مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال هفدهم، شماره دوم (پیاپی ۶۵)،تابستان ۹۹، ص ص ۲۵-۹
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

الگوریتم بندرز تسریع‌شده برای زمان‌بندی شارژ و دشارژ وسایل نقلیه الکتریکی در شبکه‌های هوشمند

سلمان خدایی‌فر[1*]، داود بابالو[2]
۱- استادیار، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، دانشکده ریاضی، زنجان، ایران
۲- کارشناسی ارشد، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، دانشکده ریاضی، زنجان، ایران

رسید مقاله: ۳۰ مهر ۱۳۹۶
پذیرش مقاله: ۲۶ فروردین ۱۳۹۹

چکیده
در قرن حاضر، محیط زیست به یک موضوع مهم جهانی تبدیل شده است. با توجه به محدویت‌های محیط زیست و افزایش انتشار گازهای گلخانه‌ای و افزایش قیمت بنزین وسایل نقلیه‌ی الکتریکی یک جایگزین مناسب برای وسایل نقلیه‌ی بنزینی است. اما تقاضای پیک برق مصرفی، ممکن است باعث اوج بار بزرگ و نامطلوب در شبکه‌های برق شود. خوش‌بختانه وسایل نقلیه‌ی الکتریکی می‌توانند به طور انعطاف‌پذیر، با زمان‌بندی شارژ و دشارژ هماهنگ شوند و این نیازمند الگوریتم‌های بهینه‌ی شارژ و دشارژ هوشمند و زمان‌بندی تخلیه می‌باشد. در این مقاله، مدل ریاضی از نوع برنامه‌ریزی خطی صحیح آمیخته برای زمان‌بندی شارژ و دشارژ وسایل نقلیه‌ی الکتریکی در شبکه‌های هوشمند برق را بررسی کرده و مدل مربوطه را با استفاده از الگوریتم دقیق تجزیه بندرز و روش تجزیه بندرز با برش‌های بهینه-پارتو حل خواهیم کرد. نهایتا با نتایج عددی کارایی مدل و الگوریتم‌های پیشنهادی را بررسی خواهیم کرد.

کلمات کلیدی: شبکه‌های هوشمند، زمان‌بندی بهینه، مدل‌سازی ریاضی، الگوریتم تجزیه‌ی بندرز، برش‌های بهینه-پارتو.

۱ مقدمه
طی سال‌های اخیر، وسایل نقلیه الکتریکی با توجه به قوانین دولتی وضع‌شده در محیط زیست، افزایش انتشار گازهای گلخانه‌ای و قیمت بنزین، بیشتر مورد توجه مصرف‌کنندگان قرار گرفته و در حال تبدیل شدن به یک جایگزین مناسب برای وسایل نقلیه‌ی با سوخت‌های فسیلی است. اما رشد سریع تقاضای برق ممکن است منجر به اوج بار بزرگ و نامطلوب در شبکه موردنظر شود. خوش‌بختانه وسایل نقلیه‌ی الکتریکی می‌تواند به طور انعطاف‌پذیر، با زمان‌بندی شارژ و دشارژ هماهنگ شوند. وسایل نقلیه‌ی الکتریکی می‌توانند منافع بیشتری را برای شبکه برق توسط تخلیه‌ی باتری‌هایشان ارایه دهند. رشد سریع منابع انرژی‌های تجدیدپذیر مثل سلول‌های

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: s.khodayifar@iasbs.ac.ir

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.1.9]

فتوولتائیک[1] و توربین‌های بادی، به تعداد زیادی باتری‌های ذخیره‌ساز برای ذخیره‌ی انرژی الکتریکی تولیدشده در شبکه‌های برق نیاز دارند. انتظار می‌رود که باتری‌های وسایل نقلیه‌ی الکتریکی یک جایگزین مناسب برای باتری‌های ذخیره‌ساز گران قیمت فراهم آورد و نقش مهمی را در شبکه‌های برق در حال ظهور با تعداد زیادی منابع انرژی تجدیدپذیر بازی کند [۱].

۱-۱ پیشینه تحقیق

طی سال‌های اخیر، طیف گسترده‌ای از مدل‌ها و الگوریتم‌ها برای زمان‌بندی شارژ و دشارژ وسایل نقلیه‌ی الکتریکی ارایه داده شده است. کلمنت و همکارانش یک مدل برنامه‌ریزی درجه‌ی دو برای به حداقل رساندن تلفات توان و انحراف ولتاژ ارایه داده‌اند [۲]. دیلمی و همکارانش یک الگوریتم ابتکاری سریع، به نام الگوریتم انتخاب حداکثر حساسیت، برای کاهش هزینه‌های مرتبط با مطالبات برق اضافی خودروها و تلفات توان گزارش داده‌اند [۳]. سوارز و همکارانش یک مدل برنامه‌ریزی خطی[2] (LP) برای کاهش اختلاف بین تقاضای واقعی و تقاضای مورد انتظار ارایه داده‌اند، که برای کاربردهای زمان شبه-واقعی به دلیل هزینه پایین محاسباتی آن، مناسب بود [۴]. اوکان و همکارانش از الگوریتم تجزیه، از نوع ولف-دانتزیگ برای حل مساله‌ی زمان‌بندی تقاضای خودروهای الکتریکی در مدل غیرمتمرکز استفاده کرده‌اند [۵]. وو و همکارانش یک مدل بهینه‌سازی تصادفی برای به حداقل رساندن مصرف انرژی الکتریکی توسط خودروهای الکتریکی ارایه داده‌اند [۶]. یاو و همکارانش برای اطمینان از شارژ همه‌ی وسایل نقلیه‌ی متصل به شبکه، از یک استنتاج فازی برای تعیین اولویت شارژ و دشارژ هر وسیله‌ی نقلیه استفاده کرده‌اند [۷]. تان و همکارانش یک الگوریتم برنامه‌ریزی پویا پیشنهاد کرده‌اند که در آن لازم نیست کاربران وسایل نقلیه زمان شارژشان را به کنترل مرکزی اطلاع دهند. الگوریتم پیشنهادی آن‌ها با تضمین ارضای محدودیت‌های مساله، تلاش می‌کند تا هزینه‌های انرژی کاربران را کاهش دهد [۸]. لوو و همکارانش یک استراتژی زمان‌بندی شارژ برای انواع مختلف وسایل نقلیه‌ی الکتریکی ارایه داده‌اند، که نه تنها براساس اطلاعات سیستم حمل و نقل (مانند: مسافت جاده، سرعت خودرو و زمان انتظار) عمل می‌کند، بلکه اطلاعات سیستم شبکه (مانند: انحراف بار و ولتاژ گره) را نیز در نظر می‌گیرد [۹].

در این مقاله یک زمان‌بندی بهینه شارژ و دشارژ برای شارژ و دشارژ وسایل نقلیه‌ی الکتریکی در یک سیستم مدیریت انرژی خانگی با استفاده از سیستم‌های فتوولت و باتری‌های ذخیره ساز در نظر گرفته شده است و یک فرمول‌بندی برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح آمیخته[3] (MILP) به منظور به حداقل‌رساندن هزینه‌های برق توسعه داده شده است، که مدل ریاضی مساله قبلا در [۱] با استفاده از الگوریتم‌های ابتکاری تک گامی و دو گامی حل شده بود و جواب تقریبی برای مساله به دست آمده بود. اما در این مقاله، ما مدل ریاضی مساله را با استفاده از الگوریتم تجزیه‌ی بندرز [۱۱،۱۰] و الگوریتم تجزیه بندرز[4] در حضور برش‌های بهینه-پارتو[5] حل خواهیم کرد و

[1] Photovoltaic (PV) Array
[2] Linear Programming
[3] Mixed Integer Linear Programming
[4] Benders Decomposition Approach
[5] Pareto Optimal Cuts

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.1.9]

در بخش نتایج عددی نشان می‌دهیم که الگوریتم‌های پیشنهادی ما نسبت به الگوریتم‌های ابتکاری، کارایی بیشتری داشته و جواب کاملا دقیق ریاضی برای مدل ارایه می‌دهند.

