مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال شانزدهم، شماره دوم (پیاپی ۶۱)،تابستان ۹۸، ص ص ۷۵-۵۹
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

ارایه مدل استوار تحلیل پوششی داده‌های بازه‌ای برای اندازه‌گیری کارایی در شرایط عدم قطعیت مضاعف

فاطمه سادات سید اسماعیلی[1]، محسن رستمی مال خلیفه[2*]، فرهاد حسین زاده لطفی[3]

۱- دانشجوی دکتری، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، گروه ریاضی، تهران، ایران

۲- دانشیار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، گروه ریاضی، تهران، ایران

۳- استاد، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، گروه ریاضی، تهران، ایران

رسید مقاله: ۲۲ مهر ۱۳۹۷

پذیرش مقاله: ۲۸ فروردین ۱۳۹۸

چکیده

در نظر گرفتن عدم قطعیت موجود در داده‌ها و چگونگی برخورد با آن در هنگام ارزیابی عملکرد با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها، امری بسیار ضروری است؛ زیرا وجود انحراف کوچکی در داده‌ها می‌تواند منجر به تغییر قابل توجهی در نتایج کارایی گردد. این در حالی است که در دنیای واقعی و در بسیاری از موارد، داده‌های مربوطه دارای عدم قطعیت می‌باشند. تحلیل پوششی داده‌های بازه‌ای یکی از رویکردهای پر کاربرد برای برخورد با عدم قطعیت داده‌ها در شرایط بازه‌ای بودن داده‌ها، می‌باشد. هدف از مقاله پیش رو، ارایه مدل استوار تحلیل پوششی داده‌های بازه‌ای برای اندازه‌گیری کارایی در شرایط وجود عدم قطعیت بازه‌ای مضاعف می‌باشد. بدین صورت که علاوه بر عدم قطعیت ناشی از بازه‌ای بودن داده‌ها، در ابتدا و انتهای بازه مربوط به هر یک از داده‌ها نیز عدم قطعیت وجود دارد. استفاده از رویکرد ارایه شده در این پژوهش، می‌تواند میزان محافظه کاری و اعتبار نتایج کارایی و رتبه بندی را به میزان قابل توجهی افزایش دهد. لازم به ذکر است در نهایت رویکرد پیشنهادی با استفاده از مثال عددی حل و نتایج حاصل، مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرند.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، عدم قطعیت، داده‌های بازه‌ای، بهینه‌سازی استوار.

۱ مقدمه

ارزیابی عملکرد و سنجش کارایی با استفاده از مدل های تحلیل پوششی داده‌ها یکی از حوزه های کاربردی و قابل توجه می‌باشد. روش تحلیل پوششی داده‌ها اولین بار توسط چارنز و همکاران [۱] بر اساس تعمیم ایده فارل [۲] در حالت بازده به مقیاس ثابت ارایه شده است. سپس بنکر و همکاران [۳] مدل مذکور را در حالت بازده به مقیاس متغیر نیز توسعه دادند. به همین ترتیب از زمان ارایه مدل های کلاسیک تحلیل پوششی داده‌ها، با توجه به

* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: mohsen_rostamy@yahoo.com

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-04]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.2.1.2]

ویژگی های مورد مطالعاتی، نوع داده‌ها و نوع کاربرد، تا کنون مدل‌های متعددی از تحلیل پوششی داده‌ها ارایه شده است.

یکی از نکات قابل توجه و غیر قابل اجتناب به هنگام استفاده از مدل های تحلیل پوششی داده‌ها، عدم قطعیت موجود در داده‌ها و چگونگی برخورد با آن می‌باشد. اهمیت و ضرورت این نکته به علت حساسیت تحلیل پوششی داده‌ها به کوچک‌ترین تغییر و انحرافی در داده‌ها می‌باشد، به گونه‌ای که عدم قطعیت موجود در داده‌ها می‌تواند موجب تغییر قابل توجهی در نتایج کارایی شود و رتبه‌بندی و طبقه‌بندی کارایی واحدها را تحت الشعاع قرار دهد و حتی نتایج دیگر نامعتبر باشد. با توجه به این نکات، ارایه و استفاده از مدل تحلیل پوششی داده‌هایی که قابلیت محاسبه کارایی در حضور داده‌های غیرقطعی را دارا باشد، امری ضروری است.

تحلیل پوششی داده‌های بازه‌ای، یکی از پرکاربردترین مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های غیر قطعی می‌باشد که تاکنون توسط محققان فراوانی مورد استفاده قرار گرفته است [۴]. از این رویکرد در شرایطی استفاده می‌شود که تصمیم‌گیرنده برای هر یک از داده‌ها به جای یک عدد قطعی، یک بازه در اختیار داشته باشد. لازم به ذکر است که در برخی موارد ممکن است که کران‌های ابتدایی و انتهایی داده‌ها نیز خود دارای مقادیر نادقیق و حدودی باشند. در چنین شرایطی نیاز به ارایه و بهره‌گیری از رویکردی است که علاوه بر حفظ مفهوم کارایی بازه‌ای با استفاده از روش برنامه‌ریزی بازه‌ای، قابلیت تنظیم بازه مربوط به کارایی را با توجه به میزان محافظه کاری و سخت‌گیری تصمیم‌گیرنده در مورد دقیق بودن کران های پایین و بالا را نیز دارا باشد. پیشرفت‌های اخیر در بهینه‌سازی استوار فرصتی را برای توسعه الگوهای تحلیل پوششی داده‌های استوار فراهم آورده است که می‌توانند در ارایه مدل مذکور مفید واقع شوند. در ادامه برخی از مهم‌ترین مطالعات خارجی و داخلی صورت گرفته در این حوزه به ترتیب ارایه می‌گردند.

سجادی و عمرانی [۵] به عنوان پژوهشگران پیشگام این حوزه، به ارایه مدل تحلیل پوششی داده‌های استوار برای مقابله با عدم قطعیت موجود در خروجی ها با هدف ارزیابی عملکرد شرکت های توزیع برق در ایران پرداختند. سجادی و عمرانی [۶] مدل خود راه انداز استوار تحلیل پوششی داده‌ها را برای محاسبه کارایی شرکت‌های مخابراتی در ایران ارایه نمودند. روغنیان و فروغی [۷] به بررسی کارایی فرودگاه های منطقه‌ای ایران با استفاده از مدل استوار تحلیل پوششی داده‌ها پرداخته‌اند. چنگ لو [۸] با استفاده از مدل استوار تحلیل پوششی داده‌ها به ارزیابی عملکرد الگوریتم های فرا ابتکاری پرداخته است.

مردانی و سالار پور [۹] با هدف ارزیابی توانایی تولید سیب زمینی در مناطق مختلف ایران از مدل استوار تحلیل پوششی داده ها استفاده نموده‌اند. آتیشی و گلپینار [۱۰] به ارزیابی عملکرد تولید روغن زیتون با در نظر گرفتن عدم قطعیت موجود در داده‌ها پرداخته‌اند. ربانی و همکاران [۱۱]، مدل تحلیل پوششی داده‌های استوار بازه‌ای بوت استرپ را با هدف ارزیابی عملکرد و رتبه‌بندی بیمارستان ها ارایه نموده اند. اسفندیاری و همکاران [۱۲] به ارایه مدل تحلیل پوششی داده‌های دو مرحله ای استوار با قابلیت استفاده در حضور داده‌های گسسته پرداخته‌اند.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-04]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.2.1.2]

زاهدی سرشت و همکاران [۱۳] نیز با بهره گیری از رویکرد بهینه‌سازی استوار مبتنی بر سناریو به استوارسازی مدل تحلیل پوششی داده‌ها پرداخته‌اند. یوسفی و همکاران [۱۴]، اقدام به اولویت‌بندی ریسک های حوزه HSE با استفاده از رویکرد ترکیبی FMEA و تحلیل پوششی داده‌های استوار در حضور خروجی‌های نامطلوب نموده‌اند. امیرخان و همکاران [۱۵]، به ارایه یک تحلیل پوششی داده‌های غیر قطعی نوین با بهره گیری از رویکرد ترکیبی فازی – استوار پرداخته‌اند.

