

## مدل‌بندی و حل مساله ماکزیمم پوشش $p$ -هاب تک‌تخصیصی با پوشش تدریجی

فروغ معین مقدس<sup>۱\*</sup>، صفیه روبین<sup>۲</sup>

۱- استادیار، دانشگاه بجنورد، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی، بجنورد، ایران

۲- کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی، دانشگاه بجنورد، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی، بجنورد، ایران

رسید مقاله: ۴ دی ۱۳۹۶

پذیرش مقاله: ۷ شهریور ۱۳۹۷

### چکیده

مساله ماکزیمم پوشش  $p$ -هاب یکی از مسایل پرکاربرد مکان‌یابی می‌باشد. در این مساله هدف تعیین بهترین مکان برای هاب‌ها است به‌طوری‌که با در نظر گرفتن شعاع پوشش از قبل تعیین شده، تقاضای پوشش داده شده ماکزیمم شود. در مسایل کلاسیک هاب اگر فاصله جفت مبدا و مقصد از مقدار مفروض کم‌تر باشد، امکان پوشش وجود دارد و در غیر این صورت تقاضای بین دو نقطه پوشش داده نمی‌شود. در این مقاله مساله ماکزیمم پوشش  $p$ -هاب با امکان پوشش تدریجی مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابتدا مفهوم پوشش تدریجی و توسعه‌ای از توابع پوششی بررسی و سپس مدل ریاضی جدیدی برای مساله ارائه می‌شود. همچنین برای محاسبه کران بالای مناسب برای مساله، از روش ساده‌سازی لاگرانژین و برای حل آن از یک روش ابتکاری و الگوریتم ژنتیک استفاده شده‌است. در نهایت نتایج حاصل از به‌کارگیری این روش‌ها با نتایج حاصل از نرم افزار گمز، مقایسه می‌شود. این مقایسه نشان می‌دهد مدل ارائه شده برای پوشش تدریجی و پارامتر پوشش جدید در مقایسه با مدل و تابع پوشش موجود در ادبیات موضوع نتایج مناسب‌تری دارد. همچنین به‌کارگیری ساده‌سازی لاگرانژین، کران بالای مناسب برای مساله حاصل می‌کند. روش ابتکاری نتایج محاسباتی بهتری در زمان کم‌تر به‌دست می‌آورد و الگوریتم ژنتیک نیز خصوصاً برای داده‌های با ابعاد بزرگ، با زمان محاسبات کم‌تر، پوشش بیش‌تری نسبت به حل نمونه‌ها با نرم افزار گمز ایجاد می‌کند.

**کلمات کلیدی:** مساله ماکزیمم پوشش  $p$ -هاب، پوشش تدریجی، الگوریتم ابتکاری، ساده‌سازی لاگرانژین، الگوریتم ژنتیک.

### ۱ مقدمه

هاب‌ها تسهیلات ویژه‌ای هستند که در سیستم‌های بزرگ، به عنوان مراکز جمع‌آوری، دسته‌بندی و توزیع کالا و خدمات به کار برده می‌شوند. هاب‌ها سه وظیفه اصلی شامل جمع‌آوری (از مبادی به هاب‌ها)، انتقال (بین هاب‌ها) و توزیع (از هاب‌ها به مقاصد) را دارند. انتقال کالا و خدمات از طریق گره‌های هاب صورت می‌گیرد. مساله مکان‌یابی هاب، به تعیین مکان هاب‌ها و تخصیص گره‌های غیرهاب به هاب‌ها می‌پردازد. دو فرضیه اصلی در مسایل مکان‌یابی هاب وجود دارد. اولاً هیچ ارتباط مستقیمی میان گره‌های غیرهاب وجود ندارد و ارتباط بین هر جفت مبدا و مقصد از طریق حداقل یک هاب صورت می‌گیرد. ثانیاً به منظور ترغیب متقاضیان و صرفه‌جویی بیش‌تر، از فاکتور تخفیف برای انتقال کالا بین مراکز هاب استفاده می‌شود [۱].

\* عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: f.moeen@ub.ac.ir

مسایل مکان‌یابی هاب به دو دسته عمده تک‌تخصیصی<sup>۲</sup> و چندتخصیصی<sup>۳</sup>، تقسیم می‌شوند. در مسایل تک-تخصیصی، هر نقطه غیرهاب دقیقاً به یک هاب تخصیص می‌یابد و در مسایل چندتخصیصی، هر گره غیرهاب می‌تواند به بیش از یک هاب تخصیص یابد. مسایل مکان‌یابی هاب در سیستم‌های مخابراتی، سیستم‌های خدمات پستی و حمل و نقل کاربرد دارند [۲].

در اغلب پژوهش‌های صورت گرفته در خصوص مسایل مکان‌یابی هاب، پوشش به صورت دودویی<sup>۴</sup> در نظر گرفته می‌شود [۳]. پوشش دودویی یا پوشش قطعی به این معنی است که تقاضای بین گره مبدا و مقصد پوشش داده می‌شود اگر مجموع فاصله بین این دو گره کم‌تر از شعاع پوشش از پیش تعیین شده باشد. در دنیای واقعی در نظر گرفتن پوشش دودویی، واقعی به نظر نمی‌رسد. به عنوان مثال اگر شعاع پوشش  $a$  باشد، تقاضای نقاط با فاصله  $a - \varepsilon$  پوشش داده می‌شود ولی تقاضای نقاط با فاصله  $a + \varepsilon$  پوشش داده نمی‌شود که این غیر منطقی به نظر می‌رسد. مسایل مکان‌یابی هاب با پوشش تدریجی<sup>۵</sup> کاربردهای زیادی در دنیای واقعی دارند. با توجه به نقص موجود در مسایل با پوشش دودویی، با تغییر در نوع پوشش می‌توان در موارد و نمونه‌های اقتصادی سود بیش‌تری به‌دست آورد [۳].

در این مقاله مساله ماکزیم پوشش  $p$ -هاب با فرض پوشش تدریجی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این مساله هدف انتخاب مکان  $p$  مرکز هاب و تخصیص نقاط تقاضا به آن‌ها است به گونه‌ای که تقاضای پوشش داده شده از طریق هاب‌ها ماکزیم شود. برای هر جفت مبدا و مقصد، دو کران بالا و پایین در نظر گرفته می‌شود. اگر فاصله بین مبدا و مقصد (از طریق گره‌های واسطه‌ای هاب) از کران بالا کم‌تر باشد، امکان انتقال جریان به‌طور ۱۰۰٪ فراهم می‌شود و اگر فاصله بیش‌تر از کران بالای تعیین شده باشد، پوشش صفر و چنانچه این فاصله بین کران پایین و بالا باشد، پوشش به‌طور تدریجی و توسط تابع کاهشی که معرفی می‌شود، صورت می‌گیرد.

ساختار پژوهش حاضر به این صورت است: در بخش دوم به مرور پژوهش‌های صورت گرفته در خصوص مسایل مکان‌یابی هاب و به‌کارگیری پوشش تدریجی در مسایل مکان‌یابی خواهیم پرداخت. در بخش سوم ابتدا تابع پوشش تدریجی را توسعه و سپس یک مدل ریاضی جدید برای مساله ارایه می‌دهیم. در بخش چهارم برای به‌دست آوردن کران بالای مناسب، روش ساده‌سازی لاگرانژین را به‌کار خواهیم برد. در بخش پنجم برای حل مساله، روش ابتکاری و الگوریتم ژنتیک را ارایه خواهیم کرد. بخش ششم شامل مقایسه و تحلیل نتایج محاسباتی حاصل از روش‌های ارایه‌شده برای دو مدل و توابع پوشش تدریجی و مقایسه آن‌ها با نتایج حاصل از به‌کارگیری نرم افزار گمز می‌باشد و در نهایت بخش نتیجه‌گیری و ارایه پیشنهادها خواهد آمد.

## ۲ مرور ادبیات

مساله مکان‌یابی هاب، اولین بار توسط اوکلی در سال ۱۹۸۶ معرفی شد [۴]. سپس کمپل در سال ۱۹۹۴ به تکمیل مدل‌های مسایل مکان‌یابی هاب پرداخت [۱]. او مساله مکان‌یابی هاب را به چهار دسته مساله میانه  $p$ -هاب<sup>۶</sup>، مساله مکان‌یابی هاب بدون ظرفیت<sup>۷</sup>، مساله مرکز  $p$ -هاب<sup>۸</sup> و مساله  $p$ -هاب پوششی<sup>۹</sup> تقسیم کرد.

<sup>۲</sup> Single Allocation

<sup>۳</sup> Multiple Allocation

<sup>۴</sup> Binary Coverage

<sup>۵</sup> Gradual Coverage

<sup>۶</sup> p-Hub Median Problem

کمپل برای مساله پوشش هاب دو زیر مساله شامل، مساله پوشش مجموعه‌ای (پوشش کامل) هاب<sup>۱۰</sup> و مساله ماکزیمم پوششی  $p$ -هاب<sup>۱۱</sup> معرفی کرد [۱]. کارا و تنسل در سال ۲۰۰۳ مساله پوشش مجموعه‌ای هاب تک تخصیصی را مطالعه کردند و نشان دادند که این مساله از نوع مسایل  $NP$ -hard است [۵]. ارنست و همکاران در سال ۲۰۰۵ مدل جدیدی برای مساله پوشش مجموعه‌ای هاب تک و چندتخصیصی با استفاده از ایده شعاع پوشش ارایه کردند و مدل ارایه شده را با روش شمارشی ضمنی<sup>۱۲</sup> حل کردند [۶]. هاماکر و میردر سال ۲۰۰۶ انواع فرمول‌بندی برای مساله پوشش هاب معرفی و ناحیه شدنی این مسایل را آنالیز کردند [۷]. در سال ۲۰۰۷ تان و کارا یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح برای مساله پوشش هاب ارایه دادند. آن‌ها مدل خود را با نرم افزار  $CPLEX$  حل و آن‌را بر روی سیستم تحویل بار ترکیه (داده‌های TR<sup>۱۳</sup>) شامل ۸۱ شهر مورد بررسی قرار دادند [۸]. در سال ۲۰۰۸ ونگ و ونگ مدل مساله پوشش مجموعه‌ای هاب چندتخصیصی را بهبود و آن‌را با الگوریتم‌های ژنتیک<sup>۱۴</sup> و جستجوی پراکندگی<sup>۱۵</sup> حل کردند [۹]. کالیک و همکاران در سال ۲۰۰۹ مساله پوشش هاب تک تخصیصی را در شبکه ناکامل بررسی کردند. آن‌ها روش ابتکاری<sup>۱۶</sup> کارآمدی بر پایه جستجوی ممنوعه<sup>۱۷</sup> ارایه و آن‌را بر روی مجموعه داده‌های هواپیمایی امریکا (CAB)<sup>۱۸</sup> مورد بررسی - قرار دادند [۱۰]. گیو و ونگ در سال ۲۰۰۹، مساله ماکزیمم پوشش هاب چندتخصیصی را مدل‌بندی و با روش اتصال مجدد مسیر<sup>۱۹</sup> آن‌را حل کردند [۲]. در سال ۲۰۱۰، هوانگ و لی یک مدل جدید برای مساله ماکزیمم پوششی هاب تک-تخصیصی بدون ظرفیت معرفی کردند. آن‌ها برای حل مساله از دو روش ابتکاری تخصیص براساس فاصله<sup>۲۰</sup> و تخصیص براساس حجم<sup>۲۱</sup> استفاده کردند [۱۱]. کریمی و بشیری در سال ۲۰۱۱ یک مدل جدید برای مساله پوشش هاب، با در نظر گرفتن پوشش نوع دوم ارایه کردند و از یک روش ابتکاری برای حل نمونه‌های عددی خود بهره بردند. آن‌ها این مساله را برای مکان‌یابی هاب‌ها در یک نمونه کاربردی (حمل‌ونقل هوایی ایران) به‌کاربردند [۱۲].

ایده پوشش تدریجی برای مسایل مکان‌یابی تسهیلات، اولین بار در سال ۱۹۸۳ توسط چرچ و ربرتس ارایه شد. آن‌ها یک تابع پوشش قطعه‌ای خطی معرفی کردند [۱۳]. در سال ۲۰۰۲ برمن و کراس برای مساله مکان‌یابی ماکزیمم پوشش<sup>۲۲</sup> با پوشش تدریجی را بررسی کردند. آن‌ها برای پوشش تدریجی  $k$  منطقه پوشش و  $k$  شعاع پوشش تعریف کردند [۱۴]. برمن و همکاران در سال ۲۰۰۳ مساله مکان‌یابی پوشش با فرض پوشش تدریجی را مدل‌بندی کردند. آن‌ها

<sup>7</sup> Uncapacitated Hub Location Problem

<sup>8</sup>  $p$ -Hub Center Problem

<sup>9</sup> Hub Covering Problem

<sup>10</sup> Hub Set Covering Problem

<sup>11</sup>  $p$ -Hub Maximal Covering Problem

<sup>12</sup> Implicit Enumerative

<sup>13</sup> Turkish network

<sup>14</sup> Genetic Algorithm

<sup>15</sup> Scatter Search

<sup>16</sup> Heuristic Method

<sup>17</sup> Tabu Search

<sup>18</sup> Civil Aeronautics Board

<sup>19</sup> Path Relinking Approach

<sup>20</sup> Distance- Based Allocation Heuristic

<sup>21</sup> Volume-Based Allocation Heuristic

<sup>22</sup> Maximum Covering Location Problem

دو شعاع یکی به عنوان کران پایین پوشش و دیگری به عنوان کران بالای پوشش در نظر گرفتند به طوری که نقاط تقاضا در فاصله کم‌تر از کران پایین، پوشش داده می‌شود و نقاط خارج از کران بالا، پوشش داده نمی‌شود. پوشش برای نقاط با فاصله بین این دو کران، به صورت تابعی کاهشی<sup>۲۳</sup> (متناسب با فاصله) در نظر گرفته شده است [۱۵]. در سال ۲۰۰۹ برمن و همکاران مساله مکان‌یابی پوشش با پوشش تدریجی توسعه یافته‌ای را مورد بررسی قرار دادند [۱۶]. در سال ۲۰۱۲ برمن و ونگ مساله مکان‌یابی میانه<sup>۲۴</sup> با پوشش تدریجی را با در نظر گرفتن اطلاعات غیرقطعی از تقاضا<sup>۲۵</sup> مدل‌بندی و بررسی - کردند [۱۷].