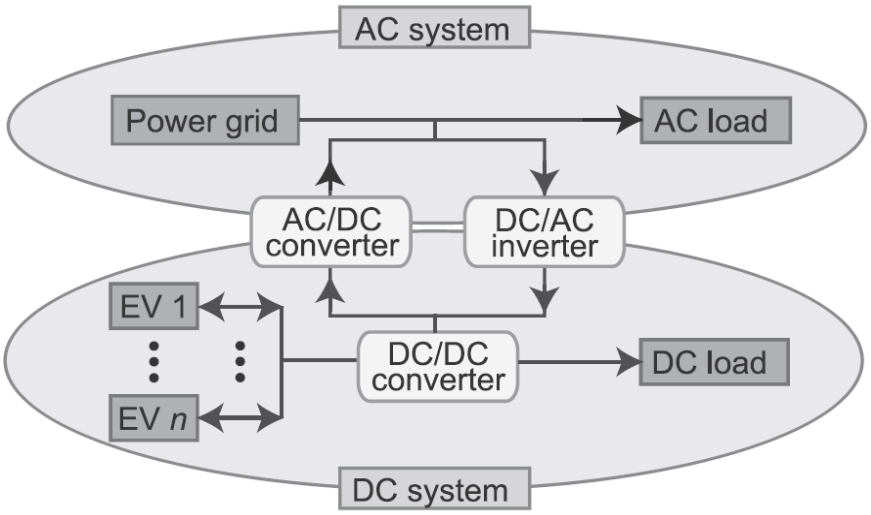
ساختار در نظرگرفته شده برای این مقاله به شرح زیر است: در بخش ۱ یک مقدمه کوتاه و تاریخچه تحقیق مساله مورد نظر آورده شده است. در بخش ۲ مساله‌ی زمان‌بندی شارژ و دشارژ وسایل نقلیه‌ی الکتریکی در شبکه‌های هوشمند برق معرفی و مدل برنامه‌ریزی ریاضی آن ارایه می‌شود. در بخش ۳ اول کلیات روش تجزیه بندرز را در حالت کلی توضیح داده و در ادامه مدل ریاضی مساله پیشنهادی با استفاده از الگوریتم تجزیه بندرز حل خواهد شد. در ادامه این بخش، یک تکنیک به نام برش‌های بهینه-پارتو برای سرعت بخشیدن به همگرایی روش بندرز ارایه خواهد شد. در بخش ۴، کارایی الگوریتم پیشنهادی را با استفاده از نتایج عددی نشان داده و نهایتا مقاله در بخش ۵، با یک نتیجه‌گیری و پیشنهادات برای کارهای آتی پایان می‌یابد.

۲ بیان مساله

در این بخش روی یک شبکه سیستم مدیریت انرژی خانگی در شبکه‌های هوشمند انرژی تمرکز کرده‌ایم که شامل تعداد زیادی از وسایل نقلیه‌ی الکتریکی می‌باشد، که در آن هر وسیله نقلیه علاوه بر یک وسیله‌ی حمل و نقل، یک باتری ذخیره‌ساز برای ذخیره‌ی انرژی الکتریکی در نظر گرفته شده است. وسایل نقلیه‌ی الکتریکی به طور مکرر باتری‌هایشان را با الکتریسیته‌ی اضافی شارژ و دشارژ می‌کنند تا تقاضای دستگاه‌ها را در ساختمان برآورده کنند. در این زمان‌بندی فرض کرده‌ایم که زمان‌بندی سفر وسایل نقلیه‌ی الکتریکی از قبل مشخص شده است. شکل ۱ یک شبکه برق محلی مدیریت انرژی خانگی را نمایش می‌دهد. در این شکل $EV1$ تا EVn تعداد n تا وسیله‌ی نقلیه‌ی الکتریکی را نشان می‌دهد. شبکه برق محلی یک جریان متناوب (AC) و یک جریان مستقی (DC) در سیستم انتقال برق دارد. این جریان‌ها می‌توانند در صورت لزوم توسط دستگاه مبدل جریان به یکدیگر تبدیل شوند. وسایل نقلیه الکتریکی سفر می‌کنند و باتری‌هایشان را شارژ و دشارژ می‌کنند. وسایل نقلیه‌ی الکتریکی هنگامی که در پارکینگ‌هایشان نیستند از شبکه برق جدا هستند و نمی‌توانند در عملیات شارژ و دشارژ شرکت کنند. ما بر این اساس از یک مدل شبکه بازه‌ی زمانی برای شرح تغییرات پویا برای زمان‌بندی شارژ و دشارژ وسایل نقلیه‌ی الکتریکی در یک شبکه‌ی برق محلی روی بازه‌ی زمانی استفاده می‌کنیم.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.1.9]



شکل ۱. شبکه برق محلی سیستم مدیریت انرژی خانگی

۲-۱ فرمول‌بندی مساله

در این بخش یک مساله بهینه‌سازی برای رسیدن به کاهش اوج بار در سیستم مدیریت انرژی خانگی ارایه داده و مساله به عنوان یک مدل MILP فرمول‌بندی خواهد شد. عملیات سویچینگ بین شارژ و دشارژ باتری‌های وسایل نقلیه الکتریکی با متغیرهای دودویی (۱-۰) شرح داده می‌شود. مجموعه‌ها، پارامترها و متغیرهای مدل ریاضی مساله در جدول‌های ۱ و ۲ تعریف شده‌اند.

جدول ۱. تعریف مجموعه‌های مساله

مجموعه‌ها	شرح مختصری از مجموعه‌ها
N	مجموعه‌ی وسایل نقلیه‌ی الکتریکی
T	مجموعه‌ی دوره‌های زمانی
T_i	مجموعه‌ی دوره‌های زمانی که در آن وسیله‌ی نقلیه i می‌تواند به برق وصل شده و شارژ و دشارژ شود
J_i	مجموعه‌ی سفرهای وسیله‌ی نقلیه‌ی i
T_{peak}	مجموعه‌ی دوره‌های زمانی ساعات اوج مصرف

جدول ۲. شرح پارامترها و متغیرهای مساله

پارامترها	شرح مختصری از پارامترها
c_i	ظرفیت باتری وسیله‌ی نقلیه‌ی i
f_i	ماکسیمم نرخ شارژ وسیله‌ی نقلیه‌ی i در واحد زمان
g_i	ماکسیمم نرخ دشارژ وسیله‌ی نقلیه‌ی i در واحد زمان
$a_{i,j}$	زمان رفتن j امین سفر وسیله‌ی نقلیه‌ی i
$b_{i,j}$	زمان آمدن j امین سفر وسیله‌ی نقلیه‌ی i

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.1.9]

L	بیشترین عرضه‌ی الکتریسیته از شبکه برق در واحد زمان
$e_{i,j}$	مصرف الکتریسیته برای jامین سفر وسیله‌ی نقلیه‌ی i
$d_{i,j}$	تقاضای الکتریسیته برای jامین سفر وسیله‌ی نقلیه‌ی i
E_t^D	تقاضای الکتریسیته‌ی بارهای DC در زمان t
E_t^A	تقاضای الکتریسیته‌ی بارهای AC در زمان t
λ^{AD}	نرخ افت از تبدیل بار AC به DC
λ^{DA}	نرخ افت از تبدیل بار DC به AC

متغیرها	شرح مختصری از متغیرها
$x_{i,t}$	متغیر تصمیم برای شارژ الکتریسیته به وسیله‌ی نقلیه‌ی i در زمان t
$u_{i,t}$	الکتریسیته‌ی ذخیره شده در وسیله‌ی نقلیه‌ی i در زمان t
$y^A{}_{i,t}$	دشارژ الکتریسیته از وسیله‌ی نقلیه‌ی i به بارهای AC در زمان t
$y^D{}_{i,t}$	دشارژ الکتریسیته از وسیله‌ی نقلیه‌ی i به بارهای DC در زمان t
$Z^A{}_t$	عرضه‌ی الکتریسیته از شبکه برق به بارهای AC در زمان t
$Z^D{}_t$	عرضه‌ی الکتریسیته از شبکه برق به بارهای DC در زمان t
$\bar{Z}$	میانگین عرضه‌ی الکتریسیته از شبکه برق در طول ساعات اوج مصرف T_{peak}

