مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال هجدهم، شماره سوم (پیاپی ۷۰)، پاییز ۰۰، ص ص ۱۶۰-۱۳۹
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

توسعه‌ای بر مدل راسل اصلاح‌شده به واحدهای تصمیم‌گیری تحت ساختار دومرحله‌ای عمومی با تأثیر داده‌های واسطه‌ای در مقدار کارایی

محمدامین کریمی‌ثانی[۱]، وحید برادران[۲*]، امین مصطفایی[۳]

۱- کارشناسی ارشد، گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، واحد تهران شمال، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

۲- دانشیار، گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، واحد تهران شمال، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

۳- دانشیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، واحد تهران شمال، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

رسید مقاله: ۹ بهمن ۱۳۹۸

پذیرش مقاله: ۲۸ آبان ۱۳۹۹

چکیده

مدل‌های سنتی تحلیل پوششی داده‌ها مانند مدل راسل اصلاح‌شده، واحدهای تصمیم‌گیری را به‌صورت جعبه سیاه درنظر گرفته و برای اندازه‌گیری کارایی واحدهای تصمیم‌گیری متجانس با ساختار شبکه‌ای فقط از ورودی‌های آغازین و خروجی‌های پایانی استفاده می‌کنند و به عملیات داخلی آن‌ها توجهی نمی‌کنند. لذا منشا ناکارایی درون ساختارها به‌دقت مشخص نمی‌شود. مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای برای رفع این اشکال توسعه یافته‌اند. در مدل راسل اصلاح‌شده به داده‌های واسطه‌ای برای ارزیابی کارایی کلی و کارایی هر مرحله توجه نشده است. در این مقاله، مدلی بر پایه مدل راسل اصلاح‌شده برای ارزیابی عملکرد ساختارهای شبکه‌ای دومرحله‌ای عمومی ارایه شده که در آن متغیرهایی برای تعیین داده‌های واسطه‌ای آرمانی (بهین) به مدل اضافه شده است. علاوه برقابلیت ارزیابی کارایی کلی و کارایی هر مرحله، مدل پیشنهادی قادر است راه‌حل‌هایی برای بهبود کارایی هر مرحله با تغییر داده‌های واسطه‌ای بهین ارایه کند. اعتبارسنجی مدل پیشنهادی با اثبات سه قضیه ریاضی نشان داده شده و از آن برای تحلیل کارایی گروه‌های آموزشی در یک دانشگاه استفاده شده است.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای، داده‌های واسطه‌ای، ساختار دومرحله‌ای، کارایی کلی، کارایی هر مرحله.

۱ مقدمه

کارایی، معیار عملکرد یک سیستم با توجه به میزان منابع ورودی است؛ به‌عبارت دیگر، کارایی میزان مصرف منابع برای تولید مقدار معینی محصول می‌باشد [۱]. بحث ارزیابی عملکرد و سنجش میزان کارایی یک سیستم

* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: v_baradaran@iau-tnb.ac.ir

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.3.3.0]

[DOI: 10.52547/jamlu.18.3.139]

می‌تواند اهمیت خاصی در تصمیم‌گیری‌های مدیریتی جهت حفظ و یا اصلاح وضعیت فعلی آن مجموعه داشته باشد. یکی از روش‌های اندازه‌گیری کارایی، روش تحلیل پوششی داده‌ها است که در آن با توجه به مقدار شاخص‌های ورودی و خروجی یک واحد تصمیم‌گیری[1] و میزان اهمیت آن‌ها، کارایی محاسبه می‌شود. تحلیل پوششی داده‌ها (*DEA*) به‌عنوان یک چارچوب تئوری جهت تجزیه و تحلیل کارایی مطرح بوده و کاربرد و عملکرد آن در موارد متعددی بررسی شده است [۲]. در این روش، یک سازمان به صورت یک جعبه سیاه فرض می‌شود که ورودی‌های دریافتی را به خروجی تبدیل می‌کند و فرآیندهای داخل سازمان و روابط میان آنها را نادیده می‌گیرند. این رویکرد بسیاری از اطلاعات ارزشمند در مورد واحدهای تصمیم‌گیری را از دست می‌دهد و تحلیل کارایی را به ورودی‌های اولیه و خروجی‌های پایانی محدود می‌کند؛ اما سازمان‌هایی وجود دارند که دارای ساختارهای شبکه‌ای هستند و شامل چند مرحله داخلی هستند که از طریق داده‌های واسطه‌ای (لینک‌ها)[2] با یکدیگر در ارتباط هستند و مراحل داخلی نقش تاثیرگذاری در میزان کارایی آن سازمان‌ها ایفا می‌کنند. لزوم ارایه روش‌هایی جهت محاسبه کارایی با درنظرگرفتن مرحله‌های داخلی، موجب پیدایش روش تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای شد که در آن‌ها علاوه بر ورودی‌های اولیه و خروجی‌های نهایی، ورودی‌ها و خروجی‌های مرحله‌های داخلی نیز در محاسبه کارایی لحاظ می‌شوند.

بنابراین استفاده از تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای امکان محاسبه کارایی کل سازمان و مرحله‌های داخلی آن را فراهم می‌کند. این روش مشخص می‌کند کدام یک از مرحله‌های سازمان علت ناکارایی آن است و راهنمایی برای رفع مشکل در سازمان‌های ناکارا است. درحالی‌که این قابلیت در تحلیل پوششی داده‌های مرسوم وجود ندارد.

در نظر گرفتن عملیات داخلی یک فرآیند در ارزیابی عملکرد با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها به عنوان تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای(*NDEA*) شناخته می‌شود [۳]. یکی از مسایل مهم در تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای تعیین داده‌های واسطه‌ای آرمانی (بهین) است. محققین مختلفی به این موضوع پرداخته‌اند و مدل‌های مختلفی پیشنهاد داده‌اند ولی هرکدام یک یا حداکثر دو موقعیت را در نظر گرفته‌اند بدون آنکه توضیح دهند که در چه موقعیت‌هایی از مدل پیشنهادی استفاده می‌کنند و چرا. این مقاله در این زمینه روشنگری می‌کند. برای این منظور فاکتور انقباض یا انبساط، با توجه به موقعیت خاص مسأله، در برخی از عوامل ورودی، خروجی و یا واسطه‌ای لحاظ می‌شود. مدل پیشنهادی، ناکارایی در داده‌های واسطه‌ای را در ناکارایی کل و مرحله‌ای اعمال می‌کند.

در این مقاله، مدل راسل اصلاح شده[3] که در آن داده‌های واسطه‌ای برای ارزیابی کارایی کل وکارایی هر مرحله درنظر گرفته نشده‌اند، مورد بازبینی قرار گرفته است. متغیرهایی به ازای داده‌های واسطه‌ای به مدل راسل اصلاح شده اضافه شده تا اثر تغییرات مقادیر واسطه‌ای بر کارایی کل و بخش‌ها به طور دقیق‌تر بررسی شود. به این ترتیب هدف این مقاله، توسعه مدلی است تا در ساختارهای شبکه‌ای علاوه بر ارزیابی کارایی کلی و کارایی

[1] Decision Making Unit
[2] Intermediate data (Links)
[3] Modified Russell Model

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.3.3.0]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.3.139]

هر مرحله در قالب یک مدل ریاضی یکتا، قابلیت ارزیابی اثرات متقابل کارایی هر مرحله بر یکدیگر و تاثیر تغییرات داده‌های واسطه‌ای بر کارایی‌ها را داشته باشد. بدین منظور متغیرهایی به ازای داده‌های واسطه‌ای در تابع هدف و محدودیت‌های مدل اضافه شده تا نقش داده‌های واسطه‌ای در مدل لحاظ و داده‌های واسطه‌ای بهین تعیین شوند. مدل پیشنهادی را می‌توان به سادگی به موقعیت‌های لینک ثابت، لینک آزاد، رویکرد همکارانه و غیرهمکارانه که در ادبیات موضوع به چشم می‌خورد گسترش داد. اعتبارسنجی مدل پیشنهادی با اثبات سه قضیه‌ی ریاضی موردبررسی قرار خواهد گرفت.

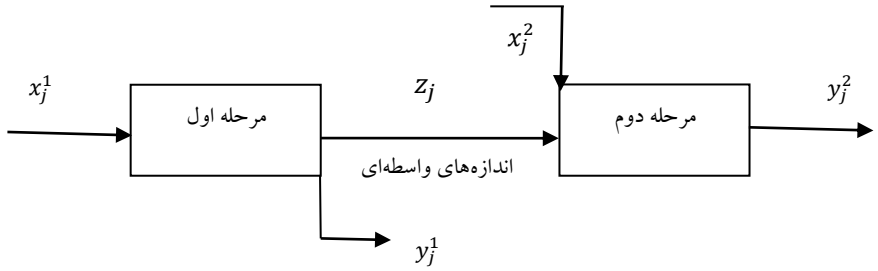
۲ ادبیات و چارچوب نظری

برای محاسبه کارایی سازمان‌ها در روش تحلیل پوششی داده‌های کلاسیک، از فرایندهای داخلی آن‌ها چشم‌پوشی می‌شود و محاسبه کارایی تنها وابسته به ورودی‌ها و خروجی‌های سازمان‌ها است. هرچند این روش کارایی سازمان‌ها را اندازه می‌گیرد، ولی اطلاعاتی در مورد کارایی زیرفرایندهای سازمان و راهکارهای بهبود آنها پیشنهاد نمی‌کند [۴]. حدود دو دهه است که تاثیر ساختار داخلی واحدهای تصمیم‌گیری در عملکرد و کارایی آن‌ها موردتوجه محققان قرار گرفته و موضوع مطالعات آن‌ها بوده است؛ این دسته از مطالعات به تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای معروف شده است [۵].