بنا به جستجوهای صورت گرفته اولین کار تحقیقاتی در مورد مساله هاب با پوشش تدریجی توسط پیکر و کارا در سال ۲۰۱۵ می‌باشد [۳]. آن‌ها ابتدا پارامتر پوشش تدریجی را معرفی و سپس مساله ماکزیمم پوشش  $p$ -هاب تک و چند-تخصیصی را با فرض پوشش تدریجی مدل‌بندی کردند. تابع پوشش در نظر گرفته شده در این مقاله به صورت یک تابع قطعه‌ای ثابت می‌باشد. آن‌ها مدل ارایه شده را بر روی داده‌های CAB و با نرم افزار گمز حل کردند. سیلوا و کان‌ها در سال ۲۰۱۷ مساله مکان‌یابی هاب با پوشش دودویی، ارایه شده در مرجع [۳] را با روش جستجوی ممنوعه حل و بر روی داده‌های پست استرالیا (AP)<sup>۲۶</sup> و مجموعه داده‌های CAB اجرا کردند [۱۸]. جان کووی و همکاران در سال ۲۰۱۷، برای مساله ماکزیمم پوشش  $p$ -هاب<sup>۲۷</sup> -تخصیصی بدون ظرفیت<sup>۲۸</sup>، یک مدل جدید ارایه و سپس با روش ابتکاری جستجوی همسایگی متغیر عمومی<sup>۲۸</sup> آن را حل و بر روی داده‌های AP و CAB اجرا نمودند [۱۹]. جان کووی و همکاران در سال ۲۰۱۷ مدل ریاضی دیگری برای مساله ماکزیمم پوشش  $p$ -هاب تک و چندتخصیصی با پوشش تدریجی ارایه کردند. تابع پوشش جزئی در این مقاله همان پوشش آمده در مقاله [۳] است و نویسندگان مساله تک‌تخصیصی را با روش جستجوی همسایگی متغیر عمومی و مساله چندتخصیصی را با روش جستجوی همسایگی متغیر پایه<sup>۲۹</sup> حل کردند. در این مقاله روش‌های حل ارایه شده بر روی داده‌های CAB، AP و داده‌های تصادفی مورد ارزیابی قرار گرفته است [۲۰].

در پژوهش حاضر تلاش می‌شود یک مدل جدید برای مساله ماکزیمم پوشش  $p$ -هاب با تابع پوشش تدریجی متفاوت از مقاله‌های [۳] و [۲۰] مورد ارزیابی قرار گیرد. به علاوه اینکه ما مدل و تابع پوشش ارایه شده را با مدل و تابع آمده در مرجع [۳] مقایسه می‌کنیم. برای این منظور پس از ارایه مدل ریاضی مساله، از ساده‌سازی لاگرانژین برای یافتن کران بالای مناسب و از یک روش ابتکاری و روش فراابتکاری ژنتیک برای یافتن جواب تقریبی مناسب برای مدل‌ها استفاده می‌شود. در هر مورد نتایج حاصل از به کارگیری این روش‌ها با نتایج حاصل از نرم‌افزار گمز برای دو مدل مقایسه شده است.

### ۳ معرفی توابع پوشش دودویی و تدریجی و مدل‌سازی مساله

<sup>23</sup> Non Increasing Function

<sup>24</sup> Median Location Problem

<sup>25</sup> Uncertain Demand

<sup>26</sup> Australia post

<sup>27</sup> Uncapacitated  $r$ -allocation  $p$ -hub maximal covering problem

<sup>28</sup> General variable neighborhood search

<sup>29</sup> Basic variable neighborhood search

در این بخش ابتدا به معرفی مفهوم پوشش دودویی و تدریجی و سپس به بررسی مدل ریاضی ارائه شده در [۳] و ارائه مدل ریاضی جدید خواهیم پرداخت.

### ۳-۱ توابع پوشش دودویی و تدریجی

در مسایل مکان‌یابی با پوشش دودویی، پارامتری به عنوان شعاع پوشش از پیش تعیین می‌شود که در صورتی تقاضا بین جفت مبدا و مقصد پوشش داده می‌شوند که کل هزینه (یا فاصله و یا زمان) بین دو گره کم‌تر از شعاع پوشش مفروض باشد. بنابراین اگر  $c_{ijkm}$  مجموع هزینه (فاصله یا زمان) طی مسیر از گره مبدا  $i$  به گره مقصد  $j$  از طریق هاب‌های به ترتیب  $k$  و  $m$  و  $\beta_{ij}$  نشان دهنده شعاع پوشش از پیش تعیین شده بین گره  $i$  و  $j$  باشد، آنگاه پارامتر پوشش دودویی  $a_{ij}^{km}$  به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۱]:

$$a_{ij}^{km} = \begin{cases} 1 & \text{if } c_{ijkm} \leq \beta_{ij} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

یعنی اگر مجموع هزینه‌ها از  $\beta_{ij}$  کم‌تر شود،  $a_{ij}^{km}$  برابر ۱ و در غیر اینصورت صفر می‌شود. در این مسایل اگر هزینه انتقال مقدار ناچیزی از  $\beta_{ij}$  بیش‌تر شود، امکان پوشش تقاضا وجود ندارد.

اما در مسایل مکان‌یابی با پوشش تدریجی، برای سطح پوشش یک کران بالا و کران پایین تعیین می‌شود. اگر هزینه انتقال بین دو نقطه مفروض  $i$  و  $j$  از کران بالا بیش‌تر باشد، پوشش صورت نمی‌گیرد و اگر این هزینه بین کران بالا و کران پایین باشد، پوشش براساس یک تابع کاهشی متناسب با فاصله محاسبه می‌شود و اگر کم‌تر و مساوی حد پایین باشد پوشش قطعی و صددرصد خواهد بود. پارامتر  $b_{ij}^{km}$  را پارامتر پوشش تدریجی در نظر بگیرید. پیکر و کارا این پارامتر را به صورت زیر تعریف کردند [۳]:

$$b_{ij}^{km} = \begin{cases} 1 & \text{if } c_{ijkm} \leq l_{ij} \\ f(c_{ijkm}) & \text{if } l_{ij} \leq c_{ijkm} \leq u_{ij} \\ 0 & \text{if } c_{ijkm} > u_{ij} \end{cases} \quad \forall i, j \in N, \forall k, m \in H \quad (2)$$

که در آن پارامترهای  $u_{ij}$  و  $l_{ij}$  به ترتیب کران بالا و پایین پوشش برای جفت مبدا و مقصد  $(i, j)$  فرض می‌شوند.  $f$  یک تابع کاهشی متناسب با  $c_{ijkm}$  و دارای برد  $[0, 1]$  است. پیکر و کارا در سال ۲۰۱۵ پارامتر پوشش تدریجی را بر اساس یک تابع قطعه‌ای خطی به صورت زیر معرفی کردند [۳]:

$$b_{ij}^{km} = \begin{cases} 1 & \text{if } c_{ijkm} \leq 0.75\beta'_{ij} \\ 0.75 & \text{if } 0.75\beta'_{ij} < c_{ijkm} \leq 0.8\beta'_{ij} \\ 0.5 & \text{if } 0.8\beta'_{ij} < c_{ijkm} \leq 0.85\beta'_{ij} \\ 0.25 & \text{if } 0.85\beta'_{ij} < c_{ijkm} \leq 0.9\beta'_{ij} \\ 0 & \text{if } c_{ijkm} > 0.9\beta'_{ij} \end{cases} \quad \forall i, j \in N, \forall k, m \in H \quad (3)$$

که در آن  $\beta'_{ij}$  از حل مساله مکان یابی مرکز  $p$ -هاب [۵] به دست می‌آید. ما علاوه بر بررسی تابع قطعه‌ای (۳)، تابع پوششی دیگری مشابه آنچه در مقاله [۱۶] آمده را برای مساله ماکزیمم پوششی  $p$ -هاب بررسی می‌کنیم. این تابع پوشش به صورت زیر می‌باشند:

$$f(c_{ijk}) = \frac{u_{ij} - c_{ijk}}{u_{ij} - l_{ij}}$$

لذا پارامتر پوشش تدریجی را با استفاده از تابع کاهشی  $f$  به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$b_{ij}^{km} = \begin{cases} 1 & \text{if } c_{ijk} \leq l_{ij} \\ \frac{u_{ij} - c_{ijk}}{u_{ij} - l_{ij}} & \text{if } l_{ij} \leq c_{ijk} \leq u_{ij} \\ 0 & \text{if } c_{ijk} > u_{ij} \end{cases} \quad \forall i, j \in N, \forall k, m \in H \quad (4)$$

که در آن  $\beta'_{ij} = u_{ij}$ ،  $l_{ij} = \beta_{ij} = 0$  و  $\beta'_{ij} = 75\beta_{ij}$  فرض می‌شود. مشابه قبل  $\beta'_{ij}$  شعاع پوشش حاصل از حل مساله مکان‌یابی مرکز  $p$ -هاب است [۵]. در بخش نتایج محاسباتی نشان می‌دهیم که پارامتر پوشش تدریجی (۴) عملکرد بهتری نسبت به پارامتر پوشش تدریجی (۳) نشان می‌دهد.

### ۳-۲ مدل سازی مساله ماکزیمم پوششی $p$ -هاب تک تخصیصی با پوشش تدریجی:

در این بخش ابتدا مدل ارایه شده توسط پیکر و کارا [۳] را بیان و سپس یک مدل جدید برای مساله ارایه می‌کنیم. برای این منظور پارامترها و متغیرهای زیر را به کار می‌بریم:

$N$  را مجموعه نقاط تقاضا و  $H \subseteq N$  مجموعه مراکز کاندید برای هاب شدن در نظر می‌گیریم.  $i$  و  $j$  اندیس نقاط تقاضا  $k$  و  $m$  اندیس گره‌های کاندید هاب می‌باشد. میزان تقاضای بین مبدا و مقصد  $i$  و  $j$  را با  $w_{ij}$  نمایش می‌دهیم.  $\alpha$ ،  $\beta_{ij}$  و  $d_{ik}$  به ترتیب بیانگر فاکتور تخفیف برای اتصالات درون هابی، شعاع پوشش و فاصله بین دو گره  $i$  و  $k$  می‌باشد.  $c_{ijk}$  مجموع هزینه (فاصله یا زمان) طی مسیر از گره مبدا  $i$  به گره مقصد  $j$  از طریق هاب‌های به ترتیب  $k$  و  $m$  می‌باشد، که  $c_{ijk}$  از رابطه  $c_{ijk} = d_{ik} + \alpha d_{km} + d_{mj}$  محاسبه می‌شود.  $d_{ij}^{km}$  بیانگر پارامتر پوشش دودویی است که مطابق با (۱) تعریف می‌شود.  $z_{ij}$  کسری از جریان پوشش داده شده است که از گره مبدا  $i$  به گره مقصد  $j$  منتقل می‌شود.  $x_{kk}$  برابر ۱ است اگر گره  $k$  هاب باشد و در غیر این صورت صفر تعریف می‌شود.  $x_{ik}$  برابر یک است اگر گره  $i$  به هاب  $k$  متصل شود و در غیر این صورت برابر صفر است.

مدل ریاضی ارایه شده توسط پیکر و کارا به صورت زیر است [۳]:

$$p_1 : \quad \text{Max} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} w_{ij} z_{ij} \quad (5)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{k \in H} x_{kk} = p, \quad (6)$$

$$\sum_{k \in H} x_{ik} \leq 1, \quad \forall i \in N, k \in H, \quad (7)$$

$$x_{ik} \leq x_{kk}, \quad \forall i \in N, k \in H, \quad (8)$$

$$z_{ij} \leq \sum_{k \in H} a_{ij}^{km} x_{ik} + \lambda_{ij} (1 - x_{jm}), \quad \forall i, j \in N, k, m \in H, \quad (9)$$

$$x_{ik} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in N, k \in H, \quad (10)$$

$$z_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j \in N. \quad (11)$$

تابع هدف تقاضا پوشش داده شده بین هر جفت مبدا و مقصد را ماکزیمم می کند. قید (۶) نشان می دهد که باید  $p$  هاب تعیین مکان شود. قید (۷) تضمین می کند که هر گره حداکثر به یک هاب تخصیص می یابد و قید (۸) تضمین می کند که اگر گره  $i$  بخواهد به هاب  $k$  تخصیص داده شود، گره  $k$  باید به عنوان هاب انتخاب شده باشد. قید (۹) کسری از جریان بین جفت مبدا  $i$  و مقصد  $j$  را که با تخصیص صحیح  $x_{ik}$  و  $x_{jm}$  پوشش داده می شود، نشان می دهد که در آن  $\lambda_{ij}$  به صورت  $\lambda_{ij} = \max_{k, m \in H} d_{ij}^{km}$  تعریف می شود. برای قید (۹) دو حالت وجود دارد؛ چون مساله تک تخصیصی است پس هابی مانند  $m'$  وجود دارد که گره  $m$  به آن تخصیص یابد. (۱) فرض کنیم  $m = m'$  آنگاه قید (۹) به  $z_{ij} \leq \sum_{k \in H} a_{ij}^{km'} x_{ik}$  تبدیل می شود. به طور مشابه چون مساله تک تخصیصی است پس هاب  $k'$  وجود دارد که گره  $i$  به آن تخصیص یابد، لذا داریم  $z_{ij} \leq a_{ij}^{km'}$  (۲) اگر  $m \neq m'$  باشد، آنگاه قید (۹) به  $z_{ij} \leq \sum_{k \in H} a_{ij}^{km} x_{ik} + \lambda_{ij}$  تبدیل می شود که با توجه به تعریف  $\lambda_{ij}$ ، این قید یک قید زاید است. در نهایت قیدهای (۱۰) و (۱۱) تعریف متغیرهای تصمیم مساله را نشان می دهد.

مساله فوق یک مساله برنامه ریزی عدد صحیح مختلط (MIP) و دارای  $2n^2$  متغیر و  $1 + 2n^2 + n^4$  محدودیت است. برای به دست آوردن مساله با پوشش تدریجی کافی است در مدل به جای  $a_{ij}^{km}$  از  $b_{ij}^{km}$  استفاده کنیم. پیکر و کارا [۳] نشان دادند که مساله فوق NP-hard است.

در ادامه می خواهیم یک مدل جدید برای مساله ماکزیمم پوشش  $p$ -هاب با پوشش تدریجی ارایه کنیم. ما از مدل ارایه شده توسط برمن و همکاران در سال ۲۰۰۳ برای مساله مکان یابی پوشش ایده گرفته ایم [۱۵]. متغیرهای  $x_{ik}$ ،  $x_{kk}$  و پارامترهای  $w_{ij}$ ،  $\alpha$ ،  $d_{ik}$  و  $c_{ijkm}$  مشابه مدل مرجع [۳] تعریف می شود. علاوه بر این پارامتر پوشش  $d_{ij}^{km}$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$d_{ij}^{km} = \begin{cases} w_{ij} & \text{if } c_{ijkm} \leq l_{ij} \\ w_{ij} \times f(c_{ijkm}) & \text{if } l_{ij} \leq c_{ijkm} \leq u_{ij} \\ 0 & \text{if } c_{ijkm} > u_{ij} \end{cases} \quad \forall i, j \in N, \forall k, m \in H \quad (12)$$

$y_{ijkm}$  کسری از جریان که از گره مبدا  $i$  به گره مقصد  $j$  از طریق هاب های  $k$  و  $m$  منتقل می شود.

بنابراین مدل ریاضی مساله ماکزیمم پوشش  $p$ -هاب تک تخصیصی با فرض پوشش تدریجی به صورت زیر خواهد شد:

$$p_r : \quad \text{Max} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in H} \sum_{m \in H} d_{ij}^{km} y_{ijkm} \quad (13)$$

$$\text{s.t.} \quad (6), (7), (8), (10)$$

$$\sum_{k \in H} \sum_{m \in H} y_{ijkm} \leq 1, \quad \forall i, j \in N, \quad (14)$$

$$\sum_{m \in H} y_{ijkm} \leq x_{ik}, \quad \forall i, j \in N, k \in H, \quad (15)$$

$$\sum_{k \in H} y_{ijkm} \leq x_{jm}, \quad \forall i, j \in N, m \in H, \quad (16)$$

$$y_{ijkm} \geq 0, \quad \forall i, j \in N, k, m \in H. \quad (17)$$

تابع هدف کل تقاضای (جریان) منتقل شده را ماکزیم می‌کند. قیدهای (۶) تا (۸) و (۱۰) مشابه قبل تعریف می‌شود. قید (۱۴) تضمین می‌کند جریان برای هر جفت مبدا و مقصد  $(i, j)$  توسط حداکثر یک جفت هاب  $(k, m)$  صورت می‌گیرد. قید (۱۵) و (۱۶) نشان می‌دهد که جریان از گره مبدا  $i$  به گره مقصد  $j$  از طریق هاب‌های  $k$  و  $m$  جریان دارد اگر همزمان گره  $i$  به هاب  $k$  و گره  $j$  به هاب  $m$  متصل باشد. قید (۱۷) نامنفی بودن متغیر  $y_{ijkm}$  را نشان می‌دهد.

