز می شود تا در هر تکرار، تابع هدف به اندازه کافی کاهش یابد. در انتها همگرایی سراسری روش ارائه شده اثبات می شود. در پایان روش ارائه شده در محیط MATLAB پیاده سازی شده و نتایج با روش ناحیه اعتماد ناهموار مقایسه می شود.

کلمات کلیدی: روش ناحیه اعتماد ناهموار، مدل مخروطی، تابع پیوسته لیپ شیتز، روش جستجوی منحنی.

۱ مقدمه

در این مقاله، مساله بهینه سازی ناهموار نامقید زیر در نظر گرفته می شود:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad (1)$$

که در آن $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ تابع پیوسته لیپ شیتز موضعی است. مساله (۱)، مساله مهمی با کاربردهایی در جهان واقعی است. برای مثال، مساله مینی-مکس گسسته، مساله مکمل غیرخطی و توابع لاگرانژی و جریمه ای در مسایل بهینه سازی مقید در حالت هموار، همگی مسایل بهینه سازی ناهموار هستند. از این رو، حل این دسته از مسایل مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. روش های زیادی برای حل مساله بهینه سازی ناهموار ارائه شده است، که می توان از روش زیرگرادیان [۱]، روش های دسته ای [۲-۵]، الگوریتم هایی بر اساس روش های هموار [۶] و روش های مشتق آزاد [۷] به عنوان روش های مطرح برای حل مساله بهینه سازی ناهموار نام برد. روش دسته ای و روش شبه نیوتن برای افزایش کارایی در مراجع [۸-۱۰] ترکیب شده اند. اخیراً، روش دسته ای گرادیان گسسته حافظه محدود مشتق آزاد برای حل مساله بهینه سازی ناهموار نیز پیشنهاد شده است [۱۱].

*عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: z.akbari@umz.ac.ir

یکی از روش ها برای حل مساله بهینه سازی ناهموار، روش ناحیه اعتماد است. روش های ناحیه اعتماد یکی از مهم ترین روش های تکراری برای حل مساله بهینه سازی هموار است. در واقع، ایده طرح روش ناحیه اعتماد برای توابع ناهموار همان روش ناحیه اعتماد در حالت هموار است [۱۲-۱۴]. در روش ناحیه اعتماد، تابع هدف توسط مدلی مناسب تقریب زده می شود [۱۲، ۱۵-۱۸]. به جای تابع هدف، این مدل در یک ناحیه حول نقطه فعلی، x_k ، (موسوم به ناحیه اعتماد) مینیمم می شود.

تقریب درجه دوم تابع هدف در نقطه تکرار x_k ، براساس بسط تیلور تابع f حول x_k به صورت زیر به دست می آید:

$$m(x_k, s) = f(x_k) + g_k^T s + \frac{1}{2} s^T B_k s,$$

که در آن $g_k = \nabla f(x_k)$ و B_k یا ماتریس هسی دقیق $(B_k = \nabla^2 f(x_k))$ و یا تقریب مقارنی از آن است.

همچنین تابع f را می توان توسط تابع مدل مخروطی در نقطه تکرار x_k به صورت زیر تقریب زد:

$$c_k(s) = f(x_k) + \frac{g_k^T s}{1 - \alpha_k^T s} + \frac{1}{2} \frac{s^T B_k s}{(1 - \alpha_k^T s)^2},$$

که در آن $\alpha_k \in \mathbb{R}^n$ برداری است که برای هر $s \in \mathbb{R}^n$ ، $1 - \alpha_k^T s > 0$ است. برای $\alpha_k = 0$ ، همان مدل درجه دوم است.

بعد از تقریب تابع هدف (با مدل درجه دوم و یا مدل مخروطی)، مدل در ناحیه اعتماد به شعاع Δ_k مینیمم می شود. این مساله در الگوریتم ناحیه اعتماد به زیرمساله ناحیه اعتماد معروف است که اساسی ترین و پرهزینه ترین مرحله است؛ بنابراین در روش های ناحیه اعتماد دنباله ای از زیرمسایل ناحیه اعتماد حل می شوند [۲۰، ۱۷]. فرض کنید s_k جواب زیرمساله ناحیه اعتماد باشد. پس از حل زیرمساله باید بررسی شود که آیا نقطه به دست آمده؛ یعنی $x_k + s_k$ ، کاهش کافی در تابع هدف ایجاد می کند یا خیر. برای این منظور، نسبت ناحیه اعتماد به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\rho_k = \frac{f(x_k) - f(x_k + s_k)}{\text{pred}_k},$$

که در آن، صورت و مخرج کسر به ترتیب کاهش واقعی و کاهش پیش بینی شده را نشان می دهند. با توجه به مدل تقریبی از تابع هدف (مدل درجه دوم یا مدل مخروطی)، مخرج کسر به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$\text{pred}_k = m(x_k, 0) - m(x_k, s_k) \quad \text{یا} \quad \text{pred}_k = c_k(0) - c_k(s_k)$$

مشاهده می شود که اگر صورت با مخرج کسر تناسب خوبی داشته باشد، آن گاه این نسبت، با توجه به مثبت بودن مخرج کسر، مثبت و به عدد یک نزدیک است. هر چه این نسبت به یک نزدیک تر باشد، آن گاه مدل تناسب بهتری با تابع هدف دارد. در مقابل، هر چه این نسبت به صفر نزدیک شود یا حتی منفی باشد، عدم تناسب بین مدل و تابع هدف بیش تر ظاهر می شود. اگر این نسبت منفی باشد، آن گاه جهت به دست آمده برای تابع هدف کاهشی نیست.

برای ثابت $\beta \in [0, \frac{1}{\rho}]$ ، اگر $\rho_k > \beta$ باشد، آن گاه $x_k + s_k$ را به عنوان نقطه‌ی بعدی پذیرفته می‌شود و قرار می‌دهیم $x_{k+1} = x_k + s_k$. در این حالت، شعاع ناحیه اعتماد، ماتریس هسی و در حالتی که روش ناحیه اعتماد با مدل مخروطی باشد، بردار α_k نیز به‌هنگام می‌شوند. برای ثابت‌های $c_+ < c_- < 0$ ، اگر $\rho_k \leq c_+$ ، آن گاه به علت عدم وجود تناسب خوب بین مدل و تابع هدف، شعاع ناحیه اعتماد را کاهش می‌دهیم و اگر $c_+ < \rho_k < c_-$ ، شعاع ناحیه اعتماد ثابت می‌ماند، در غیر این صورت برای $\rho_k \geq c_+$ ، شعاع ناحیه اعتماد افزایش می‌یابد. سپس، مدل (درجه دوم یا مخروطی) در ناحیه اعتماد جدید مینیمم می‌شود. این روند تا جایی ادامه می‌یابد که شرط توقف برقرار شود.

