مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال هجدهم، شماره سوم (پیاپی ۷۰)، پاییز ۰۰، ص ص ۴۸-۳۱
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

ارایه رویکردهای جدید در بهبود تعیین جواب‌های شدنی مدل برنامه‌ریزی کسری خطی بازه‌ای

فاطمه سالاری پور شریف آباد[۱]، مهدی الله دادی[۲*]، حسن میش مست نهی[۳]
۱- دانشجوی دکتری، دانشگاه سیستان و بلوچستان، گروه ریاضی کاربردی، زاهدان، ایران
۲- دانشیار، دانشگاه سیستان و بلوچستان، گروه ریاضی کاربردی، زاهدان، ایران
۳- استاد، دانشگاه سیستان و بلوچستان، گروه ریاضی کاربردی، زاهدان، ایران

رسید مقاله: ۱۰ اسفند ۱۳۹۸
پذیرش مقاله: ۴ اسفند ۱۳۹۹

چکیده
در این تحقیق، مدل برنامه‌ریزی کسری خطی بازه‌ای در نظر گرفته شده است و از آن‌جایی که این مدل یک مدل بازه‌ای است لذا به دنبال روش‌هایی هستیم که یک مجموعه جواب بهینه به دست آوریم. در این مقاله دو روش برای تعیین مجموعه جواب بهینه مدل برنامه‌ریزی کسری خطی بازه‌ای پیشنهاد می‌شود به طوری‌که این روش‌ها از دو زیر مدل تشکیل شده‌اند. جواب‌های به دست آمده از حل این دو زیر مدل یک ناحیه تشکیل می‌دهند که آن را به‌عنوان مجموعه جواب بهینه مدل برنامه‌ریزی کسری خطی بازه‌ای در نظر می‌گیریم. اگر جواب حاصل در بزرگ‌ترین ناحیه‌ی قیود بازه‌ای مدل برنامه‌ریزی کسری خطی بازه‌ای صدق کند، جواب را شدنی گویند. در روش اول، ممکن است مجموعه جواب بهینه به گونه‌ای باشد که بعضی از نقاط آن در بعضی از محدودیت‌های بزرگ‌ترین ناحیه صدق نکنند در این‌صورت از یک روش جایگزین برای بهبود مجموعه جواب بهینه استفاده می‌کنیم به طوری‌که با استفاده از روش جایگزین بتوان بخش نشدنی مجموعه جواب بهینه روش اول را حذف کرد و مجموعه جواب بهینه‌ای شدنی را به دست آورد. در روش دوم، برای تضمین این‌که مجموعه جواب بهینه، شدنی باشد یک محدودیت اضافی به زیر مدل دوم اضافه می‌شود و مجموعه جواب بهینه‌ای شدنی را به‌دست می‌آوریم.

کلمات کلیدی: برنامه‌ریزی کسری خطی بازه‌ای، شدنی بودن، عدم قطعیت، مجموعه جواب بهینه.

۱ مقدمه
از دیرباز مسایل برنامه‌ریزی خطی در زمینه‌های مختلف فعالیت‌های انسانی به‌ویژه مدیریت و اقتصاد کاربردهای فراوانی داشته است و روش‌های متنوع و کارآمدی برای حل آنها معرفی شده است [۱،۲] در حالی‌که در دهه‌های گذشته، کاربردهای برنامه‌ریزی کسری چندان شناخته شده نبود. در واقع آسان‌تر بودن تحلیل و حل برنامه‌ریزی

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: m_allahdadi@math.usb.ac.ir

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.3.4.1]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.3.31]

خطی منجر به مهجور ماندن برنامه‌ریزی کسری و نادیده گرفتن کارهای اندک صورت گرفته در این زمینه گردید. از آن‌جایی که نمی‌توان تمام مسایل جهان حقیقی را در قالب‌های خطی گنجاند از این‌رو مساله برنامه‌ریزی کسری خطی در دهه ۶۰ و ۷۰ میلادی به شدت مورد توجه محققان واقع گردید و مطالعات آکادمیک برنامه‌ریزی کسری با توجه به نیاز به ایجاد مدل‌های کارآمدتر برای حل مسایل جهان حقیقی شروع شدند و کاربردها و روش‌های متنوعی برای حل آنها ارایه گردیده است [۱۰-۳].