صلاحی و همکاران [۱۶]، اقدام به استوارسازی مدل تحلیل پوششی داده‌ها تحت بازده به مقیاس ثابت نموده‌اند. پیکانی و روغنیان [۱۷]، از مدل تحلیل پوششی داده‌های استوار برای تشکیل سبد سرمایه تحت عدم قطعیت داده‌ها، استفاده نموده‌اند. صالحی و نوری [۱۸]، با بهره گیری از رویکرد تحلیل پوششی داده‌های استوار، اقدام به بهینه‌سازی سبد مشتریان در تخصیص بودجه بازاریابی کرده‌اند. عرب مالدار و حسین زاده سلجوقی [۱۹] به استوارسازی مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها برای شناسایی واحدهای دارای بدترین عملکرد پرداخته‌اند.

همان طور که پیش‌تر نیز مطرح شد، هدف از مقاله پیش رو، ارایه مدل استوار تحلیل پوششی داده‌های بازه‌ای برای اندازه‌گیری کارایی در شرایط وجود عدم قطعیت بازه‌ای مضاعف می‌باشد. بدین صورت که علاوه بر بازه‌ای بودن داده‌ها، ابتدا و انتهای بازه‌ی مربوط به هر یک از داده‌ها نیز دارای عدم قطعیت می‌باشند. ساختار مقاله در ادامه بدین شرح است که در بخش ۲ به معرفی مدل های تحلیل پوششی داده‌های بازه‌ای در هر دو فرم پوششی و مضربی با فرض بازده به مقیاس متغیر و رویکرد ورودی محور پرداخته می‌شود. سپس در بخش ۳ مدل استوار تحلیل پوششی داده‌های بازه‌ای ارایه می‌گردد. در بخش ۴ نیز به بررسی و تحلیل نتایج حاصل از حل مدل‌های پیشنهادی پژوهش با استفاده از مثال عددی پرداخته می‌شود. در نهایت نیز در بخش ۵ نتیجه گیری و پیشنهادهای آتی ارایه می‌گردد.

۲ مدل تحلیل پوششی داده‌های بازه‌ای

در این بخش به معرفی مدل های تحلیل پوششی داده‌های بازه‌ای ارایه شده توسط دسپوتیس و اسمیرلیس [۴] با فرض بازده به مقیاس ثابت و رویکرد ورودی محور در هر دو فرم مضربی و پوششی پرداخته می‌شود. لازم به ذکر است که s خروجی، m ورودی و n واحد تصمیم‌گیرنده وجود دارد که اندیس های r، i، j و o به ترتیب مربوط به خروجی‌ها، ورودی‌ها، واحدهای تصمیم‌گیرنده و واحد تحت بررسی می‌باشند. هم چنین u_r نشان‌دهنده وزن خروجی rام و v_i نشان دهنده وزن ورودی iام است. با در نظر گرفتن داده‌های ورودی و خروجی به صورت $\tilde{x}\in[x^L, x^U]$ و $\tilde{y}\in[y^L, y^U]$ مدل غیر قطعی تحلیل پوششی داده‌ها در فرم مضربی به صورت زیر خواهد بود:

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-04]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.2.1.2]

$$
\begin{aligned}
&Max \ \sum_{r=1}^{s} \tilde{y}_{ro} u_r && (1)\\
&s.t. \ \sum_{r=1}^{s} \tilde{y}_{rj} u_r - \sum_{i=1}^{m} \tilde{x}_{ij} v_i \le 0, \quad \forall j,\\
&\sum_{i=1}^{m} \tilde{x}_{io} v_i = 1,\\
&u_r, v_i \ge 0, \quad \forall r, i.
\end{aligned}
$$

با توجه به اینکه داده‌ها دارای کران بالا و پایین می‌باشند، از این رو کارایی واحدها نیز دارای کران بالا و پایین است که کران پایین و بالای کارایی در مدل CCR بازه‌ای ورودی محور دارای فرم مضربی به ترتیب از طریق مدل‌های (۲) و (۳) محاسبه می‌گردند:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_o^L = Max \ \sum_{r=1}^{s} y_{ro}^L u_r && (2)\\
&s.t. \ \sum_{r=1}^{s} y_{rj}^U u_r - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^L v_i \le 0, \quad \forall j \ne o,\\
&\sum_{r=1}^{s} y_{ro}^L u_r - \sum_{i=1}^{m} x_{io}^U v_i \le 0,\\
&\sum_{i=1}^{m} x_{io}^U v_i = 1,\\
&u_r, v_i \ge 0, \quad \forall r, i.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\alpha_o^U = Max \ \sum_{r=1}^{s} y_{ro}^U u_r && (3)\\
&s.t. \ \sum_{r=1}^{s} y_{rj}^L u_r - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^U v_i \le 0, \quad \forall j \ne o,\\
&\sum_{r=1}^{s} y_{ro}^U u_r - \sum_{i=1}^{m} x_{io}^L v_i \le 0,\\
&\sum_{i=1}^{m} x_{io}^L v_i = 1,\\
&u_r, v_i \ge 0, \quad \forall r, i.
\end{aligned}
$$

همانند مدل (۱)، با در نظر گرفتن داده‌های ورودی و خروجی به صورت $\tilde{x} \in [x^L, x^U]$ و $\tilde{y} \in [y^L, y^U]$ مدل غیر قطعی تحلیل پوششی داده‌ها در فرم پوششی به صورت زیر خواهد بود:

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-04]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.2.1.2]

$$Min \ \ \theta \qquad (۴)$$

$$s.t. \ \ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \tilde{x}_{ij} \le \theta \tilde{x}_{io} , \ \ \forall i,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \tilde{y}_{rj} \ge \tilde{y}_{ro} , \ \ \forall r,$$

$$\lambda_j \ge 0, \ \ \forall j.$$

هم چنین کران پایین و بالای کارایی در مدل CCR بازه‌ای ورودی محور دارای فرم پوششی به ترتیب از طریق مدل‌های (۵) و (۶) محاسبه می‌گردند:

$$\beta_o^L = Min \ \ \theta \qquad (۵)$$

$$s.t. \ \ \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq o}}^{n} \lambda_j x_{ij}^L + \lambda_o x_{io}^U \le \theta x_{io}^U , \ \ \forall i,$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq o}}^{n} \lambda_j y_{rj}^U + \lambda_o y_{ro}^L \ge y_{ro}^L , \ \ \forall r,$$

$$\lambda_j \ge 0, \ \ \forall j.$$

$$\beta_o^U = Min \ \ \theta \qquad (۶)$$

$$s.t. \ \ \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq o}}^{n} \lambda_j x_{ij}^U + \lambda_o x_{io}^L \le \theta x_{io}^L , \ \ \forall i,$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq o}}^{n} \lambda_j y_{rj}^L + \lambda_o y_{ro}^U \ge y_{ro}^U , \ \ \forall r,$$

$$\lambda_j \ge 0, \ \ \forall j.$$

حال پس از معرفی و ارایه مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های بازه‌ای، در بخش بعدی به استوارسازی آن‌ها با در نظر گرفتن عدم قطعیت مضاعف در کران‌های مربوط به داده‌های خروجی پرداخته می‌شود.