تاکنون هیچ تقریب مدل مخروطی برای تابع پیوسته لیپ‌شیتز موضعی ارایه نشده است. در این مقاله، برای اولین بار یک مدل مخروطی برای تابع پیوسته لیپ‌شیتز موضعی ارایه می‌شود. سپس الگوریتم ناحیه اعتماد براساس این مدل مخروطی ارایه می‌گردد. در بخش دوم، مقدمه‌ای کوتاه از آنالیز ناهموار بیان می‌شود. زیرمساله مخروطی برای تابع هدف پیوسته لیپ‌شیتز موضعی در بخش سوم تعریف می‌شود. در بخش چهارم، الگوریتم بهینه‌سازی و همگرایی آن ارایه می‌گردد. بخش پنجم و ششم، به ترتیب، به نتایج عددی الگوریتم ناحیه اعتماد و نتیجه‌گیری از مقاله اختصاص یافته است.

۲ مقدمه‌ای بر آنالیز ناهموار

در این بخش، برخی مفاهیم مقدماتی از آنالیز ناهموار را بیان می‌کنیم. فرض کنید تابع $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه x پیوسته لیپ‌شیتز موضعی است. مشتق جهتی تعمیم یافته کلارک تابع f در نقطه x در جهت p به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۹]:

$$f^\circ(x, p) = \limsup_{y \rightarrow x, t \downarrow 0} \frac{f(y + tp) - f(y)}{t}.$$

به سادگی می‌توان نشان داد که این تعمیم مشتق جهتی برای توابع پیوسته لیپ‌شیتز وجود دارد. براساس این تعریف، زیر دیفرانسیل تعمیم‌یافته کلارک به صورت زیر تعریف می‌گردد [۱۹]:

$$\partial f(x) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid f^\circ(x; p) \geq \xi^T p \quad \forall p \in \mathbb{R}^n\}.$$

می‌توان مشاهده کرد که $f^\circ(x, p) = \sup_{\xi \in \partial f(x)} \xi^T p$. فرض کنید L ثابت لیپ‌شیتز در همسایگی نقطه x باشد. در

این صورت داریم:

$$\|\xi\|_* \leq L, \quad \forall \xi \in \partial f(x).$$

در سرتاسر این مقاله، نرم استفاده شده نرم اقلیدسی فرض شده است. اگر تابع f در x مشتق‌پذیر باشد، در این صورت $\nabla f(x) \in \partial f(x)$. علاوه بر این، اگر تابع f در x به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد، در این صورت $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$.

اگر x مینیمم (یا یک نقطه ایستای) تابع f باشد، در این صورت $0 \in \partial f(x)$.

برای $\varepsilon > 0$ ، ε -زیر دیفرانسیل (گلدشتاین) تابع f در نقطه x به صورت مجموعه زیر تعریف می‌شود:

$$\partial_{\varepsilon} f(x) := \text{cl conv} \{ \partial f(y), \|x - y\|_r \leq \varepsilon \},$$

که در آن cl و conv به ترتیب پوسته محدب و بستار مجموعه هستند. اگر $0 \in \partial_{\varepsilon} f(x)$ ، در این صورت نقطه x یک نقطه ε -ایستای تابع f نامیده می شود.

۳ زیرمساله مخروطی برای تابع پیوسته لیپشیتز موضعی

در این بخش، یک مدل مخروطی برای تابع پیوسته لیپشیتز موضعی ارایه می گردد. سپس، ساختار کلی الگوریتم ناحیه اعتماد ناهموار برای تابع پیوسته لیپشیتز بیان می شود.

برای ارایه مدلی از تابع ناهموار، زیرگرادیان مناسبی از $\partial_{\varepsilon} f(x)$ را جایگزین گرادیان در حالت هموار می کنیم. فرض کنید v_0 همان زیرگرادیان مناسب باشد. در این حالت، مدل مخروطی به صورت زیر تعریف می شود:

$$c_k(s) = f(x_k) + \frac{v_0^T s}{1 - \alpha_k^T s} + \frac{1}{2} \frac{s^T B_k s}{(1 - \alpha_k^T s)^2},$$

که در آن، B_k یک ماتریس متقارن و معین مثبت است. در هر تکرار از روش ناحیه اعتماد پیشنهادی، این مدل تحت محدودیت ناحیه اعتماد مینیمم می شود؛ یعنی در هر تکرار مساله مینیمم سازی زیر

$$\text{Min } c_k(s) = f(x_k) + \frac{v_0^T s}{1 - \alpha_k^T s} + \frac{1}{2} \frac{s^T B_k s}{(1 - \alpha_k^T s)^2} \quad (2)$$

s.t.

$$\|s\| \leq \Delta_k,$$

$$1 - \alpha_k^T s > 0,$$

حل می شود. Δ_k شعاع ناحیه اعتماد و مساله (۲) نیز زیرمساله ناحیه اعتماد مخروطی است. در ادامه، به محاسبه زیرگرادیان مناسب v_0 می پردازیم. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ ، قرار می دهیم:

$$v_0 = \arg \min_{v \in \partial_{\varepsilon} f(x_k)} \|v\|. \quad (3)$$

با توجه به این که حل مساله (۳) در بسیاری از موارد عملی نیست، مجموعه $\partial_{\varepsilon} f(x_k)$ با استفاده از پوسته محدب تعداد متناهی از اعضای آن تقریب زده می شود [۲۱]. به عبارت دیگر، اگر $W_k = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_l\}$ مجموعه ای از اعضای $\partial_{\varepsilon} f(x_k)$ باشد، آن گاه $\text{conv } W_k$ تقریبی از $\partial_{\varepsilon} f(x_k)$ است و مساله زیر را حل می کنیم:

$$\bar{\xi} = \arg \min_{\xi \in \text{conv } W_k} \|\xi\|. \quad (4)$$

در حقیقت، $\bar{p} = -\frac{\bar{\xi}}{\|\bar{\xi}\|}$ تقریبی از v_0 و $\|\bar{\xi}\|$ تقریبی از $f^{\circ}(x, \bar{p})$ است. اگر تقریب به دست آمده در شرط

$$f(x + \varepsilon \bar{p}) - f(x) \leq -c_1 \varepsilon \|\bar{\xi}\|, \quad (5)$$