مطالعات در زمینه تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای به دسته‌های مختلفی بر اساس مدل‌های توسعه‌یافته و ساختار سیستم شبکه‌ای مساله مورد مطالعه، دسته‌بندی می‌شوند. برای مثال سیفورد و زو [۶]، زو [۷]، سکستون و لویس [۸]، تسولاس [۹] و ادلر و همکاران [۱۰] از رویکرد تحلیل مستقل برای مدل‌سازی مساله تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای استفاده کرده‌اند. یکی از ایرادات این روش‌ها، در نظر نگرفتن نقش دوگانه داده‌های واسطه‌ای و ارتباط بین دو مرحله در ساختارهای دومرحله‌ای است. به عنوان مثال اگر در یک DMU مرحله اول کارا و مرحله دوم ناکارا باشد، در این صورت با توجه به رابطه کلی کارایی (نسبت خروجی‌ها به ورودی‌ها) با کاهش مقدار ورودی‌های مرحله‌ی دوم (داده‌های واسطه‌ای) برای بهبود کارایی آن، کارایی مرحله‌ی اول بهم می‌خورد و ناکارا می‌شود. زیرا داده‌های واسطه‌ای، خروجی‌های مرحله‌ی اول هستند. دسته دوم به مدل‌های رابطه‌ای از نوع تجزیه کارایی مربوط می‌شوند. از مزیت‌های این روش می‌توان به محاسبه کارایی مرحله‌ها براساس کارایی کلی و از محدودیت‌های آن می‌توان به در نظر نگرفتن داده‌های واسطه‌ای در محاسبه کارایی و نامناسب‌بودن برای ساختارهای دومرحله‌ای عمومی اشاره کرد. توضیحات بیشتر در مورد این دسته از روش‌ها در مقالات کائو و هوانگ [۱۱، ۱۲]، کائو [۱۳، ۱۴] و چن و همکاران [۱۵] اشاره شده است. دسته سوم، شامل روش‌های تجمیع کارایی است که در آن کارایی کلی بر اساس کارایی بخش‌ها محاسبه می‌شود. از محدودیت‌های این روش‌ها که نمونه‌های آنها را می‌توان در پژوهش‌های چن و زو [۱۶]، یو و لین [۱۷]، چن و همکاران [۱۸]، تون و تسوتسوی [۱۹،۲۰] و لیو و لو [۲۱] مشاهده کرد، غیرخطی‌شدن فرم مضربی در آنها است. دسته‌ی آخر مانند پژوهش‌های چن و همکاران [۲۲]، لیانگ و همکاران [۲۳]، زا و لیانگ [۲۴]، دو و همکاران [۲۵]، و زوو و همکاران [۲۶] به روش نظریه بازی‌ها اختصاص دارد. در یک دسته‌بندی بر اساس ساختار شبکه، کائو [۲۷] مدل‌های شبکه‌ای را به

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.3.3.0]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.3.139]

هفت گروه مختلف تقسیم‌بندی کرد که عبارتند از ساختارهای دومرحله‌ای پایه، دومرحله‌ای عمومی، سری، موازی، ترکیب سری-موازی، سلسله مراتبی و پویا. در این دسته‌بندی به‌دلیل این‌که مطالعات زیادی در حوزه‌ی تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای مبتنی بر ساختارهای دومرحله‌ای که حالت خاصی از ساختارهای سری هستند، ارایه شده، این ساختارها به‌طور جداگانه در نظر گرفته شده‌اند. تفاوت بین ساختارهای دومرحله‌ای پایه و دومرحله‌ای عمومی در این است که در ساختار دومرحله‌ای پایه به جز ورودی‌ها و خروجی‌های اصلی شبکه، هیچ ورودی یا خروجی دیگری وجود ندارد اما در ساختار دومرحله‌ای عمومی علاوه بر ورودی‌ها وخروجی‌های اصلی، ممکن است خروجی‌های دیگری در مرحله اول و یا ورودی‌هایی از بیرون به مرحله دوم نیز وجود داشته باشد. ساختار شبکه‌ای دومرحله‌ای عمومی که در این مقاله در نظر گرفته شده در شکل۱ نشان داده شده است.



شکل۱. نمایش ساختار شبکه‌ای دومرحله‌ای عمومی

مرحله‌های ساختار شکل۱ از طریق داده‌های واسطه‌ای با یکدیگر مرتبط هستند. بهبود در مقدار کارایی یک مرحله، ممکن است منجر به بدترشدن کارایی مرحله دیگر شود. این مفهوم را می‌توان به صورت ارتباط متقابل بین افزایش و کاهش کارایی در بین مرحله‌های مرتبط با هم مطرح کرد. برای مروری نظام‌مند از مطالعات در زمینه تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای به مقالات کائو [۲۹،۲۸] مراجعه شود.

مدل‌های حل مختلفی برای ساختارهای دومرحله‌ای پیشنهاد شده است. کائو و هوانگ [۱۱] برای اندازه‌گیری کارایی کلی وکارایی هر مرحله‌ی واحدهای تصمیم‌گیری با ساختار دومرحله‌ای، از مدل‌های رابطه‌ای و روش تجزیه کارایی استفاده کردند. ابتدا کارایی کلی را محاسبه کردند و سپس کارایی مرحله‌ها را به روش بازگشتی و با حفظ کارایی سراسری محاسبه کردند. این روش برای سازمان‌ها با ساختار دو مرحله‌ای عمومی مناسب نیست. چن و همکاران [۱۵] رویکردی را جهت تعیین واحدهای الگو برای واحدهای تصمیم‌گیری ناکارا در چارچوب مدل کائو و هوانگ گسترش دادند.

تون وتسوتسوی [۱۹] مدلی برای ارزیابی کارایی در ساختارهای شبکه‌ای و براساس اندازه وابسته به متغیرهای کمکی وزن‌دار[1] پیشنهاد دادند که با استفاده از آن می‌توان کارایی مرحله‌ها را به همراه کارایی کل واحدهای تصمیم‌گیری محاسبه کرد. آن‌هادر مورد چگونگی ارتباط داده‌های واسطه‌ای با یکدیگر، دو حالت ارزش لینک آزاد و ارزش لینک ثابت را در نظر گرفته‌اند. در حالت ارزش لینک آزاد، داده‌های واسطه‌ای آزادانه

[1]Weighted Slacks-Based Measure (WSBM)

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.3.3.0]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.3.139]

(به‌طور اختیاری) تعیین شده‌اند. در حالی که پیوستگی بین ورودی و خروجی حفظ می‌شود. اما در حالت ارزش لینک ثابت داده‌های واسطه‌ای بدون تغییر نگه داشته می‌شوند (غیراختیاری) و مربوط به وضعیتی است که در آن داده‌های واسطه‌ای خارج از کنترل واحدهای تصمیم‌گیری هستند. در مدل آن‌ها، ناکارایی مربوط به داده‌های واسطه‌ای در مقدار تابع هدف لحاظ نشده است. چن و همکاران [۳۰] با متغیر درنظر گرفتن داده‌های واسطه‌ای در ساختارهای دومرحله‌ای، مدلی برمبنای متغیرهای کمکی و با عنوان مدل اندازه وابسته به متغیرهای کمکی با داده‌های واسطه‌ای متغیر (مدل$VSBM$[1]) ارایه کردند که در آن جهت مواجهه با اثرات متقابل مرحله‌ها بر یکدیگر در محاسبه کارایی ساختار، ابتدا با نوشتن دوگان مدل $VSBM$، فرم مضربی[2] آن را به‌دست آورده و سپس وزن (اهمیت) هر داده واسطه‌ای را وارد محدودیت‌های آن کرده‌اند. حسن‌زاده و مصطفایی [۳۱] مدلی مبتنی بر متغیرهای کمکی تحت سناریوهای مختلف کنترل محصولات واسطه‌ای پیشنهاد دادند. با استفاده از این مدل محصولات واسطه‌ای آرمانی را می‌توان در سناریوهای مختلف تعیین کرد.

هنگام محاسبه کارایی در تحلیل پوششی داده‌ها، ممکن است کاهش (یا افزایش) در ورودی‌ها و خروجی‌های مدل با نسبتی معین صورت نپذیرد. به مدل‌هایی که امکان تغییر غیرمتناسب در ورودی‌ها و خروجی‌ها را فراهم می‌کنند، مدل‌های غیرشعاعی گفته می‌شود. ازجمله این مدل‌ها، مدل راسل اصلاح‌شده است که هم به انقباض در ورودی (θ) و هم به انبساط در خروجی(φ) توجه دارد [۳۲].

فرض کنید مجموعه‌ای از n واحد تصمیم‌گیری با m ورودی و s خروجی وجود دارد به‌طوری که $\{(X_j,Y_j)=(x_{1j},...,x_{mj},y_{1j},...,y_{sj}),\ j=1,...,n\}$. مدل راسل اصلاح‌شده مرسوم برای ارزیابی $DMU_o=(x_o,y_o)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۳۳]:

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } R(X_o,Y_o)=\frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\theta_i}{\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\varphi_r}\\
&s.t. \quad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}\le\theta_i x_{io} \quad (i=1,...,m)\\
&\quad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj}\ge\varphi_r y_{ro} \quad (r=1,...,s)\\
&\quad \theta_i\le 1 \quad (i=1,...,m)\\
&\quad \varphi_r\ge 1 \quad (r=1,...,s)\\
&\quad \lambda_j\ge 0 \quad (j=1,...,n).
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

در مدل (۱)، λ_j سهم واحد تصمیم‌گیری jام در تعیین واحد الگو برای واحد تصمیم‌گیری تحت ارزیابی را نشان می‌دهد. اشکال وارده به این مدل عدم لحاظ‌کردن داده‌های واسطه‌ای در ارزیابی کارایی کل و دو مرحله هر واحد تصمیم‌گیری در مدل شبکه‌ای است. این مدل برای ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیری بدون توجه به

[1] Variable Intermediate Measures SBM Model

[2] در تحلیل پوششی داده‌ها،از فرم مضربی زمانی که ورودی‌ها و خروجی‌ها در مساله از مقادیر اهمیت مجزایی برخوردار باشند استفاده می‌شود، در حالی که از فرم پوششی زمانی که روابط بین واحدهای تصمیم‌گیری از اهمیت برخوردار باشد به‌کار می‌روند.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.3.3.0]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.3.139]

ساختارهای شبکه‌ای آنها است. لذا هدف در این مقاله توسعه مدل راسل اصلاح شده برای ارزیابی کارایی ساختارهای شبکه‌ای است.

۳ مدل پیشنهادی

در این بخش با توسعه مدل راسل اصلاح‌شده، روشی پیشنهاد شده است برای اندازه‌گیری کارایی کلی و مرحله‌ها در یک ساختار شبکه‌ای مشتمل بر دو مرحله که توسط داده‌های واسطه‌ای با یکدیگر مرتبط شده‌اند. هدف از طرح این مدل در نظر گرفتن اثرات متقابل کارایی مرحله‌ها بر یکدیگر و به‌دست آوردن کارایی مرحله‌ها براساس کارایی کل در قالب یک مدل یکتا است. به عبارت دیگر، کارایی مرحله‌ها زمانی به دست می‌آید که کارایی کلی ثابت باقی بماند.