در شاخه‌های جدید بهینه‌سازی و تحقیق در عملیات، بررسی و حل دسته‌های گوناگون برنامه‌ریزی کسری اهمیت به‌سزایی پیدا کرده است. از طرفی بالا بردن سوددهی یکی از دغدغه‌های مهم فعالیت‌های انسانی اعم از علوم انسانی، اقتصاد، ... بوده است. در بیشتر مواقع به محض اینکه مدل ریاضی سوددهی مورد توجه قرار می‌گیرد نتیجه حاصل، بهینه کردن یک کسر می‌باشد که نسبت خروجی فعالیت به ورودی آن است به‌عنوان نمونه در بسیاری از فعالیت‌ها، بهینه نمودن نسبت‌های موجودی/سرمایه، سرمایه واقعی/سرمایه لازم، وام‌های خارجی/ کل وام‌ها و ... از اهداف مهم به‌شمار می‌آیند.

انسان روزانه با مسایلی برخورد می‌کند که در آنها بهینه‌سازی یک هدف نسبت به قیود مختلف مورد نیاز می‌باشد. لذا برای رسیدن به این منظور، الگوریتم‌های مختلف و روش‌های بسیار کارایی ابداع شده است. به‌طور مختصر می‌توان به مهم‌ترین روش‌ها برای حل این‌گونه مسایل اشاره کرد از جمله در سال ۱۹۶۲، چارنز و کوپر[۱۱] نشان دادند که با یک تغییر و متغیر غیرخطی و اضافه کردن یک محدودیت جدید می‌توان یک مساله برنامه‌ریزی کسری خطی را به مدل خطی تقلیل داد در حالی‌که در سال ۱۹۶۷، دینکلباخ [۱۲] با استفاده از روش پارامتری، مساله برنامه‌ریزی کسری خطی را به مساله برنامه‌ریزی خطی تبدیل کرد بدون این‌که ناحیه شدنی تغییر کند.

نظریه سیستم‌های خاکستری یکی از روش‌های توسعه‌یافته برای مطالعه عدم قطعیت است و هم‌چنین یکی از روش‌های برتر در تجزیه و تحلیل دقیق سیستم‌ها با عدم قطعیت اطلاعات است. یک سیستم خاکستری به‌عنوان یک سیستمی تعریف می‌شودکه شامل اطلاعات غیرقطعی باشد. اگر اطلاعات واضح مربوط به یک سیستم را با رنگ سفید و اطلاعات ناشناخته با رنگ سیاه نشان داده شوند اطلاعات مربوط به اکثر سیستم‌های طبیعی، سفید یا سیاه نیستند بلکه ترکیبی از هر دو هستند و این به معنی خاکستری است. چندین نوع اعداد خاکستری وجود دارد به‌طوری‌که در میان آنها می‌توان به اعداد خاکستری بازه‌ای و یا اعداد خاکستری فازی اشاره کرد[۱۳].

نظر به اهمیت مسایل برنامه‌ریزی کسری خطی با عدم قطعیت داده‌ها، بسیاری از پژوهشگران توجه خود را به بررسی و حل این دسته از مسایل معطوف کرده‌اند. بر پایه دیدگاه فازی، ورومانی و سوماتی[۱۴] با استفاده از α-برش برای پارامترهای فازی تابع هدف وr- برش برای پارامترهای فازی محدودیت‌ها، مساله برنامه‌ریزی کسری خطی فازی (با اعداد فازی مثلثی) را به دو زیر مدل تبدیل کردند و با استفاده از حدود به‌دست آمده برای مقدار بهینه تابع هدف، تابع عضویت مقدار بهینه را ساختند. اما ابراهیم نژاد و همکارانش[۱۵] نشان دادند که این روش نیز دارای نواقصی است و همواره منجر به جواب‌های بهینه فازی نامنفی نمی‌شود. لذا روش آنها را اصلاح نمودند به‌طوری‌که جواب‌های بهینه فازی نامنفی را تولید می‌نماید و این روش را برای اعداد فازی ذوزنقه‌ای تعمیم دادند.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.3.4.1]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.3.31]