برای $c_1 \in (0, 1)$ صدق کند، آن گاه $\text{conv } W_k$ یک تقریب قابل قبول برای $\partial_{\varepsilon} f(x_k)$ است. اگر نامساوی (۵) برقرار نباشد، آن گاه تقریب $\partial_{\varepsilon} f(x_k)$ با اضافه کردن یک عضو جدید مانند $\xi \in \partial_{\varepsilon} f(x_k)$ به W_k با شرط

$\xi \notin \text{conv} W_k$ بهبود می‌یابد. در واقع مساله (۴) دوباره با $\text{conv} W_k$ جدید حل می‌گردد. حال، چگونگی محاسبه این عضو را که در مرجع [۲۱] آمده است، شرح می‌دهیم. فرض کنید:

$$f(x + \varepsilon \bar{p}) - f(x) > -c_1 \varepsilon \|\bar{\xi}\|.$$

تابع $h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$h(t) := f(x + t\bar{p}) - f(x) + ct \|\bar{\xi}\|, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

برای بهبود تقریب $\partial_{\varepsilon} f(x_k)$ ، نیازی به محاسبه همه اعضای $\partial h(t)$ نیست و تنها کافی است که بردار $\xi \in \partial f(x + t\bar{p})$ طوری محاسبه شود که $\xi^T \bar{p} + c \|\bar{\xi}\| \geq 0$ و $\xi^T \bar{p} + c \|\bar{\xi}\| \in \partial h(t)$ در [۲۱] نحوه محاسبه چنین نقطه‌ای بیان و نشان داده شده است که برای محاسبه آن، نیاز به هزینه محاسباتی زیادی نیست. سپس، قرار داده می‌شود $p_{k+1} = -\frac{\xi_k}{\|\xi_k\|}$. اگر این بردار در شرط آرمیثو

$$f(x + \varepsilon p_{k+1}) - f(x) \leq -c \varepsilon \|\xi_k\|,$$

صدق کند، آن‌گاه جهت کاهشی مورد نظر به دست آمده است. در غیر این صورت تقریب $\partial_{\varepsilon} f(x_k)$ با استفاده از استراتژی بالا، مجدداً بهبود می‌یابد تا یک جهت کاهشی محاسبه می‌شود که در شرط آرمیثو صدق می‌کند. در زیر الگوریتم محاسبه‌ی این جهت، آورده شده است:

الگوریتم ۱. الگوریتم تقریب تندترین کاهش [۲۱]

گام ۱. قرار ده: $\delta, c_1, \varepsilon \in (0, 1)$. $\nu_1 \in \partial_{\Delta_k} f(x_k)$ را به دلخواه انتخاب کن و قرار ده: $W_k = \{\nu_1\}$ و $l = 1$.

گام ۲. مساله بهینه‌سازی زیر را حل کن:

$$\nu_w = \arg \min_{\nu \in \text{conv} W_k} \|\nu\|^r,$$

اگر $\|\nu_w\| \leq \delta$ ، متوقف شو. در غیر این صورت، قرار ده: $p = -\frac{\nu_w}{\|\nu_w\|}$.

گام ۳. اگر $f(x_k + \Delta_k p) - f(x_k) \leq -c_1 \Delta_k \|\nu_w\|$ آنگاه متوقف شو، در غیر این صورت به گام ۴ برو.

گام ۴. $\nu_{l+1} \in \partial_{\Delta_k} f(x_k)$ را طوری انتخاب کن که $\nu_{l+1} \notin \text{conv} W_k$. قرار ده: $W_k = W_k \cup \{\nu_{l+1}\}$.

$l = l + 1$ و به گام ۲ برو.

در [۲۱] نشان داده شده است که الگوریتم تقریب تندترین کاهش در تعداد تکرار متناهی یک جهت کاهشی را تولید کرده و تقریبی برای مجموعه $\partial_{\Delta_k} f(x_k)$ پیدا می‌کند.

۴ الگوریتم ناحیه اعتماد مخروطی ناهموار و همگرایی سراسری

در این بخش، الگوریتم ناحیه اعتماد مخروطی برای حل مساله بهینه سازی نامقید (۱) ارایه می شود. فرض کنید $W_k \subseteq \partial_{\Delta_k} f(x_k)$ و $\text{conv} W_k$ بهترین تقریب برای $\partial_{\Delta_k} f(x_k)$ است. مساله زیر را در نظر بگیرید:

$$v_k = \arg \min_{v \in \text{conv} W_k} \|v\|_v.$$

فرض کنید، برای $c_1 \in (0, 1)$ ، رابطه $c_1 \Delta_k \|v_k\|_v - f(x_k - \Delta_k \frac{v_k}{\|v_k\|_v}) - f(x_k) \leq -c_1 \Delta_k \|v_k\|_v$ براساس

زیرگردیان $v_k \in \partial_{\Delta_k} f(x_k)$ مدل مخروطی به صورت زیر تعریف می گردد (از الگوریتم تقریب تندترین کاهش تولید شده است):

$$\hat{c}_k(s) = f(x_k) + \frac{v_k^T s}{1 - \alpha_k^T s} + \frac{1}{2} \frac{s^T B_k s}{(1 - \alpha_k^T s)^2},$$

که در آن، B_k یک ماتریس متقارن و معین مثبت است. در k امین تکرار از روش ناحیه اعتماد پیشنهادی، زیرمساله مخروطی زیر حل می شود:

$$\text{Min } \hat{c}_k(s) = f(x_k) + \frac{v_k^T s}{1 - \alpha_k^T s} + \frac{1}{2} \frac{s^T B_k s}{(1 - \alpha_k^T s)^2} \quad (6)$$

s.t.

$$\|s\| \leq \Delta_k.$$

که در آن $1 - \alpha_k^T s > 0$. برای حل زیرمساله (۶) از روش جستجوی منحنی استفاده کرده ایم [۲۳]. در اینجا الگوریتم بهبودیافته جستجوی منحنی برای حل زیرمساله (۶) به صورت زیر ارایه می گردد:

الگوریتم ۲. الگوریتم جستجوی منحنی بهبودیافته

گام ۱. قرارده: $\bar{s} = -\frac{B_k^{-1} v_k}{1 - v_k^T B_k^{-1} \alpha_k}$. اگر $\|\bar{s}\| \leq \Delta_k$ ، $1 - \alpha_k^T \bar{s} > 0$ و $f(x_k + \bar{s}) - f(x_k) \leq c_1 \bar{s}^T v_k$

آنگاه قرارده: $s_k = \bar{s}$ ، در غیر این صورت به گام ۲ برو.