ساختار شبکه‌ای شکل ۱ را برای واحد تصمیم‌گیری jام درنظر بگیرید به‌طوری که $j=1,...,n$ و n تعداد DMUها می‌باشد. ورودی‌های آغازین از مرحله اول با $x_{ij}^{1}(i=1,...,m_1)$ و ورودی‌های مرحله دوم با $x_{ij}^{2}(i=1,...,m_2)$ نمایش داده می‌شوند. همچنین خروجی‌های ترک‌کننده از مرحله اول با $y_{rj}^{1}(r=1,...,s_1)$ و خروجی‌های مرحله دوم با $y_{rj}^{2}(r=1,...,s_2)$ نمایش داده می‌شوند. داده‌های واسطه‌ای نیز با نماد $z_{dj}(d=1,...,D)$ نمایش داده می‌شوند که از مرحله اول خارج شده و به مرحله دوم وارد می‌شوند. اگر در این شبکه افزایشی در داده‌های واسطه‌ای بین دو مرحله ایجاد شود، این افزایش سبب افزایش کارایی مرحله اول شده، ولی کارایی مرحله دوم کاهش می‌یابد. چرا که داده‌های واسطه‌ای نقش دوگانه خروجی مرحله قبلی و در عین حال ورودی مرحله بعدی را دارند. مدل مقاله با این هدف ارایه شده است که این تاثیر متقابل، هم‌زمان و در قالب یک مدل نشان داده شود. بدین منظور متغیرهایی برای داده‌های واسطه‌ای با عناوین η_d و δ_d وارد تابع هدف و محدودیت‌های مدل راسل اصلاح‌شده کرده تا نقش داده‌های واسطه‌ای در مدل لحاظ شده باشد. مدل زیر برای اندازه‌گیری کارایی $DMUo$ در این ساختار شبکه‌ای پیشنهاد می‌شود. متذکر می‌شویم که این مدل برای شرایطی مناسب است که دو مرحله رویکردی غیرهمکارانه داشته باشند و مرحله‌ی قبلی به دنبال افزایش داده‌های واسطه‌ای و مرحله‌ی بعدی به دنبال کاهش داده‌های واسطه‌ای است.

$$
\begin{aligned}
Min\ \ R_o = & \frac{\frac{1}{m_1+m_2+D}\left[\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{m_k}\theta_i^k+\sum_{d=1}^{D}\delta_d\right]}{\frac{1}{s_1+s_2+D}\left[\sum_{k=1}^{2}\sum_{r=1}^{s_k}\varphi_r^k+\sum_{d=1}^{D}\eta_d\right]} \\
s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^k\, x_{ij}^k \le \theta_i^k x_{io}^k \quad (i=1,...,m_k,\ k=1,2) \\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^k\, y_{rj}^k \ge \varphi_r^k\, y_{ro}^k \quad (r=1,...,s_k,\ k=1,2) \\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^1\, z_{dj} \ge \eta_d z_{do} \quad (d=1,...,D)
\end{aligned}
\qquad (۲)
$$

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.3.3.0]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.3.139]

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 \, z_{dj} \le \delta_d \, z_{do} \quad (d = 1,\ldots,D)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k = 1 \qquad (k = 1,2)$$

$$0 \le \theta_i^k \le 1 \qquad (i = 1,\ldots,m_k,\ k = 1,2)$$

$$\varphi_r^k \ge 1 \qquad (r = 1,\ldots,s_k,\ k = 1,2)$$

$$\lambda_j^k \ge 0 \qquad (j = 1,\ldots,n\ ,\ k = 1,2)$$

$$\eta_d \ge 1 \qquad (d = 1,\ldots,D)$$

$$0 \le \delta_d \le 1 \qquad (d = 1,\ldots,D)$$

$$(\delta,\eta) \in \Delta^L\ ,\quad L = \{free, fixed, input, output\}.$$

در مدل پیشنهادشده θ_i^k میزان انقباض(کاهش) ورودی iام از مرحلهk ام و φ_r^k میزان انبساط (افزایش) در خروجیrام را از مرحله kام نشان می‌دهد. همچنین δ_d برای بیان انقباض داده‌های واسطه‌ای مربوط به مرحله دوم و η_d جهت نمایش میزان افزایش داده‌های واسطه‌ای مربوط به مرحله اول تعریف شده‌اند. λ_j^1 و λ_j^2 نیز بیانگر سهم واحد تصمیم‌گیری jام در تعیین واحد الگو برای واحد تصمیم‌گیری تحت ارزیابی به ترتیب در مرحله‌های اول و دوم می‌باشند.

در مدل ارایه‌شده، محدودیت اول مربوط به ورودی‌های اصلی شبکه و محدودیت دوم مربوط به خروجی‌های نهایی هستند. همچنین محدودیت‌های سوم و چهارم مرتبط با داده‌های واسطه‌ای می‌باشند. محدودیت $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^1 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 = 1$ نشان می‌دهد که این مدل برای حالت بازده به مقیاس متغیر نوشته شده است. در حالتی که تکنولوژی در یک بخش دارای بازده به مقیاس ثابت باشد، قید تحدب متناظر حذف می‌شود. از نظر ماهیت نیز مدل پیشنهادی یک مدل بدون ماهیت محسوب می‌شود. به عبارت دیگر هم امکان کاهش در ورودی‌ها و هم امکان افزایش در خروجی‌های مدل وجود دارد. مدل پیشنهادشده یک مدل غیرشعاعی است و تغییر در ورودی‌ها و خروجی‌ها لزوما نباید متناسب باشد.

در مدل (۶)، محدودیت مربوط به داده‌های واسطه‌ای با توجه به نقش آنها تعیین می‌شوند. همان‌طور که قبلاً بیان شد مدل (۶) در فرم کنونی برای حالتی نوشته شده است که داده‌های واسطه‌ای نقش دوگانه داشته باشند.

تون و تسوتسوی[۲۰] بر اساس ماهیت داده‌های واسطه‌ای، در یک تقسیم‌بندی آنها را به چهار حالت مختلف به شرح زیر تقسیم می‌کند و بنابراین مجموعهٔ Δ ومحدودیت‌های متناظر به داده‌های واسطه‌ای وابسته است:

الف) در حالت لینک ثابت قرار می‌دهیم $\eta_d = \delta_d = 1$ و مجموعه‌ی Δ^{free} به‌صورت $\Delta^{free} = \{(\delta,\eta)\ ;\ \eta_d = \delta_d = 1\ ;\ \forall d\}$ تعریف می‌شود. همچنین محدودیت متناظر با لینک‌ها به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^1 z_{dj} = z_{do}, \quad d = 1,\cdots,D \qquad (۳)$$

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.3.3.0]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.3.139]

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{2} z_{dj} = z_{do}, \quad d = 1,\cdots,D \qquad (۴)$$

ب) در حالت لینک آزاد قرار می‌دهیم $\eta_d \geq \delta_d$ و خواهیم داشت: $\Delta^{fixed} = \{(\delta,\eta); \eta_d \geq \delta_d \ ; \forall d\}$

ج) در حالتی که لینک‌ها نقش یگانه ورودی را داشته باشند و توسط مرحله دوم کنترل می‌شوند، قرار می‌دهیم $\eta_d = \delta_d \leq 1$ و خواهیم داشت: $\Delta^{output} = \{(\delta,\eta); \eta_d = \delta_d \leq 1 \ ; \forall d\}$ و عبارت $\sum_{d=1}^{D}\eta_d$ را از مخرج تابع هدف مدل(۶) حذف می‌کنیم.

د) در حالتی که لینک‌ها نقش یگانه خروجی را داشته باشند، قرار می‌دهیم $\eta_d = \delta_d \geq 1$ و خواهیم داشت: $\Delta^{output} = \{(\delta,\eta); \eta_d = \delta_d \geq 1 \ ; \forall d\}$ و عبارت $\sum_{d=1}^{D}\delta_d$ را از صورت تابع هدف مدل (۶) حذف می‌کنیم.

تعریف ۱: واحد تصمیم‌گیری تحت ارزیابی با استفاده از مدل پیشنهادی، کارا است اگر و تنها اگر $R^* = 1$.

با توجه به بحث بالا، در مدل ارایه‌شده اگرداده‌های واسطه‌ای ثابت و بدون تغییر درنظرگرفته شوند (یعنی $\eta_d = \delta_d = 1$)، آنگاه تابع هدف به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$R_o = Min \ \frac{\frac{1}{m_1+m_2}\left[\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{m_k}\theta_i^k\right]}{\frac{1}{s_1+s_2}\left[\sum_{k=1}^{2}\sum_{r=1}^{s_k}\theta_i^k\right]} \qquad (۵)$$

هنگامی‌که داده‌های واسطه‌ای نقش یگانه ورودی داشته باشند، تابع هدف به‌صورت $R_o = Min \ \frac{\frac{1}{m_1+m_2+D}\left[\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{m_k}\theta_i^k + \sum_{d=1}^{D}\delta_d\right]}{\frac{1}{s_1+s_2+D}\left[\sum_{k=1}^{2}\sum_{r=1}^{s_k}\theta_i^k\right]}$ و در حالتی که داده‌های واسطه‌ای نقش خروجی داشته باشند، تابع هدف مدل به صورت $R_o = Min \ \frac{\frac{1}{m_1+m_2}\left[\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{m_k}\theta_i^k\right]}{\frac{1}{s_1+s_2+D}\left[\sum_{k=1}^{2}\sum_{r=1}^{s_k}\varphi_r^k + \sum_{d=1}^{D}\eta_d\right]}$ تبدیل خواهد شد.

با فرض متغیر در نظر گرفتن داده‌های واسطه‌ای، مدل(۶) به‌صورت زیر نوشته خواهد شد:

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.3.3.0]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.3.139]

$$Min \quad R_o = \frac{\frac{1}{m_1 + m_2 + D}\left[\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{m_k}\theta_i^k + \sum_{d=1}^{D}\delta_d\right]}{\frac{1}{s_1 + s_2 + D}\left[\sum_{k=1}^{2}\sum_{r=1}^{s_k}\varphi_r^k + \sum_{d=1}^{D}\eta_d\right]}$$

$$\begin{aligned}
s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^k\, x_{ij}^k \le \theta_i^k x_{io}^k \qquad (i=1,...,m_k,\ k=1,2)\\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^k\, y_{rj}^k \ge \varphi_r^k\, y_{ro}^k \qquad (r=1,...,s_k,\ k=1,2)\\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^1\, z_{dj} \ge \eta_d z_{do} \qquad (d=1,...,D)\\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2\, z_{dj} \le \delta_d\, z_{do} \qquad (d=1,...,D)\\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^k = 1 \qquad (k=1,2)\\
& 0 \le \theta_i^k \le 1 \qquad (i=1,...,m_k,\ k=1,2)\\
& \varphi_r^k \ge 1 \qquad (r=1,...,s_k,\ k=1,2)\\
& \lambda_j^k \ge 0 \qquad (j=1,...,n,\ k=1,2)\\
& \eta_d \ge 1 \qquad (d=1,...,D)\\
& 0 \le \delta_d \le 1 \qquad (d=1,...,D)
\end{aligned} \tag{۶}$$

در این مدل داده‌های واسطه‌ای توسط هر دو مرحله می‌توانند تحت‌کنترل قرار گیرند. به عبارت دیگر افزایش یا کاهش در مقادیر داده‌های واسطه‌ای امکان‌پذیر خواهد بود و تضاد منافع بین هر دو مرحله وجود دارد. در ادامه مقاله با درنظرگرفتن رویکرد تضاد منافع بین مراحل، بر روی مدل (۶) بحث خواهد شد. اکنون قضیه‌هایی برای بررسی اعتبارسنجی مدل(۶) ارایه می‌شود.