در روش مستقل دیگری نایاک و اوجا [۱۶] مجددا از α- برش برای پارامترهای فازی توابع هدف و β- برش برای پارامترهای فازی محدودیت‌ها، برای مساله برنامه‌ریزی چند هدفه کسری خطی فازی (با اعداد فازی مثلثی) استفاده کردند و هر هدف مساله برنامه‌ریزی کسری خطی فازی را به دو زیر مدل تبدیل کردند و از روش چارنز و کوپر برای خطی‌سازی زیر مدل‌ها استفاده کردند و براساس بسط تیلور حول جواب‌های به‌دست آمده از روش چارنز و کوپر و استفاده از روش مجموع وزن‌دار توانستند مساله برنامه‌ریزی چند هدفه کسری خطی فازی را به دو زیر مدل خطی با داده‌های حقیقی تبدیل کنند و حدود مقدار بهینه تابع هدف را به‌دست آورند.

برنامه‌ریزی درجه دوم با داده‌های فازی یکی از موضوعات مورد توجه محققین در حوزه تحقیق در عملیات است. ناصری و همکارانش [۱۷] روشی برای حل مسایل برنامه‌ریزی درجه دوم فازی پیشنهاد کردند به‌طوری‌که برای بهینه‌سازی تابع هدف با به‌کارگیری مفاهیم فازی، مساله برنامه‌ریزی درجه دوم فازی را به مسایل درجه دوم متداولی تبدیل نمودند که با استفاده الگوریتم متداول قابل حل می‌باشند و به‌ترتیب کران‌های بالا و پایین تابع هدف فازی را در هر سطح α نتیجه می‌دهد.

به‌جز روش‌های فوق، یکی از دسته‌های برنامه‌ریزی کسری با عدم قطعیت داده‌ها که در این مقاله به حل آن‌ها خواهیم پرداخت، برنامه‌ریزی کسری خطی بازه‌ای[1] است که روش‌های اندکی برای حل این مسایل ارایه شده است به‌طوری‌که تنها توانسته‌اند حدود مقدار بهینه تابع هدف را به‌دست آورند. از جمله لدیک [۱۸] یک روش برای محاسبه حدود مقدار بهینه تابع هدف ILFP تعمیم‌یافته ارایه کرد به‌طوری‌که برای محاسبه هر کران باید یکی از دو مساله برنامه‌ریزی کسری خطی حقیقی مقدار تعمیم‌یافته حل شود. برزا و همکارانش[۱۹] با استفاده از ترکیب محدب، بهترین مقدار بهینه تابع هدف مساله برنامه‌ریزی کسری خطی با ضرایب تابع هدف بازه‌ای را به‌دست آوردند. جیاکومار و همکارانش[۲۰] با استفاده از بهینه‌سازی قوی، بعضی از قضایای دوگان را برای مینماکس ILFP توسعه دادند. سان و چای[۲۱] با استفاده از بهینه‌سازی قوی، دوگان قوی را برای حل ILFP به‌کار بردند. مصطفایی و لدیک [۲۲] روشی برای تعیین حدود مقدار واقعی تابع هدف ILFP پیشنهاد دادند در حالی‌که بعضی از ضرایب صورت و مخرج کسر وابستگی خاص دارند. سالاری و همکارانش [۲۳] برای اولین بار روشی برای محاسبه حدود مقدار بهینه تابع هدف مدل ILFP معرفی کردند. در این روش ابتدا مدل ILFP را به دو زیر مدل تبدیل کردند به‌طوری‌که توابع هدف هر دو زیر مدل غیرخطی هستند و با حل اولین زیر مدل، بهترین مقدار بهینه تابع هدف روی بزرگ‌ترین ناحیه شدنی را به‌دست می‌آوردند و با حل دومین زیر مدل، بدترین مقدار بهینه تابع هدف روی کوچک‌ترین ناحیه شدنی را به‌دست می‌آوردند.