تقاضای الکتریسیته $d_{i,j}$ برای jامین سفر وسیله‌ی نقلیه‌ی i در نظر گرفته شده است تا از مصرف واقعی الکتریسیته‌ی $e_{i,j}$ بزرگ‌تر باشد، به‌طوری که وسیله‌ی نقلیه‌ی i به طور کامل تخلیه می‌شود. میانگین الکتریسیته‌ی عرضه شده از شبکه برق در طول ساعات اوج مصرف T_{peak} به صورت

$$\bar{Z} = \frac{1}{|T_{peak}|} \sum_{t \in T_{peak}} \left(Z_t^A + Z_t^D \right) \qquad (1)$$

تعریف می‌شود. با استفاده از نمادهای جدول‌های ۱ و ۲، مدل برنامه‌ریزی خطی صحیح آمیخته برای مساله زمان‌بندی شارژ و دشارژ وسایل نقلیه‌ی الکتریکی در شبکه‌های هوشمند برق به صورت

$$\text{P1: } Min \ \ \bar{Z} + \frac{\alpha}{|T_{peak}|} \sum_{t \in T_{peak}} (Z_t^A + Z_t^D - \bar{Z}) \qquad (2)$$

s.t.

$$f_i x_{i,t} + u_{i,t} \le c_i, \qquad \forall t \in T_i, i \in N \qquad (3)$$

$$Z_t^A + Z_t^D \le L, \qquad \forall t \in T \qquad (4)$$

$$x_{i,t} + y_{i,t}^A + y_{i,t}^D \le 1, \qquad \forall t \in T_i, i \in N \qquad (5)$$

$$Z_t^A + \lambda^{AD} \sum_{i \in N} g_i y_{i,t}^A = E_t^A, \qquad \forall t \in T \qquad (6)$$

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.1.9]

$$\lambda^{AD}\, Z_t^D + \sum_{i\in N} g_i y_{i,t}^D = E_t^D + \sum_{i\in N} f_i x_{i,t}, \qquad \forall t \in T \tag{۷}$$

$$f_i x_{i,a_{i,j}} + u_{i,a_{i,j}} \geq d_{i,j}, \qquad \forall j \in J_i, i \in N \tag{۸}$$

$$u_{i,t-1} + f_i x_{i,t-1} = u_{i,t} + g_i (y_{i,t}^A + y_{i,t}^D), \qquad \forall t \in T_i, i \in N \tag{۹}$$

$$u_{i,a_{i,j}} - u_{ib_{i,j}} = e_{i,j}, \qquad \forall j \in J_i, i \in N \tag{۱۰}$$

$$x_{i,t}, y_{i,t}^A, y_{i,t}^D \in \{0,1\}, \qquad \forall t \in T_i, i \in N \tag{۱۱}$$

$$0 \leq u_{i,t} \leq c_i, \qquad \forall t \in T_i, i \in N \tag{۱۲}$$

$$Z_t^A, Z_t^D \geq 0, \qquad \forall t \in T \tag{۱۳}$$

است. در این مدل، تابع هدف میانگین الکتریسیته‌ی عرضه‌شده به شبکه و اختلاف بین مقدار میانگین عرضه‌شده و مقدار کل الکتریسیته‌ی عرضه‌شده به شبکه برق را در طول ساعات اوج مصرف مینیمم‌سازی می‌کند، که در آن α یک پارامتر کنترل تعادل[1]، بین مقدار میانگین عرضه‌ی الکتریسیته و مقدار واقعی عرضه‌ی الکتریسیته می‌باشد [۱]. محدودیت (۳)، محدودیت ظرفیت باتری‌های وسایل نقلیه را نشان می‌دهد. محدودیت (۴)، محدودیت عرضه‌ی الکتریسیته از شبکه‌ی برق را نشان می‌دهد. محدودیت (۵)، محدودیت انجام عملیات منحصربه‌فرد شارژ و دشارژ وسایل نقلیه را نشان می‌دهد. محدودیت‌های (۶) و (۷)، به ترتیب محدودیت تقاضای بارهای AC و محدودیت تقاضای بارهای DC را نشان می‌دهند. محدودیت (۸)، محدودیت تقاضای بار برای سفر وسایل نقلیه را نشان داده که در آن فرض می‌کنیم $x_{i,t} = y_{i,t}^A = y_{i,t}^D = 0,\ \forall t \in T \setminus T_i, i \in N$. یعنی اگر خودروها در پارکینگ‌هایشان نباشند نمی‌توانند در عملیات شارژ و دشارژ شرکت کنند. محدودیت (۹)، محدودیت تعادلی ذخیره‌ی باتری وسایل نقلیه را نشان می‌دهد و نهایتا محدودیت (۱۰)، مصرف واقعی برق برای سفرهای وسایل نقلیه را نشان می‌دهد.

مدل P۱ شامل متغیرهای پیوسته و متغیرهای دودویی (۱-۰) است، از این رو این مدل از نوع MILP بوده و جزء کلاس مسایل NP-سخت[2] می‌باشد. این مدل در [۱] با استفاده از الگوریتم‌های ابتکاری خطی تک گامی و دوگامی حل شده و جواب تقریبی برای آن به دست آمده است. این نوع مدل‌ها معمولا از نوع اندازه-بزرگ[3] می‌باشند. مولفین مختلف نشان داده‌اند که روش‌های تجزیه مانند تجزیه‌ی لاگرانژ آزاد شده[4] [۱۰،۱۱] و تجزیه‌ی بندرز [۱۲] برای مسایل اندازه- بزرگ مناسب می‌باشند. لذا، در این مقاله این مدل با استفاده از روش دقیق ریاضی از نوع تجزیه‌ی بندرز که برای مدل‌های مقیاس بزرگ کارا [۱۲] است، حل خواهد شد. همچنین روش بندرز با برش‌های از نوع بهینه پارتو را برای بهبود سرعت همگرایی روش بندرز بیان خواهیم کرد. در ادامه کلیات این روش را برای حل مدل فوق، توضیح می‌دهیم.

[1] Trade-off
[2] NP-Hard
[3] Large-Scale
[4] Lagrangian Relaxation Decomposition

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.1.9]

۳ روش تجزیه‌ی بندرز

با توجه به اینکه مسایل و مدل‌های مربوط به مدیریت و کنترل مصرف انرژی در شبکه‌های هوشمند انرژی شامل متغیرهای پیوسته و متغیرهای دودویی (۱-۰) است، از این رو مدل‌های بهینه‌سازی این نوع MILP می‌باشند. معمولا این نوع مدل‌ها در حوزه مسایل اندازه-بزرگ قرار می‌گیرند. پس روش مناسب برای حل این نوع مسایل استفاده از روش‌های تجزیه می‌باشد. در این مقاله ما از روش تجزیه‌ی بندرز برای حل مدل ریاضی مساله که در بخش ۲ ارایه شد، استفاده خواهیم کرد.

استفاده از اصل تجزیه، روشی نظامند برای حل مسایل طراحی شبکه و به ویژه مسایل طراحی مقیاس بزرگ می‌باشد. در این روش مساله‌ی اولیه به یک یا چند مساله‌ی کوچک‌تر و قابل کنترل‌تر، تبدیل می‌شود و با تبادل اطلاعات میان این مسایل، یک جواب بهینه برای مساله اولیه حاصل می‌شود. در مورد مسایل مربوط به شبکه، معمولا دو روش تجزیه‌ی لاگرانژ آزاد شده و تجزیه‌ی بندرز به‌کار می‌روند. روش تجزیه‌ی بندرز یک روش کلاسیک برای حل مسایل صحیح آمیخته با متغیرهای صحیح و پیوسته است که اساس کار آن افراز و تولید محدودیت‌ها با تاخیر می‌باشد [۱۲]. الگوریتم تجزیه‌ی بندرز، یک مدل برنامه‌ریزی را به یک مساله‌ی اصلی[1] و یک زیرمساله[2] تجزیه می‌کند. مساله‌ی اصلی یک مساله برنامه‌ریزی صحیح، در حالی که زیر مساله یک مساله پیوسته می‌باشد.