قضیه ۱: اگر $DMU_o = \left(x_o^k, z_o, y_o^k\right); k = 1,2$ واحد تحت ارزیابی باشد، آن‌گاه مقدار کارایی عددی بین صفر و یک خواهد بود و داریم $R_o \in (0,1]$.

اثبات: ابتدا ثابت می‌شود $R_o > 0$. با توجه به محدودیت‌های مدل که همه متغیرهای تصمیم بزرگ‌تر یا مساوی صفر هستند، خواهیم داشت $R_o \ge 0$.

سپس نشان داده می‌شود $R_o \ne 0$: فرض کنید $R_o = 0$. بنابراین باید صورت کسر یعنی $\frac{1}{m_1 + m_2 + D}\left[\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{m_k}\theta_i^k + \sum_{d=1}^{D}\delta_d\right]$ برابر صفر باشد و لذا عبارات $\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{m_k}\theta_i^k$ و $\sum_{d=1}^{D}\delta_d$ صفر خواهند بود.

الف- اگر $\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{m_k}\theta_i^k$ باشد، در این صورت باید $\theta_i^k = 0; \forall i, \forall k$ باشند و لذا عبارت $\theta_i^k x_{io}^k$ در محدودیت اول مدل پیشنهادی برابر صفر خواهد شد و طبق محدودیت اول باید $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^k\, x_{ij}^k$ هم صفر شود. از آن‌جایی که x_{ij}^k

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.3.3.0]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.3.139]

به‌عنوان ورودی مخالف صفر است، باید $\lambda_j^k = ۰; \forall j, \forall k$ باشد. در این صورت با توجه به محدودیت $\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^{۱} z_{dj} \geq \eta_d z_{do}$، باید $\eta_d z_{do}$ صفر شود و چون $\eta_d \geq ۱$ است، آن‌گاه باید $z_{do} = ۰; \forall d$ باشد که با مفروضات مدل و وجود داده‌های واسطه‌ای در تناقض است. لذا $\sum_{i=۱}^{m_k} \theta_i^k \neq ۰$.

ب- اگر $\sum_{d=۱}^{D} \delta_d = ۰$ باشد، در این صورت $\delta_d = ۰; \forall d$ بوده و لذا عبارت $\delta_d z_{do}$ در محدودیت $\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^{۲} z_{dj} \leq \delta_d z_{do}$ برابر صفر خواهد شد و بنابراین باید $\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^{۲} z_{dj}$ هم صفر شود. از آن‌جایی که z_{dj} به‌عنوان داده واسطه‌ای مخالف صفر است، باید $\lambda_j^{۲} = ۰; \forall j$ باشد. در این صورت با توجه به محدودیت دوم مدل پیشنهادی باید $\varphi_r^k y_{ro}^k$ صفر شود و چون $\varphi_r^k \geq ۱$ است، برای باید $y_{ro}^k = ۰; \forall r, \forall k$ باشد که با مفروضات اولیه و وجود خروجی‌های نهایی در مدل، تناقض دارد. لذا $\sum_{d=۱}^{D} \delta_d \neq ۰$.

الف و ب نتیجه می‌دهند که $R_o > ۰$.

حال باید نشان دهیم $R_o \leq ۱$ می‌باشد. با توجه به محدودیت‌ها، یک جواب شدنی مدل(۶) به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} \theta_i^k = ۱ & (i = ۱,\ldots,m_k,\ k = ۱,۲) \\ \varphi_r^k = ۱ & (r = ۱,\ldots,s_k,\ k = ۱,۲) \\ \eta_d = ۱ & (d = ۱,\ldots,D) \\ \delta_d = ۱ & (d = ۱,\ldots,D) \\ \lambda_o^k = ۱,\ \lambda_j^k = ۰ & (j = ۱,\ldots,n,\ j \neq ۰,\ k = ۱,۲) \end{cases} \quad (۷)$$

مقدار تابع هدف به‌دست آمده از جواب فوق برابر یک خواهد بود و از آن‌جا که ماهیت مساله از نوع مینیمم‌سازی است، لذا $R_o \leq ۱$.

بنابراین $R_o \in (۰,۱]$ خواهد بود و قضیه اثبات می‌شود.

تعریف۲: اگر $(\lambda^{k*}, \theta^{k*}, \delta^{k*}, \varphi^*, \eta^*)$ یک جواب بهینه‌ی مدل (۶) باشد، آن‌گاه واحد الگوی (نقطهٔ تصویر) واحد تحت ارزیابی را با $(x_o^{k*}, z_o^{۱*}, z_o^{۲*}, y_o^{k*})$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} x_{io}^{k*} = \theta_i^{k*} x_{io}^k & (i = ۱,\ldots,m_k,\ k = ۱,۲) \\ z_{do}^{۱*} = \eta_d^* z_{do} & (d = ۱,\ldots,D) \\ z_{do}^{۲*} = \delta_d^* z_{do} & (d = ۱,\ldots,D) \\ y_{ro}^{k*} = \varphi_r^{k*} y_{ro}^k & (r = ۱,\ldots,s_k,\ k = ۱,۲) \end{cases} \quad (۸)$$

لازم به یادآوری است که در حالتی که لینک ثابت باشد $\eta_d^* = \delta_d^* = ۱$ و در حالت لینک آزاد $\eta_d^* \geq \delta_d^*$ خواهد بود. همچنین در حالتی که لینک نقش یگانه ورودی را داشته باشد $\delta_d^* = \eta_d^* \leq ۱$ و در حالتی که لینک نقش یگانه خروجی را داشته باشد $\delta_d^* = \eta_d^* \geq ۱$ خواهد بود.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.3.3.0]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.3.139]

قضیه۲: اگر $DMU_o = \left(x_o^k, z_o, y_o^k\right); k = ۱,۲$ واحد تحت ارزیابی باشد، آن‌گاه واحد الگو (نقطه‌ی تصویر متناظر) مطابق تعریف بالا کارا است.

اثبات: برای اثبات کافیست نشان داده شود که مقدار تابع هدف مدل(۶) هنگامی که واحد تصویر یعنی $\left(x_o^{k^*}, z_o^{1^*}, z_o^{2^*}, y_o^{k^*}\right)$ تحت ارزیابی باشد، کارا خواهد بود. برای ارزیابی واحد تصویریافته، مدل زیر را درنظر بگیرید:

$$Min\ \ R_o = \frac{\frac{۱}{m_۱ + m_۲ + D}\left[\sum_{k=۱}^{۲}\sum_{i=۱}^{m_k}\theta_i^k + \sum_{d=۱}^{D}\delta_d\right]}{\frac{۱}{s_۱ + s_۲ + D}\left[\sum_{k=۱}^{۲}\sum_{r=۱}^{s_k}\varphi_r^k + \sum_{d=۱}^{D}\eta_d\right]}$$

$$s.t. \quad \sum_{j=۱}^{n}\lambda_j^k\ x_{ij}^k \le \theta_i^k\theta_i^{k*}x_{io}^k \quad (i = ۱,...,m_k,\ k = ۱,۲)$$

$$\sum_{j=۱}^{n}\lambda_j^k\ y_{rj}^k \ge \varphi_r^k\varphi_r^{k*}\ y_{ro}^k \quad (r = ۱,...,s,\ k = ۱,۲)$$

$$\sum_{j=۱}^{n}\lambda_j^۱\ z_{dj} \ge \eta_d\eta_d^*\ z_{do} \quad (d = ۱,...,D)$$

$$\sum_{j=۱}^{n}\lambda_j^۲\ z_{dj} \le \delta_d\delta_d^*\ z_{do} \quad (d = ۱,...,D)$$

$$\sum_{j=۱}^{n}\lambda_j^k\ = ۱ \qquad (k = ۱,۲) \qquad (۹)$$

$$۰ \le \theta_i^k \le ۱ \qquad (i = ۱,...,m_k,\ k = ۱,۲)$$

$$\varphi_r^k\ \ge ۱ \qquad (r = ۱,...,s_k,\ k = ۱,۲)$$

$$\lambda_j^k \ge ۰ \qquad (j = ۱,...,n\ ,\ k = ۱,۲)$$

$$\eta_d \ge ۱ \qquad (d = ۱,...,D)$$

$$۰ \le \delta_d \le ۱ \qquad (d = ۱,...,D)$$

فرض کنید یک جواب بهینه‌ی مدل فوق به‌صورت $\left(\hat{\lambda}^k, \hat{\theta}^k, \hat{\eta}, \hat{\delta}, \hat{\varphi}^k\right)$ و مقدار تابع هدف کوچک‌تر از یک باشد. بنابراین بایستی حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$$\hat{\theta}_i^k < ۱, \exists i \in \{۱,...,m\}, \exists k \in \{۱,۲\} \qquad (۱۰)$$

$$\hat{\delta}_d \le ۱, \exists d \in \{۱,...,D\} \qquad (۱۱)$$

$$\hat{\eta}_d \ge ۱, \exists d \in \{۱,...,D\} \qquad (۱۲)$$

$$\hat{\varphi}_r^k \ge ۱, \exists r \in \{۱,...,s\}, \exists k \in \{۱,۲\} \qquad (۱۳)$$

بدیهی است در این حالت $\left(\lambda^k, \theta^k, \eta, \delta, \varphi^k\right)$ که عبارت‌های آن بردارهایی هستند که مؤلفه‌هایش به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.3.3.0]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.3.139]

$$\begin{cases} \lambda^k = \hat{\lambda}^k & (k = ۱,۲) \\ \theta_i^k = \hat{\theta}_i^k \theta_i^{k*} & (i = ۱,...,m_k,\ k = ۱,۲) \\ \eta_d = \hat{\eta}_d\, \eta_d^* & (d = ۱,...,D) \\ \delta_d = \hat{\delta}_d \delta_d^* & (d = ۱,...,D) \\ \varphi_r^k = \hat{\varphi}_r^k \varphi_r^{k*} & (r = ۱,...,s_k,\ k = ۱,۲) \end{cases} \tag{۱۴}$$

جواب شدنی مدل (۶) است هنگامی‌که $DMU_o = \left(x_o^k, z_o^۱, z_o^۲, y_o^k\right); k = ۱,۲$ تحت ارزیابی باشد. مقدار تابع هدف متناظر با این جواب شدنی برابر است با

$$\frac{\frac{۱}{m_۱ + m_۲ + D}\left[\sum_{k=۱}^{۲}\sum_{i=۱}^{m_k} \hat{\theta}_i^k \theta_i^{k*} + \sum_{d=۱}^{D} \hat{\delta}_d \delta_d^*\right]}{\frac{۱}{s_۱ + s_۲ + D}\left[\sum_{k=۱}^{۲}\sum_{r=۱}^{s_k} \hat{\varphi}_r^k \varphi_r^{k*} + \sum_{d=۱}^{D} \hat{\eta}_d\, \eta_d^*\right]} < \frac{\frac{۱}{m_۱ + m_۲ + D}\left[\sum_{k=۱}^{۲}\sum_{i=۱}^{m_k} \theta_i^k + \sum_{d=۱}^{D} \delta_d^*\right]}{\frac{۱}{s_۱ + s_۲ + D}\left[\sum_{k=۱}^{۲}\sum_{r=۱}^{s_k} \varphi_r^k + \sum_{d=۱}^{D} \eta_d^*\right]} = R_O^* \tag{۱۵}$$

که این با بهینگی R_o^* در تناقض آشکار است.