گام ۲. قرارده: $\tau = \frac{v_k^T v_k}{v_k^T B_k v_k - \alpha_k^T v_k v_k^T v_k}$. اگر $\tau > 0$ و $f(x_k - \tau v_k) - f(x_k) \leq -c_1 \tau v_k^T v_k$

$\|v_k\| \leq \Delta_k$ باشد، آنگاه قرارده $s_k = -\tau v_k$ ، در غیر این صورت به گام ۳ برو.

گام ۳. قرارده: $s_k = -\Delta_k \frac{v_k}{\|v_k\|}$.

در الگوریتم ۲، s_k باید کاهش کافی در تابع هدف ایجاد کند. در گام ۳، همان خروجی الگوریتم ۱ است که تقریب تندترین کاهش بوده و کاهش کافی را ایجاد می کند؛ بنابراین خروجی الگوریتم ۲ کاهش کافی را ایجاد می کند. حال میزان کاهش تابع هدف به ازای $x_k + s_k$ را بررسی می کنیم. برای این منظور، نسبت کاهش واقعی و کاهش پیش بینی شده به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\rho_k = \frac{f(x_k) - f(x_k + s_k)}{c_k(0) - c_k(s_k)}. \quad (7)$$

با توجه به ρ_k ، شعاع ناحیه اعتماد به هنگام می شود. برای ثابت $\beta \in (0, \frac{1}{4})$ ، اگر $\rho_k > \beta$ باشد، آن گاه $x_k + s_k$ را به عنوان نقطه ی بعدی پذیرفته می شود و قرار می دهیم $x_{k+1} = x_k + s_k$. در این صورت، باید مدل مخروطی در نقطه x_{k+1} به هنگام شود. v_{k+1} را خروجی الگوریتم ۱ در نقطه x_{k+1} در نظر می گیریم و داریم:

$$\hat{c}_{k+1}(s) = f(x_{k+1}) + \frac{v_{k+1}^T s}{1 - \alpha_{k+1}^T s} + \frac{1}{2} \frac{s^T B_{k+1} s}{(1 - \alpha_{k+1}^T s)^2}, \quad (8)$$

که در آن B_{k+1} ماتریس $n \times n$ متقارن است. مدل مخروطی (۸) در شرایط زیر صدق می کند:

$$c_{k+1}(0) = f(x_{k+1}), \quad \nabla c_{k+1}(0) = v_{k+1}, \quad (9)$$

$$c_{k+1}(-s_k) = f(x_k), \quad \nabla c_{k+1}(-s_k) = v_k. \quad (10)$$

قرار دهید $s_k = x_{k+1} - x_k$. شرایط درونیایی (۱۰) منجر به روابط زیر می شود:

$$f(x_k) = f(x_{k+1}) - \frac{v_{k+1}^T s_k}{1 - \alpha_{k+1}^T s_k} + \frac{1}{2} \frac{s_k^T B_{k+1} s_k}{(1 - \alpha_{k+1}^T s_k)^2}, \quad (11)$$

$$v_k = \frac{1}{1 - \alpha_{k+1}^T s_k} \left[I + \frac{\alpha_{k+1} s_k^T}{1 - \alpha_{k+1}^T s_k} \right] \left[v_{k+1} - \frac{B_{k+1} s_k}{1 - \alpha_{k+1}^T s_k} \right]. \quad (12)$$

برای برقراری شرایط (۱۱) و (۱۲) باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$r^* = [f(x_k) - f(x_{k+1})]^* - (v_k^T s_k) (v_{k+1}^T s_k) \geq 0.$$

با استفاده از شرایط درونیایی (۹-۱۲)، شرط سکانت برقرار بوده و داریم [۲۱]:

$$B_{k+1} = B_k + \frac{y_k y_k^T}{s_k^T y_k} - \frac{B_k s_k s_k^T B_k}{s_k^T B_k s_k}, \quad (13)$$

$$\alpha_{k+1} = \frac{1 - \gamma}{v_k^T s_k} v_k. \quad (14)$$

$$\gamma = \frac{-v_k^T s_k}{f(x_k) - f(x_{k+1}) + r}, \quad y_k = \gamma v_{k+1} - \gamma^2 v_k$$

این روند تا جایی ادامه می یابد که شرط توقف برقرار شود. براساس مطالب ذکر شده، روش ناحیه اعتماد مخروطی برای مینیمم سازی تابع پیوسته لیپشیتز به صورت زیر ارائه می شود:

الگوریتم ۳. الگوریتم ناحیه اعتماد مخروطی

گام ۱ (مقداردهی پارامترهای اولیه). $\theta_\Delta, \delta_1, \theta_\delta, \beta, c_1, c_r \in (0, 1)$, $\alpha_1, x_1 \in \mathbb{R}^n$, $\Delta_{\max}, \Delta_1 > 0$.

$c_r > 1$, $c_1 < c_r$ و $\xi_1 \in \partial f(x_1)$. قرار ده: $B_1 = I$ و $k = 1$.

گام ۲ (محاسبه جهت کاهشی). فرض کن v_k زیرگرادیان حاصل از الگوریتم ۱ در نقطه x_k با پارامترهای Δ_k, δ_k و c_1 باشد.

گام ۳ (شرط توقف). اگر $\|v_k\| = 0$ ، آن گاه متوقف شو. در غیر این صورت، اگر $\|v_k\| \leq \delta_k$ ، آن گاه

قرار ده: $x_{k+1} = x_k$, $\delta_{k+1} = \delta_k \theta_\delta$, $\Delta_{k+1} = \theta_\Delta \Delta_k$ و به گام ۲ برو. در غیر این صورت،

قرار ده: $\delta_{k+1} = \delta_k$ و به گام ۴ برو.

گام ۴ (حل زیر مساله مخروطی). s_k را از الگوریتم ۲ محاسبه کن.

گام ۵ (به هنگام سازی شعاع ناحیه اعتماد). نسبت ناحیه اعتماد (۷) را محاسبه کن. اگر $\rho_k > \beta$

آن گاه قرار ده: $x_{k+1} = x_k + s_k$.

اگر $\rho_k > c_r$ و $\|s_k\| = \Delta_k$ ، آنگاه قرار ده: $\Delta_{k+1} = \min\{\Delta_{\max}, c_r \Delta_k\}$. در غیر این صورت، اگر

$\rho_k < c_r$ باشد، قرار ده: $\Delta_{k+1} = \theta_{\Delta} \Delta_k$. در غیر این صورت، قرار ده: $\Delta_{k+1} = \Delta_k$ و به گام ۶ برو.