یک نقطه به‌دست آمده شدنی است اگر در همه محدودیت‌های بزرگ‌ترین ناحیه صدق کند و بهینه است اگر جواب حداقل یک مدل مشخص باشد. در این مقاله، دو روش جدید برای به‌دست آوردن مجموعه جواب بهینه شدنی ILFP با محدودیت نامساوی پیشنهاد می‌کنیم به‌طوری‌که جواب حاصل از هر دو روش شدنی است.

[1] ILFP

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.3.4.1]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.3.31]

لازم به ذکر است ژو و همکارانش [۲۴] محدودیت‌هایی مشابه با محدودیت‌های روش ارایه شده در این مقاله را برای مساله برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای به‌کار برده‌اند اما ما در این مقاله، اثباتی کاملا متفاوت را ارایه کرده‌ایم.

روش‌های متعددی برای مقایسه اعداد بازه‌ای معرفی شده است از جمله روش ارایه‌شده توسط مور [۲۵] و یا روش‌های ارایه شده توسط ایشیبوچی و تاناکا [۲۶]. برای توضیحات بیشتر می‌توانید به [۲۷] مراجعه کنید. اما در این مقاله مقایسه جواب‌های بازه‌ای به‌دست آمده از روش‌های پیشنهادی با هیچ یک از این روش‌های ارایه شده توسط مور و ایشیبوجی و تاناکا مطابقت ندارد؛ لذا در این مقاله هدف به‌دست آوردن مجموعه جواب بهینه‌ای است که کاملا شدنی باشد و مجموعه جواب بهینه را از نظر شدنی بودن مقایسه می‌کنیم.

ادامه این مقاله به‌صورت زیر تنظیم شده است: در بخش ۲، بعضی از تعاریف پایه‌ای و قضایا معرفی شده‌اند. در بخش ۳، روش سالاری و همکارانش به‌صورت مختصر شرح داده شده است. در بخش ۴، دو مثال عددی آورده شده است و روش‌های ارایه شده در این مقاله با یکدیگر مقایسه شده‌اند. در بخش پایانی، نتایج آورده شده است.

۲ نمادها و تعاریف

در این قسمت به معرفی برخی از قضایا و تعاریف مهم که در این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرد می‌پردازیم.

تعریف ۱ [۱۷] یک عدد بازه‌ای، یک داده با عدم قطعیت است به‌طوری‌که حدود آن (کران بالا و پایین) مشخص شده‌اند و به‌صورت $x^{\pm}$ نمایش داده می‌شود به‌طوری‌که $x^- \le x^+$ و عدد بازه‌ای $x^{\pm}$ تباهیده است اگر $x^- = x^+$ و $x^{\pm}$ مثبت (منفی) است اگر و تنها اگر $(x^+ \le 0)$ $x^- \ge 0$.