تذکر: در این موقعیت چون تضاد منافع بین مرحله‌های اول و دوم وجود دارد، داده‌های واسطه‌ای آرمانی به صورت یکتا تعیین نمی‌شوند بلکه برای مرحله اول و دوم متفاوت است.

پیش از بیان قضیه سوم، مفهوم مغلوب کردن در حالت‌های مختلف داده‌های واسطه‌ای بررسی می‌شود:

الف) در حالتی که لینک نقش آزاد یا ثابت دارد، واحد تصمیم‌گیری A واحد تصمیم‌گیری B را مغلوب می‌کند، اگر $\left[x_A \le x_B, z_A = z_B, y_A \ge y_B\right]$.

ب) در حالتی که لینک نقش ورودی دارد، واحد تصمیم‌گیری A واحد تصمیم‌گیری B را مغلوب می‌کند اگر $\left[x_A \le x_B, z_A \le z_B, y_A \ge y_B\right]$.

ج) در حالتی که لینک نقش خروجی دارد، گوییم واحد تصمیم‌گیری A واحد تصمیم‌گیری B را مغلوب می‌کند هرگاه $\left[x_A \le x_B, z_A \ge z_B, y_A \ge y_B\right]$.

قضیه۳: اگر واحد تصمیم‌گیری A واحد تصمیم‌گیری B را مغلوب کند، آن‌گاه:

$$R_A^* \ge R_B^* \tag{۱۶}$$

اثبات: فرض کنید $\left(\lambda^{k*}, \theta^{k*}, \delta^*, \varphi^{k*}, \eta^*\right)$ یک جواب بهینه‌ی مدل(۵) هنگام ارزیابی واحد A باشد، داریم:

$$\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^{k*}\, x_{ij}^k \le \theta_i^{k*} x_{iA}^k \le \theta_i^{k*} x_{iB}^k \qquad (i = ۱,...,m_k\ ,\ k = ۱,۲) \tag{۱۷}$$

$$\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^{۱*} z_{dj} \ge \eta_d^* z_{dA} = \eta_d^* z_{dB} \qquad (d = ۱,...,D) \tag{۱۸}$$

$$\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^{۲*}\, z_{dj} \le \delta_d^*\ z_{dA} = \delta_d^*\ z_{dB} \qquad (d = ۱,...,D) \tag{۱۹}$$

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.3.3.0]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.3.139]

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{k^*} y_{rj}^k \geq \varphi_r^{k^*} y_{rA}^k \geq \varphi_r^{k^*} y_{rB}^k \qquad (r = 1,\ldots, s_k\ , k = 1,2) \tag{۲۰}$$

بقیه محدودیت‌ها نیز برقرار هستند. این نشان می‌دهد که $\left(\lambda^{k^*}, \theta^{k^*}, \delta^*, \varphi^{k^*}, \eta^*\right)$ یک جواب شدنی مدل(۶) است، هنگامی‌که واحد B تحت ارزیابی باشد. مقدار تابع هدف متناظر با این جواب شدنی برابر است با

$$\frac{\frac{1}{m_1 + m_2 + D}\left[\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{m_k} \theta_i^k + \sum_{d=1}^{D} \delta_d^*\right]}{\frac{1}{s_1 + s_2 + D}\left[\sum_{k=1}^{2}\sum_{r=1}^{s_k} \varphi_r^k + \sum_{d=1}^{D} \eta_d^*\right]} = R_A^* \tag{۲۱}$$

چون تابع هدف مدل(۶) در ماهیت کمینه‌سازی است، داریم:

$$R_B^* \leq R_A^* \tag{۲۲}$$

و اثبات تمام است.

۳-۱ فرم خطی‌شده مدل پیشنهادی

تابع هدف مدل(۶) خطی کسری است و می‌توان از طریق تبدیلات چارنز-کوپر آن را به مدل خطی تبدیل کرد. خواهیم داشت:

$$t = \frac{1}{\frac{1}{s_1 + s_2 + D}\left[\sum_{k=1}^{2}\sum_{r=1}^{s_k} \varphi_r^k + \sum_{d=1}^{D} \eta_d\right]} \quad (t > 0) \tag{۲۳}$$

$$\bar{\varphi}_r = t\varphi_r, \bar{\theta}_i = t\theta_i, \bar{\delta}_d = t\delta_d, \ \bar{\eta}_d = t\eta_d, \bar{\lambda}^1_j = t\bar{\lambda}^1_j, \bar{\lambda}^2_j = t\bar{\lambda}^2_j \tag{۲۴}$$

فرم خطی‌شده به‌صورت مدل(۲۵) خواهد بود:

$$Min\ \ E = \frac{1}{m_1 + m_2 + D}\left[\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{m_k} t\bar{\theta}_i^k + \sum_{d=1}^{D} t\bar{\delta}_d\right]$$

s.t.

$$\frac{1}{s_1 + s_2 + D}\left[\sum_{k=1}^{2}\sum_{r=1}^{s_k} \bar{\varphi}_r^k + \sum_{d=1}^{D} \bar{\eta}_d\right] = 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}^k_j x_{ij}^k \leq \bar{\theta}_i^k x_{io}^k \quad (i = 1,\ldots, m_k, k = 1,2)$$

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.3.3.0]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.3.139]

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}^{k}_{j} y^{k}_{rj} \geq \bar{\varphi}^{k}_{r} y^{k}_{ro} \quad (r=1,...,s_k,\ k=1,2)\\
&\sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}^{1}_{j} z_{dj} \geq \bar{\eta}_d z_{do} \quad (d=1,...,D)\\
&\sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}^{2}_{j} z_{dj} \leq \bar{\delta}_d z_{do} \quad (d=1,...,D)\\
&\sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}^{k}_{j} = t \qquad (25)\\
&0 \leq \bar{\theta}^{k}_{i} \leq t \quad (i=1,...,m_k,\ k=1,2)\\
&\bar{\varphi}^{k}_{r} \geq 1 \quad (r=1,...,s_k,\ k=1,2)\\
&0 \leq \bar{\delta}_d \leq 1 \quad (d=1,...,D)\\
&\bar{\eta}_d \geq t \quad (d=1,...,D)\\
&\bar{\lambda}^{k}_{j} \geq 0 \quad (j=1,...,n,\ k=1,2)\\
&t > 0
\end{aligned}
$$

باید به این نکته توجه داشت که پس از حل مدل فوق، جواب‌های به‌دست آمده (بجز امتیاز کارایی کلی که تغییر متغیری در آن اعمال نشده است) باید بر t^* تقسیم شوند.

۳-۲ محاسبه کارایی هر مرحله در ساختار شبکه‌ای دومرحله‌ای عمومی

برای محاسبه کارایی هر مرحله در ساختار شبکه‌ای دومرحله‌ای عمومی، دو حالت زیر درنظر گرفته می‌شود:

الف- زمانی که جواب بهینه‌ی چندگانه وجود نداشته باشد: در این حالت فرض می‌شود جواب بهینه‌ی به‌دست آمده از حل مدل (۶) به‌صورت $\left(\varphi^*,\delta^*,\eta^*,\theta^*,\lambda^{1*},\lambda^{2*}\right)$است.کارایی مرحله‌های اول و دوم برای DMU_o به ترتیب با R^*_{1o} و R^*_{2o} نمایش داده و به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$R^*_{1o} = \frac{\frac{1}{m_1+m_2}\left[\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{m_k}\theta^{k*}_{i}\right]}{\frac{1}{D}\sum_{d=1}^{D}\eta^*_d} \qquad (26)$$

$$R^*_{2o} = \frac{\frac{1}{D}\sum_{d=1}^{D}\delta^*_d}{\frac{1}{s_1+s_2}\left[\sum_{k=1}^{2}\sum_{r=1}^{s_k}\varphi^{k*}_{r}\right]} \qquad (27)$$

ب- زمانی که جواب بهینه‌ی چندگانه وجود داشته باشد: فرض کنید جواب بهینه‌ی حاصل از مدل به‌صورت $\left(\varphi^*,\delta^*,\eta^*,\theta^*,\lambda^{1*},\lambda^{2*}\right)$باشد و مدل جواب بهینه‌ی چندگانه هم داشته باشد. در این صورت در جواب بهینه‌ی مساله‌ی اصلی، کارایی مرحله‌های اول و دوم در شرایط خوشبیانه و بدبینانه به دست می‌آید. منظور از شرایط خوشبیانه، شرایطی است که ضمن حفظ مقدار کارایی کلی شبکه، کارایی هر مرحله بیشترین مقدار ممکن را

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.3.3.0]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.3.139]

داشته باشد و منظور از شرایط بدبینانه، شرایطی است که ضمن حفظ کارایی کلی شبکه، مقدار کارایی هر مرحله در حداقل مقدار ممکن قرار داشته باشد. مقدار کارایی مرحله اول برایDMU_O در شرایط بدبینانه را با R_{1o}^L و در شرایط خوشبیانه با R_{1o}^U نمایش داده و با حل مدل زیر محاسبه می‌شوند. به مدل (۲۸) باید محدودیت‌های مدل (۶) نیز اضافه شوند:

$$Min(Max)\ R_{1o}^{L(U)} = \frac{\frac{1}{m_1+m_2+D}\left[\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{m_k}\theta_i^k\right]}{\frac{1}{D}\sum_{d=1}^{D}\eta_d}$$

$$s.t. \quad \frac{\frac{1}{m_1+m_2+D}\left[\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{m_k}\theta_i^k+\sum_{d=1}^{D}\delta_d\right]}{\frac{1}{s_1+s_2+D}\left[\sum_{k=1}^{2}\sum_{r=1}^{s_k}\varphi_r^k+\sum_{d=1}^{D}\eta_d\right]} = R_O^* \qquad (۲۸)$$