مساله فوق یک مساله برنامه ریزی عدد صحیح مختلط و دارای  $n^4 + n^2$  متغیر و  $2n^3 + 3n^2 + 1$  محدودیت است. این مدل در مقایسه با مدل [۳] دارای تعداد متغیرهای بیش‌تر، ولی تعداد محدودیت‌های کم‌تری است. مدل ارائه شده را می‌توان برای مساله با پوشش دودویی نیز استفاده کرد. برای این منظور کافی است پارامتر  $w_{ij} \times a_{ij}^{km}$  را جایگزین پارامتر  $d_{ij}^{km}$  کنیم. در بخش نتایج محاسباتی نشان می‌دهیم که مدل جدید نسبت به مدل ارائه شده در [۳] پوشش بهتر در زمان محاسباتی کم‌تری را به‌دست می‌آورد.

#### ۴ یافتن کران برای مساله به کمک ساده سازی لاگرانژین

روش ساده‌سازی لاگرانژین، یک روش کارآمد برای یافتن یک کران (بالا یا پایین) مناسب برای مسایل بهینه‌سازی خصوصاً با ابعاد بالا است. این تکنیک با آزادسازی محدودیت‌های سخت مساله، تلاش می‌کند که به زیرمساله‌هایی ساده‌تر دست‌یابد تا بتواند جواب‌ها یا کران‌های مناسبی برای مساله در زمان اجرای قابل قبول پیدا کند. این روش تاکنون در حل مسایل گوناگون مکان‌یابی، خصوصاً مسایل مکان‌یابی هاب، مورد استفاده قرار گرفته است. ایکین در سال ۱۹۹۴ برای حل مساله میانه  $p$ -هاب تک تخصیصی بدون ظرفیت از ترکیب روش شاخه و کران و آزادسازی لاگرانژین استفاده کرد [۲۱]. در سال ۱۹۹۶ اسمیت و همکاران، آزادسازی لاگرانژین را برای حل مساله میانه  $p$ -هاب تک تخصیصی بدون ظرفیت، استفاده کردند [۲۲]. لی و همکاران در سال ۱۹۹۶، مساله مکان‌یابی  $p$ -هاب تک تخصیصی ظرفیت‌دار را با آزادسازی لاگرانژین حل کردند [۲۴]. پیرکل و اسپچلینگ در سال ۱۹۹۸ مساله مکان‌یابی هاب تک تخصیصی بدون ظرفیت را با آزادسازی لاگرانژین حل کردند [۲۴]. در سال ۲۰۰۹ کانترس و همکاران، برای مساله مکان‌یابی  $p$ -هاب تک تخصیصی ظرفیت‌دار، روش آزادسازی لاگرانژین را ارائه کردند [۲۵]. کانترس و همکاران در سال ۲۰۱۱ برای مساله مکان‌یابی هاب تک تخصیصی ظرفیت‌دار از آزادسازی لاگرانژین و روش شاخه و قیمت استفاده کردند [۲۶].

در این بخش نحوه به کارگیری ساده‌سازی لاگرانژین را برای مدل  $p$  بررسی خواهیم کرد. این کار را با آزادسازی محدودیت‌هایی که سخت محسوب می‌شوند و دستیابی به زیرمساله‌هایی کوچک‌تر، انجام می‌دهیم. برای این منظور ساده‌سازی دو محدودیت (۱۵) و (۱۶) و به کمک ضرایب لاگرانژین نامنفی  $u_{ijk}$  و  $v_{ijm}$  را بررسی می‌کنیم. مساله ساده سازی شده به صورت زیر می‌شود:

$$l(u, v) = \max \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in H} \sum_{m \in H} d_{ij}^{km} y_{ijkm} + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in H} u_{ijk} \left( - \sum_{m \in H} y_{ijkm} + x_{ik} \right) + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{m \in H} v_{ijm} \left( - \sum_{k \in H} y_{ijkm} + x_{jm} \right)$$

s.t. (۶), (۷), (۸), (۱۰), (۱۴), (۱۷).



برای  $u_{ijk}, v_{ijm} \geq 0$  مساله  $l(u, v)$  را می توان به صورت ماکزیم سازی دو تابع جدا از هم، یکی بر حسب تنها  $x$  و یک تابع بر حسب متغیر  $y$ ، به صورت زیر نوشت:

$$l_x(u, v) = \max \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in H} u_{ijk} x_{ik} + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{m \in H} v_{ijm} x_{jm}$$

$$s.t. \quad (6), (7), (8), (9).$$

$$l_y(u, v) = \max \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in H} \sum_{m \in H} (d_{ij}^{km} - u_{ijk} - v_{ijm}) y_{ikm}$$

$$s.t. \quad (14), (17).$$

تابع هدف مساله بر حسب  $x$  را ساده می کنیم:

$$l_x(u, v) = \max \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in H} u_{ijk} x_{ik} + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{m \in H} v_{ijm} x_{jm} = \sum_{i \in N} \sum_{k \in H} \left( \sum_{j \in N} u_{ijk} \right) x_{ik} + \sum_{i \in N} \sum_{k \in H} \left( \sum_{j \in N} v_{jik} \right) x_{ik}$$

$$= \sum_{i \in N} \sum_{k \in H} \left( \sum_{j \in N} (u_{ijk} + v_{jik}) \right) x_{ik}$$

با تعریف  $\alpha_{ik}$  به صورت  $\alpha_{ik} = \sum_{j \in N} (u_{ijk} + v_{jik})$ ، زیرمساله بر حسب  $x$  به صورت زیر خواهد شد:

$$l_x(u, v) = \max \sum_{i \in N} \sum_{k \in H} \alpha_{ik} x_{ik}$$

$$s.t. \quad (6), (7), (8), (9).$$

برای  $u_{ijk}, v_{ijm} \geq 0$  مساله  $l(u, v)$  یک کران بالا برای مساله  $p_7$  است.

نتیجه ۲: برای  $u_{ijk}, v_{ijm} \geq 0$  مفروض جواب تابع لاگرانژین از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$l(u, v) = l_x(u, v) + l_y(u, v)$$

برای به دست آوردن بهترین کران بالا، دوگان لاگرانژ را به دست می آوریم:

$$D: \quad z_D = \min_{u, v \geq 0} l(u, v)$$

برای حل مساله  $D$  از بهینه سازی زیرگرایان استفاده می کنیم. فرض کنیم  $x(u, v)$  و  $y(u, v)$  جواب های بهینه

$l(u, v)$  باشند، آنگاه زیرگرایان برای  $l(u, v)$  به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\begin{cases} \frac{\partial l}{\partial u_{ijk}} = - \sum_{m \in H} y_{ijkm} + x_{ik} \\ \frac{\partial l}{\partial v_{ijm}} = - \sum_{k \in H} y_{ijkm} + x_{jm} \end{cases}$$

الگوریتم ۱ روش زیرگرایان برای مساله  $p_7$  را نشان می دهد. خروجی این الگوریتم یک کران بالا برای  $z_D$  است.

در این الگوریتم  $LB$  یک کران پایین مساله اصلی و  $t$  بیانگر اندیس تکرار است. پارامتر  $\theta$  در صورت عدم بهبود کران بالا، نصف می شود [۲۵].

الگوریتم ۱: روش زیر گرادین برای بهبود ضرایب لاگرانژین برای مدل  $p_۲$

- ۱) set  $t = ۰, u_{ijk} = ۰, v_{ijm} = ۰, z_D = +\infty, \theta = ۲$
- ۲) if  $t < t_{\max}$  then solve  $l_x(u^t, v^t), l_y(u^t, v^t)$
- ۳) let  $l(u^t, v^t) = l_x(u^t, v^t) + l_y(u^t, v^t)$
- ۴) if  $l(u^t, v^t) < z_D$  then  $z_D = l(u^t, v^t)$  else  $\theta = \frac{\theta}{۲}$
- ۵) 
$$\begin{cases} \gamma(u_{ijk}^t) = \frac{\partial l}{\partial u_{ijk}} = - \sum_{m \in H} y_{ijkm} + x_{ik} \\ \gamma(v_{ijm}^t) = \frac{\partial l}{\partial v_{ijm}} = - \sum_{k \in H} y_{ijkm} + x_{jm} \end{cases}$$
- ۶) 
$$\lambda^t = \theta^t \frac{LB - l(u^t, v^t)}{\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in H} (\gamma(u_{ijk}^t))^+ + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{m \in H} (\gamma(v_{ijm}^t))^+}$$
- ۷) 
$$\begin{cases} u_{ijk}^{t+1} = \max \{ ۰, u_{ijk}^t + \lambda^t \gamma(u_{ijk}^t) \} \\ v_{ijm}^{t+1} = \max \{ ۰, v_{ijm}^t + \lambda^t \gamma(v_{ijm}^t) \} \end{cases}$$

## ۵ حل مساله به کمک روش‌های ابتکاری و فراابتکاری

بنا به آنچه که در [۳] آمده مساله ماکزیمم پوشش  $p$ -هاب با پوشش تدریجی، یک مساله  $NP$ -hard است؛ بنابراین استفاده از روش‌های حل ابتکاری و فراابتکاری می‌تواند مفید واقع شود. در این بخش می‌خواهیم یک روش ابتکاری و یک روش فراابتکاری برای حل مدل‌های  $p_۱$  و  $p_۲$  ارائه دهیم.

### ۵-۱ ارائه روش ابتکاری:

ما از ایده به کار رفته در [۱۲] برای کاهش ابعاد مساله و در نتیجه یافتن یک جواب تقریبی مناسب برای آن استفاده می‌کنیم. با به کارگیری این روش ابتکاری، نقاطی را که برای هاب شدن مناسب هستند مشخص می‌کنیم. به عبارت دیگر از میان نقاط کاندید برای هاب شدن، مجموعه‌ای کوچک‌تر را که شرایط بهتری دارند انتخاب می‌کنیم. پس از تعیین مجموعه کاندید جدید برای انتخاب هاب‌ها، مدل را به کمک نرم افزار گمز حل می‌کنیم. در ادامه گام‌های روش ابتکاری را توضیح می‌دهیم.

**گام اول** (تشکیل ماتریس  $fcm$ ): فرض کنید  $d_{ij}$  فاصله بین دو نقطه  $i$  و  $j$  باشد، ماتریس  $fcm$  یک ماتریس  $n \times n$  است که درایه  $i$  و  $j$  آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$fcm_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } d_{ij} \leq \frac{l_{ij}}{3} \\ f(d_{ij}) & \text{if } \frac{l_{ij}}{3} \leq d_{ij} \leq \frac{u_{ij}}{3} \\ 0 & \text{if } d_{ij} \geq \frac{u_{ij}}{3} \end{cases}$$

که در آن تابع  $f(d_{ij})$  برای پوشش دودویی برابر با صفر و برای پارامتر پوشش تدریجی (۳) و (۴) مطابق با فرمول

$$f(d_{ij}) = \frac{u_{ij} - d_{ij}}{u_{ij} - l_{ij}} \quad \text{و } l_{ij} \text{ مشابه قبل به ترتیب کران بالا و پایین پوشش می باشد.}$$

**گام دوم** (تشکیل بردار  $NC$ ): بردار  $NC$  یک بردار  $n$  تایی است که درایه  $i$  ام آن به صورت زیر تعریف می شود:

$$NC_i = \sum_{j=1}^n fcm_{ij}$$

به عبارت دیگر درایه  $i$  ام بردار  $NC$ ، مجموع درایه های سطر  $i$  ام ماتریس  $fcm$  است ( $|N| = n$ ).

**گام سوم** (تشکیل بردار  $SNC$ ): درایه های بردار  $NC$  را به صورت نزولی مرتب و آن را در  $SNC$  ذخیره می کنیم (یعنی برای  $i = 1, \dots, n-1$ ،  $SNC_i \leq SNC_{i+1}$ ).

**گام چهارم** (تشکیل مجموعه  $H$ ): در بردار  $SNC$ ،  $\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor$  از نقاط آخر را حذف می کنیم، نقاط باقی مانده مجموعه  $H$  را تشکیل می دهند.

**گام پنجم:** بعد از مشخص شدن مجموعه اعضای کاندید جدید، مدل را با نرم افزار گمز حل می کنیم. نرم افزار گمز را محدود به انتخاب هاب ها از مجموعه  $H$  می کنیم.

هدف از این روش ابتکاری، کاهش زمان محاسبات می باشد. در بخش ۶ نشان خواهیم داد که استفاده از روش ابتکاری باعث کاهش زمان محاسبات هر دو مدل می شود و با به کارگیری این الگوریتم ساده در اغلب موارد جواب بهینه یا جواب نزدیک به جواب بهینه را به دست می آوریم.

## ۵-۲ ارایه الگوریتم ژنتیک برای حل مساله

از سال ۱۹۶۰ تقلید از تکامل موجودات زنده برای استفاده در الگوریتم های قدرتمند برای مسایل بهینه سازی مورد توجه قرار گرفت. الگوریتم ژنتیک اولین بار توسط جان هالند و همکارانش در سال ۱۹۶۵ مطرح شد. سپس در سال ۱۹۷۵ مبانی ریاضی آن در کتاب سازگاری در سیستم طبیعی و مصنوعی توسط هالند منتشر شد. الگوریتم ژنتیک یک روش فراابتکاری با کارایی بالاست که برای حل مسایل با سازه بزرگ مناسب می باشد. این الگوریتم در حل مسایل طراحی، بهینه سازی توابع، بهینه سازی ترکیباتی، سیستم های کنترل و... کاربرد دارد [۲۷]. مراحل الگوریتم ژنتیک برای مساله مورد بحث در این پژوهش به شرح زیر است:

(۱) **ساختن کروموزوم<sup>۳۰</sup>**: ساختار کروموزوم باید به نحوی باشد که شامل اطلاعات مورد نیاز و اصلی مساله باشد. مهم‌ترین ویژگی‌های مساله ماکزیمم پوششی  $p$ -هاب تک تخصیصی عبارتند از:

(الف) تعداد هاب  $p$  باید تعیین شود.

(ب) هر گره غیرهاب حداکثر به یک هاب تخصیص داده می‌شود. لذا ساختار کروموزوم باید طوری باشد که ویژگی‌های فوق را داشته باشد. در ساختار کروموزوم هر بیت<sup>۳۱</sup> نشان-دهنده یک گره تقاضا می‌باشد و عدد داخل هر بیت نشان‌دهنده هابی است که گره به آن تخصیص می‌یابد. اگر عدد داخل بیت با موقعیت مکانی بیت یکسان باشد، به این معنی که آن گره به عنوان هاب انتخاب شده است. برای نمونه کروموزوم زیر را در نظر بگیرید که برای شبکه‌ای با ۷ نقطه تقاضا بیان شده است.

|   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۵ | ۲ | ۵ | ۲ | ۵ | ۵ | ۲ |
|---|---|---|---|---|---|---|

چون شماره بیت ۲ و ۵ با عدد داخل بیت یکسان است پس گره ۲ و ۵ هاب هستند. همچنین نقاط غیر هاب به یکی از هاب‌ها ۲ یا ۵ تخصیص یافته‌اند. مثلاً گره‌های ۱، ۳، ۵ و ۶ به هاب ۵ و گره ۲، ۴ و ۷ به هاب ۲ تخصیص یافته است.