تعریف ۲ [۱۷] یک ماتریس بازه‌ای، ماتریسی است که مقدار مولفه‌های آن نامشخص است اما مرزهایش (کران بالا و پایین) معلوم است و به‌صورت $\boldsymbol{A}^{\pm} = \left[\boldsymbol{A}^-, \boldsymbol{A}^+\right]$ نمایش داده می‌شود به‌طوری‌که $\boldsymbol{A}^- = \left(a_{ij}^-\right), \boldsymbol{A}^+ = \left(a_{ij}^+\right) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ و $a_{ij}^- \le a_{ij}^+$ برای هر i, j. مقادیر $\boldsymbol{A}^+$ ، $\boldsymbol{A}^-$ را به‌ترتیب کران بالا و پایین بازه $\boldsymbol{A}^{\pm}$ می‌نامیم. یک حالت خاص از ماتریس بازه‌ای، بردار بازه‌ای است به‌طوری‌که $\boldsymbol{b}^- = \left(b_i^-\right), \boldsymbol{b}^+ = \left(b_i^+\right) \in \mathbb{R}^n$ و $b_i^- \le b_i^+$ برای هر i. بردار بازه‌ای حقیقی مقدار را به‌صورت $\boldsymbol{b}^{\pm} = \left[\boldsymbol{b}^-, \boldsymbol{b}^+\right]$ تعریف می‌کنیم به‌طوری‌که $\boldsymbol{b}^{\pm} = \left\{\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m \mid \boldsymbol{b}^- \le \boldsymbol{b} \le \boldsymbol{b}^+\right\}$.

تعریف ۳ [۱۷] مرکز و شعاع بردار بازه‌ای $\boldsymbol{b}^{\pm}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$b^c = (b_1^c, \ldots, b_n^c)^t; \; b_j^c = \tfrac{1}{2}(b_j^+ + b_j^-), \; j = 1, \ldots, n,$$

$$\Delta_b = (\Delta_{b_1}, \ldots, \Delta_{b_n})^t; \; \Delta_{b_j} = \tfrac{1}{2}(b_j^+ - b_j^-), \; j = 1, \ldots, n.$$

تعریف ٤ [۲۸] برای یک عدد بازه‌ای $x^{\pm}$، تابع علامت و مقدار قدر مطلق بازه‌ای به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\text{sign}\,(x^{\pm}) = \begin{cases} 1 & \text{if } x^- \ge 0 \\ -1 & \text{if } x^+ \le 0 \end{cases}, \; |x^{\pm}|^- = \begin{cases} x^- & \text{if } x^- \ge 0 \\ -x^+ & \text{if } x^+ \le 0 \end{cases}, \; |x^{\pm}|^+ = \begin{cases} x^+ & \text{if } x^- \ge 0 \\ -x^- & \text{if } x^+ \le 0 \end{cases}.$$

مدل برنامه ریزی کسری خطی بازه‌ای را می‌توان به‌صورت زیر فرمول‌بندی کرد:

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.3.4.1]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.3.31]

$$\begin{aligned} Max\ \ z^{\pm} &= \frac{\mathbf{C}^{\pm t}\mathbf{x}^{\pm}+\alpha^{\pm}}{\mathbf{D}^{\pm t}\mathbf{x}^{\pm}+\beta^{\pm}} \\ s.t. \quad & \mathbf{A}^{\pm}\mathbf{x}^{\pm} \le \mathbf{b}^{\pm}, \\ & \mathbf{x}^{-} \ge 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

به‌طوری‌که $\mathbf{C}^{\pm}$ و $\mathbf{D}^{\pm}$دو بردار بازه‌ای $n\times 1$ با مولفه‌های $c_j^{\pm}$ و $d_j^{\pm}$ برای $j=1,\ldots,n$ هستند، $\alpha^{\pm}$ و $\beta^{\pm}$ دو عدد بازه‌ای هستند، $\mathbf{b}^{\pm}$یک بردار بازه‌ای $m\times 1$ با مولفه‌های $b_i^{\pm}$ برای $i=1,\ldots,m$ است و $\mathbf{A}^{\pm}$ یک ماتریس بازه‌ای $m\times n$ با مولفه‌های بازه‌ای به‌صورت $a_{ij}^{\pm}$ برای $i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,n$ است.