محدودیت $\frac{\frac{1}{m_1+m_2+D}\left[\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{m_k}\theta_i^k+\sum_{d=1}^{D}\delta_d\right]}{\frac{1}{s_1+s_2+D}\left[\sum_{k=1}^{2}\sum_{r=1}^{s_k}\varphi_r^k+\sum_{d=1}^{D}\eta_d\right]} = R_O^*$ در این مدل به منظور حفظ بهینگی کارایی کلی تعریف شده است. سایر محدودیت‌های مدل، دقیقاً همان محدودیت‌هایی هستند که در ارایه مدل(۶) به‌کار رفتند. به‌طور مشابه مقدار کارایی مرحله‌ی دوم برایDMU_Oدر شرایط بدبینانه را با R_{2o}^L و در شرایط خوشبینانه با R_{2o}^U نمایش داده و با حل مدل زیر به‌دست خواهد آمد.

$$Min(Max)\ R_{2o}^{L(U)} = \frac{\frac{1}{D}\sum_{d=1}^{D}\delta_d}{\frac{1}{s_1+s_2}\left[\sum_{k=1}^{2}\sum_{r=1}^{s_k}\varphi_r^k\right]} \qquad (۲۹)$$

$$s.t.$$

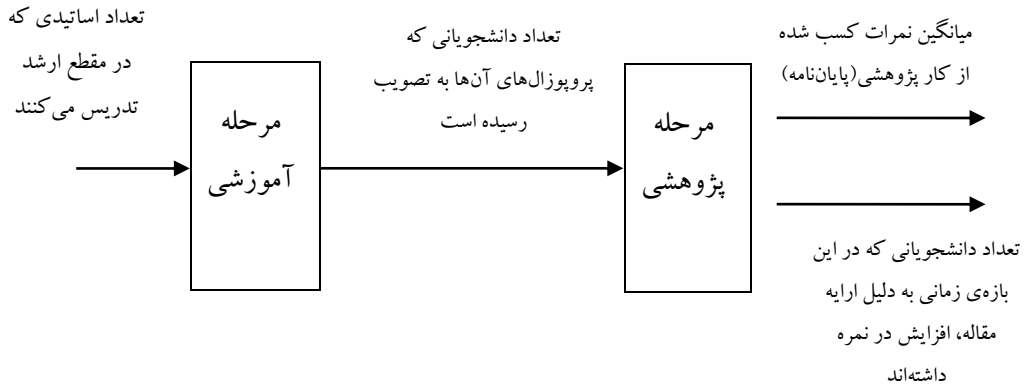
$$\frac{\frac{1}{m_1+m_2+D}\left[\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{m_k}\theta_i^k+\sum_{d=1}^{D}\delta_d\right]}{\frac{1}{s_1+s_2+D}\left[\sum_{k=1}^{2}\sum_{r=1}^{s_k}\varphi_r^k+\sum_{d=1}^{D}\eta_d\right]} = R_O^*$$

.به علاوه محدودیت‌های مدل(۶)

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.3.3.0]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.3.139]

٤ مطالعه موردی

در این بخش با ارایه یک مطالعه موردی، کاربردی از مدل پیشنهادی[1] برای ارزیابی کارایی کلی و کارایی هر مرحله واحدهای تصمیم‌گیری (گروه‌های آموزشی در مقطع کارشناسی ارشد) در یک سیستم (دانشگاه) نشان داده می‌شود. در هر گروه آموزشی، دورهٔ کارشناسی ارشد به دو مرحله‌ی آموزشی (گذراندن ۲۶ واحد تحصیلی) و مرحله‌ی پژوهشی (۶ واحد پایان‌نامه) تقسیم می‌شود. ساختار شبکه‌ای مشتمل بر یک ورودی، یک داده واسطه‌ای و دو خروجی مطابق شکل زیر برای هر واحد تصمیم‌گیری درنظر گرفته شده است.



شکل۲. نمایش ساختار شبکه‌ای دوره‌ی کارشناسی ارشد

مفروضاتی که در این مثال در نظر گرفته شده است، عبارتند از:

الف- بازه زمانی این مثال چهارساله درنظر گرفته شده است تا ارزیابی منطقی از کل فرایند (از زمان ورود دانشجو تا زمان ارایه‌ی مقاله‌ی مستخرج از پایان‌نامه) وجود داشته باشد.

ب- جهت مقایسه‌ی نسبی واحدهای تصمیم‌گیری با یکدیگر، بایستی واحدهای تصمیم‌گیری همگن باشند [۳۴]. در این مثال واحدهای تصمیم‌گیری، گروه‌های آموزشی یک واحد دانشگاهی درنظر گرفته شده است که به‌طور عمومی از شرایط موثر یکسانی از قبیل فضای آموزشی، کارمندان اداری و اجرایی و... برخوردار هستند.

ج- گرایش‌های مختلف یک رشته تحصیلی، در قالب همان گروه آموزشی فرض شده است.

د- در مورد خروجی‌های ساختار شبکه‌ای مورد بررسی، این نکته قابل ذکر است که حداکثر نمره‌ی پایان‌نامه ۱۸ بوده و ۲ نمره باقیمانده مربوط به ارایه مقاله می‌باشد.

و- در این ساختار هردو مرحله آموزشی و پژوهشی می‌توانند مقادیر داده واسطه‌ای را کنترل کنند. اگر تعداد اساتید مقطع تحصیلات تکمیلی (ورودی به مرحله آموزشی) کم باشد و امکان انتخاب استاد راهنما برای طرح پژوهشی دانشجو فراهم نباشد، می‌توان با دادن مرخصی تحصیلی به دانشجو، باعث کاهش در مقادیر داده واسطه‌ای شد. همچنین در صورتی که به‌دلیل تکمیل بودن ظرفیت اساتید، امکان صدور کد پایان‌نامه از سوی

[1] در ساختار شبکه‌ای مورد بررسی، خروجی ترک‌کننده از مرحله اول و یا ورودی‌هایی از بیرون به مرحله دوم وجود نداشته و محدودیت‌های متناظر با خروجی بخش اول و ورودی بخش دوم از مدل(۶) حذف می‌شوند .

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.3.3.0]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.3.139]

پژوهش دانشگاه نباشد، باید از تصویب پروپوزال اضافی وافزایش در مقادیر داده واسطه‌ای جلوگیری و مقادیر داده واسطه‌ای کاهش یابد.

ز- مدل ارایه شده در این مقاله، مستقل از واحد اندازه‌گیری داده‌هاست و مشابه مدل CCR، قضیه استقلال از واحد اندازه‌گیری برقرار است.

مقادیر شاخص‌های ورودی، داده واسطه‌ای و خروجی‌ها برای ۱۸ واحد تصمیم‌گیری (گروه آموزشی) در جدول ۱ بر اساس اطلاعات یکی از دانشگاه‌های کشور آورده شده است.

جدول ۱. داده‌ها در یک بازه‌زمانی چهارساله

	مرحله آموزشی	**داده واسطه‌ای**	**مرحله پژوهشی**	
	تعداد اساتید مقطع تحصیلات تکمیلی	تعداد دانشجویانی با پروپوزال	میانگین نمرات پژوهشی	تعداد دانشجویان افزایش در نمره
DMU_1	۱۷	۶۱۴	۱۷/۲۲	۷۸
DMU_2	۱۵	۵۶۴	۱۷/۴۶	۶۱
DMU_3	۱۹	۷۴۴	۱۷/۴۲	۱۱۰
DMU_4	۲۵	۸۵۵	۱۶/۷۱	۱۶۶
DMU_5	۱۱	۳۸۷	۱۶/۸۵	۴۲
DMU_6	۲۰	۷۶۰	۱۷/۳۹	۹۹
DMU_7	۱۳	۱۱۳	۱۶/۸۱	۱۷
DMU_8	۱۵	۳۱۶	۱۷/۲۵	۵۱
DMU_9	۱۶	۶۹۹	۱۶/۵۷	۷۶
DMU_{10}	۱۵	۲۹۰	۱۷/۱۰	۵۷
DMU_{11}	۵	۲۴۸	۱۷/۴۱	۴۶
DMU_{12}	۱۷	۴۵۲	۱۷/۱۸	۷۶
DMU_{13}	۱۰	۳۰۹	۱۷/۳۱	۴۹
DMU_{14}	۱۳	۲۳۸	۱۶/۸۶	۲۸
DMU_{15}	۲۰	۷۴۴	۱۷/۴۸	۱۳۱
DMU_{16}	۱۹	۵۷۴	۱۶/۷۶	۷۳
DMU_{17}	۲۱	۴۵۳	۱۷/۱۶	۸۵
DMU_{18}	۱۲	۳۹۲	۱۷/۱۰	۶۶

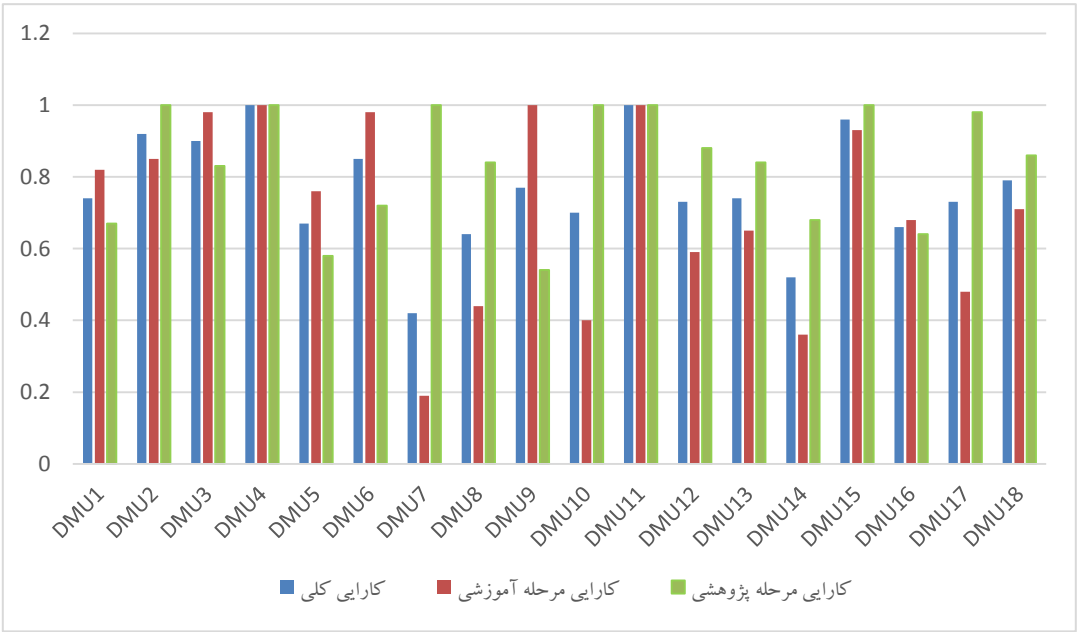
برای حل مدل، از نرم‌افزار*GAMS* استفاده شده وجواب‌های بهینه مطابق جدول۲ به‌دست آمده‌اند. سپس با توجه به مقادیر بهینه به‌دست آمده، کارایی کلی و کارایی مرحله‌های آموزشی و پژوهشی واحدهای تصمیم‌گیری برای هر یک از DMUها در شکل۳ نشان داده شده است.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.3.3.0]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.3.139]