(۲) **تولید جمعیت اولیه<sup>۳۲</sup>**: برای تولید جمعیت اولیه، به اندازه سائز جمعیت اولیه، جواب اولیه تولید می‌کنیم. برای ساختن هر جواب اولیه ابتدا به صورت تصادفی  $p$  بیت انتخاب می‌شود. این  $p$  بیت نمایش‌دهنده هاب‌های انتخاب شده است. برای پر کردن سایر بیت‌ها، نقاط باقی مانده را به صورت تصادفی به هاب‌های انتخاب شده تخصیص می‌دهیم.

(۳) **محاسبه تابع برازندگی<sup>۳۳</sup>**: پس از تولید جمعیت اولیه، تابع برازندگی را که همان مقدار تابع هدف به ازای جواب فعلی است را محاسبه می‌کنیم.

(۴) **انتخاب کروموزوم‌ها برای تولید فرزندان**: برای تولید فرزندان جدید از میان جواب‌های موجود، والدین را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم.

(۵) **عملگرهای ژنتیک**: برای کشف و استخراج جواب‌های بهتر از جواب‌های اولیه، از عملگرهای ژنتیک؛ یعنی عملگر ادغام<sup>۳۴</sup> و عملگر جهش<sup>۳۵</sup> استفاده می‌کنیم.

**عملگر ادغام**: در علم ژنتیک فرزندان از والدین ایجاد می‌شوند به طوری که ویژگی‌های فرزندان ترکیبی از ویژگی‌های والدین است. به این عمل در علم ژنتیک ادغام می‌گویند. در الگوریتم ژنتیک، اپراتور ادغام با استفاده از دو رشته والد، دو رشته فرزند به وجود می‌آورد. برای اینکار قسمتی از بیت‌های والدین در بیت‌های فرزندان کپی می‌شود. عملگر ادغام استفاده شده در الگوریتم ژنتیک ارایه شده، به شرح زیر است:

<sup>30</sup> Chromosome

<sup>31</sup> Bit

<sup>32</sup> Population

<sup>33</sup> Fitness

<sup>34</sup> Crossover

<sup>35</sup> Mutation

هاب‌های مشترک بین دو والد در دو فرزند بدون تغییر می‌نویسیم. هاب‌های باقی مانده را به طور تصادفی از بین هاب‌های غیر مشترک بین دو والد انتخاب می‌کنیم. در هر فرزند پس از مشخص شدن هاب‌ها، نقاط غیر هاب را به هاب‌ها تخصیص می‌دهیم. نحوه تخصیص نقاط غیر هاب به هاب‌ها به صورت زیر می‌باشد:

الف) ابتدا راس‌هایی که به هاب‌های مشترک تخصیص داده می‌شوند را مشخص می‌کنیم. بدین منظور اجتماع راس‌های متصل به هاب‌های مشترک بین دو والد را مشخص می‌کنیم. سپس در هر فرزند به صورت تصادفی جزء صحیح نصف این راس‌ها را انتخاب می‌کنیم و به طور تصادفی به هاب‌های مشترک تخصیص می‌دهیم.

ب) برای تخصیص نقاط به هاب‌های غیر مشترک در هر فرزند، اجتماع راس‌های متصل به هاب‌های غیر مشترک در هر دو والد را مشخص می‌کنیم. سپس در هر فرزند به طور تصادفی  $\left[\frac{3}{4}\right]$  این راس‌ها را به هاب‌های غیر مشترک تخصیص می‌دهیم.

ج) راس‌های باقی مانده را به صورت تصادفی به هاب‌ها تخصیص می‌دهیم. در شکل زیر (به عنوان نمونه) نحوه ادغام را برای کروموزومی با ۷ بیت بیان می‌کنیم. دو والد ۱ و ۲ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

|        |   |   |   |   |   |   |   |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|
| والد ۱ | ۲ | ۲ | ۴ | ۴ | ۲ | ۴ | ۲ |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|

|        |   |   |   |   |   |   |   |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|
| والد ۲ | ۴ | ۳ | ۳ | ۴ | ۴ | ۳ | ۴ |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|

هاب ۴ در هر دو والد مشترک است بنابراین در هر دو فرزند هاب‌های مشترک تغییر نمی‌کنند.

|         |  |  |  |   |  |  |  |
|---------|--|--|--|---|--|--|--|
| فرزند ۱ |  |  |  | ۴ |  |  |  |
|---------|--|--|--|---|--|--|--|

|         |  |  |  |   |  |  |  |
|---------|--|--|--|---|--|--|--|
| فرزند ۲ |  |  |  | ۴ |  |  |  |
|---------|--|--|--|---|--|--|--|

در هر فرزند، بقیه هاب‌ها را به طور تصادفی از مجموعه هاب‌های غیر مشترک  $\{2, 3\}$  انتخاب می‌کنیم. فرض کنیم برای فرزند اول به طور تصادفی هاب ۳ انتخاب شود و برای فرزند دوم هاب ۲ انتخاب شود.

|         |  |  |   |   |  |  |  |
|---------|--|--|---|---|--|--|--|
| فرزند ۱ |  |  | ۳ | ۴ |  |  |  |
|---------|--|--|---|---|--|--|--|

|         |  |   |  |   |  |  |  |
|---------|--|---|--|---|--|--|--|
| فرزند ۲ |  | ۲ |  | ۴ |  |  |  |
|---------|--|---|--|---|--|--|--|

بعد از مشخص شدن هاب‌ها در هر فرزند، باید نقاط غیر هاب را به هاب‌های انتخاب شده، تخصیص دهیم. ابتدا نقاطی را که به هاب‌های مشترک تخصیص داده می‌شوند مشخص می‌کنیم. برای این منظور اجتماع راس‌های غیر هاب در هر دو والد که به هاب‌های مشترک متصل بودند مشخص می‌کنیم. اجتماع نقاط غیر هاب تخصیص یافته به هاب مشترک ۴ در دو والد برابر با  $\{1, 3, 5, 6, 7\}$  است. در هر فرزند جزء صحیح نصف این راس‌ها را به طور تصادفی به هاب‌های مشترک تخصیص می‌دهیم. فرض کنیم برای فرزند اول نقاط ۱ و ۵ و برای فرزند دوم نقاط ۶ و ۳ انتخاب شوند؛ لذا این نقاط را به هاب مشترک ۴ تخصیص می‌دهیم.

|         |   |  |   |   |   |  |  |
|---------|---|--|---|---|---|--|--|
| فرزند ۱ | ۴ |  | ۳ | ۴ | ۴ |  |  |
|---------|---|--|---|---|---|--|--|

|         |  |   |   |   |  |   |  |
|---------|--|---|---|---|--|---|--|
| فرزند ۲ |  | ۲ | ۴ | ۴ |  | ۴ |  |
|---------|--|---|---|---|--|---|--|

سپس نقاطی را که به هاب‌های غیر مشترک متصل هستند مشخص می‌کنیم.  $\left[\frac{3}{4}\right]$  نقاط  $\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$  را در فرزند اول به هاب غیر مشترک ۳ و در فرزند دوم به هاب ۲ تخصیص می‌دهیم. فرض کنیم برای فرزند اول نقاط ۲ و ۷ و برای

فرزند دوم نقاط ۱ و ۵ انتخاب شوند، لذا این نقاط را به طور تصادفی به هاب‌های غیر مشترک ۲ و ۳ تخصیص می‌دهیم؛ لذا داریم:

|         |   |   |   |   |   |   |   |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|
| فرزند ۱ | ۴ |   | ۳ | ۴ | ۴ |   | ۳ |
| فرزند ۲ | ۲ | ۲ | ۴ | ۴ | ۲ | ۴ |   |

گره‌هایی را که به هیچ هابی تخصیص نیافته‌اند را به طور تصادفی به هاب‌های موجود در هر فرزند تخصیص می‌دهیم. پس فرزندان جدید حاصل از ادغام والد ۱ و ۲ به صورت زیر به دست می‌آید:

|         |   |   |   |   |   |   |   |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|
| فرزند ۱ | ۴ | ۴ | ۳ | ۴ | ۴ | ۳ | ۳ |
| فرزند ۲ | ۲ | ۲ | ۴ | ۴ | ۲ | ۴ | ۳ |

**عملگر جهش:** در علم ژنتیک به تغییرات غیرعادی در ساختار کروموزوم که باعث ایجاد تغییر در برخی ویژگی‌های افراد می‌شود جهش می‌گویند. در الگوریتم ژنتیک، عملگر جهش نقش مهمی در رهایی از جواب‌های محلی دارد. این عملگر در کروموزوم‌های متفاوت، تغییرات تصادفی برنامه‌ریزی نشده‌ای ایجاد می‌کند و ژن‌هایی را که در جمعیت اولیه وجود نداشته‌اند، وارد جمعیت می‌کند.

برای جهش در ساختار یک کروموزوم، هابی را به صورت تصادفی حذف می‌کنیم سپس از نقاط غیرهاب، به طور تصادفی هاب جدیدی انتخاب می‌کنیم و نقاطی که به هاب قبلی تخصیص داشتند به هاب جدید تخصیص می‌دهیم.

|   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۴ | ۴ | ۳ | ۴ | ۴ | ۳ | ۳ |
|---|---|---|---|---|---|---|

ادغام

|   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۴ | ۴ | ۵ | ۴ | ۴ | ۵ | ۵ |
|---|---|---|---|---|---|---|

به عنوان نمونه در زیر نحوه جهش برای کروموزومی با ۷ بیت را بیان می‌کنیم. در این کروموزوم به صورت تصادفی هاب ۳ را حذف می‌کنیم و گره غیرهاب ۵ را به عنوان هاب جدید انتخاب می‌کنیم سپس نقاط تخصیص یافته به هاب ۳ را به هاب ۵ تخصیص می‌دهیم.

**جایگزینی کروموزوم‌های شایسته:** تابع برازندگی کروموزوم‌ها را محاسبه می‌کنیم و کروموزوم‌های شایسته را جایگزین کروموزوم‌های قبلی می‌کنیم.

**توقف الگوریتم:** با توجه به شرط توقف انتخاب شده، اگر شرط توقف برقرار باشد متوقف می‌شویم و درغیراین صورت الگوریتم ادامه پیدا می‌کند. مادر این الگوریتم، شرط توقف را تعداد تکرارهای الگوریتم در نظر گرفته‌ایم. نکته‌ای که لازم است در انتهای این بخش تذکر داده شود این است که در کلیه مراحل الگوریتم ژنتیک (تولید جمعیت و عملگرهای آن)، کروموزوم‌های ساخته شده از لحاظ شدنی بودن بررسی می‌شوند و در صورت نشدنی بودن (برقرار نبودن هریک از محدودیت‌های مساله)، کروموزوم ایجاد شده حذف می‌شود.

## ۶ نتایج محاسبات

در این بخش نتایج حاصل از حل مدل  $p_1$  و مدل  $p_7$  با نرم افزار گمز، کران‌های حاصل از به کارگیری ساده‌سازی لاگرانژین برای مدل  $p_7$ ، روش ابتکاری و الگوریتم ژنتیک برای هر دو مدل را ارایه می‌کنیم. در هر مورد نتایج حاصل از پوشش دودویی و پوشش تدریجی جداگانه محاسبه و تحلیل می‌شود. حل مدل‌ها و کلیه محاسبات روش ساده‌سازی لاگرانژین با نرم‌افزار GAMS 24.1.3، یافتن مجموعه مراکز کاندید با روش ابتکاری و الگوریتم ژنتیک با نرم‌افزار

۱۰. *Matlab*، و در سیستمی با پردازنده ۴۲۰۰ و حافظه ۸ گیگابایت انجام شده است. ساده‌سازی لاگرانژین و روش ابتکاری را بر روی داده‌های CAB و الگوریتم ژنتیک را بر روی داده‌های CAB و AP (۲۸) بررسی می‌کنیم. در مورد نمونه AP داده‌های ۴۰ و ۵۰ نقطه ای مورد بررسی قرار گرفته است.

ابتدا در بخش ۶-۱ نتایج روش ساده‌سازی لاگرانژین برای مدل  $p_7$  بیان می‌شود. سپس در بخش ۶-۲ نتایج روش ابتکاری بررسی می‌شود. در نهایت در بخش ۶-۳ نتایج حاصل از الگوریتم ژنتیک مطرح می‌شود.

## ۶-۱ نتایج محاسبات روش ساده سازی لاگرانژین

در این بخش نتایج حاصل از حل مدل های  $p_1$  و  $p_7$  را با نرم افزار گمز و نتایج حاصل از اجرای روش ساده‌سازی لاگرانژین برای مدل  $p_7$  را با پارامتر پوشش دودویی (۱) و پوشش‌های تدریجی (۳) و (۴) مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای تعیین پارامتر  $\beta'$ ، از حل مساله مرکز  $p$ -هاب استفاده شده است [۳]. تعداد تکرارهای روش ساده‌سازی لاگرانژین ۱۰ تکرار می‌باشد. در جدول ۱ برای مقادیر متفاوت  $\alpha$  و  $p$ ، نتایج حاصل از حل مدل‌ها با نرم افزار گمز و بهترین کران بالا به‌دست آمده از ساده‌سازی لاگرانژین نمایش داده شده است. ستون‌های پوشش و کران لاگرانژین، به ترتیب نمایش-دهنده جواب به‌دست آمده از حل مساله اصلی با گمز و کران بالای به‌دست آمده از ساده‌سازی لاگرانژین است. ستون زمان، نمایش‌دهنده زمان اجرا براساس ثانیه می‌باشد.

از مقایسه نتایج حاصل از حل مدل های  $p_1$  و  $p_7$  با نرم افزار گمز، نتایج زیر حاصل می‌شود:

- هر دو مدل از نظر میزان پوشش یکسان هستند و هاب‌ها و تخصیص‌های یکسان دارند.
- با پوشش دودویی، مدل  $p_1$  دارای زمان محاسبات کم‌تری نسبت به مدل  $p_7$  است.
- در هر دو مدل پارامتر پوشش دودویی (۱)، پوشش کم‌تری نسبت به پارامتر پوشش تدریجی (۳) و (۴) ایجاد می‌کند.
- در هر دو مدل پارامتر پوشش تدریجی (۴)، بیش‌ترین پوشش را نسبت به پوشش‌های (۱) و (۳) ایجاد می‌کند.
- در هر دو مدل با  $p$  ثابت و با افزایش  $\alpha$ ، میزان پوشش کاهش می‌یابد.
- در اغلب موارد با پارامتر پوشش تدریجی زمان محاسبات مدل  $p_7$  کم‌تر از مدل  $p_1$  است.
- در خصوص به‌کارگیری ساده‌سازی لاگرانژین برای  $p_7$ ، نتایج محاسباتی نشان می‌دهد که:
- کران بالای به‌دست آمده از روش ساده‌سازی لاگرانژین نزدیک جواب بهینه مساله است و البته کران به‌دست آمده برای مساله با پوشش تدریجی بهتر از کران به‌دست آمده برای مساله با پوشش دودویی است.
- کران بالای به‌دست آمده برای مساله با پارامتر پوشش (۴) مناسب‌تر از کران حاصل برای مساله با پارامتر (۳) است.
- با مقدار ثابت  $p$  و انجام تعداد تکرار یکسان، با افزایش  $\alpha$ ، در اغلب موارد کران بالای مناسب‌تری به‌دست می‌آید.