مدل مشخصه‌ی (۱)، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} Max\ \ z^{\circ} &= \frac{\mathbf{C}^{\circ t}\mathbf{x}+\alpha^{\circ}}{\mathbf{D}^{\circ t}\mathbf{x}+\beta^{\circ}} \\ s.t. \quad & \mathbf{A}^{\circ}\mathbf{x} \le \mathbf{b}^{\circ}, \\ & \mathbf{x} \ge 0, \end{aligned} \qquad (2)$$

به‌طوری‌که $\mathbf{C}^{\circ}\in\mathbf{C}^{\pm}$ ، $\mathbf{D}^{\circ}\in\mathbf{D}^{\pm}$ ، $\alpha^{\circ}\in\alpha^{\pm}$ ، $\beta^{\circ}\in\beta^{\pm}$ ، $\mathbf{b}^{\circ}\in\mathbf{b}^{\pm}$ و $\mathbf{A}^{\circ}\in\mathbf{A}^{\pm}$.

قضیه ۱ [۲۹] نامعادله بازه‌ای $A^{\pm}x \le_S b^{\pm}$ شدنی قوی است اگر و تنها اگر نامعادله $A^{+}x \le b^{-}$ شدنی باشد.

نظر به این‌که مخرج کسر مدل (۱) یک چند جمله‌ای برحسب $x^{\pm}$ با ضرایب بازه‌ای است و تعیین ناحیه‌ای که علامت مخرج کسر مثبت، منفی و یا صفر باشد دشوار است. برای جلوگیری و ممانعت از صفر شدن مخرج کسر فرض می‌کنیم که در مدل (۱) برای هر جواب شدنی $x^{\pm}$، $\boldsymbol{D}^{\pm}\boldsymbol{x}^{\pm}+\beta^{\pm}$ مثبت باشد.

لم زیر نشان می‌دهد این فرض باعث از دست دادن کلیت مساله نمی‌شود.

لم ۱ برای هر جواب شدنی $\boldsymbol{D}^{\pm}\boldsymbol{x}^{\pm}+\beta^{\pm}>_S 0, x^{\pm}$ اگر و تنها برای هر $\boldsymbol{x}$ در بزرگ‌ترین ناحیه شدنی، $\boldsymbol{D}^{-}\boldsymbol{x}+\beta^{-}>0$.

اثبات. فرض کنید برای هر جواب شدنی $\boldsymbol{D}^{\pm}\boldsymbol{x}^{\pm}+\beta^{\pm}>_S 0, x^{\pm}$از جمله برای D^{-},β^{-}و $\boldsymbol{x}$. در این‌صورت برای هر جواب شدنی $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{D}^{-}\boldsymbol{x}+\beta^{-}>0$.

برعکس، فرض کنید برای هر $\boldsymbol{x}$ در بزرگ ترین ناحیه شدنی، $\boldsymbol{D}^{-}\boldsymbol{x}+\beta^{-}>0$. از طرفی ما داریم: $\boldsymbol{D}^{\circ}\boldsymbol{x}+\beta^{\circ}>D^{-}\boldsymbol{x}+\beta^{-}>0$.

در این‌صورت برای هر $\boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{D}^{\circ}\boldsymbol{x}+\beta^{\circ}>0,\boldsymbol{x}$. بنابراین برای هر جواب شدنی $\boldsymbol{D}^{\pm}\boldsymbol{x}^{\pm}+\beta^{\pm}>_S 0, x^{\pm}$. □

هم‌چنین می‌توان برای جلوگیری از صفر شدن مخرج کسر، فرض کنیم تمام ضرایب بازه‌ای مخرج کسر هم علامت باشند لذا

۱) اگر تمام ضرایب بازه‌ای را مثبت در نظر بگیریم($\boldsymbol{D}^{-}\ge\boldsymbol{0},\beta^{-}>0$) در این‌صورت طبق لم ۱ داریم $\boldsymbol{D}^{\pm}\boldsymbol{x}^{\pm}+\beta^{\pm}>_S 0$.