۳ مدل استوار تحلیل پوششی داده‌های بازه‌ای

اکنون پس از مشخص نمودن مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های مورد استفاده در این پژوهش، به انتخاب رویکرد استواری مورد نظر از میان رویکردهای مختلف استواری، با توجه به نقاط ضعف و قوت آن‌ها برای برخورد

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-04]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.2.1.2]

جداگانه با عدم قطعیت موجود در ابتدا و انتهای داده‌ها، پرداخته می‌شود. رویکرد استوار سویستر [۲۰] دارای محافظت بالا، در عمل خیلی محافظه‌کارانه و در آنالیز حساسیت، جواب استوار تابع هدف خیلی بدتر از جواب بهینه مساله اسمی می‌باشد. جهت برطرف کردن این مشکل، بن ـ تال و نمیروفسکی [۲۱] مدل بهینه‌سازی استواری را ارایه کردند که قابلیت کنترل محافظه کاری را دارد؛ اما با توجه به اینکه مدل استوار حاصل از این رویکرد، یک مساله غیرخطی از نوع مخروطی مرتبه دوم است، پیچیدگی مساله را بالا می‌برد. بدین صورت که یک مدل خطی با رویکرد بن ـ تال و نمیروفسکی تبدیل به یک مدل غیر خطی می‌گردد. بدین ترتیب برتسیماس و سیم [۲۲] برای مدل‌سازی عدم قطعیت داده‌ها، روش جدیدی ارایه کردند که مشکلات رویکردهای استوار پیشین را مرتفع ساخت. برای آشنایی با رویکرد استوار برتسیماس و سیم [۲۲]، محدودیت iام مساله اسمی زیر را به صورت $a_i'x \le b_i$ در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &Max \;\; C'x && (۷)\\ &s.t. \;\; Ax \le b \\ &\quad\;\; l \le x \le u \end{aligned}$$

لازم به توضیح است که J_i مجموعه ضرایب $a_{ij}, j \in J_i$ است که دارای عدم قطعیت می‌باشد. $\tilde{a}_{ij}, j \in J_i$ بر اساس یک توزیع همگن با میانگین برابر با a_{ij} مقدار می‌گیرد. $\tilde{a}_{ij}$ برای برای هر i در بازه $[a_{ij} - \hat{a}_{ij}, a_{ij} + \hat{a}_{ij}]$ مقدار می‌گیرد. اکنون پارامتر Γ_i معرفی می‌شود که نقش آن، تعدیل استواری مدل ارایه شده در مقابل سطح محافظه‌کاری جواب می‌باشد. با توجه به این نکات، همتای استوار محدودیت $a_i'x \le b_i$ در قالب مدل (۸) ارایه شده است:

$$\begin{aligned} &Max \;\; C'x && (۸)\\ &s.t. \;\; \sum_j a_{ij}x_j + Z_i\Gamma_i + \sum_{j\in J_i} P_{ij} \le b_i, \;\; \forall i \\ &\qquad Z_i + P_{ij} \ge \hat{a}_{ij}\, y_j, \;\; \forall i, j \in J_i \\ &\qquad -y_j \le x_j \le y_j, \;\; \forall j \\ &\qquad l_j \le x_j \le u_j, \;\; \forall j \\ &\qquad P_{ij} \ge ۰, \;\; \forall i, j \in J_i \\ &\qquad y_j \ge ۰, \;\; \forall j \\ &\qquad Z_i \ge ۰, \;\; \forall i \end{aligned}$$

مهم‌ترین ویژگی این روش این است که همتای استوار مساله خطی به صورت خطی باقی می‌ماند و هم چنین تضمین‌های احتمالی برای شدنی بودن جواب‌های مساله استوار ارایه می‌گردد. هم‌چنین در ارتباط با محافظه کاری

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-04]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.2.1.2]

جواب‌های استوار می‌توان به این نکته اشاره کرد که در این متدولوژی قابلیت کنترل درجه استواری جواب وجود دارد. اگر $\Gamma_i = ۰$ باشد، هیچ حفاظتی در برابر عدم اطمینان وجود ندارد و به عبارتی محدودیت‌ها همانند مسأله قطعی است. اگر $\Gamma_i = |J_i|$ محدودیت iام بیش‌ترین سطح حفاظت را در برابر عدم قطعیت دارد و مدل تبدیل به مدل سویستر خواهد شد.

در ادامه مدل های استوار تحلیل پوششی داده‌های بازه‌ای پژوهش با استفاده از رویکرد بهینه‌سازی استوار برتسیماس و سیم [۲۲] ارایه می‌گردند. لازم به توضیح است که در ارایه مدل مذکور، تنها مقادیر ابتدایی و انتهایی خروجی‌ها غیرقطعی می‌باشند. به عبارت دیگر مقادیر مربوط به y^L و y^U دارای عدم قطعیت به صورت $\tilde{y}^L \in [y^L - \hat{y}^L, y^L + \hat{y}^L]$ و $\tilde{y}^U \in [y^U - \hat{y}^U, y^U + \hat{y}^U]$ می‌باشند. در واقع مقادیر ابتدایی و انتهایی خروجی‌ها در بخش پیشین، خود نیز نادقیق می‌باشند. با توجه به این نکات و توضیحات، مدل استوار تحلیل پوششی داده‌های بازه‌ای با فرض بازده به مقیاس ثابت و رویکرد ورودی محور در فرم مضربی برای محاسبه کران پایین کارایی واحد تصمیم‌گیرنده تحت بررسی $(RCCR_M^L)$ به صورت مدل (۹) می‌باشد:

$$\alpha_o^L = Max\ \varphi \qquad (۹)$$

$$\begin{aligned}
s.t.\ & -\sum_{r=۱}^{s} y_{ro}^L u_r + Z_0\Gamma_0 + \sum_{r=۱}^{s} P_{0r} \le -\varphi, \\
& \sum_{r=۱}^{s} y_{rj}^U u_r - \sum_{i=۱}^{m} x_{ij}^L v_i + Z_j\Gamma_j + \sum_{r=۱}^{s} P_{jr} \le ۰, \quad \forall j \ne o, \\
& \sum_{r=۱}^{s} y_{ro}^L u_r - \sum_{i=۱}^{m} x_{io}^U v_i + Z_{n+۱}\Gamma_{n+۱} + \sum_{r=۱}^{s} P_{n+۱r} \le ۰, \\
& Z_0 + P_{0r} \ge \delta\, y_{ro}^L\, u_r, \quad \forall r, \\
& Z_j + P_{jr} \ge \delta\, y_{rj}^U\, u_r, \quad \forall r, \forall j \ne o, \\
& Z_{n+۱} + P_{n+۱r} \ge \delta\, y_{ro}^L\, u_r, \quad \forall r, \\
& \sum_{i=۱}^{m} x_{io}^U v_i = ۱, \\
& Z_0, P_{0r} \ge ۰, \quad \forall r, \\
& Z_j, P_{jr} \ge ۰, \quad \forall j, r, \\
& Z_{n+۱}, P_{n+۱r} \ge ۰, \quad \forall r, \\
& u_r, v_i \ge ۰, \quad \forall r, i.
\end{aligned}$$

قضیه (۱): مدل (۹) همواره شدنی می‌باشد.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-04]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.2.1.2]

اثبات: از آنجایی که $x_0^U \neq 0$ می‌باشد؛ لذا ورودی t وجود دارد که $x_{t0}^U > 0$ است. قرار دهید $\bar{v}_t = \frac{1}{x_{t0}^U}$ و $\bar{v}_i = 0, \quad \forall i = 1,...m, \quad i \neq t$ و هم چنین $\bar{u} = 0, \bar{P} = 0, \bar{Z} = 0, \bar{\varphi} = 0$، در این صورت $\left(\bar{u}, \bar{v}, \bar{P}, \bar{Z}, \bar{\varphi}\right)$ یک جواب شدنی مدل (۹) می‌باشد.

هم چنین، مدل استوار تحلیل پوششی داده‌های بازه‌ای با فرض بازده به مقیاس ثابت و رویکرد ورودی محور در فرم مضربی برای محاسبه کران بالای کارایی واحد تصمیم‌گیرنده تحت بررسی $(RCCR_M^U)$ به صورت مدل (۱۰) می‌باشد:

$$\alpha_o^U = Max \ \varphi \qquad (10)$$

$$\begin{aligned}
s.t. \ & -\sum_{r=1}^{s} y_{ro}^U u_r + Z_0 \Gamma_0 + \sum_{r=1}^{s} P_{0r} \leq -\varphi, \\
& \sum_{r=1}^{s} y_{rj}^L u_r - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^U v_i + Z_j \Gamma_j + \sum_{r=1}^{s} P_{jr} \leq 0, \quad \forall j \neq o, \\
& \sum_{r=1}^{s} y_{ro}^U u_r - \sum_{i=1}^{m} x_{io}^L v_i + Z_{n+1} \Gamma_{n+1} + \sum_{r=1}^{s} P_{n+1r} \leq 0, \\
& Z_0 + P_{0r} \geq \delta \, y_{ro}^U \, u_r, \quad \forall r, \\
& Z_j + P_{jr} \geq \delta \, y_{rj}^L \, u_r, \quad \forall r, \forall j \neq o, \\
& Z_{n+1} + P_{n+1r} \geq \delta \, y_{ro}^U \, u_r, \quad \forall r, \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{io}^L v_i = 1, \\
& Z_0, P_{0r} \geq 0, \quad \forall r, \\
& Z_j, P_{jr} \geq 0, \quad \forall j, r, \\
& Z_{n+1}, P_{n+1r} \geq 0, \quad \forall r, \\
& u_r, v_i \geq 0, \quad \forall r, i.
\end{aligned}$$

قضیه (۲): مدل (۱۰) همواره شدنی می‌باشد.