## ۶-۲ نتایج محاسبات روش ابتکاری

ابتدا روش ابتکاری را در نرم‌افزار *Matlab ۲۰۱۰* کدنویسی می‌کنیم. مجموعه بهینه برای انتخاب هاب‌ها، برابر با  $H = N - \{۸, ۱۴, ۱۹, ۲۲, ۲۳\}$  به دست می‌آید. سپس هر دو مدل را با نرم‌افزار *GAMS ۲۴.۱.۳* با شرط انتخاب هاب‌ها از مجموعه  $H$ ، حل می‌کنیم. به طور مشابه برای تعیین پارامتر  $\beta'$ ، از حل مساله مرکز  $p$ -هاب استفاده شده است [۵]. برای پوشش دودویی، پارامتر پوشش را مطابق (۱) و با  $\beta'_{ij} = ۰/۷۵$  و برای پوشش تدریجی، تابع پوشش را مطابق (۳) و (۴) تعریف می‌کنیم.

در جدول ۲ نتایج حاصل از اجرای هر دو مدل با پارامترهای پوشش (۱)، (۳) و (۴) با روش ابتکاری و در جدول ۳ میانگین پوشش و زمان محاسبات روش ابتکاری برای هر دو مدل آمده است. در تمام جداول  $\alpha$  بیانگر فاکتور تخفیف و  $p$  نشان دهنده تعداد هاب‌هاست. در ستون پوشش، مقدار تابع هدف بهینه، در ستون زمان، زمان اجرا برنامه بر اساس ثانیه، بیان شده است. در ستون  $gap$  درصد اختلاف پوشش حاصل از روش ابتکاری و نرم‌افزار گمز بیان شده است. به طور مشابه برای زمان اجرا نیز  $gap$  حاصل را به دست می‌آوریم. این مقادیر را به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$gap_{\text{پوشش}} = \frac{Z_{GAMS} - Z_{\text{Algorithm}}}{Z_{GAMS}} \times ۱۰۰ \quad gap_{\text{زمان}} = \frac{CPU_{GAMS} - CPU_{\text{Algorithm}}}{CPU_{GAMS}} \times ۱۰۰$$

مقایسه نتایج حاصل از حل مدل‌های  $p_1$  و  $p_7$  با روش ابتکاری، نتایج زیر حاصل می‌شود:

- (۱) روش ابتکاری در هر دو مدل، در اغلب موارد جواب بهینه یا نزدیک به بهینه به دست می‌آورد.
- (۲) متوسط پوشش با روش ابتکاری، برای هر دو مدل یکسان است. در نتیجه  $gap$  پوشش هر دو مدل یکسان است.
- (۳) به طور متوسط پوشش حاصل از به کارگیری تابع پوشش تدریجی (۴) بیش‌تر از پوشش تدریجی (۳) است.
- (۴) به طور میانگین بیش‌ترین  $gap$  برای پوشش  $۰/۰۶$  و حداقل درصد میانگین کاهش زمان محاسبات،  $۸۰$  درصد است.

(۵) روش ابتکاری در هر دو مدل، باعث کاهش زمان محاسبات می‌شود.

(۶) زمان محاسبات روش ابتکاری با پوشش تدریجی، برای مدل  $p_7$  کم‌تر از مدل  $p_1$  است.

(۷) درصد کاهش زمان محاسبات با روش ابتکاری، برای مدل  $p_1$  بیش‌تر از مدل  $p_7$  می‌باشد.

### ۶-۳ نتایج محاسبات الگوریتم ژنتیک

در این بخش نتایج حاصل از حل مدل‌ها با الگوریتم ژنتیک، برای مقادیر متفاوت  $\alpha$  و  $p$  ارائه شده است. برای الگوریتم ژنتیک تعداد جمعیت اولیه را  $۱۰۰$ ، نرخ ادغام و نرخ جهش را  $۰/۲۵$  تعریف می‌کنیم. به این معنی که در هر تکرار از الگوریتم حداکثر  $۲۵$  درصد جمعیت اولیه، پس از انجام عملگرهای ادغام و جهش تغییر خواهد کرد. در حین انجام این عملگرها اگر فرزند دارای تابع برازندگی بهتری نسبت به والد باشد، با آن جایگزین می‌شود و در غیر این صورت والد در جمعیت باقی می‌ماند. در تمامی جداول این بخش ستون  $\alpha$ ،  $p$  و  $gap$  مشابه بخش ۶-۲ می‌باشد. ستون‌های پوشش به ترتیب نمایش دهنده جواب به دست آمده از حل مدل  $p_1$  و مدل  $p_7$  با نرم‌افزار گمز و الگوریتم ژنتیک است. ستون زمان، نمایش دهنده زمان اجرا براساس ثانیه می‌باشد.



## ۶-۳-۱ نتایج الگوریتم ژنتیک بر روی داده‌های CAB

جدول ۴ نتایج حاصل از به کارگیری الگوریتم ژنتیک برای مساله ماکزیم پوشش  $p$ -هاب با پوشش دودویی و تدریجی بر روی داده‌های CAB را نشان می‌دهد. تعداد تکرارهای الگوریتم ژنتیک را ۱۰۰ در نظر گرفته‌ایم. برای پوشش دودویی، پارامتر پوشش را مطابق (۱) و با  $\beta'_{ij} = 0.75\beta_{ij}$  تعریف می‌کنیم. با توجه به اینکه تقریباً در تمامی موارد جواب بهینه حاصل از مساله با پوشش تدریجی (۴) بهتر از جواب‌های حاصل از حل مساله با پوشش تدریجی (۳) است، ما محاسبات را تنها برای مساله با پوشش تدریجی (۴) آورده‌ایم.

نتایج محاسبات الگوریتم ژنتیک نشان می‌دهد که  $gap$  پوشش الگوریتم ژنتیک برای پارامتر پوشش تدریجی (۴) کم‌تر از پارامتر پوشش دودویی (۱) است. به‌طور خاص میانگین درصد  $gap$  پوشش در مساله با پوشش دودویی ۱۲٪ و در مساله با پوشش تدریجی ۹٪ است. این در حالی است که میانگین زمان حل نمونه‌ها با ژنتیک کاهش چشمگیری نسبت به زمان اجرای گمز دارد. در ادامه نشان می‌دهیم که الگوریتم ژنتیک پیشنهادی برای نمونه‌های با ابعاد بالاتر (هم از لحاظ درصد پوشش و هم زمان اجرا) عملکرد مناسب‌تری نسبت به حل مدل‌ها با نرم افزار گمز نشان می‌دهد.

جدول ۱. نتایج حاصل از حل مدل‌های  $p_1$  و  $p_2$  با نرم افزار گمز و ساده سازی لاگرانژین برای مدل  $p_2$ 

|          |     | پوشش (۱)     |       |            |            |                   |            | پوشش (۳)     |       |            |            |                   |            | پوشش (۴)     |         |            |            |                   |            |
|----------|-----|--------------|-------|------------|------------|-------------------|------------|--------------|-------|------------|------------|-------------------|------------|--------------|---------|------------|------------|-------------------|------------|
|          |     | حل باگمز     |       |            |            | ساده سازی لاگرانژ |            | حل باگمز     |       |            |            | ساده سازی لاگرانژ |            | حل باگمز     |         |            |            | ساده سازی لاگرانژ |            |
|          |     | زمان         |       | زمان       |            | برای $p_2$        |            | زمان         |       | زمان       |            | برای $p_2$        |            | زمان         |         | زمان       |            | برای $p_2$        |            |
| $\alpha$ | $p$ | پوشش و $p_1$ | $p_2$ | زمان $p_1$ | زمان $p_2$ | کران $p_2$        | زمان $p_2$ | پوشش و $p_1$ | $p_2$ | زمان $p_1$ | زمان $p_2$ | کران $p_2$        | زمان $p_2$ | پوشش و $p_1$ | $p_2$   | زمان $p_1$ | زمان $p_2$ | کران $p_2$        | زمان $p_2$ |
| ۰.۲      | ۲   | ۷۹۱۳۴۰۰      | ۴۴    | ۱۷۲        | ۸۷۳۴۱۵۴    | ۱۹۱               | ۸۲۱۴۳۸۴    | ۶۴           | ۱۱۸   | ۸۶۶۹۹۴۰    | ۱۳۶        | ۸۳۴۲۸۵۰           | ۵۳         | ۱۳۶          | ۸۶۳۵۳۲۵ | ۱۶۰        | ۸۶۳۵۳۲۵    | ۱۶۰               | ۸۶۳۵۳۲۵    |
|          | ۳   | ۸۱۹۵۵۵۰      | ۶۱    | ۵۳۶        | ۸۶۶۱۷۱۹    | ۵۷۰               | ۸۳۴۸۵۳۶    | ۹۴           | ۳۰۲   | ۸۶۶۶۸۴۷    | ۳۳۶        | ۸۴۱۱۴۶۹           | ۹۵         | ۳۵۱          | ۸۶۳۴۵۴۶ | ۳۸۱        | ۸۶۳۴۵۴۶    | ۳۸۱               | ۸۶۳۴۵۴۶    |
|          | ۴   | ۸۱۷۰۱۷۲      | ۳۹    | ۱۹۵        | ۸۶۹۳۷۵۲    | ۲۱۸               | ۸۲۸۹۷۰۴    | ۱۱۰          | ۲۳    | ۸۶۳۹۴۱۳    | ۲۶۴        | ۸۳۴۵۹۲۲           | ۲۰۲        | ۲۷۱          | ۸۶۴۱۴۲۷ | ۲۹۸        | ۸۶۴۱۴۲۷    | ۲۹۸               | ۸۶۴۱۴۲۷    |
|          | ۵   | ۷۸۸۹۴۲۸      | ۵۶    | ۱۴۱        | ۸۷۲۲۸۷۱    | ۱۶۱               | ۸۱۰۹۱۵۴    | ۸۴           | ۱۰۹   | ۸۷۱۲۶۱۴    | ۱۱۷        | ۸۲۴۱۸۶۵           | ۲۲۵        | ۹۳           | ۸۷۷۴۷۸۵ | ۱۱۶        | ۸۷۷۴۷۸۵    | ۱۱۶               | ۸۷۷۴۷۸۵    |
| ۰.۴      | ۲   | ۸۰۲۸۶۲۴      | ۳۴    | ۱۵۴        | ۸۶۱۷۵۳۸    | ۱۷۵               | ۸۸۲۴۰۹۹    | ۶۱           | ۱۵۷   | ۸۵۸۸۵۷۱    | ۱۳۲        | ۸۳۳۳۶۸۶           | ۵۷         | ۱۵۰          | ۸۵۹۱۰۲۶ | ۱۷۸        | ۸۵۹۱۰۲۶    | ۱۷۸               | ۸۵۹۱۰۲۶    |
|          | ۳   | ۸۱۴۶۸۶۰      | ۳۲    | ۲۰۶        | ۸۶۲۷۵۳۶    | ۲۳۰               | ۸۲۶۰۳۰۲    | ۸۵           | ۱۹۵   | ۸۶۱۶۷۰۹    | ۱۸۲        | ۸۳۱۱۴۰۸           | ۱۵۰        | ۲۲۹          | ۸۶۱۴۲۳۰ | ۲۶۷        | ۸۶۱۴۲۳۰    | ۲۶۷               | ۸۶۱۴۲۳۰    |
|          | ۴   | ۸۰۶۱۱۶۲      | ۳۲    | ۱۹۹        | ۸۷۵۸۳۴۰    | ۲۲۰               | ۸۲۴۰۴۸۲    | ۸۳           | ۱۲۴   | ۸۶۲۷۵۷۷    | ۲۲۹        | ۸۲۹۴۲۶۰           | ۹۸         | ۱۸۸          | ۸۶۱۱۱۲۶ | ۲۴۹        | ۸۶۱۱۱۲۶    | ۲۴۹               | ۸۶۱۱۱۲۶    |
|          | ۵   | ۷۶۱۷۳۰۸      | ۳۱    | ۱۰۸        | ۸۶۶۲۲۸۹    | ۱۲۶               | ۷۹۷۶۵۴۱    | ۶۲۴          | ۵۳    | ۸۶۵۱۶۰۴    | ۱۴۹        | ۸۱۳۱۱۹۵           | ۱۶۹        | ۷۰           | ۸۶۲۰۸۲۹ | ۱۰۶        | ۸۶۲۰۸۲۹    | ۱۰۶               | ۸۶۲۰۸۲۹    |
| ۰.۶      | ۲   | ۷۶۸۷۱۶۸      | ۳۳    | ۱۰۴        | ۸۵۱۵۹۵۰    | ۱۲۳               | ۷۹۸۲۲۴۳    | ۹۶           | ۱۰۸   | ۸۵۵۶۰۷۷    | ۷۴         | ۸۱۹۵۹۵۱           | ۱۰۱        | ۱۳۱          | ۸۵۵۴۷۱۴ | ۱۶۵        | ۸۵۵۴۷۱۴    | ۱۶۵               | ۸۵۵۴۷۱۴    |
|          | ۳   | ۷۸۴۸۹۸۶      | ۲۵    | ۱۰۴        | ۸۴۰۹۵۳۹    | ۱۲۲               | ۸۰۲۹۲۳۶    | ۲۷           | ۱۶۰   | ۸۵۹۹۲۱۵    | ۱۳۳        | ۸۱۷۶۱۶۱           | ۱۵۹        | ۱۴۹          | ۸۵۷۶۰۵۰ | ۱۷۱        | ۸۵۷۶۰۵۰    | ۱۷۱               | ۸۵۷۶۰۵۰    |
|          | ۴   | ۷۸۱۵۴۴۴      | ۱۶    | ۱۴۴        | ۸۵۴۱۹۰۵    | ۱۶۲               | ۸۰۸۰۹۲۳    | ۴۵۲          | ۷۷    | ۸۵۷۷۱۱۲    | ۱۵۹        | ۸۱۸۶۲۲۸           | ۲۰۲        | ۱۲۷          | ۸۶۱۱۳۸۲ | ۱۴۹        | ۸۶۱۱۳۸۲    | ۱۴۹               | ۸۶۱۱۳۸۲    |
|          | ۵   | ۷۵۴۷۹۳۴      | ۱۴    | ۱۳۹        | ۸۳۲۷۵۰۱    | ۱۵۸               | ۷۹۴۲۲۴۸    | ۳۵           | ۸۷    | ۸۴۶۵۷۲۵    | ۸۸         | ۸۱۴۱۰۹۷           | ۱۶۶        | ۲۵           | ۸۶۱۱۳۸۲ | ۱۴۹        | ۸۶۱۱۳۸۲    | ۱۴۹               | ۸۶۱۱۳۸۲    |
| ۰.۸      | ۲   | ۷۶۸۷۱۶۸      | ۱۱    | ۲۹         | ۸۱۴۴۴۹۵    | ۴۷                | ۷۸۴۱۹۷۰    | ۱۳۸          | ۵۴    | ۸۳۰۲۴۹۲    | ۹۵         | ۸۰۹۲۰۰۹           | ۸۲         | ۳۶           | ۸۳۹۱۱۲۱ | ۵۸         | ۸۳۹۱۱۲۱    | ۵۸                | ۸۳۹۱۱۲۱    |
|          | ۳   | ۷۸۴۸۹۸۶      | ۱۱    | ۱۲۹        | ۷۹۱۴۵۷۷    | ۱۴۸               | ۷۷۵۹۲۳۵    | ۲۰۹          | ۱۵۵   | ۸۲۳۴۳۹۳    | ۶۹         | ۸۰۱۰۲۹۰           | ۲۷۹        | ۹۲           | ۸۳۷۷۷۳۹ | ۱۱۵        | ۸۳۷۷۷۳۹    | ۱۱۵               | ۸۳۷۷۷۳۹    |
|          | ۴   | ۷۸۱۵۴۴۴      | ۱۱    | ۲۴۶        | ۷۸۹۱۱۵۷    | ۲۶۳               | ۷۷۶۰۵۰۳    | ۴۲۰          | ۱۸۵   | ۸۲۳۹۶۱۸    | ۱۵۶        | ۸۰۰۱۳۵۸           | ۷۴۶        | ۱۳۰          | ۸۳۴۲۵۳۹ | ۱۵۱        | ۸۳۴۲۵۳۹    | ۱۵۱               | ۸۳۴۲۵۳۹    |
|          | ۵   | ۷۵۴۷۹۳۴      | ۹     | ۱۸۰        | ۷۷۶۹۹۹۴    | ۲۰۱               | ۷۶۲۵۶۰۶    | ۱۰۰۱         | ۱۸۹   | ۸۰۴۵۴۱۹    | ۱۸۶        | ۷۸۶۶۴۴۴           | ۶۰۰        | ۷۹           | ۸۲۲۹۹۴۸ | ۱۰۲        | ۸۲۲۹۹۴۸    | ۱۰۲               | ۸۲۲۹۹۴۸    |