گام ۶ (به هنگام سازی مدل مخروطی). مطابق گام ۲ و گام ۳، زیرگرادیان $\nabla f(x_{k+1}) \in \partial f(x_{k+1})$ را انتخاب

کن. اگر $r^2 \geq 0$ ، B_{k+1} و α_{k+1} را با روابط (۱۳) و (۱۴) به هنگام کن. در غیر این صورت قرار ده:

$\alpha_{k+1} = \nabla f(x_{k+1})$ ، $B_{k+1} = I_{n \times n}$ و به گام ۴ برو.

در این جا، $\Delta_{\max}$ یک کران برای طول گام هاست.

توجه. در آزمایش های عددی ملاحظه گردید که به علت ناپایداری عددی ممکن است ماتریس B_{k+1} بد وضع

(نزدیک به ماتریس نامنفرد) شود؛ بنابراین در پیاده سازی، ماتریس B_k زمانی به هنگام می شود که $r^2 > 10^{-6}$

باشد.

در ادامه، خاصیت همگرایی الگوریتم ناحیه اعتماد مخروطی برای مساله بهینه سازی نامقید با تابع هدف

پیوسته لیپشیتز موضعی ارایه می گردد. قبل از هر چیز فرض های زیر را روی مساله در نظر می گیریم:

فرض ۱. مجموعه تراز $L := \{x : f(x) \leq f(x_1)\}$ از پایین کراندار است.

فرض ۲. ثابت M_{α} وجود دارد به طوری که در هر تکرار k ، $\|\alpha_k\| \leq M_{\alpha}$ است.

فرض ۳. اعداد نامنفی m_B و M_B وجود دارند به طوری که برای هر $s \in \mathbb{R}^n$ و در هر تکرار k ، رابطه زیر

برقرار است:

$$m_B \|s\|_v^2 \leq s^T B_k s \leq M_B \|s\|_v^2.$$

فرض کنیم مجموعه S شامل اندیس هایی است که در آن $\rho_k \geq \beta$ است و مجموعه K ، شامل تمام

تکرار هاست.

لم ۱. فرض کنید s_k یک جواب زیر مساله (۶) در گام ۴ الگوریتم ۳ بوده و v_k تقریبی از جهت تندترین کاهش

در گام ۲ آن الگوریتم باشد، در این صورت

$$s_k^T v_k < 0.$$

اثبات. s_k به ۳ حالت زیر می تواند محاسبه شود:

$$\text{حالت ۱: } s_k = -\frac{B_k^{-1} v_k}{1 - v_k^T B_k^{-1} \alpha_k}, \text{ در این صورت}$$

(۱۵)

$$s_k^T v_k = -\frac{v_k^T B_k^{-1} v_k}{1 - v_k^T B_k^{-1} \alpha_k}.$$

از آنجایی که $1 - \alpha_k^T s_k > 0$ ، بنابراین داریم

$$0 < 1 - \alpha_k^T s_k = 1 + \frac{\alpha_k^T B_k^{-1} v_k}{1 - v_k^T B_k^{-1} \alpha_k} = \frac{1}{1 - v_k^T B_k^{-1} \alpha_k},$$

در نتیجه مخرج کسر (۱۵) مثبت است. از طرف دیگر، از آنجایی که ماتریس B_k معین مثبت است؛ بنابراین صورت کسر (۱۵) نیز مثبت بوده؛ لذا داریم: $s_k^T v_k < 0$.

حالت ۲: $s_k = \frac{-\tau}{\|v_k\|_r} v_k$ ، که در آن $\tau > 0$ ، در این صورت $s_k^T v_k = -\tau \|v_k\| < 0$.

حالت ۳: اگر $s_k = \frac{-\Delta_k}{\|v_k\|} v_k$ باشد، در این صورت $s_k^T v_k = -\Delta_k \|v_k\| < 0$.

برای حل زیر مساله (۶) در گام ۴ الگوریتم ۳، از روش جستجوی منحنی بهبود یافته استفاده کرده ایم. این روش توسیعی بر روش جستجوی منحنی ارایه شده در [۲۳] است. در [۲۳]، نشان داده شده است که جواب تولید شده توسط روش جستجوی منحنی، یک جواب شدنی زیرمساله (۶) است. قضیه ۳.۳ در [۲۳] نشان می دهد که جهت s_k تولید شده از روش جستجوی منحنی (بهبودیافته)، در مدل مخروطی کاهش کافی ایجاد می کند. ما این قضیه را به صورت لم زیر بیان می کنیم:

لم ۲. جهت جستجوی s_k تولید شده از الگوریتم ۲، در نامساوی زیر صدق می کند:

$$c_k(\circ) - c_k(s_k) \geq \delta \text{Min} \left\{ \frac{\|v_k\|}{\|B_k\|}, \|s_k\| \right\}, \quad (16)$$

که در آن $\delta = \frac{1}{2(1 + \Delta_{\text{Max}})M_\alpha}$.

در اثبات همگرایی الگوریتم ۳، قضیه زیر اهمیت ویژه ای دارد. قضیه زیر نشان می دهد که اگر الگوریتم ۳ در تعداد متناهی تکرار متوقف نشود، آنگاه داریم: $\|v_k\| \rightarrow 0$.

قضیه ۳. اگر الگوریتم ۳ بعد از تعداد متناهی تکرار متوقف نشود، آنگاه

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|v_k\| = 0.$$

اثبات. به برهان خلف، فرض کنید $\epsilon > 0$ و عدد مثبت k_1 وجود دارند به طوری برای هر $k \geq k_1$ داریم:

$$\|v_k\| \geq \epsilon. \quad (17)$$

حال، نشان می دهیم مجموعه S نامتناهی است. به برهان خلف فرض کنیم تکرارهای موفق متناهی باشند؛ یعنی مجموعه S متناهی است. در این صورت، مجموعه $K_1 = K / S$ نامتناهی است؛ بنابراین $k_s \in K$ وجود دارد به طوری که برای هر $k \geq k_s$ داریم $k \in K_1$ برای هر $k \in K_1$ ، مطابق گام ۵ الگوریتم ۳ داریم: $\Delta_{k+1} = \theta_\Delta \Delta_k$. لذا

چون $\theta_\Delta < 1$ ، پس $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_k = 0$. از طرفی چون $\|s_k\| \leq \Delta_k$ ؛ بنابراین $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = 0$. در این صورت $k_+ \in K_+$ وجود دارد به طوری که برای هر $k \geq k_+$ داریم:

$$\|s_k\| = \text{Min} \left\{ \frac{\epsilon}{M_B}, \|s_k\| \right\} \quad (18)$$