اثبات: مشابه قضیه (۱) اثبات می گردد.

قضیه (۳): اگر α_o^L، α_o^U، $\tilde{\alpha}_o$ به ترتیب مقادیر بهینه تابع هدف مدل‌های (۹) و (۱۰) و (۱۱) باشند، و به ازای δ و Γ یکسان در تمامی مدل‌ها، رابطه $\alpha_o^L \leq \tilde{\alpha}_o \leq \alpha_o^U$ برقرار است.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-04]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.2.1.2]

$$\tilde{\alpha}_o = Max\ \varphi \qquad (۱۱)$$

$$s.t.\ -\sum_{r=۱}^{s}\tilde{y}_{ro}u_r + Z_0\Gamma_0 + \sum_{r=۱}^{s}P_{0r} \le -\varphi,$$
$$\sum_{r=۱}^{s}\tilde{y}_{rj}u_r - \sum_{i=۱}^{m}\tilde{x}_{ij}v_i + Z_j\Gamma_j + \sum_{r=۱}^{s}P_{jr} \le ۰,\ \ \forall j,$$
$$Z_0 + P_{0r} \ge \delta\,\tilde{y}_{ro}\,u_r,\ \ \forall r,$$
$$Z_j + P_{jr} \ge \delta\,\tilde{y}_{rj}\,u_r,\ \ \forall j,r,$$
$$\sum_{i=۱}^{m}\tilde{x}_{io}v_i = ۱,$$
$$Z_0, P_{0r} \ge ۰,\ \ \forall r,$$
$$Z_j, P_{jr} \ge ۰,\ \ \forall j,r,$$
$$u_r, v_i \ge ۰,\ \ \forall r,i.$$

اثبات: فرض کنید $\left(u^*,v^*,P^*,Z^*,\varphi^*\right)$ جواب بهینه مدل (۹) باشد، نشان می‌دهیم این جواب، یک جواب شدنی مدل (۱۱) است، با توجه به اینکه $-\sum_{r=۱}^{s}\tilde{y}_{ro}u_r^* + Z_0^*\Gamma_0 + \sum_{r=۱}^{s}P_{r0}^* \le -\varphi^*$ و $-\sum_{r=۱}^{s}y_{ro}^{L}u_r^* + Z_0^*\Gamma_0 + \sum_{r=۱}^{s}P_{r0}^* \le -\sum_{r=۱}^{s}\tilde{y}_{ro}u_r^* + Z_0^*\Gamma_0 + \sum_{r=۱}^{s}P_{r0}^*$ می‌باشد؛ لذا رابطه $\alpha_o^L \le \tilde{\alpha}_o$ برقرار است. به صورت مشابه نیز ثابت می‌شود که $\tilde{\alpha}_o \le \alpha_o^U$ می‌باشد.

هم چنین، مدل استوار تحلیل پوششی داده‌های بازه‌ای با فرض بازده به مقیاس ثابت و رویکرد ورودی محور در فرم پوششی برای محاسبه کران پایین کارایی واحد تصمیم‌گیرنده تحت بررسی $(RCCR_E^L)$ به صورت مدل (۱۲) می‌باشد:

$$\beta_o^L = Min\ \theta \qquad (۱۲)$$

$$S.t.\ \ \sum_{\substack{j=۱\\ j\ne o}}^{n}\lambda_j x_{ij}^L + \lambda_o x_{io}^U \le \theta x_{io}^U,\ \ \forall i,$$
$$-\sum_{\substack{j=۱\\ j\ne o}}^{n}\lambda_j y_{rj}^U - \lambda_o y_{ro}^L + y_{ro}^L + Z_r\Gamma_r + \sum_{\substack{j=۱\\ j\ne o}}^{n}P_{jr} + P_{۰r} + P_{n+۱r} \le ۰,\ \ \forall r,$$
$$Z_r + P_{jr} \ge \delta\,y_{rj}^U\,\lambda_j,\ \ \forall r, j\ne o,$$
$$Z_r + P_{0r} \ge \delta\,y_{ro}^L\,\lambda_o,\ \ \forall r,$$
$$Z_r + P_{n+۱r} \ge \delta\,y_{ro}^L,\ \ \forall r,$$
$$Z_r \ge ۰,\ \ \forall r,$$
$$P_{0r}, P_{jr}, P_{n+۱r} \ge ۰,\ \ \forall j,r,$$
$$\lambda_j \ge ۰,\ \ \forall j.$$

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-04]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.2.1.2]

قضیه (٤): مدل (۱۲) همواره شدنی می‌باشد.

اثبات: مشابه قضیه (۱) اثبات می‌گردد.

مدل استوار تحلیل پوششی داده‌های بازه‌ای با فرض بازده به مقیاس ثابت و رویکرد ورودی محور در فرم پوششی برای محاسبه کران بالای کارایی واحد تصمیم‌گیرنده تحت بررسی $(RCCR_E^U)$ به صورت مدل (۱۳) می‌باشد:

$$\beta_o^U = Min\ \theta \qquad (۱۳)$$

$$S.t.\quad \sum_{\substack{j=1\\ j\neq o}}^{n} \lambda_j x_{ij}^U + \lambda_o x_{io}^L \le \theta x_{io}^L,\quad \forall i,$$

$$-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq o}}^{n} \lambda_j y_{rj}^L - \lambda_o y_{ro}^U + y_{ro}^U + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq o}}^{n} P_{jr} + P_{0r} + P_{n+1r} \le 0,\quad \forall r,$$

$$Z_r + P_{jr} \ge \delta\, y_{rj}^L\, \lambda_j,\quad \forall r, j \neq o,$$

$$Z_r + P_{.r} \ge \delta\, y_{ro}^U\, \lambda_o,\quad \forall r,$$

$$Z_r + P_{n+1r} \ge \delta\, y_{ro}^U,\quad \forall r,$$

$$Z_r \ge 0,\quad \forall r,$$

$$P_{0r}, P_{jr}, P_{n+1r} \ge 0,\quad \forall j, r,$$

$$\lambda_j \ge 0,\quad \forall j.$$

قضیه (۵): مدل (۱۳) همواره شدنی می‌باشد.

اثبات: مشابه قضیه (۱) اثبات می‌گردد.

قضیه (٦): اگر β_o^L، β_o^U به ترتیب مقادیر بهینه تابع هدف مدل‌های (۱۲) و (۱۳) باشند، آن گاه کارایی مدل (۱۴) به ازای δ و Γ یکسان در تمامی مدل‌ها، از رابطه $\beta_o^L \le \tilde{\beta}_o \le \beta_o^U$ پیروی می‌نماید.

$$\tilde{\beta}_o = Min\ \theta \qquad (۱۴)$$

$$S.t.\quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \tilde{x}_{ij} \le \theta \tilde{x}_{io},\quad \forall i,$$

$$-\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \tilde{y}_{rj} + \tilde{y}_{ro} + Z_r \Gamma_r + \sum_{j=1}^{n} P_{jr} + P_{n+1r} \le 0,\quad \forall r,$$

$$Z_r + P_{jr} \ge \delta\, \tilde{y}_{rj}\, \lambda_j,\quad \forall r, j,$$

$$Z_r + P_{n+1r} \ge \delta\, \tilde{y}_{ro},\quad \forall r,$$

$$Z_r \ge 0,\quad \forall r,$$

$$P_{jr}, P_{n+1r} \ge 0,\quad \forall j, r,$$

$$\lambda_j \ge 0,\quad \forall j.$$

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-04]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.2.1.2]

اثبات: مشابه قضیه (۳) اثبات می‌گردد.

لازم به ذکر است که در مدل‌های استوار ارایه شده در این بخش، δ درصد انحرافی است که می‌تواند در ابتدا و انتهای داده‌های بازه‌ای رخ دهد و با توجه به نظر تصمیم‌گیرنده لحاظ می‌شود. هم چنین پارامتر Γ میزان استواری محدودیت مورد نظر را تعیین می‌نماید که با مقداردهی و تغییر آن می‌توان میزان عدم قطعیت در مدل را تنظیم نمود.