جدول ۳: نتایج حاصل از به‌کارگیری روش ابتکاری با پوشش‌های دودویی و مقایسه آن با نتایج حاصل از حل مدل‌ها یا گنر

| $\alpha$ | $p$ | پوشش (۱)     |      |              |         |      |         | پوشش (۲) |      |         |      |         |      | پوشش (۳) |       |      |         |      |         | پوشش (۴) |      |       |         |      |      |
|----------|-----|--------------|------|--------------|---------|------|---------|----------|------|---------|------|---------|------|----------|-------|------|---------|------|---------|----------|------|-------|---------|------|------|
|          |     | گنر          |      |              | ابتکاری |      |         | Gap %    | گنر  |         |      | ابتکاری |      |          | Gap % | گنر  |         |      | ابتکاری |          |      | Gap % | گنر     |      |      |
|          |     | زمان         | زمان | پوشش         | زمان    | زمان | پوشش    |          | زمان | زمان    | پوشش | زمان    | زمان | پوشش     |       | زمان | زمان    | پوشش | زمان    | زمان     | پوشش |       | زمان    | زمان | پوشش |
| ۰/۲      | ۲   | ۱۷۱۱۳۴... ۴۴ | ۱۷۲  | ۱۷۱۱۳۴... ۱۶ | ۴۲      | ۰/۰  | ۸۱۳۳۸۴  | ۶۴       | ۱۱۸  | ۸۱۳۳۸۴  | ۲۹   | ۱۴      | ۱۴   | ۸۱۳۳۸۴   | ۵۲    | ۱۱۶  | ۸۱۳۳۸۴  | ۴۲   | ۱۰      | ۸۱۳۳۸۴   | ۴۲   | ۱۰    | ۸۱۳۳۸۴  | ۴۲   | ۱۰   |
|          | ۳   | ۸۱۹۵۵۵۰ ۶۱   | ۵۴   | ۸۱۹۵۵۵۰ ۹    | ۱۶۳     | ۰/۰  | ۸۱۳۳۸۴  | ۹۴       | ۳۰۲  | ۸۱۳۳۸۴  | ۱۶   | ۹۰      | ۹۰   | ۸۱۳۳۸۴   | ۹۵    | ۲۵۱  | ۸۱۳۳۸۴  | ۴۹   | ۵۴      | ۸۱۳۳۸۴   | ۴۹   | ۵۴    | ۸۱۳۳۸۴  | ۴۹   | ۵۴   |
|          | ۴   | ۸۱۷۰۱۷۲ ۳۹   | ۱۵۵  | ۸۱۷۰۱۷۲ ۳    | ۱۴      | ۰/۰  | ۸۱۳۳۸۴  | ۱۱۰      | ۳۳   | ۸۱۳۳۸۴  | ۶    | ۱۳      | ۱۳   | ۸۱۳۳۸۴   | ۲۰۲   | ۲۷۱  | ۸۱۳۳۸۴  | ۱۳   | ۱۱      | ۸۱۳۳۸۴   | ۱۳   | ۱۱    | ۸۱۳۳۸۴  | ۱۳   | ۱۱   |
|          | ۵   | ۷۸۸۴۳۸ ۵۶    | ۱۴۱  | ۷۸۸۴۳۸ ۴     | ۱۷      | ۰/۰  | ۸۱۰۹۱۵۴ | ۸۴       | ۱۰۹  | ۸۱۰۹۱۵۴ | ۱۵   | ۷       | ۷    | ۸۱۰۹۱۵۴  | ۲۵    | ۹۳   | ۸۱۰۹۱۵۴ | ۹۹   | ۱۱      | ۸۱۰۹۱۵۴  | ۹۹   | ۱۱    | ۸۱۰۹۱۵۴ | ۹۹   | ۱۱   |
|          | ۶   | ۸۰۰۱۶۵۳۳ ۳۴  | ۱۵۴  | ۸۰۰۱۶۵۳۳ ۶   | ۱۵      | ۰/۰  | ۸۱۳۳۸۴  | ۶۱       | ۱۵۷  | ۸۱۳۳۸۴  | ۲۵   | ۲۰      | ۲۰   | ۸۱۳۳۸۴   | ۵۷    | ۱۵۰  | ۸۱۳۳۸۴  | ۳۰   | ۲۱      | ۸۱۳۳۸۴   | ۳۰   | ۲۱    | ۸۱۳۳۸۴  | ۳۰   | ۲۱   |
| ۰/۴      | ۳   | ۸۱۳۳۸۴ ۲۲    | ۲۰۶  | ۸۱۳۳۸۴ ۲     | ۱۳      | ۰/۰  | ۸۱۳۳۸۴  | ۸۵       | ۱۵۵  | ۸۱۳۳۸۴  | ۱۴   | ۱۱      | ۱۱   | ۸۱۳۳۸۴   | ۱۵۰   | ۲۲۹  | ۸۱۳۳۸۴  | ۷۸   | ۱۶      | ۸۱۳۳۸۴   | ۷۸   | ۱۶    | ۸۱۳۳۸۴  | ۷۸   | ۱۶   |
|          | ۴   | ۸۰۰۶۱۱۶۲ ۳۲  | ۱۹۹  | ۸۰۰۶۱۱۶۲ ۱   | ۸       | ۰/۲  | ۸۱۳۳۸۴  | ۸۳       | ۱۳۴  | ۸۱۳۳۸۴  | ۱۲   | ۸       | ۸    | ۸۱۳۳۸۴   | ۹۸    | ۱۸۸  | ۸۱۳۳۸۴  | ۱۰   | ۱۰      | ۸۱۳۳۸۴   | ۱۰   | ۱۰    | ۸۱۳۳۸۴  | ۱۰   | ۱۰   |
|          | ۵   | ۷۶۱۷۳۰۸ ۳۱   | ۱۰۸  | ۷۶۱۷۳۰۸ ۴    | ۴۳      | ۱/۸  | ۷۶۱۷۳۰۸ | ۶۴       | ۵۳   | ۷۶۱۷۳۰۸ | ۱۶   | ۱۱      | ۱۱   | ۷۶۱۷۳۰۸  | ۱۶۹   | ۷۰   | ۷۶۱۷۳۰۸ | ۱۷   | ۱۷      | ۷۶۱۷۳۰۸  | ۱۷   | ۱۷    | ۷۶۱۷۳۰۸ | ۱۷   | ۱۷   |
|          | ۶   | ۷۶۸۱۶۸ ۳۳    | ۱۰۴  | ۷۶۸۱۶۸ ۱۱    | ۱۸      | ۰/۰  | ۷۶۸۱۶۸  | ۹۶       | ۱۰۸  | ۷۶۸۱۶۸  | ۷۰   | ۷۸      | ۷۸   | ۷۶۸۱۶۸   | ۱۰۱   | ۱۳۱  | ۷۶۸۱۶۸  | ۴۰   | ۲۱      | ۷۶۸۱۶۸   | ۴۰   | ۲۱    | ۷۶۸۱۶۸  | ۴۰   | ۲۱   |
|          | ۷   | ۷۶۸۱۶۸ ۳۵    | ۱۰۴  | ۷۶۸۱۶۸ ۱     | ۱۲      | ۰/۰  | ۷۶۸۱۶۸  | ۷۷       | ۱۶۰  | ۷۶۸۱۶۸  | ۱۴   | ۵۹      | ۵۹   | ۷۶۸۱۶۸   | ۱۵۹   | ۱۴۹  | ۷۶۸۱۶۸  | ۴۲   | ۲۳      | ۷۶۸۱۶۸   | ۴۲   | ۲۳    | ۷۶۸۱۶۸  | ۴۲   | ۲۳   |
| ۰/۸      | ۴   | ۷۸۱۵۴۴۴ ۱۶   | ۱۴۴  | ۷۸۱۵۴۴۴ ۱    | ۷       | ۰/۰  | ۷۸۱۵۴۴۴ | ۶۵۲      | ۷۷   | ۷۸۱۵۴۴۴ | ۱۳   | ۹       | ۹    | ۷۸۱۵۴۴۴  | ۲۰۲   | ۱۲۷  | ۷۸۱۵۴۴۴ | ۱۹   | ۱۱      | ۷۸۱۵۴۴۴  | ۱۹   | ۱۱    | ۷۸۱۵۴۴۴ | ۱۹   | ۱۱   |
|          | ۵   | ۷۸۱۵۴۴۴ ۱۴   | ۱۴۹  | ۷۸۱۵۴۴۴ ۲    | ۲۱      | ۰/۰  | ۷۸۱۵۴۴۴ | ۲۵       | ۸۷   | ۷۸۱۵۴۴۴ | ۲۲   | ۲۵      | ۲۵   | ۷۸۱۵۴۴۴  | ۱۶۶   | ۲۵   | ۷۸۱۵۴۴۴ | ۱۵   | ۱۱      | ۷۸۱۵۴۴۴  | ۱۵   | ۱۱    | ۷۸۱۵۴۴۴ | ۱۵   | ۱۱   |
|          | ۶   | ۷۸۱۵۴۴۴ ۱۱   | ۱۴۹  | ۷۸۱۵۴۴۴ ۹    | ۲۷      | ۲/۲  | ۷۸۱۵۴۴۴ | ۱۲۸      | ۵۴   | ۷۸۱۵۴۴۴ | ۲۲   | ۱۶      | ۱۶   | ۷۸۱۵۴۴۴  | ۸۲    | ۲۶   | ۷۸۱۵۴۴۴ | ۵۲   | ۲۰      | ۷۸۱۵۴۴۴  | ۵۲   | ۲۰    | ۷۸۱۵۴۴۴ | ۵۲   | ۲۰   |
|          | ۷   | ۷۸۱۵۴۴۴ ۱۱   | ۱۴۹  | ۷۸۱۵۴۴۴ ۲    | ۱۴      | ۰/۰  | ۷۸۱۵۴۴۴ | ۲۰۹      | ۱۵۵  | ۷۸۱۵۴۴۴ | ۱۷   | ۲۰      | ۲۰   | ۷۸۱۵۴۴۴  | ۲۷۹   | ۹۲   | ۷۸۱۵۴۴۴ | ۸۰   | ۴۳      | ۷۸۱۵۴۴۴  | ۸۰   | ۴۳    | ۷۸۱۵۴۴۴ | ۸۰   | ۴۳   |
|          | ۸   | ۷۸۱۵۴۴۴ ۱۱   | ۱۴۹  | ۷۸۱۵۴۴۴ ۷    | ۱۰۴     | ۱/۷  | ۷۸۱۵۴۴۴ | ۴۲۰      | ۱۵۵  | ۷۸۱۵۴۴۴ | ۲۴   | ۵۸      | ۵۸   | ۷۸۱۵۴۴۴  | ۲۶۶   | ۱۳۰  | ۷۸۱۵۴۴۴ | ۷۴   | ۱۴      | ۷۸۱۵۴۴۴  | ۷۴   | ۱۴    | ۷۸۱۵۴۴۴ | ۷۴   | ۱۴   |
| ۰/۱۰     | ۵   | ۷۸۱۵۴۴۴ ۹    | ۱۸۰  | ۷۸۱۵۴۴۴ ۲    | ۱۲      | ۱/۰  | ۷۸۱۵۴۴۴ | ۱۰۰۱     | ۱۸۱  | ۷۸۱۵۴۴۴ | ۲۴   | ۱۲      | ۱۲   | ۷۸۱۵۴۴۴  | ۲۶۶   | ۱۷۹  | ۷۸۱۵۴۴۴ | ۲۳   | ۲۴      | ۷۸۱۵۴۴۴  | ۲۳   | ۲۴    | ۷۸۱۵۴۴۴ | ۲۳   | ۲۴   |

جدول ۳. میانگین نتایج حاصل از نرم افزار گمز و روش ابتکاری برای مدل  $p_1$  و  $p_2$ 

| نوع مدل   | پارامتر پوشش | متوسط پوشش    |             |          | متوسط زمان    |             |          |
|-----------|--------------|---------------|-------------|----------|---------------|-------------|----------|
|           |              | نرم افزار گمز | روش ابتکاری | پوشش Gap | نرم افزار گمز | روش ابتکاری | زمان Gap |
| مدل $p_1$ | (۱)          | ۷۷۹۳۶۷۷       | ۷۷۶۲۰۷۴     | ۰ / ۴    | ۲۸ / ۶۸       | ۵           | ۸۲       |
|           | (۳)          | ۸۰۴۴۰۷۳       | ۸۰۰۵۸۸۶     | ۰ / ۵    | ۳۰۷ / ۰۶      | ۲۳ / ۸۷     | ۹۲       |
|           | (۴)          | ۸۱۹۲۶۴۳       | ۸۱۳۷۳۶۳     | ۰ / ۶    | ۲۱۱ / ۵       | ۳۱ / ۴۳     | ۸۵       |
| مدل $p_2$ | (۱)          | ۷۷۹۳۶۷۷       | ۷۷۶۲۰۷۴     | ۰ / ۴    | ۱۷۴ / ۰       | ۳۵ / ۰۰     | ۸۰       |
|           | (۳)          | ۸۰۴۴۰۷۳       | ۸۰۰۵۸۸۶     | ۰ / ۵    | ۱۴۴ / ۱۵      | ۲۵ / ۶۸     | ۸۲       |
|           | (۴)          | ۸۱۹۲۶۴۳       | ۸۱۳۷۳۶۳     | ۰ / ۶    | ۱۴۱ / ۱۵      | ۲۰ / ۶۲     | ۸۵       |