روش بندرز بر حل تکراری مساله‌های اصلی و دوگان زیر مساله، برای به دست آوردن یک جواب بهینه برای مدل کلی تکیه دارد. در هر تکرار مساله‌ی اصلی، متغیرهای صحیح و یک کران پایین برای مساله‌ی اولیه (مینیمم‌سازی) تولید می‌کند. جواب به‌دست آمده از مساله‌ی اصلی در دوگان زیر مساله قرار داده می‌شود و دوگان زیر مساله یک برش معتبر برای مساله‌ی اصلی تولید می‌کند. اگر دوگان زیر مساله جواب بهینه متناهی داشته باشد، یک برش از نوع برش بهینه[3] به مساله اصلی اضافه می‌شود. اگر دوگان زیر مساله جواب بهینه نامتناهی داشته باشد یک برش از نوع برش شدنی[4] به مساله اصلی اضافه می‌شود. در هر تکرار زیر مساله یک کران بالا برای مساله کلی تولید می‌کند. به این ترتیب، مساله‌ی اصلی و دوگان زیر مساله به صورت تکراری حل می‌شوند و مساله زمانی خاتمه می‌یابد که شکاف بین کران‌های به دست آمده از مساله‌ی اصلی و دوگان زیر مساله به اندازه مورد نظر بسته شود.

به منظور یک مرور کلی بر روش تجزیه بندرز، مساله‌ی صحیح آمیخته

$$\text{P۲: } Min \quad cx+fy$$

$$s.t.$$

$$Ax + By \geq b,$$

$$Dy \geq e$$

$$x \geq ۰, y \in Z^{+}$$

[1] Master Problem
[2] Subproblem
[3] Optimality Cut
[4] Feasibility Cut

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.1.9]

را در نظر می‌گیریم. در این مدل بردارهای x و y به ترتیب متغیرهای پیوسته و صحیح را نشان می‌دهند. c و f بردارهای سطری متناظر با هزینه‌ها می‌باشند. ماتریس‌های A، B و D ضرایب محدودیت‌ها و بردارهای b و e مقادیر سمت راست هستند.

در صورت تثبیت متغیرهای صحیح با مقادیری مشخص $\bar{y}$، مدل مساله را می‌توان به صورت

P۳: $\underset{y\in Y}{Min}\{f\bar{y}+\underset{x\geq 0}{Min}\{cx: Ax\geq b-B\bar{y}\}\}$

نوشت که در آن

$Y=\{y: Dy\geq e, y\in Z^{+}\}.$

این مدل، زیرمساله بندرز است. مساله‌ی مینیمم‌سازی داخلی، یک مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی است و با در نظر گرفتن متغیرهای دوگان u برای محدودیت‌های $Ax\geq b-B\bar{y}$ دوگان مساله مینیمم‌سازی داخلی را می‌توان به صورت

P۴: $Max\ u(b-B\bar{y})$

s.t.

$uA\leq c$

$u\geq 0$

نوشت. این دوگان زیر مساله‌ی بندرز است. با استفاده از قضیه‌ی دوآلیتی مدل P۳ را می‌توان به صورت

P۵: $\underset{y\in Y}{Min}\{f\bar{y}+\underset{u\geq 0}{Max}\{u(b-B\bar{y}): uA\leq c\}\}$

بازنویسی نمود. با توجه به این که فضای شدنی مساله‌ی P۴ مستقل از انتخاب متغیر y است، مساله‌ی P۵ برای ادامه‌ی کار مناسب‌تر است. فرض کنیم که $F=\{u\mid uA\leq c, u\geq 0\}$ فضای چندوجهی شدنی این مساله باشد. اگر این مجموعه ناتهی باشد، مجموعه‌ی F شامل نقاط رأسی u_i(i=۱,۲,...,n) و جهت‌های رأسی r_j(j=۱,۲,...,m) می‌باشد. جواب زیرمساله‌ی دوگان می‌تواند متناهی و یا نامتناهی باشد. در حالت اول، جواب آن در یکی از نقاط رأسی اتفاق می‌افتد. در حالت دوم، جهت رأسی مانند r_j وجود دارد به‌طوری که $r_j(b-B\bar{y})>0$ است. با استفاده از قضیه‌ی دوآلیتی برای حالت نامتناهی، مساله‌ی بهینه‌سازی P۲ نشدنی است و باید از این حالت جلوگیری شود. بنابراین باید مقادیری از $\bar{y}$ که منجر به نامتناهی بودن زیرمساله‌ی دوگان می‌شود را حذف کنیم. برای این منظور کافی است که محدودیت

$r_j(b-B\bar{y})\leq 0 \quad , \quad j=1,2,...,m$

را به مساله‌ی P۵ اضافه کنیم. با اضافه کردن این محدودیت، جواب بهینه‌ی مساله‌ی P۴ در یکی از نقاط رأسی u_i(i=۱,۲,...,n) اتفاق می‌افتد. بنابراین مساله‌ی P۵ را می‌توان به صورت

P۶: $\underset{y\in Y}{Min}\{f\bar{y}+\underset{1\leq i\leq n}{Max}\{u_i(b-B\bar{y})\}\}$

s.t.

$r_j(b-B\bar{y})\leq 0, \qquad j=1,2,...,m$

نوشت. حال با معرفی متغیر کمکی z مدل P۶ را می‌توان به صورت

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.1.9]

P۷: $Min \quad f\bar{y}+z$

s.t.

$$z \geq u_i(b-B\bar{y}), \quad i=1,2,...,\mathrm{n} \tag{۱۴}$$

$$r_j(b-B\bar{y}) \leq 0, \quad j=1,2,...,m \tag{۱۵}$$

$$\bar{y} \in Y, z \ \text{ free} \tag{۱۶}$$

نوشت. محدودیت‌های از نوع (۱۴) را برش‌های بهینه و از نوع (۱۵) را برش‌های شدنی گویند. این مدل، فرمول‌بندی مجدد بندرز[1] نامیده می‌شود. عیب اساسی آن زیاد بودن تعداد نقاط رأسی و جهات رأسی زیرمساله است. برای غلبه بر این مشکل، بندرز محدودیت‌های از نوع (۱۴) و (۱۵) را با تاخیر تولید می‌کند و در آغاز، فقط محدودیت روی متغیرهای y یعنی محدودیت (۱۶) در نظر گرفته می‌شود که منجر به اولین مساله‌ی اصلی آزاد شده[2] به صورت

P۸: $Min \quad f\,\mathrm{y}+z$

s.t.

$$y \in Y, z \ \text{ free}$$

می‌شود. مقدار تابع هدف مساله‌ی اصلی آزاد شده یک کران پایین برای مساله‌ی اولیه P۲ می‌دهد. از سوی دیگر جواب حاصل برای متغیرهای y برای دوگان زیر مساله‌ی P۴ ارسال می‌شود. دوگان زیرمساله دوباره حل می‌شود. اگر جواب بهینه نامتناهی داشته باشد برش شدنی از نوع (۱۵) و در صورت جواب بهینه متناهی، برش بهینه به‌صورت (۱۴) به مساله‌ی اصلی آزاد شده اضافه می‌شود. از ترکیب تابع هدف مساله‌ی اصلی آزاد شده با تابع هدف دوگان زیرمساله یک کران بالا برای مساله‌ی P۲ فراهم می‌شود. روند به‌طوری که توضیح داده شد، تکرار می‌شود تا شکاف بین کران‌های بالا و پایین به دست آمده بسته شده و یا به اندازه‌ی مورد نظر به هم نزدیک شوند.

۳-۱ بسط الگوریتم تجزیه بندرز برای حل مدل P۱

با توجه به ملاحظات بخش قبلی، برای حل مدل P۱ با استفاده از الگوریتم تجزیه‌ی بندرز با ثابت در نظر گرفتن متغیرهای دودویی $x_{i,t}, y^A_{i,t}, y^D_{i,t}$ این مدل به شکل

P۹: $Min \quad \bar{Z}+\frac{\alpha}{(\mathrm{T}_{peak})}\sum_{t\in \mathrm{T}_{peak}}(\mathrm{Z}^A_t+Z^D_t-\bar{Z})$ (۱۷)

s.t.

$$-u_{i,t} \geq f_i\bar{x}_{i,\mathrm{t}}-\mathrm{c}_i, \qquad \forall t\in T_i, i\in N \tag{۱۸}$$

$$-\mathrm{Z}^A_t-Z^D_t \geq -L, \qquad \forall t\in T \tag{۱۹}$$

$$\mathrm{Z}^A_t = E^A_t-\lambda^{DA}\sum_{i\in N}\mathrm{g}_i\overline{y^A_{lt}}, \qquad \forall t\in T \tag{۲۰}$$