جدول۲. جواب بهینه مطالعه مورد بررسی

DMU$_i$	θ	φ_1	φ_2	δ	η	λ_4^1	λ_9^1	λ_{11}^1	λ_{10}^2	λ_1^2	λ_4^2	λ_7^2	λ_{11}^2	λ_{15}^2
۱	۰/۸۲	۱	۱	۰/۶۷	۱	۰	۰/۸۱	۰/۱۹	۰/۰۱	۰	۰/۲۷	۰	۰/۷۲	۰
۲	۰/۸۵	۱	۱	۱	۱	۰	۰/۷	۰/۳	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۳	۰/۹۸	۱	۱	۰/۸۳	۱	۰/۲۹	۰/۷۱	۰	۰	۰	۰/۰۵	۰	۰/۲۷	۰/۶۸
٤	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰
٥	۰/۷۶	۱/۰۱	۱	۰/۵۸	۱	۰	۰/۳۱	۰/۶۹	۰/۶۲	۰	۰	۰/۳۸	۰	۰
٦	۰/۹۸	۱	۱	۰/۷۲	۱	۰/۳۹	۰/۶۱	۰	۰	۰	۰/۰۸	۰	۰/۴۱	۰/۵۱
۷	۱	۱	۱	۱	۵/۱۲	۰	۰/۷۲	۰/۲۸	۰	۰	۰	۱	۰	۰
۸	۰/۴۴	۱	۱	۰/۸۴	۱	۰	۰/۱۵	۰/۸۵	۰/۴۹	۰	۰	۰/۰۱	۰/۵	۰
۹	۱	۱/۰۳	۱	۰/۵۵	۱	۰	۱	۰	۰/۸۳	۰	۰/۱۷	۰	۰	۰
۱۰	۰/۴	۱	۱	۱	۱	۰	۰/۰۹	۰/۹۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰
۱۱	۱	۱	۱	۱	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۰
۱۲	۰/۵۹	۱	۱	۰/۸۸	۱	۰	۰/۴۵	۰/۵۵	۰	۰/۲۲	۰/۲۳	۰	۰/۵۵	۰
۱۳	۰/۶۵	۱	۱	۰/۸۴	۱	۰	۰/۱۴	۰/۸۶	۰	۰/۳	۰	۰/۰۱	۰/۶۹	۰
۱٤	۰/۳۸	۱	۱	۰/۶۸	۱/۰۴	۰	۰	۱	۰	۰/۲۷	۰	۰/۷۳	۰	۰
۱٥	۰/۹۳	۱	۱	۱	۱	۰/۲۹	۰/۷۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱
۱٦	۰/۶۸	۱/۰۲	۱	۰/۶۵	۱	۰	۰/۷۲	۰/۲۸	۰/۸۵	۰	۰/۱۵	۰	۰	۰
۱۷	۰/۴۸	۱	۱	۰/۹۸	۱	۰	۰/۴۵	۰/۵۵	۰/۰۹	۰	۰/۳۲	۰	۰/۵۹	۰
۱۸	۰/۷۱	۱	۱	۰/۸۶	۱	۰	۰/۳۲	۰/۶۸	۰/۷۹	۰	۰	۰	۰/۱۲	۰

* مقادیر λ_j^1 و λ_j^2 در سایر سطرها برابر صفر است.



شکل۳. نمودارمقایسه‌ی کارایی کلی و کارایی مرحله‌های آموزشی و پژوهشی واحدهای تصمیم‌گیری

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.3.3.0]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.3.139]

تفسیر نتایج:

- مقدار $\theta = ۰/۸۲$ به‌دست آمده در DMU_1 نشان‌دهنده ازدیاد ورودی اصلی شبکه در گروه آموزشی اول است و برای افزایش کارایی کلی این گروه آموزشی، باید این تعداد را کاهش داد.
- برای واحدتصمیم‌گیری نهم، $\varphi_1 = ۱/۰۳$ شده است. این مقدار نشان می‌دهد که خروجی اول ساختار شبکه‌ای این گروه آموزشی(میانگین نمرات کسب شده از کار پژوهشی) باید افزایش یابد.
- مقدار φ_2 برای همه‌ی DMUها برابر یک شده است و نتیجه می‌شود که خروجی دوم این ساختار در تمامی گروه‌های آموزشی در سطح مطلوبی قرار دارد.
- در مورد DMU_3 که η برابر یک است، کوچک‌تر از یک بودن مقدارδ نشان می‌دهد که ورودی‌های مرحله پژوهشی در سطح مطلوبی قرار ندارند. مثلا به‌دلیل تکمیل بودن ظرفیت اساتید، امکان صدور کد پایان‌نامه از سوی پژوهش دانشگاه نبوده و باید تعداد پروپوزال‌های تصویب شده در این گروه آموزشی کاهش یابد.
- با بررسی DMU_7 مشاهده می‌شود که $\delta = ۱$ بوده و ایده‌آل است اما $\eta = ۵/۱۲$ به‌دست آمده است که نشان می‌دهد خروجی مرحله آموزشی کم بوده (تعداد دانشجویانی که اقدام به نگارش پروپوزال کرده‌اند تا با تصویب آن وارد دوره‌ی پژوهشی و اخذ پایان‌نامه شوند، با تعداد اساتید راهنما و مشاور این گروه آموزشی متناسب نیست) و ناکارایی سیستم، مربوط به این مرحله می‌باشد. با بررسی نمودارها نیز به وضوح می‌توان به این مطلب پی برد. همان‌طور که در شکل ۳ مشاهده می‌شود، کم‌ترین میزان کارایی کلی مربوط بهDMU_7 است که با محاسبه کارایی مرحله‌های داخلی این واحد تصمیم‌گیری، می‌توان نتیجه گرفت که این واحد، در مرحله پژوهشی کارایی ۱۰۰درصدی دارد و ناکارایی آن مرتبط با مرحله آموزشی می‌باشد. از آن‌جا که $\delta = ۱$ و $\eta > ۱$ می‌باشند، می‌توان با افزایش مقادیرداده واسطه‌ای به بالابردن کارایی DMU_7 کمک کرد. مثلا اگرمقدار داده واسطه‌ای (تعداد پروپزال‌های مصوب) را به‌جای ۱۱۳ عدد کنونی، ۲۰۰ در نظر بگیریم و مجدداً مدل را حل کنیم، امتیاز کارایی کلی به‌دست آمده برابر ۰/۶۱ خواهد بود که افزایش چشمگیر در کارایی این واحد را نشان می‌دهد.
- مقادیر λ_j^1 و λ_j^2 به‌ترتیب نشان‌دهنده سهم واحد تصمیم‌گیری j ام در تعیین واحد الگو برایDMU_O در مرحله اول و مرحله دوم می‌باشند. برای توضیح بیشتر در مورد این دو پارامتر، DMU_5 را به‌عنوان نمونه در نظر می‌گیریم که در آن $\lambda_9^1 = ۰/۳۱$، $\lambda_{11}^1 = ۰/۶۹$، $\lambda_7^2 = ۰/۳۸$ و $\lambda_{10}^2 = ۰/۶۲$ به‌دست آمده است. با توجه به این اعداد واحدتصمیم‌گیری پنجم در مرحله اول با واحدهای تصمیم‌گیری نهم و یازدهم مقایسه می‌شود؛ به عبارت دیگر DMU_9 و DMU_{11}مجموعه‌ی مرجع[۱] DMU_7در مرحله اول هستند.

[۱] مجموعه‌ی مرجع E_O برای یک واحد تصمیم‌گیری ناکارا، عبارتست از [۳۵]:

E_O= {j|λ_j^* در یکی از جواب‌های بهینه در ارزیابیDMU_oمثبت باشد}

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.3.3.0]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.3.139]

درمرحله پژوهشی نیز واحدهای تصمیم‌گیری هفتم و دهم، مجموعه‌ی مرجع DMU_5 می‌باشند.

- در جدول ۲ تمام مقادیر برای برخی λ_j^1 برابر صفر شده است که نشان می‌دهد واحدتصمیم‌گیری jام در مرحله اول، مرجع هیچ یک از DMUهای دیگر نمی‌باشد. این تفسیر در مورد λ_j^2 نیز برقرار است.
- اعداد به‌دست آمده، بیانگر وجود دو واحد کارا در میان واحدهای تصمیم‌گیری مورد بررسی است که عبارتند از DMU_4 و DMU_{11}.
- در شکل۳ مشاهده می‌شود که دو واحد تصمیم‌گیری کارا (DMU_4 وDMU_{11}) در هر دو مرحله آموزشی و پژوهشی نیز دارای کارایی ۱۰۰درصدی هستند. می‌توان نتیجه گرفت که اگر یک DMU کارا باشد، آن‌گاه همه مرحله‌های آن نیز کارا هستند.

۵ نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این مقاله مدلی برای اندازه‌گیری کارایی در یک ساختار شبکه‌ای دومرحله‌ای عمومی پیشنهاد شده است. مرحله‌های تشکیل‌دهنده‌ی این ساختار توسط داده‌های واسطه‌ای با یکدیگر مرتبط شده‌اند که افزایش(یا کاهش) در مقادیر داده‌های واسطه‌ای سبب افزایش(یا کاهش) کارایی مرحله اول و در عین حال کاهش(یا افزایش) کارایی مرحله دوم می‌شود. در مدل پیشنهادی با این فرض که هر دو مرحله می‌توانند داده‌های واسطه‌ای را کنترل کنند (رویکرد تضاد منافع)، با اختصاص ضرایبی به داده‌های واسطه‌ای برای هر مرحله و واردکردن آن‌ها درتابع هدف و محدودیت‌های مدل سعی در مواجهه با اثرات متقابل کارایی مرحله‌ها بر یکدیگر در محاسبه کارایی کلی شبکه گردید. با حل مدل و به‌دست آوردن این ضرایب، در صورت بهینه نبودن یکی از این مقادیر می‌توان عنوان نمود که جهت افزایش کارایی ساختار نیاز به افزایش در خروجی‌های مرحله‌ی اول و یا افزایش مقادیر داده‌های واسطه‌ای و یا نیاز به کاهش ورودی‌های مرحله دوم یا کاهش در مقادیر داده‌های واسطه‌ای خواهد بود. در این شرایط پیشنهاد می‌شود که مازاد داده‌های واسطه‌ای به واحدهای دیگر اختصاص داده شود. در صورت بهینه نبودن هردو ضریب اختصاص داده شده نیز بسته به شرایط مثال موردبررسی بایستی مقدار داده‌های واسطه‌ای را با هدف رسیدن به کارایی کلی بیشتر تغییر داد. با توسعه‌ی مدل پیشنهادشده می‌توان کارایی را برای حالت‌هایی که داده‌های واسطه‌ای نقش ورودی، خروجی یا ثابت داشته باشند نیز محاسبه نمودکه به‌صورت مختصر این حالت‌ها موردبررسی قرار گرفتند.