٤ مثال عددی و نتایج محاسباتی

در این بخش با استفاده از یک مثال عددی، به ارزیابی و تحلیل نتایج مدل‌های استوار ارایه شده در بخش پیشین پژوهش پرداخته می‌شود. لازم به ذکر است بدین منظور از مثال عددی مورد استفاده در پژوهش جهانشاهلو و همکاران [۲۳] شامل اطلاعات مربوط به دو ورودی و دو خروجی بازه‌ای برای پنج واحد تصمیم‌گیرنده، استفاده می‌شود. جدول ۱ نشان دهنده داده‌های مربوط به مثال عددی مذکور می‌باشد:

جدول ۱. داده‌های مربوط به مثال عددی شامل دو ورودی و دو خروجی بازه‌ای

واحدها	ورودی‌ها				خروجی‌ها			
	x_1^L	x_1^U	x_2^L	x_2^U	y_1^L	y_1^U	y_2^L	y_2^U
A	۱۲	۱۵	۰/۲۱	۰/۴۸	۱۳۸	۱۴۴	۲۱	۲۲
B	۱۰	۱۷	۰/۱	۰/۷	۱۴۳	۱۵۹	۲۸	۳۵
C	۴	۱۲	۰/۱۶	۰/۳۵	۱۵۷	۱۹۸	۲۱	۲۹
D	۱۹	۲۲	۰/۱۲	۰/۱۹	۱۵۸	۱۸۱	۲۱	۲۵
E	۱۴	۱۵	۰/۰۶	۰/۰۹	۱۵۷	۱۶۱	۲۸	۴۰

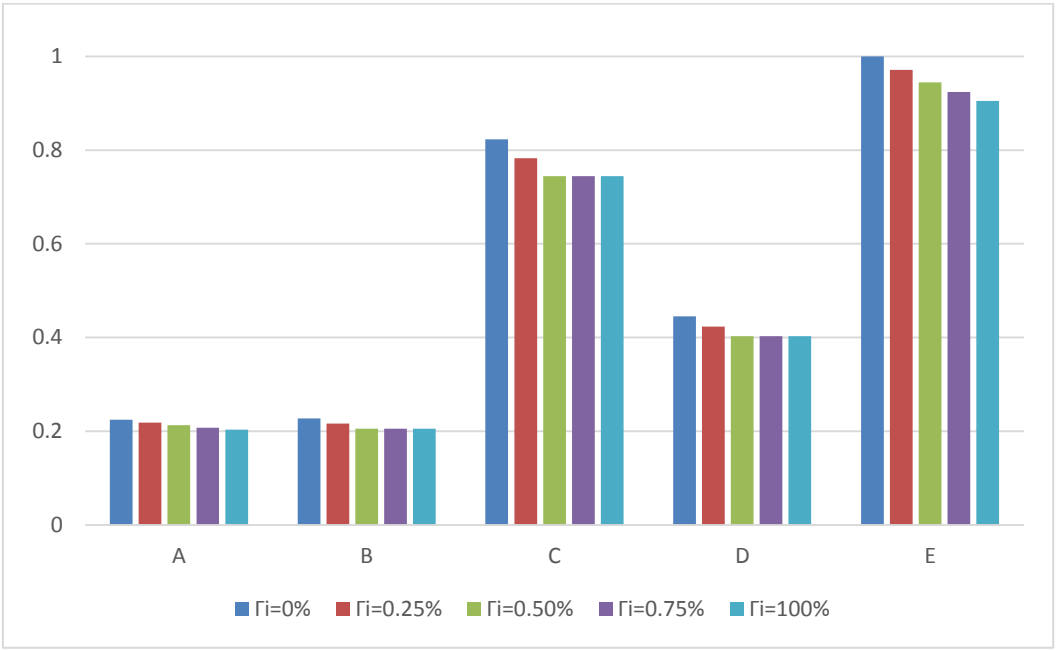
اکنون مدل‌های ارایه شده در پژوهش شامل مدل‌های $\mathrm{RCCR}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{L}}$، $\mathrm{RCCR}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{U}}$، $\mathrm{RCCR}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{L}}$ و $\mathrm{RCCR}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{U}}$ تحت مقادیر مختلف گاما (۰٪، ۲۵٪، ۵۰٪، ۷۵٪ ، ۱۰۰٪) و درصد نوسان‌های مختلف (۰ ، ۰/۰۱، ۰/۰۵ ، ۰/۱) حل می‌گردند. در ادامه در جداول ۲، ۳، ۴ و ۵ به ترتیب نتایج حاصل از حل مدل‌های (۹)، (۱۰)، (۱۲) و (۱۳) تحت شرایط مختلف عدم قطعیت ارایه شده است. هم چنین در شکل‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ نیز روند تغییرات کران پایین و بالای کارایی برای فرم‌های مضربی و پوششی به ازای تغییرات گاما و درصد نوسان یکسان ۰/۰۵ نشان داده شده است.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-04]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.2.1.2]

جدول ۲. نتایج حاصل از اجرای مدل $RCCR_M^L$ به ازای Γ و δ مختلف

Γ	δ	واحدها				
		A	B	C	D	E
(۰) ٪۰	۰	۰/۲۲۴۴۶	۰/۲۲۷۱۸	۰/۸۲۲۸۵	۰/۴۴۵۲۷	۱/۰۰۰۰۰
	۰/۰۱	۰/۲۲۲۸۰	۰/۲۲۴۹۲	۰/۸۱۴۶۶	۰/۴۴۰۸۴	۰/۹۹۴۱۸
(۰/۵) ٪۲۵	۰/۰۵	۰/۲۱۸۳۱	۰/۲۱۶۱۰	۰/۷۸۲۷۱	۰/۴۲۳۵۵	۰/۹۷۱۴۴
	۰/۱	۰/۲۱۲۸۲	۰/۲۰۵۵۴	۰/۷۴۴۴۸	۰/۴۰۲۸۶	۰/۹۴۴۲۵
	۰/۰۱	۰/۲۲۱۶۷	۰/۲۲۲۶۸	۰/۸۰۶۵۶	۰/۴۳۶۴۵	۰/۹۸۸۴۱
(۱) ٪۵۰	۰/۰۵	۰/۲۱۲۸۲	۰/۲۰۵۵۴	۰/۷۴۴۴۸	۰/۴۰۲۸۶	۰/۹۴۴۲۵
	۰/۱	۰/۲۰۲۵۵	۰/۱۸۵۸۸	۰/۶۷۳۲۴	۰/۳۶۴۳۱	۰/۸۹۳۵۷
	۰/۰۱	۰/۲۲۰۵۹	۰/۲۲۲۶۸	۰/۸۰۶۵۶	۰/۴۳۶۴۵	۰/۹۸۴۲۸
(۱/۵) ٪۷۵	۰/۰۵	۰/۲۰۷۶۶	۰/۲۰۵۵۴	۰/۷۴۴۴۸	۰/۴۰۲۸۶	۰/۹۲۴۰۲
	۰/۱	۰/۱۹۲۵۳	۰/۱۸۵۸۸	۰/۶۷۳۲۴	۰/۳۶۴۳۱	۰/۸۵۴۰۸
	۰/۰۱	۰/۲۲۰۰۱	۰/۲۲۲۶۸	۰/۸۰۶۵۶	۰/۴۳۶۴۵	۰/۹۸۰۲۰
(۲) ٪۱۰۰	۰/۰۵	۰/۲۰۳۰۸	۰/۲۰۵۵۴	۰/۷۴۴۴۸	۰/۴۰۲۸۶	۰/۹۰۴۷۶
	۰/۱	۰/۱۸۳۶۵	۰/۱۸۵۸۸	۰/۶۷۳۲۴	۰/۳۶۴۳۱	۰/۸۱۸۱۸