[1] Benders' Reformulation
[2] Relaxed Master Problem

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.1.9]

$$\lambda^{AD} Z_t^D = E_t^D + \sum_{i\in N} f_i \overline{x_{l,t}} - \sum_{i\in N} g_i \overline{y_{l,t}^D}, \qquad \forall t \in T \tag{۲۱}$$

$$u_{i,a_{i,j}} \geq d_{i,j} - f_i \overline{x_{l,a_l,j}}, \qquad \forall j \in J_i, i \in N \tag{۲۲}$$

$$u_{i,t-1} - u_{i,t} = g_i(\overline{y_{l,t}^A} + \overline{y_{l,t}^D}) - f_i \overline{x_{l,t-1}}, \qquad \forall t \in T_i, i \in N \tag{۲۳}$$

$$u_{i,a_{i,j}} - u_{i,b_{i,j}} = e_{i,j}, \qquad \forall j \in J_i, i \in N \tag{۲۴}$$

$$-u_{i,t} \geq -c_i, \qquad \forall t \in T_i, i \in N \tag{۲۵}$$

$$\overline{x_{l,t}}, \overline{y_{l,t}^A}, \overline{y_{l,t}^D} \in Y, \qquad \forall t \in T_i, i \in N \tag{۲۶}$$

$$Z_t^A, Z_t^D, u_{i,t} \geq ۰, \qquad \forall t \in T \tag{۲۷}$$

$$Y=\{x_{i,t}, y_{i,t}^A, y_{i,t}^D \in \{۰,۱\}, x_{i,t} + y_{i,t}^A + y_{i,t}^D \leq ۱, t \in T_i, i \in N\} \tag{۲۸}$$

واضح است که مدل P۹ یک LP از نوع پیوسته می‌باشد. پس به راحتی می‌توان دوگان این مساله را نوشت. متغیرهای دوگان متناظر با محدودیت‌های مدل فوق در جدول ۳ تعریف شده است.

جدول ۳. متغیرهای دوگان متناظر با محدودیت‌های مساله‌ی P۹

$\mu_{i,t}$	متغیر دوگان متناظر محدودیت (۱۸)
π_t	متغیر دوگان متناظر محدودیت (۱۹)
Γ_t	متغیر دوگان متناظر محدودیت (۲۰)
β_t	متغیر دوگان متناظر محدودیت (۲۱)
$\gamma_{i,j}$	متغیر دوگان متناظر محدودیت (۲۲)
$\delta_{i,t}$	متغیر دوگان متناظر محدودیت (۲۳)
$\sigma_{i,j}$	متغیر دوگان متناظر محدودیت (۲۴)
$\eta_{i,t}$	متغیر دوگان متناظر محدودیت (۲۵)

با توجه به متغیرهای دوگان تعریف شده در جدول ۳ دوگان مدل P۹ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\begin{aligned} \text{P۱۰: } Max \ & \sum_{i\in N}\sum_{t\in T_i}\left[(f_i \overline{x_{l,t}} - c_i)\mu_{i,t} + (g_i \overline{y_{l,t}^A} + g_i \overline{y_{l,t}^D} + f_i \overline{x_{l,t-۱}})\delta_{i,t} - c_i \eta_{i,t}\right] + \\ & \sum_{t\in T}[-L\pi_t + (E_t^A - \lambda^{DA}\sum_{i\in N} g_i \overline{y_{l,t}^A})\Gamma_t + (E_t^D + \sum_{i\in N} f_i \overline{x_{l,t}} - \\ & \sum_{i\in N} g_i \overline{y_{l,t}^D})\beta_t] + \sum_{i\in N}\sum_{j\in J_i}\left[(d_{i,j} - f_i \overline{x_{l,a_{l,j}}})\gamma_{i,j} + e_{i,j}\sigma_{i,j}\right] \end{aligned} \tag{۲۹}$$

s.t.

$$-\mu_{i,t} + \delta_{i,t-۱} - \delta_{i,t} - \eta_{i,t} \leq ۰, \qquad \forall t \in T, i \in N \tag{۳۰}$$

$$-\pi_t^A + \Gamma_t^A \leq \frac{\alpha}{|T_{peak}|}, \qquad \forall t \in T \tag{۳۱}$$

$$-\pi_t^D + \lambda^{AD}\beta_t^D \leq \frac{\alpha}{|T_{peak}|}, \qquad \forall t \in T \tag{۳۲}$$

$$\gamma_{i,a_{i,j}} - \sigma_{i,a_{i,j}} - \sigma_{i,b_{i,j}} \leq ۰, \qquad \forall i \in N, j \in J_j \tag{۳۳}$$

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.1.9]

$$\Gamma_t, \beta_t, \delta_{i,t} \text{ Free}, \quad \forall i \in N, t \in T \tag{۳۴}$$

$$\delta_{i,t} \text{ Free}, \quad \forall i \in N, t \in T_i \tag{۳۵}$$

$$\sigma_{i,j} \text{ Free}, \quad \forall i \in N, j \in J_i \tag{۳۶}$$

$$\mu_{i,t}, \pi_t, \eta_{i,t} \geq 0, \quad \forall i \in N, t \in T_i, \quad \gamma_{i,j} \geq 0, \quad \forall i \in N, j \in J_i \tag{۳۷}$$

فرض کنید فضای شدنی معادلات (۳۰) تا (۳۷) چند وجهی Φ باشد. اگر این مجموعه ناتهی باشد، مجموعه‌ی Φ شامل مجموعه نقاط رأسی EP و مجموعه جهت‌های رأسی ER می‌باشد. جواب زیرمساله‌ی دوگان می‌تواند متناهی و یا نامتناهی باشد. در حالت اول، جواب آن در یکی از نقاط رأسی اتفاق می‌افتد و با تعریف متغیر کمکی h برش بهینه به شکل

$$\begin{aligned} h \geq & \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{t\in T_i} \left[(f_i \overline{x_{l,t}} - c_i)\mu_{i,t}^p + (g_i \overline{y_{l,t}^A} + g_i \overline{y_{l,t}^D} - f_i \overline{x_{l,t-1}})\delta_{i,t}^p - c_i \eta_{i,t}^p \right] + \\ & \sum_{t\in T} [-L\pi_t + (E_t^A - \lambda^{DA} \sum_{i\in\mathbb{N}} g_i \overline{y_{l,t}^A})\Gamma_t^p + (E_t^D + \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i \overline{x_{l,t}} - \\ & \sum_{i\in\mathbb{N}} g_i \overline{y_{l,t}^D})\beta_t^p] + \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in J_i} \left[(d_{i,j} - f_i \overline{x_{l,a_{l,j}}})\gamma_{i,j}^p + e_{i,j}\sigma_{i,j}^p \right] \end{aligned} \tag{۳۸}$$

تعریف می‌شود. در حالت دوم، جهت رأسی وجود دارد به طوری که

$$\begin{aligned} & \sum_{i\in N} \sum_{t\in T_i} \left[(f_i \overline{x_{l,t}} - c_i)\mu_{i,t}^r + (g_i \overline{y_{l,t}^A} + g_i \overline{y_{l,t}^D} - f_i \overline{x_{l,t-1}})\delta_{i,t}^r - c_i \eta_{i,t}^r \right] + \\ & \sum_{t\in T} [-L\pi_t + (E_t^A - \lambda^{DA} \sum_{i\in N} g_i \overline{y_{l,t}^A})\Gamma_t^r + (E_t^D + \sum_{i\in N} f_i \overline{x_{l,t}} - \sum_{i\in N} g_i \overline{y_{l,t}^D})\beta_t^r] + \\ & \sum_{i\in N} \sum_{j\in J_i} \left[(d_{i,j} - f_i \overline{x_{l,a_{i,j}}})\gamma_{i,j}^r + e_{i,j}\sigma_{i,j}^r \right] > 0. \end{aligned} \tag{۳۹}$$

با استفاده از قضیه‌ی دوآلیتی برای حالت نامتناهی، مساله‌ی بهینه‌سازی P۱ نشدنی است و باید از این حالت جلوگیری شود. برای این کار کافی است که محدودیت

$$\begin{aligned} & \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{t\in T_i} \left[(f_i \overline{x_{l,t}} - c_i)\mu_{i,t}^r + (g_i \overline{y_{l,t}^A} + g_i \overline{y_{l,t}^D} - f_i \overline{x_{l,t-1}})\delta_{i,t}^r - c_i \eta_{i,t}^r \right] + \\ & \sum_{t\in T} [-L\pi_t + (E_t^A - \lambda^{DA} \sum_{i\in\mathbb{N}} g_i \overline{y_{l,t}^A})\Gamma_t^r + (E_t^D + \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i \overline{x_{l,t}} - \sum_{i\in\mathbb{N}} g_i \overline{y_{l,t}^D})\beta_t^r] + \\ & \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in J_i} \left[(d_{i,j} - f_i \overline{x_{l,a_{i,j}}})\gamma_{i,j}^r + e_{i,j}\sigma_{i,j}^r \right] \leq 0 \end{aligned} \tag{۴۰}$$