۲) اگر تمام ضرایب بازه‌ای را منفی در نظر بگیریم ($\boldsymbol{D}^{-}\le\boldsymbol{0},\beta^{-}<0$)، از علامت منفی فاکتور می‌گیریم و مساله ماکسیمم‌سازی ILFP به مساله مینیمم‌سازیILFP تبدیل می‌شود و لذا طبق لم ۱ داریم $\boldsymbol{D}^{\pm}\boldsymbol{x}^{\pm}+\beta^{\pm}>_S 0$.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.3.4.1]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.3.31]

بنابراین با توجه به موارد ۱ و ۲، برای هر جواب شدنی $x^{\pm}$ اگر و تنها اگر برا ی هر $\boldsymbol{D}^{\pm}\boldsymbol{x}^{\pm}+\beta^{\pm}>_S 0,$ جواب شدنی $\boldsymbol{D}^{-}\boldsymbol{x}+\beta^{-}>0,\ \boldsymbol{x}$.

قضیه ۲ [۳۰] در مدل (۱)، بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین ناحیه شدنی به‌ترتیب به‌صورت زیر هستند:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{-} x_j \le b_i^{+},\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{+} x_j \le b_i^{-},\ i=1,\ldots,m.$$

لازم به ذکر است در این مقاله، روش‌های پیشنهادی برای بازه‌های بسته که نامثبت یا نامنفی باشند ارایه شده است و چون بازه‌هایی که بخشی از آن مثبت و بخشی از آن منفی باشند دارای نوسان هستند و رفتار ثابتی ندارند لذا از این‌گونه بازه‌ها استفاده نمی‌کنیم و هم‌چنین بزرگ‌ترین ناحیه شدنی باید ناتهی باشد. برای مطالعه قوانین حساب بازه‌ای می‌توانید به آلفلد و هرزبرگر [۳۱] مراجعه کنید.

۳ مرور یک روش برای حل ILFP

سالاری و همکارانش [۲۳] در ۲۰۲۰ برای اولین بار روشی برای محاسبه حدود مقدار بهینه تابع هدف مدل ILFP معرفی کردند. در این روش ابتدا مدل ILFP را به دو زیر مدل تبدیل کردند به‌طوری‌که توابع هدف هر دو زیر مدل غیرخطی هستند و با حل اولین زیر مدل، بهترین مقدار بهینه تابع هدف روی بزرگ‌ترین ناحیه شدنی را به‌دست می‌آوردند و با حل دومین زیر مدل، بدترین مقدار بهینه تابع هدف روی کوچک‌ترین ناحیه شدنی را به‌دست می‌آوردند.

قضیه ۳ فرض کنید $B_1=\{j: c_j^{-}\ge 0\}$ و $B_2=\{j: c_j^{+}\le 0\}$. بهترین و بدترین حدود مقدار بهینه مدل (۱) با حل دو زیر مدل زیر به‌دست می‌آید:

$$Max\ z^{+}=\begin{cases}\dfrac{\sum_{j\in B_1} c_j^{+}x_j+\alpha^{+}}{\sum_{j=1}^{n} d_j^{-}x_j+\beta^{-}}+\dfrac{\sum_{j\in B_2} c_j^{+}x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j^{+}x_j+\beta^{+}}, & if\quad sign\left(\alpha^{\pm}\right)=sign\left(c_j^{\pm}\right);\ j\in B_1\\ \dfrac{\sum_{j\in B_1} c_j^{+}x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j^{-}x_j+\beta^{-}}+\dfrac{\sum_{j\in B_2} c_j^{+}x_j+\alpha^{+}}{\sum_{j=1}^{n} d_j^{+}x_j+\beta^{+}}, & if\quad sign\left(\alpha^{\pm}\right)=sign\left(c_j^{\pm}\right);\ j\in B_2\end{cases}$$

$$s.t.\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{-}x_j\le b_i^{+},\ i=1,\ldots,m, \qquad (۳)$$

$$x_j\ge 0,\quad j=1,\ldots,n,$$

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.3.4.1]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.3.31]