از طرف دیگر، برای $k \geq \max\{k_+, k_+\}$ و $k \in K_+$ ، ρ_k به صورت زیر تقریب زده می شود:

$$1 - \rho_k = 1 - \frac{f(x_k) - f(x_k + s_k)}{c_k(0) - c_k(s_k)},$$

$$= \frac{f(x_k + s_k) - f(x_k) - \frac{v_k^T s_k}{1 - \alpha_k^T s_k} - \frac{s_k^T B_k s_k}{2(1 - \alpha_k^T s_k)^2}}{c_k(0) - c_k(s_k)}.$$

از رابطه (۱۶) و شرط کاهش کافی در گام ۴ الگوریتم ۳ (یا الگوریتم ۲) داریم:

$$\leq \frac{c v_k^T s_k - \frac{v_k^T s_k}{1 - \alpha_k^T s_k} - \frac{s_k^T B_k s_k}{2(1 - \alpha_k^T s_k)^2}}{\delta \|v_k\| \text{Min} \left\{ \frac{\|v_k\|}{\|B_k\|}, \|s_k\| \right\}}.$$

از فرض ۳ و رابطه (۱۷) داریم:

$$\leq \frac{c v_k^T s_k - \frac{v_k^T s_k}{1 - \alpha_k^T s_k} - \frac{s_k^T B_k s_k}{2(1 - \alpha_k^T s_k)^2}}{\delta \|v_k\| \text{Min} \left\{ \frac{\epsilon}{M_B}, \|s_k\| \right\}},$$

مطابق (۱۸) داریم:

$$= \frac{c v_k^T s_k - \frac{v_k^T s_k}{1 - \alpha_k^T s_k} - \frac{s_k^T B_k s_k}{2(1 - \alpha_k^T s_k)^2}}{\delta \|v_k\| \|s_k\|}.$$

از آنجایی که B_k معین مثبت است؛ لذا عبارت سوم در صورت کسر بالا مثبت بوده و نامساوی زیر برقرار است:

$$\leq \frac{c v_k^T s_k - \frac{v_k^T s_k}{1 - \alpha_k^T s_k}}{\delta \|v_k\| \|s_k\|} = \frac{(v_k^T s_k) \left(c_1 - \frac{1}{1 - \alpha_k^T s_k} \right)}{\delta \|v_k\| \|s_k\|}. \quad (19)$$

چون طرف راست نامساوی (۱۹) مقداری مثبت باید باشد و از لم ۲ داریم: $v_k^T s_k < 0$ ، بنابراین از نامساوی مثلی داریم:

$$1 - \rho_k \leq \frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{1 - \alpha_k^T s_k} - c_1 \right).$$

از آنجایی که $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = 0$ ؛ بنابراین:

$$1 - \rho_k \leq \frac{1}{\delta} (1 - c_1).$$

اگر c_1 طوری انتخاب شود که نامساوی زیر برقرار شود:

$$\frac{1}{\delta}(1-c_1) < 1-\beta,$$

در این صورت $\rho_k \geq \beta$ است، بنابراین $k \in \mathcal{S}$. که این در تناقض فرض $k \in K_1$ است؛ بنابراین مجموعه $\mathcal{S}$ نامتناهی است.

برای هر $k \in \mathcal{S}$ داریم:

$$\begin{aligned} f(x_k) - f(x_{k+1}) &\geq \beta(c_k(s_k) - c_k(o)) \\ &\geq \delta\beta\|v_k\| \text{Min}\left\{\frac{\|v_k\|}{\|B_k\|}, \|s_k\|\right\} \\ &\geq \delta\beta\epsilon \text{Min}\left\{\|s_k\|, \frac{\epsilon}{M_B}\right\}. \end{aligned}$$

چون دنباله $\{f(x_k)\}$ نزولی و کران دار است، پس همگراست؛ بنابراین $f(x_k) - f(x_{k+1}) \rightarrow 0$ و برای $k \in \mathcal{S}$ داریم:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|s_k\| = 0.$$

مطابق گام ۴ در الگوریتم ۳ (یا الگوریتم ۲)، s_k متعلق به یکی از سه مجموعه زیر است:

$$\mathcal{S}_\tau = \left\{k \mid s_k = -\Delta_k \frac{v_k}{\|v_k\|}\right\} \text{ و } \mathcal{S}_\tau = \{k \mid s_k = -\tau_k v_k\}, \mathcal{S}_1 = \left\{k \mid s_k = -\frac{B_k^{-1}v_k}{1-v_k^T B_k^{-1} \alpha_k}\right\}$$

فرض کنید $k \in \mathcal{S}_1$ ، زمانی که $k \rightarrow \infty$ ، داریم $\|s_k\| \rightarrow 0$ ؛ یعنی $\left\|\frac{-B_k^{-1}v_k}{1-v_k^T B_k^{-1} \alpha_k}\right\| \rightarrow 0$. از آنجایی که $1 - \alpha_k^T s_k > 0$ ، در این صورت $1 - v_k^T B_k^{-1} \alpha_k > 0$ و داریم:

$$\|s_k\| = \frac{1}{1-v_k^T B_k^{-1} \alpha_k} \|B_k^{-1}v_k\|.$$

طبق فرض ۳ داریم:

$$m_B \|v_k\| \leq \|B_k^{-1}v_k\| \leq M_B \|v_k\|.$$

بنابراین $\|v_k\| \rightarrow 0$ ، که متناقض فرض خلف (رابطه (۱۷)) است.

فرض کنید $k \in \mathcal{S}_\tau$ ، زمانی که $k \rightarrow \infty$ ، داریم $\|s_k\| \rightarrow 0$ ؛ یعنی $\|-\tau_k v_k\| \rightarrow 0$. از آنجایی که $\tau_k > 0$ ، بنابراین $\|v_k\| \rightarrow 0$ ، که متناقض فرض خلف (رابطه (۱۷)) است.

فرض کنید $k \in \mathcal{S}_\tau$ ، زمانی که $k \rightarrow \infty$ ، داریم $\|s_k\| \rightarrow 0$ ؛ یعنی $s_k = -\Delta_k \frac{v_k}{\|v_k\|}$ از این رو $\Delta_k \rightarrow 0$. ولی $k \in \mathcal{S}$ بوده و داریم: $\Delta_{k+1} \geq \Delta_k$ که با $\Delta_k \rightarrow 0$ در تناقض است.



قضیه زیر شرط لازم همگرایی الگوریتم ۳ را نشان می‌دهد.

قضیه ۴. الگوریتم ۳ یا در تکرار معین k_0 با $\|v_{k_0}\| = 0$ متوقف می شود و یا دنباله $\{x_k\}_{k \in S}$ به نقطه حدی x^* با $0 \in \partial f(x^*)$ همگرا می گردد.