را به مساله اضافه کنیم که برش شدنی نامیده می‌شود. با اضافه کردن این محدودیت، جواب بهینه‌ی مساله‌ی P۱۰ در یکی از نقاط رأسی مجموعه EP اتفاق می‌افتد. نهایتا مدل کلی مساله‌ی بندرز به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\text{P۱۱: } Min \quad \overline{Z} + \frac{\alpha}{|T_{peak}|} \sum_{t\in T_{peak}} (Z_t^A + Z_t^D - \overline{Z}) + h \tag{۴۱}$$

s.t.

$$\begin{aligned} h \geq & \sum_{i\in N} \sum_{t\in T_i} \left[(f_i \overline{x_{l,t}} - c_i)\mu_{i,t}^p + (g_i \overline{y_{l,t}^A} + g_i \overline{y_{l,t}^D} - f_i \overline{x_{l,t-1}})\delta_{i,t}^p - c_i \eta_{i,t}^p \right] + \\ & \sum_{t\in T} [-L\pi_t + (E_t^A - \lambda^{DA} \sum_{i\in N} g_i \overline{y_{l,t}^A})\Gamma_t^p + (E_t^D + \sum_{i\in N} f_i \overline{x_{l,t}} - \\ & \sum_{i\in N} g_i \overline{y_{l,t}^D})\beta_t^p] + \sum_{i\in N} \sum_{j\in J_i} \left[(d_{i,j} - f_i \overline{x_{l,a_{i,j}}})\gamma_{i,j}^p + e_{i,j}\sigma_{i,j}^p \right] \end{aligned} \tag{۴۲}$$

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.1.9]

به ازای همه نقاط راسی در EP

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{t\in T_i}\left[(f_i\overline{x_{l,\mathrm{t}}}-c_i)\mu_{i,t}^r+(g_i\overline{y_{l,t}^A}+g_i\overline{y_{l,t}^D}-f_i\overline{x_{l,\mathrm{t}-1}})\delta_{i,t}^r-c_i\eta_{i,t}^r\right]+ \quad (۴۳)$$
$$\sum_{t\in T}[-L\pi_t+(E_t^A-\lambda^{DA}\sum_{i\in\mathbb{N}}g_i\overline{y_{l,t}^A})\Gamma_t^r+(E_t^D+\sum_{i\in\mathbb{N}}f_i\overline{x_{l,\mathrm{t}}}-\sum_{i\in\mathbb{N}}g_i\overline{y_{l,t}^D})\beta_t^r]+$$
$$\sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in J_i}\left[(d_{i,j}-f_i\overline{x_{l,a_{l,j}}})\gamma_{i,j}^r+e_{i,j}\sigma_{i,j}^r\right]\le ۰$$

به ازای همه نقاط راسی در ER

$$x_{i,t}+y_{\mathrm{i},t}^A+y_{\mathrm{i},t}^D\le ۱ \qquad \forall t\in T_i, i\in N \quad (۴۴)$$
$$x_{i,t}, y_{\mathrm{i},t}^A, y_{\mathrm{i},t}^D\in\{۰,۱\} \quad \forall t\in T_i, i\in N,\ h \text{ free.} \quad (۴۵)$$

این مدل، فرمول‌بندی مجدد بندرز به عبارتی مساله اصلی بندرز نامیده می‌شود. عیب اساسی آن زیاد بودن تعداد نقاط رأسی و جهت‌های رأسی زیر مساله است. برای غلبه بر این مشکل، بندرز محدودیت‌های از نوع (۴۲) و (۴۳) را با تاخیر تولید و به مدل اضافه می‌کند. در آغاز، فقط محدودیت‌های (۴۴) و (۴۵) در نظر گرفته می‌شود که منجر به اولین مساله‌ی اصلی آزاد شده به شکل زیر می‌شود:

$$\mathrm{P}۱۲: Min\ \ \overline{Z}+\frac{\alpha}{|\mathrm{T}_{peak}|}\sum_{t\in\mathrm{T}_{peak}}(\mathrm{Z}_t^A+Z_t^D-\overline{Z})+h \quad (۴۶)$$

s.t.

$$x_{i,t}+y_{\mathrm{i},t}^A+y_{\mathrm{i},t}^D\le ۱ \qquad \forall t\in T_i, i\in N \quad (۴۷)$$
$$x_{i,t}, y_{\mathrm{i},t}^A, y_{\mathrm{i},t}^D\in\{۰,۱\} \quad \forall t\in T_i, i\in N,\ h \text{ free.} \quad (۴۸)$$

مقدار تابع هدف مدل مساله‌ی اصلی یک کران پایین (LB) برای مساله‌ی اولیه P۱ می‌دهد. از سوی دیگر جواب حاصل برای متغیرهای عضو مجموعه Y (متغیرهای ۱-۰) به عنوان یک ورودی برای زیر مساله دوگان P۱۰ استفاده می‌شود. زیر مساله با این ورودی برای متغیرهای عضو مجموعه Y حل می‌شود. اگر جواب بهینه متناهی باشد محدودیت از نوع (۴۲) و در صورت نامتناهی بودن محدودیت از نوع (۴۳) به مساله‌ی اصلی آغازین اضافه می‌شود. از ترکیب جواب مساله‌ی اصلی با جواب اولیه‌ی زیر مساله دوگاه یک جواب کامل و در نتیجه یک کران بالا (UB) برای مساله اولیه P۱ فراهم می‌شود. سپس محدودیت جدید تولید شده به مساله‌ی اصلی آزاد شده اضافه می‌شود و یک جواب جدید برای متغیرهای عضو مجموعه Y به دست می‌آید. روش به‌طوری که توضیح داده شد، تکرار می‌شود تا شکاف بین کران‌های بالا و پایین به دست آمده به اندازه‌ی مورد نظر به هم نزدیک شوند.

۳-۲ یک تکنیک برای سرعت بخشیدن به همگرایی روش بندرز

کارایی الگوریتم بندرز به طور اساسی به زمان مورد نیاز برای حل مساله اصلی و تعداد تکرارهای مورد نیاز برای رسیدن به جواب بهینه بستگی دارد.

در سال‌های اخیر محقین به دنبال تکنیک‌هایی بودند که رشد همگرایی روش تجزیه بندرز را تسریع کنند. رعایت پناه و همکارانش [۱۳]، مگنتی [۱۴]، شرالی [۱۵] و تانک [۱۶]، نامساوی‌های معتبر را معرفی نمودند. با

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.1.9]

اضافه کردن این نامساوی‌های معتبر به مساله اصلی، سرعت همگرایی روش بندرز به طور قابل ملاحظه‌ای افزایش پیدا می‌کند. همچنین مگنتی و وانگ [۱۴] در سال ۱۹۸۱ برش‌های بهینه پارتو را معرفی نمودند.

مساله P۳ معمولا ساختار شبکه‌ای دارد، بنابراین ممکن است زیرمساله‌ی دوگان بندرز P۴ دارای جواب بهینه دگرین[1] باشد [۱۷]. بنابراین امکان دارد در یک تکرار چندین برش بهینه تولید کند. سوالی که مطرح می‌شود این هست که در این تکرار کدام برش بهینه به مساله اصلی آزاد شده بندرز اضافه شود؟

مگنتی و وانگ به این سوال مهم با استفاده از برش‌های بهینه پارتو جواب دادند. آن‌ها از بین برش‌های بهینه، قوی‌ترین برش را معرفی نمودند.

تعریف ۱: یک برش بهینه از نوع (۱۴) نسبت به نقطه راسی u_1، قوی‌تر از برش بهینه متناظر با نقطه راسی u_2 هست اگر و تنها اگر

$$u_1(b-By) \geq u_2(b-By); \quad \forall y \in Y \tag{۴۹}$$

و این نامساوی به ازای حداقل یک $y \in Y$، به طور اکید برقرار باشد.