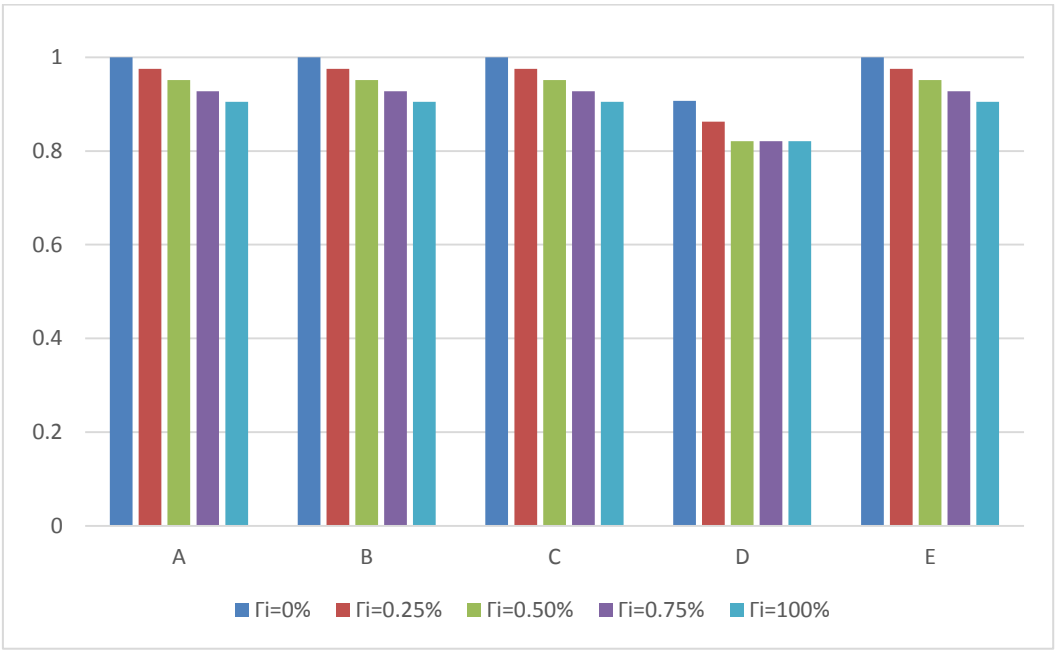
شکل ۱. روند تغییرات کران پایین کارایی در مدل استوار CCR بازه‌ای در فرم مضربی به ازای Γ مختلف و $\delta = ۰/۰۵$

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-04]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.2.1.2]

جدول ۳. نتایج حاصل از اجرای مدل $RCCR_M^U$ به ازای Γ و δ مختلف

Γ	δ	واحدها				
		A	B	C	D	E
٪۰ (۰)	۰	۱/۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰	۰/۹۰۷۰۷	۱/۰۰۰۰۰
	۰/۰۱	۰/۹۹۵۰۱	۰/۹۹۵۰۱	۰/۹۹۵۰۱	۰/۸۹۸۰۴	۰/۹۹۵۰۱
٪۲۵ (۰/۵)	۰/۰۵	۰/۹۷۵۳۱	۰/۹۷۵۳۱	۰/۹۷۵۳۱	۰/۸۶۲۸۲	۰/۹۷۵۳۱
	۰/۱	۰/۹۵۱۲۲	۰/۹۵۱۲۲	۰/۹۵۱۲۲	۰/۸۲۰۶۸	۰/۹۵۱۲۲
	۰/۰۱	۰/۹۹۰۰۵	۰/۹۹۰۰۵	۰/۹۹۰۰۵	۰/۸۸۹۱۰	۰/۹۹۰۰۵
٪۵۰ (۱)	۰/۰۵	۰/۹۵۱۲۲	۰/۹۵۱۲۲	۰/۹۵۱۲۲	۰/۸۲۰۶۸	۰/۹۵۱۲۲
	۰/۱	۰/۹۰۴۷۶	۰/۹۰۴۷۶	۰/۹۰۴۷۶	۰/۷۴۲۱۵	۰/۹۰۴۷۶
	۰/۰۱	۰/۹۸۵۱۱	۰/۹۸۵۱۱	۰/۹۸۵۱۱	۰/۸۸۹۱۰	۰/۹۸۵۱۱
٪۷۵ (۱/۵)	۰/۰۵	۰/۹۲۷۷۱	۰/۹۲۷۷۱	۰/۹۲۷۷۱	۰/۸۲۰۶۸	۰/۹۲۷۷۱
	۰/۱	۰/۸۶۰۴۷	۰/۸۶۰۴۷	۰/۸۶۰۴۷	۰/۷۴۲۱۵	۰/۸۶۰۴۷
	۰/۰۱	۰/۹۸۰۲۰	۰/۹۸۰۲۰	۰/۹۸۰۲۰	۰/۸۸۹۱۰	۰/۹۸۰۲۰
٪۱۰۰ (۲)	۰/۰۵	۰/۹۰۴۷۶	۰/۹۰۴۷۶	۰/۹۰۴۷۶	۰/۸۲۰۶۸	۰/۹۰۴۷۶
	۰/۱	۰/۸۱۸۱۸	۰/۸۱۸۱۸	۰/۸۱۸۱۸	۰/۷۴۲۱۵	۰/۸۱۸۱۸



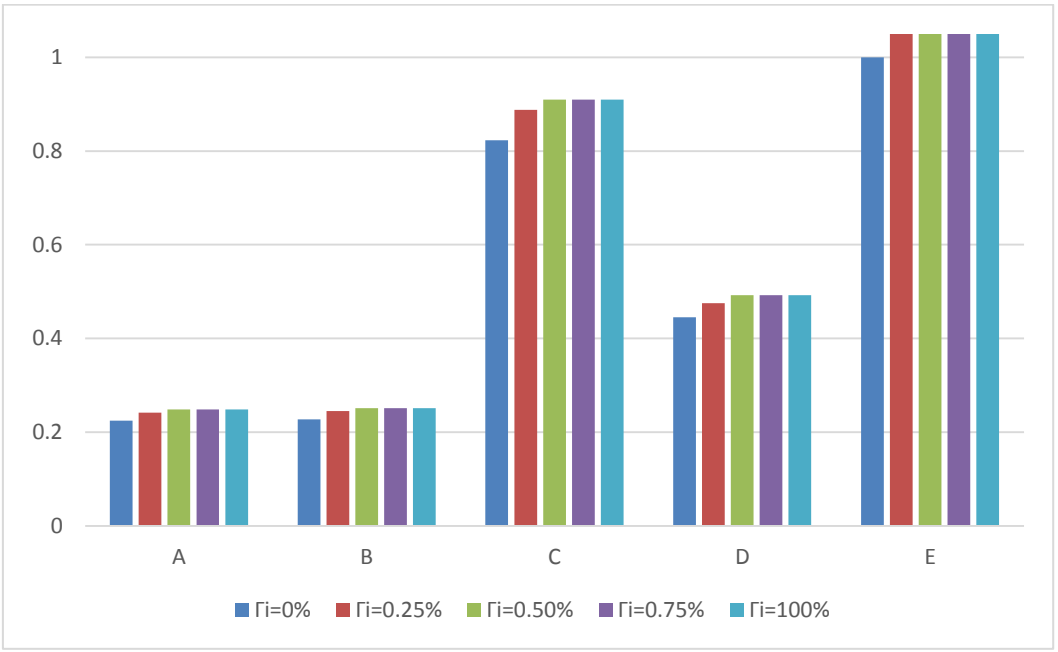
شکل ۲. روند تغییرات کران بالای کارایی در مدل استوار CCR بازه‌ای در فرم مضربی به ازای Γ مختلف و $\delta = ۰/۰۵$

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-04]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.2.1.2]

جدول ٤. نتایج حاصل از اجرای مدل $\mathrm{RCCR}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{L}}$ به ازای Γ و δ مختلف