اثبات. فرض کنید الگوریتم ۳ در تکرار معین k_0 با $\|v_{k_0}\| = 0$ متوقف نشود. دنباله $\{x_k\}_{k \in S}$ را در نظر می گیریم. از آنجایی که مجموعه تراز، مجموعه ای کراندار است؛ بنابراین دنباله $\{x_k\}_{k \in S}$ حداقل یک نقطه حدی دارد. فرض کنید x^* یک نقطه حدی $\{x_k\}_{k \in S}$ باشد و $\{x_{k_n}\}$ زیر دنباله ای از $\{x_k\}_{k \in S}$ بوده به طوری که $x_{k_n} \rightarrow x^*$ از قضیه ۳ می دانیم که $\|v_{k_n}\| \rightarrow 0$ ، طبق خاصیت نرم ۲ داریم: $v_{k_n} \rightarrow 0$ از طرفی $\partial f(\cdot)$ نیم پیوسته بالایی است و $v_{k_n} \in \partial_{\Delta_k} f(x_{k_n})$ لذا $0 \in \partial f(x^*)$. ■

۵ نتایج عددی

در این بخش، کارایی الگوریتم ۳ روی برخی مسایل بهینه سازی ناهموار ارایه شده در [۱۹] مورد بررسی قرار می گیرد و با الگوریتم ناحیه اعتماد ناهموار در [۲۴] مقایسه می گردد. الگوریتم ها در محیط MATLAB2014a پیاده سازی می شوند و برای مقایسه این دو الگوریتم تعداد دفعات محاسبه تابع گزارش داده می شود. حال مسایل انتخابی را معرفی می کنیم [۱۹]:

۱. CB

با تابع هدف $f(x) = \text{Max}\{x_1^2 + x_2^2, (2-x_1)^2 + (2-x_2)^2, 2e^{x_2-x_1}\}$ ، نقطه شروع $(2,2)^T$ و مقدار بهینه $1/95422245$.

۲. DEM

با تابع هدف $f(x) = \text{Max}\{5x_1 + x_2, -5x_1 + x_2, x_1^2 + x_2^2 + 4x_2\}$ ، نقطه شروع $(1,1)^T$ و مقدار بهینه ۳-.

۳. LQ

با تابع هدف $f(x) = \text{Max}\{-x_1 - x_2, -x_1 - x_2 + x_1^2 + x_2^2 - 1\}$ ، نقطه شروع $(0/5, 0/5)^T$ و مقدار بهینه $-\sqrt{2}$.

۴. QL

با تابع هدف $f(x) = \text{Max}(f_1(x), f_2(x) + 10(-4x_1 - x_2 + 4), f_3(x) + 10(-x_1 - 2x_2 + 6))$ ، $f_1(x) = x_1^2 + x_2^2$ است. نقطه شروع $(-1,5)^T$ و مقدار بهینه ۷.۲.

۵. Mifflin

با تابع هدف $f(x) = -x_1 + 20 \text{Max}\{x_1^2 + x_2^2 - 1, 0\}$ ، نقطه شروع $(0/8, 0/6)^T$ و مقدار بهینه ۱-.

۶. Wolfe

$$f(x) = \begin{cases} 5\sqrt{9x_1^2 + x_2^2} & x_1 \geq |x_2| \\ 9x_1 + 16|x_2| & 0 < x_1 \leq |x_2| \\ 9x_1 + 16|x_2| - x_1^4 & x_1 \leq 0, \end{cases} \quad \text{با تابع هدف}$$

نقطه شروع $(3, 2)^T$ و مقدار بهینه ۸-.۷. *Rosen - Suzuki*با تابع هدف $f(x) = \max_{1 \leq i \leq 4} f_i(x)$ که در آن

$$f_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2 - 5x_1 - 5x_2 - 21x_3 + 7x_4,$$

$$f_2(x) = f_1(x) + 10(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 8),$$

$$f_3(x) = f_1(x) + 10(x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 - x_1 - x_2 - 10),$$

$$f_4(x) = f_1(x) + 10(2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 - x_1 - x_2 - 5),$$

با نقطه شروع $(0, 0, 0, 0)^T$ و مقدار بهینه ۴۴-.۸. *Davidon*با تابع هدف $f(x) = \max_{1 \leq i \leq 20} |f_i(x)|$ که در آن

$$f_i(x) = (x_1 + x_2 t_i - e^{t_i})^2 + (x_3 + x_4 \sin(t_i) - \cos(t_i))^2,$$

و $t_i = 0/2i$ برای $i = 1, 2, \dots, 20$. با نقطه شروع $(25, 5, -5, -1)^T$ و مقدار بهینه $115/70644$.

پارامترهای الگوریتم ۳ مشابه پارامترهای الگوریتم ناحیه اعتماد ناهموار در [۲۴] مقداردهی اولیه شده‌اند:

$$\Delta_{\max} = \Delta_0 = 1, \delta_1 = 10^{-4}, \theta_{\Delta} = 0/5, \theta_{\delta} = 1, \beta = c_1 = 10^{-4}, c_2 = 0/75, c_3 = 2, c_4 = 0/25,$$

همچنین $\alpha_0 = \nu$. الگوریتم زمانی که $\Delta_k < 10^{-7}$ پایان می‌یابد. در جدول ۱، nf ، $fopt$ ، $ntrust$ و $nctr$ به ترتیب نشان‌دهنده تعداد دفعات محاسبه تابع، جواب بهینه به دست آمده، الگوریتم ناحیه اعتماد ناهموار و الگوریتم ۳ هستند.

جدول ۱. نتایج عددی مقایسه الگوریتم ناحیه اعتماد ناهموار و ناحیه اعتماد مخروطی ناهموار

شماره مساله	nf_{ntrust}	nf_{nctr}	$fopt_{ntrust}$	$fopt_{nctr}$
۱	۱۱۵	۳۱	۱/۹۵۳۸۰۱۱۷	۱/۹۵۳۹۷۱۹
۲	۱۹۱	۱۴۲	-۲/۹۹۹۹۹۹۹	-۲/۹۹۹۹۹۹۹
۳	۸۶	۵۸	-۱/۴۱۴۲۱۳۵۶	-۱/۴۱۴۲۱۳۵۶
۴	۱۰۸	۱۱۶	۷/۲	۷/۲۰۰۰۰
۵	۱۵۷	۱۳۳	-۰/۹۹۹۹۹۹۹	-۰/۹۹۹۹۹۹۹
۶	۱۳۱	۱۱۵	-۷/۹۹۹۹۹۹۹	-۷/۹۹۹۹۹۹۹
۷	۷۰۰	۲۷۲	-۴۳/۹۹۹۹۹۹۹	-۴۳/۹۹۹۹۹۹۹
۸	۲۴۲۰۷	۳۴۷	۱۱۵/۷۰۶۴۳۹۸	۱۱۵/۷۰۶۴۳۹۸۴۲۴

با توجه به جدول ۱، نتایج عددی نشان می‌دهند که مدل مخروطی تابع ناهموار را بهتر تقریب زده؛ لذا تعداد دفعات محاسبه تابع در روش ناحیه اعتماد مخروطی به طور قابل توجهی کم‌تر از تعداد دفعات محاسبه تابع در روش ناحیه اعتماد ناهموار است.