تعریف ۲: یک برش بهینه را برش بهینه-پارتو گویند اگر توسط هیچ برش دیگری مغلوب نشود. به عبارت دیگر، هیچ برشی قوی‌تر از این برش نشود.

با فرض این‌که در یک تکرار دلخواه، زیرمساله دوگان لاگرانژ چندین جواب بهینه دارد، با توجه به[۱۴، ۱۸]، برش بهینه-پارتو با حل LP زیر به دست می‌آید:

$$\text{P۱۳: } Max \ \ u(b-By^{\circ}) \tag{۵۰}$$

$$s.t.$$

$$uA \leq c \tag{۵۱}$$

$$u(b-B\bar{y}) = u^{*}(b-B\bar{y}) \tag{۵۲}$$

$$u \geq 0 \tag{۵۳}$$

به‌طوری‌که $u^{*}(b-B\bar{y})$ مقدار بهینه تابع هدف زیرمساله دوگان لاگرانژ P۴ و y° نقطه‌ی هسته‌ای[2] از Yاست.

تعریف ۳: نقطه $y \in r_i(Y^c)$ یک نقطه هسته‌ای نامیده می‌شود که در آن Y^c پوسته محدب[3] Y و $r_i(Y^c)$، درون نسبی[4] پوسته محدب Y^c است. پاپاداکس [۱۹]، نشان داد که برای پیداکردن برش بهینه-پارتو نیاز به نقطه‌ی هسته‌ای نیست.

پاپاداکس برای پیدا کردن برش بهینه-پارتو LP

$$\text{P۱۴: } Max \ \ u(b-By^{+}) \tag{۵۴}$$

$$s.t.$$

$$uA \leq c \tag{۵۵}$$

$$u(b-B\bar{y}) = u^{*}(b-B\bar{y})$$

$$u \geq 0$$

[1] Multiple Optimal
[2] Convex Hull
[3] Core Point
[4] Relative Interior

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.1.9]

را معرفی نمود که در آن y^+ جواب بهینه‌ی مساله‌ی اصلی LP آزاد شده است.

در این مقاله ما از تکنیک برش‌های بهینه-پارتو برای مساله پیشنهادی استفاده می‌کنیم. در نتایج محاسباتی خواهیم دید که تعداد تکرارهای مورد نیاز برای حل مساله پیشنهادی با استفاده از الگوریتم بندرز در حضور برش‌های بهینه-پارتو نسبت به خود الگوریتم بندرز به‌طور قابل ملاحظه‌ای کمتر می‌شود. شبه کد الگوریتم تجزیه‌ی بندرز تسریع شده در الگوریتم ۱ آورده شده است. قابل ذکر هست که در این الگوریتم LB و UB به ترتیب کران‌های پایین و بالا برای مساله‌ی P۱ را نشان می‌دهند.

الگوریتم ۱: شبه کد الگوریتم تجزیه بندرز تسریع شده

```
1: Begin
2:   Set initial feasible ȳ and UB = ∞ ;
3:   While no convergence do
5:   Begin
6:       If the dual subproblem P4 unbounded do
7:       Generate feasibility cut;
8:       else
9:       Solve the problem P14;
10:      Generate Pareto-optimality cut;
11:      Update UB;
12:      End if;
13:      Add cut(s) to the master problem;
14:      Solve the master problem with new cuts;
15:      Update LB ;
16:  End;
17: End.
```

٤ نتایج محاسباتی

در این بخش کارایی مدل و به‌خصوص الگوریتم پیشنهادی روی ۳ مثال عددی را بیان خواهیم کرد. یعنی تاثیر زمان‌بندی شارژ و دشارژ هوشمند وسایل نقلیه‌ی الکتریکی با استفاده از الگوریتم خطی ابتکاری و الگوریتم دوگامی ابتکاری ارایه شده در [۱] و الگوریتم پیشنهادی ارایه شده در بخش ۳ را مقایسه می‌کنیم.

در این بخش جریان دشارژ الکتریسیته ۵۰ آمپر، ولتاژ ۲۵۰ ولت و ظرفیت باتری‌ها ۲۱ کیلووات ساعت تنظیم شده است. دوره‌های زمان‌بندی یک روزه تنظیم‌شده که در آن، ساعات اوج مصرف از ساعت ۹ صبح تا ۱۸ بعد از ظهر درنظر گرفته شده است. فرض شده است که وقتی خودروها در پارکینگ‌هایشان نیستند، نمی‌توانند شارژ و یا دشارژ شوند. تمام خودروها یک یا دو بار در طول دوره‌های زمان‌بندی حرکت می‌کنند. نهایتا با مفروضات فوق نتایج به‌دست آمده از سه الگوریتم برای مقدار تابع هدف مدل (مقدار انرژی الکتریسیته‌ی عرضه شده در ساعات اوج بر حسب کیلووات ساعت) در جدول ۴ بیان شده‌اند.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.1.9]

جدول ٤. مقایسه‌ی مقادیر توابع هدف به دست آمده از سه الگوریتم خطی ابتکاری، دوگامی ابتکاری و الگوریتم ۱

تعداد خودروها	مقدار تقریبی به دست آمده از الگوریتم خطی ابتکاری [۱]	مقدار تقریبی به دست آمده از الگوریتم دوگامی ابتکاری [۱]	مقدار دقیق به دست آمده از الگوریتم ۱
۵	۱۶۴/۶۵	۱۵۹/۶۸	۱۴۶/۴۳
۱۰	۱۵۲/۵۳	۱۴۲/۳۷	۱۳۹/۷۶
۲۰	۱۳۴/۷۶	۱۱۲/۸۹	۹۸/۲۳

نتایج به‌دست آمده از حل مدل پیشنهادی، در نرم افزار GAMS نسخه‌ی ۲۴.۵.۶ کدنویسی شده است. قابل ذکر هست که در هر تکرار، زیر مساله و مساله اصلی بندرز با استفاده از حل کننده[1] CPLEX حل شده‌اند.

ستون اول جدول ۴ مقادیر تقریبی تابع هدف به‌دست آمده از الگوریتم خطی ابتکاری را به ترتیب برای ۵، ۱۰ و ۲۰ تا خودرو نشان می‌دهد. ستون دوم جدول نیز مقادیر تقریبی تابع هدف به‌دست آمده از الگوریتم دوگامی ابتکاری را نشان می‌دهد و ستون آخر جدول مقادیر دقیق تابع هدف به دست آمده از الگوریتم تجزیه بندرز را نشان می‌دهد.

از جدول ۴ مشخص هست که الگوریتم‌های تقریبی برای برخی از نمونه‌ها ممکن است جوابی با تقریب نسبتا بد ارایه دهند. به عنوان مثال، برای نمونه ۳، یعنی برای نمونه با ۲۰ خودرو، الگوریتم خطی ابتکاری جوابی با تقریب ۳۶٪ و الگوریتم دوگامی ابتکاری جوابی با تقریب ۱۴٪ تولید کرده است.

در ادامه برای نشان دادن کارایی دو الگوریتم ارایه شده یعنی الگوریتم بندرز و الگوریتم بندرز با برش‌های بهینه-پارتو، دو الگوریتم از نظر زمان اجرا و تعداد تکرارهای مورد نظر برای حل مدل ارایه شده، گزارش شده است. از جدول ۵ مشخص است که از نظر زمان اجرا، الگوریتم بندرز نسبت به الگوریتم بندرز با برش‌های بهینه برای هر سه نمونه نتیجه بهتری داشته است. با توجه به جدول ۵، تعداد تکرارهای الگوریتم بندرز با برش‌های بهینه-پارتو برای نمونه‌های با ۵ و ۲۰ خودرو نسبت به الگوریتم بندرز نتیجه بهتری داشته است. با مقایسه نتایج این دو جدول، نمی‌توان گفت که الگوریتمی که زمان اجرای کمتری داشته باشد حتما تعداد تکرار کمتری هم خواهد داشت.