توسعه مدل ریاضی پیشنهادی برای رویکردهای خروجی‌محور و یا ورودی‌محور، توسعه فرم مضربی و اضافه کردن خروجی‌های نامطلوب از جمله مواردی است که می‌توان برای مطالعات آتی پیشنهاد داد. توسعه روش‌های تحلیل پوششی داده‌ها در شرایط عدم‌قطعیت مانند برنامه‌ریزی بازه‌ای [۳۹-۳۶]، بهینه‌سازی فازی [۴۳-۴۰] و بهینه‌سازی استوار [۴۶-۴۴] مورد توجه محققین است. لذا توسعه روش پیشنهادی در شرایط عدم قطعیت و همچنین توسعه این مدل برای سیستم‌های شبکه‌ای پویا و کاربردهای آن در زنجیره تأمین با کنترل‌های نسبی بر لینک‌ها می‌تواند موضوع ارزشمندی برای تحقیقات آتی باشد.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.3.3.0]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.3.139]

منابع

[1] Mehregan, M., (2016). Data Envelopment Analysis: Quantitative Models for Organizational Performance Evaluation, Tehran, University Book Publishing.
[2] Mohaghar, A., Safari, H., Amirteimoori., A.R., Soufi, M.A., (2016). New Data Envelopment Analysis Model for Efficiency Measurement of Decision-Making Units with Parallel Network Structure. Journal of Operational Research and Its Applications, 13(3), 9-26.
[3] Färe, R., Grosskopf, S., (2000). Network DEA, Socio-Economic Planning Sciences, 34(1), 35-49.
[4] Khosravi, M.R., Shahroodi, K., (2014). Applying Network Data Envelopment Analysis Model in Evaluating Efficiency of Power Transmission Sector, in Iran Electricity Industry, Industrial Management Journal, 6(2), 253-272. Doi: 10.22059/IMJ.2014.50840.
[5] Kalhor, A., Kazemi Matin, R., (2018). Study the effects of abatement factors of weak disposability in network data envelopment analysis with undesirable outputs. Journal of Operational Research and Its Applications, 15(1), 103-121.
[6] Seiford, L.M., Zhu, J., (1999). Profitability and marketability of the top 55 U.S. commercial banks. Management Sciences, 45(9), 1270-1288.
[7] Zhu, J., (2000). Multi-factor performance measure model with an application to fortune 500 companies. European Journal of Operational Research, 123(1), 105-124.
[8] Sexton, T.R., Lewis, H.F., (2003). Two-stage DEA: An application to Major league baseball. Journal of Productivity Analysis, 19(2), 227-249
[9] Tsolas, I.E., (2013). Modeling profitability and stock market performance of listed construction firms on the Athens exchange: Two-stage DEA approach. Journal of Construction Engineering and Management, 139(1), 111-119.
[10] Adler, N., Liebert, V., Yazhemsky, E., (2013). Benchmarking airports from a managerial perspective. Omega, 41(2), 442-458.
[11] Kao, C., Hwang, S.N., (2008). Efficiency decomposition in two-stage data envelopment analysis: An application to non-life insurance companies in Taiwan. European Journal of Operational Research, 185(1), 418-429.
[12] Kao, C., Hwang, S.N., (2010). Efficiency measurement for network systems: IT impact on firm performance. European Journal of Operational Research, 48(3), 437-446.
[13] Kao, C., (2009a). Efficiency decomposition in network data envelopment analysis: A relational model. European Journal of Operational Research, 192(3), 949-962
[14] Kao, C., (2009b). Efficiency measurement for parallel production systems. European Journal of Operational Research, 196(3), 1107-1112
[15] Chen, Y., Cook, W.D., Zhu, J., (2010). Deriving the DEA frontier for two-stage processes. European Journal of Operational Research, 202(1), 138–142.
[16] Chen, Y., Zhu, J., (2004). Measuring information technology's indirect impact on firm performance. Information Technology and Management, 5(1-2), 9-22.
[17] Yu, M.M., Lin, E.T.J., (2008). Efficiency and effectiveness in railway performance using a multi-activity network DEA model. Omega, 36(6), 1005-1017.
[18] Chen, Y., Cook, W.D., Li, N., Zhu, J., (2009). Additive efficiency decomposition in two-stage DEA. . European Journal of Operational Research, 196(3), 1170-1176
[19] Tone, K., Tsutsui, M., (2009). Network DEA: A slacks-based measure approach. European Journal of Operational Research, 197(1), 243-252.
[20] Tone, K., Tsutsui, M., (2010). Dynamic DEA: A slacks-based measure approach. Omega, 38(3-4), 145–156.
[21] Liu, J.S., Lu, W-M., (2012). Network-based method for ranking of efficient units in two-stage DEA models. Journal of Operational Research Society, 63(8), 1153-1164.
[22] Chen, Y., Liang, L., Yang, F., (2006). A DEA game model approach to supply chain efficiency. Annals of Operational Research, 145(1), 5-13.
[23] Liang, L., Cook, W.D., Zhu, J., (2008). DEA models for two-stage processes: Game approach and efficiency decomposition. Naval Research Logistics, 55(7), 643-653.
[24] Zha, Y., Liang, L., (2010). Two-stage cooperation model with input freely distributed among the stages. European Journal of Operational Research, 205(2), 332-338.
[25] Du, J., Liang, L., Chen, Y., Cook, W.D., Zhu, J., (2011). A bargaining game model for measuring performance of two-stage network structures. European Journal of Operational Research, 210(2), 390-397.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.3.3.0]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.3.139]

[26] Zhou, Z., Sun, L., Yang, W., Liu, W., Ma, C., (2013). A bargaining game model for efficiency decomposition in the centralized model of two-stage systems. Computers & Industrial Engineering, 64(1), 103-108.
[27] Kao, C., (2014b). Network data envelopment analysis: A review. European Journal of Operational Research, 239(1), 1-16.
[28] Kao, C., (2014a). Efficieny decomposition for general multi-stage data envelopment analysis. European Journal of Operational Research, 232(1), 117-124.
[29] Kao, C., (2017). Network data envelopment analysis: foundations and extensions. Berlin: Springer.
[30] Chen, Y., Li, Y., Liang, L., Salo, A., Wu, H., (2016). Frontier projection and efficiency decomposition in two-stage processes with slacks-based measures. European Journal of Operational Research, 250(2), 543–554.
[31] Hassanzadeh, A., Mostafaee, A., (2019). Measuring the efficiency of network Structures: Link control approach. Computers & Industrial Engineering, 128, 437-446.
[32] Izadikhah, M., (2014). Data Envelopment Analysis (Vol.1), Arak, Scientific publications of Islamic Azad University of Arak branch.
[33] Pastor, J.T., Ruiz, J.L., Sirvent, I., (1999). An enhanced DEA Russell graph efficiency measure. European Journal of Operational Research, 115(3), 596-607.
[34] Dabbagh, R., (2011). The Comparison of Research and Total productivity in Iranian Public Universities', Iranian Journal of Economic Research, 16(47), 75-104.
[35] Jahanshahloo, G.R., Hosseinzadeh Lotfi., F. Nikomaram, H., (2016). Data Envelopment Analysis and it's Applications, Tehran, Islamic azad university science and research branch.
[36] Rostamy-M, M., Mollaeian, E., (2012). Evaluating performance supply chain by a new non-radical network DEA model with fuzzy data. Journal of Data Envelopment Analysis and Decision, 2012(1).
[37] Peykani, P., Mohammadi, E., (2018). Internal network data envelopment analysis model for classification of investment companies in the presence of uncertain data. Journal of Industrial and Systems Engineering, 11(Special issue: 14th International Industrial Engineering Conference), 63-72.
[38] Hosseinzadeh Lotfi, F., Navabakhs, M., Tehranin, A., Rostamy-M, M., Shahverdi, R., (2007). Ranking Bank Branches with Interval Data-The Application of DEA. International Mathematical Forum, 2(9), 429-440.
[39] Hosseinzadeh Lotfi, F., Jahanshahloo, G.R., Shahverdi, R., Rostamy-M, M., (2007). Cost Efficiency and Cost Malmquist Productivity Index with Interval Data. International Mathematical Forum, 2(9), 441-453.
[40] Peykani, P., Mohammadi, E., Emrouznejad, A., Pishvaee, M.S., Rostamy-M, M., (2019). Fuzzy data envelopment analysis: An adjust approach. Expert Systems with Applications, 136, 439-452.
[41] Peykani, P., Mohammadi, E., Pishvaee, M.S., Rostamy-M, M., Jabarzadeh, A., (2018). A novel fuzzy data envelopment analysis based on robust possibilistic programming: possibility, necessity and credibility-based approaches. RAIRO-Operations Research, 52(4-5), 1445-1463.
[42] Peykani, P., Mohammadi, E., Rostamy-M, M., Hosseinzadeh Lotfi, f., (2019). Fuzzy Data Envelopment Analysis Approach for Ranking of Stocks with an Application to Tehran Stock Exchange. Advances In Mathematical Finance & Applications, 4(1), 31-43.
[43] Peykani, P., Seyed Esmaeili, F.S., Rostamy-M, M., Hosseinzadeh Lotfi, f., (2018). Measuring Productivity Changes of Hospitals in Tehran: The Fuzzy Malmquist Productivity Index. International Journal of Hospital Research, 7(3), 1-17.
[44] Peykani, P., Mohammadi, Farzipoor Saen, R., Sadjadi, S.J., (2020). Data envelopment analysis and robust optimization: A review. Expert Systems, 37(4), e12534.
[45] Peykani, P., Mohammadi, Jabbarzadeh, A., Jandaghian, A., (2016). Utilizing Robust Data Envelopment Analysis Model for Measuring Efficiency of Stock, A case study: Tehran Stock Exchange. Journal of New Researches in Mathematics, 1(4), 15-24.
[46] Peykani, P., Mohammadi, Seyed Esmaeili, F.S., (2019). Stock Evaluation under mixed Uncertainties using Robust DEA Model. Journal of Quality Engineering and Production Optimization, 4(1), 73-84.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.3.3.0]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.3.139]