۶ نتیجه و جمع بندی

در حالت هموار، به دلیل درجه آزادی بیش تر مدل مخروطی نسبت به مدل درجه دوم، تابع هدف (که دو بار به طور پیوسته مشتق پذیر است) توسط مدل مخروطی تقریب زده شده است؛ زیرا توابعی که رفتار غیر درجه دوم دارند؛ یعنی انحنای شان چندین بار عوض می‌شود، با مدل مخروطی بهتر تقریب زده می‌شوند؛ لذا مدل مخروطی مسائل بیشتری را می‌تواند تقریب بزند. الگوریتم ناحیه اعتماد ناهموار و الگوریتم ناحیه اعتماد مخروطی ارایه شده روی برخی مسایل استاندارد مورد بررسی قرار گرفت. از نتایج به دست آمده، می‌توان گفت الگوریتم ناحیه اعتماد با مدل مخروطی بر الگوریتم ناحیه اعتماد ناهموار برتری دارد.

در این مقاله، برای اولین بار مدل مخروطی را برای تابع پیوسته لیپشیتز موضعی ارایه کرده و الگوریتم ناحیه اعتماد ناهموار را روی این مدل در نظر گرفتیم و همگرایی سراسری آن را تحت فرضیه‌های مستدل اثبات کردیم. در کارهای آتی سعی می‌شود که الگوریتم ناحیه اعتماد ناهموار و الگوریتم ناحیه اعتماد مخروطی ارایه شده روی مسایل استاندارد با ابعاد بالا مقایسه گردد. حدس زده می‌شود که نتایج عددی بیانگر کارایی روش پیشنهاد شده است. در حالت ناهموار به خصوص برای توابع نامحدب مشکل تقریب تابع هدف دو چندان می‌شود؛ بنابراین با استفاده از مدل مخروطی توابع نامحدب بهتر تقریب زده می‌شوند.

منابع

[۲۰] طاعتی، ا.، صلاحی، م.، (۱۳۹۵). یک الگوریتم کارا برای زیرمساله‌ی ناحیه اطمینان توسعه یافته با دو قید خطی. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۳(۲)، ۱۹-۳۳.

- [1] Shor, N. Z., (1985). Minimization methods for non-differentiable functions. Berlin, Springer.
- [2] Frangioni, A., (2002). Generalized bundle methods. SIAM J. on Optimization, 13, 117-156.
- [3] Mäkelä, M. M., (2002). Survey of bundle methods for nonsmooth optimization. Optimization Methods and Software, 17, 1-29.
- [4] Hiriart-Urruty, J., Lemaréchal, C., (1993). Convex analysis and minimization algorithms II: advanced theory and bundle method. Berlin, Springer.
- [5] Schramm, H., Zowe, J., (1992). A version of the bundle idea for minimizing a nonsmooth function: Conceptual idea, convergence analysis, numerical results. SIAM Journal of Optimization, 2, 121-152.
- [6] Polak, E., Royset, J. O., (2003). Algorithms for finite and semi-infinite min-max problems using adaptive smoothing technique. Journal of Optimization Theory and Applications, 119, 421-457.
- [7] Bagirov, A. M., (2003). Continuous subdifferential approximations and their applications. Journal of Mathematical Sciences, 115, 2567-2609.
- [8] Luksan, L., Vlcek, J., (1998). A bundle-Newton method for nonsmooth unconstrained minimization. Mathematical Programming, 83, 373-391.
- [9] Luksan, L., Vlcek, J., (2001). Globally convergent variable metric method for nonconvex nondifferentiable unconstrained minimization. Journal of Optimization Theory and Applications, 111, 407-430.

- [10] Lewis, A. S., Overton, M. L., (2012). Nonsmooth optimization via quasi-Newton methods. *Mathematical Programming*, doi: 10.1007/s10107-012-0514-2, 1-29.
- [11] Karmitsa, N., Bagirov, A. M., (2012). Limited memory discrete gradient bundle method for nonsmooth derivative-free optimization. *Optimization*, 61, 1491-1509.
- [12] Conn, A. R., Gould, N. I. M., Toint, Ph. L., (2000). Trust-region methods. Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [13] Qi, L., Sun, J., (1994). A trust region algorithm for minimization of locally Lipschitzian functions. *Mathematical Programming*, 66, 25-43.
- [14] Dennis, J., Li, S., Tapia, R., (1995). An unified approach to global convergence of trust region methods for nonsmooth optimization. *Mathematical Programming*, 68, 319-346.
- [15] Davidon, W.C., (1980). Conic approximation and collinear scaling for optimizers. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 17, 281-268.
- [16] Gourgéon, H., Nocedal, J., (1985). A Conic algorithm for optimization. *SIAM Journal of Scientific Stochastic Computation*, 6, 253-267.
- [17] Nocedal, J., Wright, S.J., (1999). *Numerical optimization*. Berlin, Springer.
- [18] Di, S., Sun, W., (1996). Trust region method for conic model to solve unconstrained optimization problems. *Optimization Methods and Software*, 6, 237-263.
- [19] Bagirov, A., Karmitsa, N., Mäkelä, M. M., (2014). *Introduction to nonsmooth optimization: theory, practice and software*. Berlin, Springer.
- [21] Mahdavi-Amiri, N., Yousefpour, R., (2012). An effective nonsmooth optimization algorithm for locally Lipschitz functions. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 155, 180-195.
- [22] Fu, J.H., Sun, W.Y., Sampaio, D., (2005). An adaptive approach of conic trust-region method for unconstrained optimization problems. *Journal of Applied Mathematics and Computation*, 19, 347-365.
- [23] Qu, S. J., Jiang, S. D., Zhu, Y., (2009). A conic trust-region method and its convergence properties. *Computers and Mathematics with Applications*, 57, 513-528.
- [24] Akbari, Z., Yousefpour, R., Peyghami, M. R., (2015). A new nonsmooth trust region algorithm for locally lipschitz unconstrained optimization problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 164, 733-754.