## جدول ۴. نتایج حاصل از الگوریتم ژنتیک با پارامتر پوشش دودویی (۱) و پوشش تدریجی (۴) برای داده‌های CAB

| $\alpha$ | $p$ | پارامتر پوشش (۱)   |            |            |                    |                    |          | پارامتر پوشش (۴)   |            |            |                    |                    |          |
|----------|-----|--------------------|------------|------------|--------------------|--------------------|----------|--------------------|------------|------------|--------------------|--------------------|----------|
|          |     | نرم افزار گمز      |            |            | الگوریتم ژنتیک     |                    |          | نرم افزار گمز      |            |            | الگوریتم ژنتیک     |                    |          |
|          |     | پوشش $p_1$ و $p_2$ | زمان $p_1$ | زمان $p_2$ | پوشش $p_1$ و $p_2$ | زمان $p_1$ و $p_2$ | Gap پوشش | پوشش $p_1$ و $p_2$ | زمان $p_1$ | زمان $p_2$ | پوشش $p_1$ و $p_2$ | زمان $p_1$ و $p_2$ | Gap پوشش |
| ۰ / ۲    | ۲   | ۷۹۱۳۴۰۰            | ۴۴         | ۱۷۲        | ۶۵۷۸۸۳۴            | ۲۱                 | ۱۷       | ۸۳۴۲۸۵۰            | ۵۳         | ۱۳۶        | ۶۹۳۱۰۰۱            | ۲۰                 | ۱۷       |
|          | ۳   | ۸۱۹۵۵۵۰            | ۶۱         | ۵۳۶        | ۶۶۱۶۹۴۲            | ۲۰                 | ۱۹       | ۸۴۱۱۴۶۹            | ۹۵         | ۳۵۱        | ۷۶۴۸۰۳۵            | ۲۰                 | ۹        |
|          | ۴   | ۸۱۷۰۱۷۲            | ۳۹         | ۱۹۵        | ۶۷۵۰۱۶۸            | ۱۹                 | ۱۷       | ۸۳۵۹۹۹۲            | ۲۰۲        | ۲۷۱        | ۷۷۴۸۹۷             | ۲۰                 | ۱۰       |
|          | ۵   | ۷۸۸۹۴۲۸            | ۵۶         | ۱۴۱        | ۶۵۳۱۲۷۴            | ۲۰                 | ۱۷       | ۸۲۴۱۸۶۵            | ۲۲۵        | ۹۳         | ۷۱۳۷۷۶۷            | ۲۰                 | ۱۳       |
| ۰ / ۴    | ۲   | ۸۰۲۸۶۲۴            | ۳۴         | ۱۵۴        | ۶۸۸۹۶۸۰            | ۲۰                 | ۱۴       | ۸۳۳۳۶۸۶            | ۵۷         | ۱۵۰        | ۷۶۷۲۶۹۱            | ۲۲                 | ۱۰       |
|          | ۳   | ۸۱۴۶۸۶۰            | ۳۲         | ۲۰۶        | ۶۷۹۰۹۹۶            | ۲۰                 | ۱۷       | ۸۳۱۱۴۰۸            | ۱۵۰        | ۲۲۹        | ۷۲۶۵۹۱۷            | ۲۲                 | ۱۳       |
|          | ۴   | ۸۰۶۱۱۶۲            | ۳۲         | ۱۹۹        | ۶۸۰۲۰۲۲            | ۱۹                 | ۱۶       | ۸۲۹۴۲۶۰            | ۹۸         | ۱۸۸        | ۷۳۶۲۳۴۸            | ۲۰                 | ۱۱       |
|          | ۵   | ۷۶۱۷۳۰۸            | ۳۱         | ۱۰۸        | ۶۹۲۳۰۳۲            | ۱۹                 | ۹        | ۸۱۳۱۱۹۵            | ۱۶۹        | ۷۰         | ۶۹۸۶۲۹۴            | ۲۰                 | ۱۴       |
| ۰ / ۶    | ۲   | ۷۶۸۷۱۶۸            | ۳۳         | ۱۰۴        | ۶۸۶۳۷۵۲            | ۱۹                 | ۱۱       | ۸۱۹۵۹۵۱            | ۱۰۱        | ۱۳۱        | ۷۴۲۵۳۲۲            | ۲۷                 | ۹        |
|          | ۳   | ۷۸۴۸۹۸۶            | ۲۵         | ۱۰۴        | ۶۸۷۸۳۳۶            | ۲۰                 | ۱۲       | ۸۱۷۶۱۶۱            | ۱۵۹        | ۱۴۹        | ۷۶۵۱۹۹۹            | ۲۵                 | ۶        |
|          | ۴   | ۷۸۱۵۴۶۴            | ۱۶         | ۱۴۴        | ۷۰۲۵۰۸۲            | ۱۹                 | ۱۰       | ۸۱۸۶۲۲۸            | ۲۰۲        | ۱۲۷        | ۷۶۰۲۵۴۱            | ۲۵                 | ۷        |
|          | ۵   | ۷۵۴۷۹۳۴            | ۱۴         | ۱۳۹        | ۶۸۴۲۸۰۲            | ۱۹                 | ۹        | ۸۱۴۱۰۹۷            | ۱۶۶        | ۲۵         | ۷۳۹۶۲۳۳            | ۲۴                 | ۹        |
| ۰ / ۸    | ۲   | ۷۶۹۷۴۴۰            | ۱۱         | ۲۹         | ۶۸۴۲۸۰۲            | ۲۰                 | ۹        | ۸۰۹۲۰۰۹            | ۸۲         | ۳۶         | ۷۵۹۹۶۸۲            | ۲۵                 | ۶        |
|          | ۳   | ۷۴۵۹۴۵۶            | ۱۱         | ۱۲۹        | ۷۰۹۸۴۱۶            | ۲۱                 | ۵        | ۸۰۱۰۲۹۰            | ۲۷۹        | ۹۲         | ۷۸۳۳۸۹۵            | ۲۸                 | ۷        |
|          | ۴   | ۷۴۵۵۶۲۰            | ۱۱         | ۲۴۶        | ۷۰۷۹۱۸۲            | ۲۱                 | ۵        | ۸۰۰۱۳۵۸            | ۷۴۶        | ۱۳۰        | ۷۷۶۳۴۸۸            | ۲۰                 | ۲        |
|          | ۵   | ۷۳۶۴۲۶۴            | ۹          | ۱۸۰        | ۷۲۶۲۹۴۶            | ۲۰                 | ۲        | ۷۸۶۶۴۶۴            | ۶۰۰        | ۷۹         | ۷۶۱۲۲۵۷            | ۲۱                 | ۳        |
| میانگین  |     | ۷۷۹۳۶۷۷            | ۲۸ / ۷     | ۱۷۴        | ۶۸۶۱۹۱۶            | ۱۹ / ۸             | ۱۲       | ۸۱۹۲۶۴۳            | ۲۱۲        | ۱۴۱        | ۷۴۴۷۷۷۱            | ۲۲                 | ۹        |

## ۶-۳-۲ نتایج الگوریتم ژنتیک بر روی داده‌های AP

بنا به جستجوهای صورت گرفته تنها مقاله‌ای که برای داده‌های AP، پارامتر پوشش را به کار برده است مقاله گیو و ونگ در سال ۲۰۰۹ [۲] است. در این مقاله پارامتر پوشش تنها برای  $\alpha = ۰ / ۰۶$  تعریف و به کار برده شده است. ما برای پوشش

دودویی و تدریجی و برای مقادیر متفاوت  $\alpha$ ، از این مقاله ایده گرفته‌ایم. برای این منظور پارامتر پوشش دودویی را برای داده‌های AP به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a_{ij}^{km} = \begin{cases} 1 & \text{if } c_{ijkm} \leq \beta_{ij} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (18)$$

که  $c_{ijkm}$  هزینه جابه‌جایی بین دو گره  $i$  و  $j$  از طریق هاب‌های  $k$  و  $m$  است و  $\beta_{ij}$  برای مقادیر مختلف  $\alpha$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\beta_{ij} = \begin{cases} c_{ij} & \alpha = 0.2 \\ 1/18 c_{ij} & \alpha = 0.4 \\ 1/27 c_{ij} & \alpha = 0.6 \\ 1/36 c_{ij} & \alpha = 0.8 \end{cases} \quad (19)$$

برای مساله با پوشش تدریجی پارامتر پوشش را مطابق با (۴) تعریف می‌کنیم. در این حالت  $l_{ij} = 0.75u_{ij}$  و مقادیر  $u_{ij}$  وابسته به مقدار  $\alpha$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$u_{ij} = \begin{cases} 1/33 c_{ij} & \alpha = 0.2 \\ 1/46 c_{ij} & \alpha = 0.4 \\ 1/60 c_{ij} & \alpha = 0.6 \\ 1/73 c_{ij} & \alpha = 0.8 \end{cases} \quad (20)$$

جدول‌های ۵ و ۶ نتایج حاصل از به‌کارگیری الگوریتم ژنتیک برای داده‌های ۴۰ و ۵۰ نقطه‌ای AP با پوشش دودویی و تدریجی و جدول ۷ متوسط پوشش و زمان اجرای الگوریتم ژنتیک را نشان می‌دهد. تعداد تکرارهای الگوریتم ژنتیک برای پوشش دودویی را ۵۰ و برای پوشش تدریجی ۱۰۰ در نظر گرفته‌ایم. از مقایسه نتایج به‌دست آمده از الگوریتم ژنتیک و نرم افزار گمز برای داده‌های AP نتایج زیر حاصل می‌شود:

(۱) در حل مدل  $p_1$  با پوشش دودویی به کمک نرم افزار گمز،  $gap$  پوشش مثبت می‌باشد. به این معنی که نرم افزار گمز توانسته جواب شدنی با مقدار تابع هدف بهتری را پیدا کند، البته حل این مدل با گمز به نسبت حل آن با الگوریتم ژنتیک دارای زمان اجرای بسیار بالاتری می‌باشد.

(۲) در حل مدل  $p_1$  با پوشش تدریجی و به کمک نرم افزار گمز،  $gap$  پوشش منفی می‌باشد به این معنی که الگوریتم ژنتیک در مقایسه با نرم افزار گمز جواب بهتری به ما داده است. توجه دارید که این شکاف بسیار زیاد و مشابه مدل با پوشش دودویی با تفاوت زمانی بسیار چشمگیری می‌باشد. به عبارت دیگر الگوریتم ژنتیک در زمان اجرای بسیار کم‌تر نسبت به نرم افزار گمز، جواب بسیار مناسب‌تری به‌دست آورده است.

(۳) در حل مدل  $p_7$ ، نرم افزار گمز تنها قادر بوده نمونه ۴۰ نقطه‌ای را حل کند. در این حالت نیز مشابه مدل  $p_7$  با پوشش دودویی  $gap$  پوشش مثبت و برای مساله با پوشش تدریجی  $gap$  پوشش منفی می‌باشد. در حالتی که نرم افزار گمز قادر به حل مدل نشده است، ژنتیک در زمان قابل قبولی، جواب‌های خوبی را پیدا کرده است.

(۴) در مقایسه دو مدل  $p_1$  و  $p_7$  با پوشش دودویی و با نرم افزار گمز (در مواردی که جواب حاصل شده است)، مدل  $p_1$  پوشش بهتری نسبت به مدل  $p_7$  داشته است؛ اما برای مساله با پوشش تدریجی، مدل  $p_7$  نتایج بهتری نسبت به مدل  $p_1$  به‌دست آورده است.

بنابراین در مجموع می توان نتیجه گرفت که الگوریتم ژنتیک پیشنهادی در مقایسه با نرم افزار گمز برای هر دو مدل (خصوصا برای مساله با پوشش تدریجی و ابعاد بزرگ) توانسته جواب های بهتری را به دست می آورد.

**جدول ۵.** نتایج حاصل از به کارگیری الگوریتم ژنتیک برای داده های ۴۰ نقطه ای AP

| $\alpha$ | $p$ | پارامتر پوشش دودویی (۱۸) |       |       |       |       |       |          |       |  | پارامتر پوشش تدریجی (۴) و کران (۲۰) |       |       |       |       |       |          |       |  |
|----------|-----|--------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|-------|--|-------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|-------|--|
|          |     | پوشش                     |       |       | زمان  |       |       | Gap پوشش |       |  | پوشش                                |       |       | زمان  |       |       | Gap پوشش |       |  |
|          |     | $p_1$                    | $p_2$ | ژنتیک | $p_1$ | $p_2$ | ژنتیک | $p_1$    | $p_2$ |  | $p_1$                               | $p_2$ | ژنتیک | $p_1$ | $p_2$ | ژنتیک | $p_1$    | $p_2$ |  |
| ۰/۲      | ۳   | ۲۱۷                      | ۲۲۰۴  | ۱۹۰۵  | ۱۰۰۴  | ۳۵۴   | ۳۴    | ۱۲       | ۱۴    |  | ۶۰۱                                 | ۲۶۵۳  | ۲۲۴۰  | ۱۰۰۷  | ۴۸۶   | ۳۴    | -۲۷۲     | ۱۶    |  |
|          | ۴   | ۲۵۲۴                     | ۲۵۳۳  | ۱۹۹۹  | ۱۰۰۲  | ۴۳۱   | ۳۴    | ۲۱       | ۲۱    |  | ۱۷۹                                 | ۲۸۷۷  | ۲۲۹۵  | ۱۰۰۴  | ۶۷۲   | ۳۴    | -۱۱۸۰    | ۲۰    |  |
|          | ۵   | ۲۶۷۸                     | ۲۷۲۲  | ۲۱۲۱  | ۱۰۰۳  | ۵۶۸   | ۳۴    | ۲۱       | ۲۲    |  | ۳۸۸                                 | ۳۰۰۶  | ۲۳۲۴  | ۱۰۰۵  | ۸۹۹   | ۴۳    | -۵۰۰     | ۲۳    |  |
| ۰/۴      | ۳   | ۲۳۵                      | ۲۳۵۰  | ۲۰۲۲  | ۶۸۹   | ۴۰۳   | ۳۴    | ۱۴       | ۱۴    |  | ۸۳                                  | ۲۷۱۱  | ۲۳۵۲  | ۱۰۰۶  | ۳۰۸   | ۴۱    | -۲۷۰۰    | ۱۳    |  |
|          | ۴   | ۲۵۶۰                     | ۲۵۶۰  | ۲۳۰۵  | ۱۰۰۲  | ۷۵۵   | ۳۴    | ۱۰       | ۱۰    |  | ۷۱۴                                 | ۲۹۰۴  | ۲۴۴۹  | ۱۰۰۳  | ۴۰۹   | ۴۱    | -۲۴۰     | ۱۶    |  |
|          | ۵   | ۲۶۶۳                     | ۲۷۴۱  | ۲۲۵۲  | ۱۰۰۲  | ۸۹۹   | ۳۴    | ۱۵       | ۱۸    |  | ۱۲۲                                 | ۳۰۳۳  | ۲۵۴۱  | ۱۰۰۴  | ۸۵۸   | ۴۱    | -۱۹۸۳    | ۱۶    |  |
| ۰/۶      | ۳   | ۲۳۸۱                     | ۲۳۸۱  | ۲۲۶۵  | ۴۹۳   | ۱۰۰۳۱ | ۳۴    | ۵        | ۵     |  | ۱۰۲                                 | ۲۶۹۶  | ۲۴۶۸  | ۱۰۰۳  | ۱۰۲۵  | ۴۱    | -۳۳۲۰    | ۸     |  |
|          | ۴   | ۲۵۸۱                     | ۲۴۶۷  | ۲۴۰۶  | ۷۵۹   | ۱۰۰۳۷ | ۳۴    | ۷        | ۳     |  | ۷۳۴                                 | ۲۹۱۷  | ۲۴۴۹  | ۱۰۰۵  | ۱۰۱۳  | ۴۱    | -۲۳۳     | ۱۶    |  |
|          | ۵   | ۲۷۴۸                     | ۲۷۴۸  | ۲۵۲۸  | ۹۲۵   | ۱۰۰۳۲ | ۳۴    | ۸        | ۸     |  | ۲۷۰۴                                | ۳۰۵۳  | ۲۶۳۲  | ۱۰۰۵  | ۱۰۲۵  | ۴۱    | ۲        | ۱۴    |  |
| ۰/۸      | ۳   | ۲۴۲۰                     | ۲۴۲۰  | ۲۳۶۰  | ۲۷۰   | ۹۵۰   | ۳۴    | ۳        | ۳     |  | ۲۵۱۱                                | ۲۷۷۵  | ۲۴۷۶  | ۱۰۰۳  | ۶۳۵   | ۳۴    | ۱        | ۱۱    |  |
|          | ۴   | ۲۵۸۱                     | ۲۵۵۵  | ۲۳۷۲  | ۴۳۷   | ۱۰۰۲۶ | ۳۴    | ۸        | ۷     |  | ۲۶۶۱                                | ۲۹۱۶  | ۲۷۲۲  | ۱۰۰۴  | ۶۹۰   | ۳۴    | -۲       | ۷     |  |
|          | ۵   | ۲۷۳۳                     | ۲۵۶۰  | ۲۴۷۷  | ۴۵۲   | ۱۰۰۲۸ | ۳۴    | ۹        | ۳     |  | ۲۶۸۱                                | ۳۰۵۱  | ۲۶۰۷  | ۱۰۰۵  | ۳۰۵   | ۳۴    | -۱۵      | ۳     |  |