Γ	δ	واحدها				
		A	B	C	D	E
(۰) ٪۰	۰	۰/۲۲۴۴۶	۰/۲۲۷۱۸	۰/۸۲۲۸۵	۰/۴۴۵۲۷	۱/۰۰۰۰۰
	۰/۰۱	۰/۲۲۷۷۷	۰/۲۳۰۶۲	۰/۸۳۵۳۲	۰/۴۵۱۱۴	۱/۰۱۵۱۵
(۰/۵) ٪۲۵	۰/۰۵	۰/۲۴۱۳۸	۰/۲۴۵۱۲	۰/۸۸۷۸۱	۰/۴۷۴۹۷	۱/۰۷۸۹۵
	۰/۱	۰/۲۶۰۰۵	۰/۲۶۵۰۴	۰/۹۵۹۹۹	۰/۵۰۵۶۳	۱/۱۶۴۵۷
	۰/۰۱	۰/۲۲۸۹۷	۰/۲۳۱۷۷	۰/۸۳۹۴۷	۰/۴۵۴۲۷	۱/۰۲۰۲۰
(۱) ٪۵۰	۰/۰۵	۰/۲۴۸۰۸	۰/۲۵۱۰۹	۰/۹۰۹۴۷	۰/۴۹۲۱۴	۱/۱۰۵۲۶
	۰/۱	۰/۲۷۴۲۸	۰/۲۷۷۶۷	۱/۰۰۵۷۱	۰/۵۴۳۴۸	۱/۲۲۲۲۲
	۰/۰۱	۰/۲۲۸۹۹	۰/۲۳۱۷۷	۰/۸۳۹۴۷	۰/۴۵۴۲۷	۱/۰۲۰۲۰
(۱/۵) ٪۷۵	۰/۰۵	۰/۲۴۸۰۸	۰/۲۵۱۰۹	۰/۹۰۹۴۷	۰/۴۹۲۱۴	۱/۱۰۵۲۶
	۰/۱	۰/۲۷۴۳۴	۰/۲۷۷۶۷	۱/۰۰۵۷۱	۰/۵۴۴۴۲	۱/۲۲۲۲۲
	۰/۰۱	۰/۲۲۸۹۹	۰/۲۳۱۷۷	۰/۸۳۹۴۷	۰/۴۵۴۲۷	۱/۰۲۰۲۰
(۲) ٪۱۰۰	۰/۰۵	۰/۲۴۸۰۸	۰/۲۵۱۰۹	۰/۹۰۹۴۷	۰/۴۹۲۱۴	۱/۱۰۵۲۶
	۰/۱	۰/۲۷۴۳۴	۰/۲۷۷۶۷	۱/۰۰۵۷۱	۰/۵۴۴۴۲	۱/۲۲۲۲۲



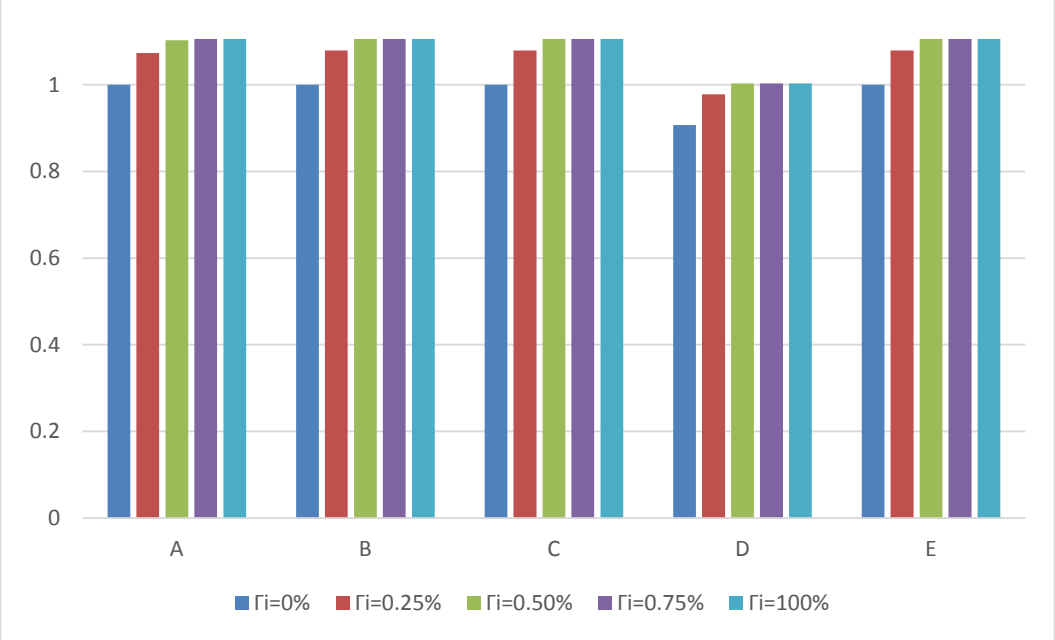
شکل ۳. روند تغییرات کران پایین کارایی در مدل استوار CCR بازه‌ای در فرم پوششی به ازای Γ مختلف و $\delta = ۰/۰۵$

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-04]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.2.1.2]

جدول ۵. نتایج حاصل از اجرای مدل RCCR_{E}^{U} به ازای Γ و δ مختلف

Γ	δ	واحدها				
		A	B	C	D	E
(۰) ٪۰	۰	۱/۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰	۰/۹۰۷۰۷	۱/۰۰۰۰۰
	۰/۰۱	۱/۰۱۵۱۵	۱/۰۱۵۱۵	۱/۰۱۵۱۵	۰/۹۲۰۶۶	۱/۰۱۵۱۵
(۰/۵) ٪۲۵	۰/۰۵	۱/۰۷۸۹۵	۱/۰۷۸۹۵	۱/۰۷۸۹۵	۰/۹۷۷۸۰	۱/۰۷۸۹۵
	۰/۱	۱/۱۶۶۷	۱/۱۶۶۷	۱/۱۶۶۷	۱/۰۵۵۴۶	۱/۱۶۶۷
	۰/۰۱	۱/۰۲۰۲۰	۱/۰۲۰۲۰	۱/۰۲۰۲۰	۰/۹۲۵۳۹	۱/۰۲۰۲۰
(۱) ٪۵۰	۰/۰۵	۱/۱۰۵۲۶	۱/۱۰۵۲۶	۱/۱۰۵۲۶	۱/۰۰۲۵۵	۱/۱۰۵۲۶
	۰/۱	۱/۲۲۲۲۲	۱/۲۲۲۲۲	۱/۲۲۲۲۲	۱/۱۰۸۴۸	۱/۲۲۲۲۲
	۰/۰۱	۱/۰۲۰۲۰	۱/۰۲۰۲۰	۱/۰۲۰۲۰	۰/۹۲۵۳۹	۱/۰۲۰۲۰
(۱/۵) ٪۷۵	۰/۰۵	۱/۱۰۵۲۶	۱/۱۰۵۲۶	۱/۱۰۵۲۶	۱/۰۰۲۵۵	۱/۱۰۵۲۶
	۰/۱	۱/۲۲۲۲۲	۱/۲۲۲۲۲	۱/۲۲۲۲۲	۱/۱۰۸۴۸	۱/۲۲۲۲۲
	۰/۰۱	۱/۰۲۰۲۰	۱/۰۲۰۲۰	۱/۰۲۰۲۰	۰/۹۲۵۳۹	۱/۰۲۰۲۰
(۲) ٪۱۰۰	۰/۰۵	۱/۱۰۵۲۶	۱/۱۰۵۲۶	۱/۱۰۵۲۶	۱/۰۰۲۵۵	۱/۱۰۵۲۶
	۰/۱	۱/۲۲۲۲۲	۱/۲۲۲۲۲	۱/۲۲۲۲۲	۱/۱۰۸۶۴	۱/۲۲۲۲۲



شکل ٤. روند تغییرات کران بالای کارایی در مدل استوار CCR بازه‌ای در فرم پوششی به ازای Γ مختلف و $\delta = ۰/۰۵$

با توجه به نتایج حاصل از حل مدل استوار CCR بازه‌ای در فرم مضربی که در جداول ۲ و ۳ آورده شده اند، ملاحظه می‌شود که با افزایش Γ و δ، از آنجایی که تابع هدف مدل‌های مذکور از نوع بیشینه‌سازی می‌باشند؛ لذا مقدار تابع هدف بدتر، یعنی کم‌تر می‌گردد. هم چنین، با توجه به جداول ۴ و ۵ که نشان‌دهنده‌ی نتایج حاصل

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-04]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.2.1.2]