جدول ۵. مقایسه زمان اجرای دو الگوریتم پیشنهادی

تعداد خودروها	زمان اجرای الگوریتم بندرز معمولی (ثانیه)	زمان اجرای الگوریتم بندرز با برش‌های بهینه پارتو (ثانیه)
۵	۱۱	۲۶
۱۰	۹	۳۲
۲۰	۴۰	۵۹

[1] Solver

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.1.9]

جدول ٦. مقایسه تکرارهای دو الگوریتم پیشنهادی

تعداد خودروها	تکرارهای الگوریتم بندرز معمولی	تکرارهای الگوریتم بندرز با برش‌های بهینه-پارتو (الگوریتم ۱)
۵	۲۳	۱۴
۱۰	۲۷	۳۳
۲۰	۳۵	۱۹

برای نشان‌دادن کارایی الگوریتم بندرز با برش‌های بهینه-پارتو (الگوریتم ۱)، در جدول ۷، زمان اجرای الگوریتم بندرز با حل‌کننده CPLEX مقایسه شده است. از این جدول مشخص است که به طور میانگین برای سه نمونه، الگوریتم بندرز ۱/۴۵ برابر سریع‌تر از حل‌کننده CPLEX است. همچنین، بعضی از مولفین با نتایج عددی نشان داده‌اند که روش تجزیه بندرز برای مسایل با اندازه بزرگ بهتر جواب می‌دهد [۲۰،۱۲]. نتایج موجود در جدول ۶، این گفته را تایید می‌کند. مشاهده می‌شود که هر چه تعداد خودروها افزایش می‌یابد، الگوریتم بندرز با برش‌های بهینه-پارتو (الگوریتم ۱) زمان اجرای بهتری نسبت به حل کننده CPLEX دارد.

جدول ۷. مقایسه زمان اجرای الگوریتم بندرز و حل‌کننده CPLEX

تعداد خودروها	زمان‌های محاسباتی (ثانیه)	
	الگوریتم بندرز با برش‌های بهینه-پارتو (الگوریتم ۱)	solver (CPLEX) *MIP*
۵	۱۱	۷
۱۰	۹	۲۱
۲۰	۳۸	۵۶
میانگین زمان	۵۸	۸۴

۵ نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این مقاله کاهش پیک مصرف را در یک سیستم مدیریت انرژی خانگی با هماهنگ کردن برنامه شارژ و دشارژ وسایل نقلیه‌ی الکتریکی بررسی کردیم و مدل ارایه شده را با استفاده از الگوریتم‌های تجزیه از نوع بندرز (بندرز معمولی و بندرز با برش‌های بهینه-پارتو) حل کردیم. نتایج محاسباتی الگوریتم پیشنهادی را با الگوریتم‌های ابتکاری ارایه‌شده در [۱] مقایسه کردیم و نهایتا نشان دادیم که الگوریتم‌های تجزیه برای مدل‌های (MILP) و مقیاس بزرگ نتایج بهتر و دقیق‌تری را نسبت به الگوریتم‌های ابتکاری و شبیه‌سازی ارایه می دهد. همچنین زمان اجرا و تکرارهای الگوریتم بندرز و بندرز با برش‌های بهینه پارتو را باهم مقایسه کردیم. نتیجه گرفتیم که زمان اجرای الگوریتم بندرز در مجموع از زمان اجرای الگوریتم بندرز با برش‌های بهینه-پارتو بهتر بوده و همچنین تکرارهای الگوریتم بندرز با برش‌های بهینه-پارتو نسبت به الگوریتم بندرز معمولی نتایج بهتری داشته است. در ضمن برای نشان دادن کارایی الگوریتم پیشنهادی، زمان اجرای الگوریتم پیشنهادی با حل‌کننده CPLEX مقایسه گردید. برای کارهای آتی، می‌توان فرض کرد که بعضی از پارامترهای شبکه از قبیل تقاضای برق الکتریسیته دارای عدم قطعیت با یک توزیع مشخصی بوده و مساله را با برنامه‌ریزی تصادفی مدل‌سازی و مدل

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.1.9]

مربوطه را با بهینه‌سازی استوار یا برنامه‌ریزی تصادفی بر اساس سناریو یا برنامه‌ریزی با محدودیت‌های شانس حل نمود.

منابع

[۱۰] خدایی فر، س.، رعایت‌پناه، م.ع.، فولادی، ا.، (۱۳۹۸). انتخاب زیرگراف بهینه در شبکه‌های کدشده با محدودیت پایداری. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۶۰ (۱)، ۲۸-۱۱.

[۱۱] سجادی، س.س.، معین مقدس، ف.، کریمی،ح.، (۱۳۹۷). مساله پوشش هاب تک تخصیصی بر روی شبکه ستاره‌ای؛ مدل‌بندی، خطی‌سازی و یافتن کران مناسب برای آن. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۵(۱)، ۱۰۲-۷۹.

[1] Umetani, S., Fukushima, Y. and Morita, H., (2017). A linear programming based heuristic algorithm for charge and discharge scheduling of electric vehicles in a building energy management system. Omega, 67, 115-122.

[2] Clement-Nyns, K., Haesen, E. and Driesen, J., (2010). The impact of charging plug-in hybrid electric vehicles on a residential distribution grid. IEEE Transactions on Power Systems, 25 , 371-380.

[3] Deilami, S., Masoum, A.S., Moses, P.S. and Masoum, M.A., (2011). Real-time coordination of plug-in electric vehicle charging in smart grids to minimize power losses and improve voltage profile. IEEE Transactions on Smart Grid, 2, 456-467.

[4] Soares, F.J., Almeida, P.R. and Lopes, J.P., (2014). Quasi-real-time management of Electric Vehicles charging. Electric Power Systems Research , 108, 293-303.

[5] Contreras-Ocaña, J.E., Sarker, M.R. and Ortega-Vazquez, M.A., (2016). Decentralized Coordination of a Building Manager and an Electric Vehicle Aggregator. IEEE Transactions on Smart Grid.

[6] Wu, X., Hu, X., Moura, S., Yin, X. and Pickert, V., (2016). Stochastic control of smart home energy management with plug-in electric vehicle battery energy storage and photovoltaic array. Journal of Power Sources, 333, 203-212.

[7] Yao, L., Damiran, Z. and Lim, W.H., (2016). A fuzzy logic based charging scheme for electric vechicle parking station. IEEE 16th International Conference on, 1-6.

[8] Le, T.N., Al-Rubaye, S., Liang, H. and Choi, B.J., (2015). Dynamic charging and discharging for electric vehicles in microgrids. IEEE International Conference on Communication Workshop (ICCW), 2018-2022.

[9] Luo, Y., Zhu, T., Wan, S., Zhang, S. and Li, K., (2016). Optimal charging scheduling for large-scale EV (electric vehicle) deployment based on the interaction of the smart-grid and intelligent-transport systems. Energy, 97, 359-368.

[12] Costa, A.M., (2005). A survey on Benders decomposition applied to fixed-charge network design problems. Computers & operations research, 6, 1429-1450.

[13] Raayatpanah, M.A., Fathabadi, H.S., Khalaj, B.H. and Khodayifar, S., (2013). Minimum cost multiple multicast network coding with quantized rates. Computer networks, 57, 1113-1123.

[14] Magnanti, T.L. and Wong, R.T., (1981). Accelerating Benders decomposition: Algorithmic enhancement and model selection criteria. Operation research, 29, 464-484.

[15] Sherali, H.D. and Lunday, B.J., (2013). On generating maximal non-dominated Benders cuts. Annals of Operations Research, 210, 57-72.

[16] Tang, L., Jiang, W. and Saharidis, G.K., (2013). An improved Benders decomposition algorithm for the logistics facility location problem with capacity expansions. Annals of operations research, 210, 165-190.

[17] Ahuja, R.K., Magnanti, T.L., Orlin, J.B. and Weihe, K., (1993). Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications. Prentice-Hall, Inc, Upper Saddle River, NJ, USA.

[18] Santibanez-Gonzalez, E.D. and Diabat, A., (2013). Solving a reverse supply chain design problem by improved Benders decomposition schemes. Computers & Industrial Engineering, 66, 889-898.

[19] Papadakos, N., (2008). Practical enhancements to the Magnanti-Wong method. Operations Research Letters, 36, 444-449.

[20] Khodayifar, S., Raayatpanah, M.A., Rabiee, A., Rahimian, H. and Pardalos, P.M., (2018). Optimal Long-Term Distributed Generation Planning and Reconfiguration of Distribution Systems: An Accelerating Benders' Decomposition Approach, Journal of Optimization Theory and Applications 179(1), 283-310.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.1.9]