**جدول ۶.** نتایج حاصل از به کارگیری الگوریتم ژنتیک برای داده های ۵۰ نقطه ای AP

| $\alpha$ | $p$ | پارامتر پوشش دودویی (۱۸) |       |       |       |       |       |          |       |  | پارامتر پوشش تدریجی (۴) و کران (۲۰) |       |       |       |       |       |          |       |  |
|----------|-----|--------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|-------|--|-------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|-------|--|
|          |     | پوشش                     |       |       | زمان  |       |       | gap پوشش |       |  | پوشش                                |       |       | زمان  |       |       | gap پوشش |       |  |
|          |     | $p_1$                    | $p_2$ | ژنتیک | $p_1$ | $p_2$ | ژنتیک | $p_1$    | $p_2$ |  | $p_1$                               | $p_2$ | ژنتیک | $p_1$ | $p_2$ | ژنتیک | $p_1$    | $p_2$ |  |
| ۰/۲      | ۳   | ۷۴                       | -     | ۱۹۱۲  | ۱۰۰۶  | -     | ۵۲    | -۲۴۸۳    | -     |  | ۵۸۷                                 | -     | ۲۱۰۵  | ۱۰۰۷  | -     | ۵۲    | -۲۵۸     | -     |  |
|          | ۴   | ۲۳۳۸                     | -     | ۱۸۳۹  | ۱۰۰۴  | -     | ۵۲    | ۲۱       | -     |  | ۸۶                                  | -     | ۲۲۱۹  | ۱۰۰۸  | -     | ۵۲    | -۲۴۸۰    | -     |  |
|          | ۵   | ۲۴۹۰                     | -     | ۱۹۵۴  | ۱۰۰۴  | -     | ۵۲    | ۲۲       | -     |  | ۹۰                                  | -     | ۲۳۱۸  | ۱۰۰۱  | -     | ۵۲    | -۲۴۸۰    | -     |  |
| ۰/۴      | ۳   | ۲۱۰۴                     | -     | ۲۰۸۴  | ۱۰۰۵  | -     | ۵۲    | ۰/۹      | -     |  | ۲۱۰۴                                | -     | ۲۳۲۶  | ۱۰۰۷  | -     | ۶۳    | -۱۱      | -     |  |
|          | ۴   | ۲۳۷۰                     | -     | ۲۱۳۳  | ۱۰۰۳  | -     | ۵۲    | ۱۰       | -     |  | ۱۰۹                                 | -     | ۲۲۶۷  | ۱۰۰۸  | -     | ۶۳    | -۱۹۸۰    | -     |  |
|          | ۵   | ۲۶۰۸                     | -     | ۲۱۲۷  | ۱۰۰۴  | -     | ۵۲    | ۱۸       | -     |  | ۱۱۳                                 | -     | ۲۲۷۷  | ۱۰۰۱  | -     | ۶۳    | -۱۹۱۰    | -     |  |
| ۰/۶      | ۳   | ۲۳۴۱                     | -     | ۲۱۵۸  | ۱۰۰۴  | -     | ۵۲    | ۸        | -     |  | ۱۰۱                                 | -     | ۲۳۱۸  | ۱۰۰۵  | -     | ۶۴    | -۲۲۶۰    | -     |  |
|          | ۴   | ۲۵۸۱                     | -     | ۲۳۴۵  | ۱۰۰۴  | -     | ۵۲    | ۹        | -     |  | ۵۹۰                                 | -     | ۲۴۸۰  | ۱۰۰۶  | -     | ۶۱    | -۳۲۰     | -     |  |
|          | ۵   | ۲۷۰۰                     | -     | ۲۲۰۵  | ۱۰۰۴  | -     | ۵۲    | ۱۸       | -     |  | ۸۷                                  | -     | ۲۴۵۷  | ۱۰۱۱  | -     | ۵۳    | -۲۷۲۴    | -     |  |
| ۰/۸      | ۳   | ۲۳۶۵                     | -     | ۲۱۷۲  | ۱۰۰۵  | -     | ۵۲    | ۸        | -     |  | ۲۰۹                                 | -     | ۲۴۶۶  | ۱۰۰۴  | -     | ۵۲    | -۱۰۸۰    | -     |  |
|          | ۴   | ۲۴۴۰                     | -     | ۲۴۲۹  | ۱۰۰۴  | -     | ۵۲    | ۰/۴      | -     |  | ۴۱۳۶                                | -     | ۲۵۷۳  | ۱۰۰۱  | -     | ۵۲    | ۳۸       | -     |  |
|          | ۵   | ۲۶۵۹                     | -     | ۲۴۳۷  | ۱۰۰۴  | -     | ۵۲    | ۸        | -     |  | ۲۱۹                                 | -     | ۲۵۲۵  | ۱۰۰۱  | -     | ۵۲    | -۱۰۵۰    | -     |  |

جدول ۷. میانگین پوشش و زمان محاسبات الگوریتم ژنتیک و نرم افزار گمز برای مدل  $p_1$  و  $p_2$  برای داده‌های AP

|             |              | میانگین پوشش        |                     |                | Gap پوشش  |           | میانگین زمان اجرا   |                     |                |
|-------------|--------------|---------------------|---------------------|----------------|-----------|-----------|---------------------|---------------------|----------------|
| داده‌های AP | پارامتر پوشش | حل مدل $p_1$ با گمز | حل مدل $p_2$ با گمز | الگوریتم ژنتیک | مدل $p_1$ | مدل $p_2$ | حل مدل $p_1$ با گمز | حل مدل $p_2$ با گمز | الگوریتم ژنتیک |
| ۴۰ نقطه‌ای  | (۱۸)         | ۲۵۳۳                | ۲۵۲۰                | ۲۲۵۱           | ۱۱        | ۱۱        | ۷۵۳ / ۱             | ۷۹۲ / ۸             | ۳۴             |
|             | (۲۰) و (۴)   | ۱۲۳                 | ۲۸۸۲                | ۲۴۶۱           | -۱۹۰۲     | ۱۵        | ۱۰۰۵                | ۶۹۳ / ۷             | ۳۷ / ۵         |
| ۵۰ نقطه‌ای  | (۱۸)         | ۲۲۵۵                | -                   | ۲۱۴۹           | ۵         | -         | ۱۰۰۴                | -                   | ۵۲             |
|             | (۲۰) و (۴)   | ۷۰۲                 | -                   | ۲۳۶۶           | -۲۳۷      | -         | ۱۰۰۸                | -                   | ۵۶ / ۵         |

## ۷ نتیجه‌گیری و پیشنهادهای آینده

در این مقاله یک مدل جدید برای مساله ماکزیمم پوشش  $p$ -هاب تک تخصیصی با پوشش تدریجی ارائه کردیم. سپس تابع پوشش تدریجی را توسعه و عملکرد مدل جدید با تابع پوشش تدریجی جدید را با مدل موجود در ادبیات موضوع مقایسه کردیم. روش ساده‌سازی لاگرانژین را برای یافتن کران مناسب برای مدل پیشنهادی و سپس یک روش ابتکاری و روش فراابتکاری ژنتیک را برای حل نمونه‌های عددی موجود به کار بردیم.

نتایج محاسبات نشان داد که در حل مدل جدید ارائه شده در این مقاله و مقایسه آن با مدل موجود در ادبیات، مراکز هاب با تخصیص‌های یکسان و همین‌طور پوشش یکسانی ایجاد می‌کند. در هر دو مدل پوشش تدریجی، پوشش بیش‌تری نسبت به پوشش دودویی و پارامتر پوشش جدید پوشش بیش‌تری در مقایسه با پارامتر پوشش تدریجی موجود را ایجاد می‌کند. هر چند مدل ماکزیمم پوشش  $p$ -هاب برای پوشش دودویی ارائه شده در [۳] زمان محاسبات کم‌تری نسبت به مدل ارائه شده در این مقاله دارد؛ اما در مورد مساله با پوشش تدریجی مدل جدید کارایی بالاتری دارد. نتایج روش لاگرانژین نشان داد که در به‌کارگیری این روش برای مساله با پوشش تدریجی کران بالای مناسب‌تری نسبت به پوشش دودویی به‌دست می‌آید. روش ابتکاری در اکثر موارد جواب بهینه و یا جواب نزدیک به جواب بهینه را به‌دست می‌آورد. علاوه بر آن روش ابتکاری زمان محاسبات را بسیار کاهش می‌دهد و الگوریتم ژنتیک برای داده‌هایی با ابعاد بالا، با زمان محاسبات کم‌تری، پوشش بیش‌تری ایجاد می‌کند.

## مراجع

[۲۷] مومنی، منصور، (۱۳۹۲). مباحث نوین تحقیق در عملیات. چاپ گنج شایگان. چاپ پنجم.

- [1] Campbell, J.F., (1994). Integer programming formulations of discrete hub location problems. European Journal of Operational Research, 72(2), 387-405.
- [2] QU, B., Weng, K., (2009). Path relinking approach for multiple allocation hub maximal covering problem. Computers and Mathematics with Application, 57, 1890-1894.
- [3] Peker, M., Kara, B.Y., (2015). The P-Hub maximal covering problem and extensions for gradual decay functions. Omega, 54, 158-172.
- [4] Okelly, M.E., (1986). The location of interacting hub facilities. Transportation Science, 20(2), 92-106.
- [5] Kara, B.Y., Tansel, B.C., (2003). The single-assignment hub covering problem: Models and linearizations. Journal of the Operational Research Society, 54(1), 59-64.
- [6] Ernst, A., Jiang, H., Krishnamoorthy, M., Baatar, D., (2005). Reformulations and computational results for uncapacitated single and multiple allocation hub covering problem. Unpublished Report. Cambridge Judge Business School Working Papers, Australia.
- [7] Hamacher, H.W., Meyer, T., (2006). Hub cover and hub center problems, Working paper, Germany.
- [8] Tan, P.Z., Kara, B. Y., (2007). A hub covering model for cargo delivery systems. Networks, 49(1), 29-36.

- [9] Weng, K., Weng, Y., (2008). Evolutionary algorithms for multiple allocation hub set covering problem. International conference on networking. sensing and control sanya, 28-39.
- [10] Calik, H., Alumur, S.A., Kara, B.Y., Karasan, O.E., (2009). A tabu-search based heuristic for the covering problem over incomplete hub network. Computers & Operations Research, 36(12), 3088-3096.
- [11] Hwang, Y. H., Lee, H.Y., (2012). Uncapacitated single allocation p-hub maximal covering problem. Computers & Industrial Engineering, 63, 382-389.
- [12] Karimi. H., Bashiri, M., (2011). Hub covering location problems with different coverage types. Scientia Iranica. 18(6), 1571-1578.
- [13] Church, R. L., Roberts, K. L., (1983). Generalized coverage models and public facility location. In Papers of the Regional Science Association, 117-135.
- [14] Berman, O., Krass, D., (2002). The generalized maximal covering location problem. Computers & Operations Research, 29(6), 563-581.
- [15] Berman, O., Krass, D., Drezner, Z., (2003). The gradual covering decay location problem on a network, European Journal of Operational Research, 151, 474-480.
- [16] Berman. O., Kalcsics, J., Krass, D., Nickel, S., (2009). The Ordered Gradual Covering Location Problem on a Network. Discrete Applied Mathematics, 157, 3689-3707.
- [17] Berman, O., Wang, J., (2011). The minmax regret gradual covering location problem on a network with incomplete information of demand weights. European Journal of Operational Research, 208(3), 233-238.
- [18] Silva, M.R., Cunha, C.B., (2017). A tabu search heuristic for the uncapacitated single allocation p-hub maximal covering problem. European Journal of Operational Research, 262(3), 954-965.
- [19] Jankovi, O., Stanimirovi, Z., (2017). A general variable neighborhood search for solving the uncapacitated r-allocation p-hub maximal covering problem. Electronic Notes in Discrete Mathematics, 58, 23-30.
- [20] Jankovi, O., Miškovi, S., Stanimirovi, Z., Todosijevi, R., (2017). Novel formulations and VNS-based heuristics for single and multiple allocation p-hub maximal covering problems. Annals of Operations Research. DOI 10.1007/s10479-017-2508-1.
- [21] Aykin, T., (1994). Lagrangian relaxation based approaches to capacitated hub-and-spoke network design problem. European Journal of Operational Research, 79(3), 501-523.
- [22] Smith, K., Krishnamoorthy, M., Palaniswami, M., (1996). Neural versus traditional approaches to the location of interacting hub facilities. Location Science, 4 (3), 155-171.
- [23] Lee, Y., Lim, B., Park, J., (1996). A hub location problem in designing digital data service networks: Lagrangian relaxation approach. Location Science, 4, 183-194.
- [24] Pirkul, H., Schilling, D. A., (1998). An efficient procedure for designing single allocation hub and spoke systems. Management Science, 44(12), 235-242.
- [25] Contreras, I., Diaz, J.A., Fernandez, E., (2009). Lagrangian relaxation for the capacitated hub location problem with single assignment. OR Spectrum, 31(3), 483-505.
- [26] Contreras, I., Diaz, J.A., Fernandez, E., (2011). Branch and price for large-scale capacitated hub location problems with single assignment. INFORMS Journal on Computing, 23(1), 41-55.
- [28] Ernst, A.T., Krishnamoorthy, M., (1996). Efficient algorithms for the uncapacitated single allocation p-hub median problem. Location Science, 4(3), 139-154.