از حل مدل استوار CCR بازه‌ای در فرم پوششی می‌باشند، ملاحظه می‌شود که با افزایش Γ و δ، از آنجایی که تابع هدف مدل‌های مذکور از نوع کمینه‌سازی می‌باشند؛ لذا مقدار تابع هدف بدتر، یعنی بیش‌تر می‌گردد. به بیان دیگر، نتایج حاصل از مدل‌های استوار CCR در فرم مضربی و پوششی، به ترتیب دارای رویکرد بدبینانه و خوشبینانه می‌باشند که بستگی به نظر تصمیم‌گیرنده و نوع کاربرد می توان از هر یک مدل‌های مذکور بهره برد. توجه به این نکته ضروری است که اگر واحد تصمیم‌گیرنده‌ای در کران بالای مدل استوار فرم پوششی کارا نباشد؛ لذا می‌توان نتیجه گرفت که واحد مذکور از عملکرد نامطلوبی در مقایسه با دیگر واحدها برخوردار است. لازم به ذکر است که با توجه به شکل‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ مشاهده می‌شود که به ازای δ یکسان و با افزایش مقادیر Γ، نتایج مربوط به کران پایین و بالای کارایی در فرم مضربی کاهش و در فرم پوششی افزایش می‌باشد. در پایان در مورد رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده ارایه شده در مثال عددی با توجه به نتایج حاصل از حل مدل‌های بازه‌ای استوار، ملاحظه می‌شود که واحد تصمیم‌گیرنده E دارای عملکرد مناسب‌تر و مطلوب‌تر نسبت به دیگر واحدها می‌باشد و پس از آن، واحد تصمیم‌گیرنده C در رتبه بعدی قرار دارد.

۵ نتیجه‌گیری و پیشنهادات آتی

در این مقاله به بررسی چگونگی استوارسازی مدل تحلیل پوششی داده‌های بازه‌ای با استفاده از رویکرد برتسیماس و سیم [۲۲] پرداخته شد. بدین منظور مدل CCR بازه‌ای ورودی محور تحت هر دو فرم پوششی و مضربی به عنوان مدل پایه تحقیق انتخاب گردید. سپس از بین رویکردهای مختلف بهینه‌سازی استوار برای برخورد با عدم قطعیت بازه‌ای، رویکرد برتسیماس و سیم [۲۲] گزینش شده و سپس مدل‌های استوار تحلیل پوششی داده‌ها با در نظر گرفتن عدم قطعیت در خروجی‌های مدل ارایه گردیدند. در نهایت نیز با استفاده از مثال عددی ارایه شده در پژوهش جهانشاهلو و همکاران [۲۳] شامل دو ورودی و دو خروجی بازه‌ای، به بررسی نحوه عملکرد و تحلیل نتایج مدل های استوار ارایه شده در تحقیق پیش رو پرداخته شد. نتایج حاکی از آن است که استفاده از مدل های استوار تحلیل پوششی داده‌های بازه‌ای، باعث افزایش ضریب اطمینان و در نظر گرفتن عدم قطعیت مضاعف و هم چنین اثرات مثبت و منفی عدم قطعیت بر روی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده می‌باشد. در نتیجه، اطلاعات بیش‌تر و کامل‌تری در اختیار تصمیم‌گیرنده قرار می‌گیرد. هم چنین توجه به این نکته ضروری است که نتایج حاصل از حل مدل‌های استوار مضربی و پوششی به ترتیب دارای رویکرد بدبینانه و خوشبینانه می‌باشند. از این رو استفاده از مدل‌های استوار مضربی و پوششی به ترتیب برای شناسایی بهترین واحدها در بدترین شرایط و بدترین واحدها در بهترین شرایط، پیشنهاد می‌گردد. برای پیشنهادهای آتی نیز می‌توان مدل‌های ارایه شده در پژوهش را تحت عدم قطعیت مضاعف در ورودی‌ها توسعه داد. هم چنین می‌توان مدل‌های پیشنهادی پژوهش را تحت بازده به مقیاس متغیر و ماهیت خروجی نیز مدل‌سازی نمود.

منابع

[۱۶] صلاحی، م.، ترابی، ن.، جمالیان، ع.، (۱۳۹۳). استوارسازی مدل تحلیل پوششی داده های بازده به مقیاس ثابت. تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۱(۳)، ۱-۱۱.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-04]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.2.1.2]

[۱۷] پیکانی، پ.، روغنیان، ع.، (۱۳۹۴). به کارگیری تحلیل پوششی داده ها و بهینه سازی استوار در مساله ی انتخاب سبد سرمایه. تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۲(۱)، ۶۱-۷۸.

[۱۸] صالحی، م.، نوری، م.، (۱۳۹۵). بهینه‌سازی سبد مشتریان در تخصیص بودجه بازاریابی با رویکرد ترکیبی تحلیل پوششی داده‌ها و بهینه‌سازی استوار. تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۳(۴)، ۱۲۱-۱۴۰.

[۱۹] عرب مالدار، ع. ا.، حسین زاده سلجوقی، ف.، (۱۳۹۶). استوارسازی مدل‌های DEA برای شناسایی واحدهای دارای بدترین عملکرد. تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۴(۳)، ۳۵-۵۳.

[1] Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes, E., (1978). Measuring the efficiency of decision making units. European journal of operational research, 2(6), 429-444.

[2] Farrell, M. J., (1957). The measurement of productive efficiency. Journal of the Royal Statistical Society: Series A (General), 120(3), 253-281.

[3] Banker, R. D., Charnes, A., Cooper, W. W., (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. Management science, 30(9), 1078-1092.

[4] Despotis, D. K., Smirlis, Y. G., (2002). Data envelopment analysis with imprecise data. European Journal of Operational Research, 140(1), 24-36.

[5] Sadjadi, S. J., Omrani, H., (2008). Data envelopment analysis with uncertain data: An application for Iranian electricity distribution companies. Energy Policy, 36(11), 4247-4254.

[6] Sadjadi, S. J., Omrani, H., (2010). A bootstrapped robust data envelopment analysis model for efficiency estimating of telecommunication companies in Iran. Telecommunications Policy, 34(4), 221-232.

[7] Roghanian, E., Foroughi, A., (2010). An empirical study of Iranian regional airports using robust data envelopment analysis. International Journal of Industrial Engineering Computations, 1(1), 65-72.

[8] Lu, C. C., (2015). Robust data envelopment analysis approaches for evaluating algorithmic performance. Computers & Industrial Engineering, 81, 78-89.

[9] Mardani, M., Salarpour, M., (2015). Measuring technical efficiency of potato production in Iran using robust data envelopment analysis. Information Processing in Agriculture, 2(1), 6-14.

[10] Atıcı, K. B., Gülpınar, N., (2016). Robust DEA Approaches to Performance Evaluation of Olive Oil Production under Uncertainty. In Robustness Analysis in Decision Aiding, Optimization, and Analytics (pp. 299-318). Springer, Cham.

[11] Rabbani, M., Heidari, N., Farrokhi Asl, H., (2016). A Bootstrap Interval Robust Data Envelopment Analysis for Estimate Efficiency and Ranking Hospitals. Journal of Industrial Engineering and Management Studies, 3(2), 107-122.

[12] Esfandiari, M., Hafezalkotob, A., Khalili-Damghani, K., Amirkhan, M., (2017). Robust two-stage DEA models under discrete uncertain data. International Journal of Management Science and Engineering Management, 12(3), 216-224.

[13] Zahedi-Seresht, M., Jahanshahloo, G. R., Jablonsky, J., (2017). A robust data envelopment analysis model with different scenarios. Applied Mathematical Modelling, 52, 306-319.

[14] Yousefi, S., Alizadeh, A., Hayati, J., Baghery, M., (2018). HSE risk prioritization using robust DEA-FMEA approach with undesirable outputs: a study of automotive parts industry in Iran. Safety science, 102, 144-158.

[15] Amirkhan, M., Didehkhani, H., Khalili-Damghani, K., Hafezalkotob, A., (2018). Mixed uncertainties in data envelopment analysis: A fuzzy-robust approach. Expert Systems with Applications, 103, 218-237.

[20] Soyster, A. L., (1973). Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. Operations research, 21(5), 1154-1157.

[21] Ben-Tal, A., Nemirovski, A., (2000). Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data. Mathematical programming, 88(3), 411-424.

[22] Bertsimas, D., Sim, M., (2004). The price of robustness. Operations research, 52(1), 35-53.

[23] Jahanshahloo, G. R., Lofti, F. H., Moradi, M., (2004). Sensitivity and stability analysis in DEA with interval data. Applied Mathematics and computation, 156(2), 463-477.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-04]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.2.1.2]