و

$$Max\ z^- = \begin{cases} \dfrac{\sum_{j\in B_1} c_j^- x_j + \alpha^-}{\sum_{j=1}^{n} d_j^+ x_j + \beta^+} + \dfrac{\sum_{j\in B_2} c_j^- x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j^- x_j + \beta^-}, if \quad sign(\alpha^\pm) = sign(c_j^\pm);\ j \in B_1 \\ \dfrac{\sum_{j\in B_1} c_j^- x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j^+ x_j + \beta^+} + \dfrac{\sum_{j\in B_2} c_j^- x_j + \alpha^-}{\sum_{j=1}^{n} d_j^- x_j + \beta^-}, if \quad sign(\alpha^\pm) = sign(c_j^\pm);\ j \in B_2 \end{cases}$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^+ x_j \le b_i^-, i = 1,\dots,m, \qquad (۴)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,\dots,n.$$

با حل دو زیر مدل (۳) و (۴)، حدود مقدار بهینه تابع هدف و هم‌چنین مجموعه جواب بهینه مدل ILFP به‌دست می‌آید.

٤ رویکرد جدید در تعیین جواب‌های شدنی مدل ILFP

برای تعیین جواب ILFP، دو زیر مدل معرفی می‌کنیم به‌طوری‌که یکی از آنها روی بزرگ‌ترین ناحیه و بهترین مقدار تابع هدف و دیگری روی کوچک‌ترین ناحیه و بدترین مقدار تابع هدف را تعیین می‌کند. بنابراین مقدار تابع هدف و جواب به‌دست آمده از یک مدل ماکزیمم‌سازی بازه‌ای به‌صورت یک بازه خواهد بود. ژو و همکارانش [۲۴] محدودیت‌هایی مشابه با محدودیت‌های روش ارایه شده در این مقاله را برای مساله برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای به‌کار برده‌اند و ناحیه جوابی شدنی را برای مساله برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای به‌دست آوردند اما در این مقاله، اثباتی کاملا متفاوت برای قضایا ارایه شده است. در ادامه، دو روش پیشنهاد می‌شود به‌طوری‌که در هر دو روش، مجموعه جواب بهینه شدنی به‌دست آورده می‌شود.

٤-١ روش اول

در این زیربخش، روش اول را که شامل دو زیر مدل است؛ پیشنهاد می‌دهیم که یکی از آنها روی بزرگ‌ترین ناحیه و بهترین مقدار تابع هدف و دیگری روی کوچک‌ترین ناحیه و بدترین مقدار تابع هدف است. برای به‌دست آوردن تابع هدف و محدودیت‌های متناظر با دو زیر مدل، قضیه‌ی زیر را داریم.

قضیه ٤ [۳۲] فرض کنید $B_1 = \{j : c_j^- \ge 0\}$ ، $B_2 = \{j : c_j^+ \le 0\}$ و $\alpha^- \ge 0$. برای مدل ILFP با متغیر تصمیم نامنفی، دو زیر مدل روش اول به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

زیر مدل اول:

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.3.4.1]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.3.31]

$$Max\ \ z^{+}=\frac{\sum_{j\in B_1} c_j^{+}x_j^{'}+\alpha^{+}}{\sum_{j\in B_1} d_j^{-}x_j^{'}+\sum_{j\in B_2} d_j^{-}x_j^{'}+\beta^{-}}+\frac{\sum_{j\in B_2} c_j^{+}x_j^{'}}{\sum_{j\in B_1} d_j^{+}x_j^{'}+\sum_{j\in B_2} d_j^{+}x_j^{'}+\beta^{+}},$$

$$s.t.\quad \sum_{j\in B_1}|a_{ij}^{\pm}|^{-}\ sign(a_{ij}^{\pm})x_j^{+}+\sum_{j\in B_2}|a_{ij}^{\pm}|^{+}\ sign(a_{ij}^{\pm})x_j^{-}\le b_i^{+}, i=1,\dots,m, \qquad (5)$$

$$x_j^{+}\ge 0,\ \ for\ \ j\in B_1,$$

$$x_j^{-}\ge 0,\ \ for\ \ j\in B_2.$$

زیر مدل دوم

$$Max\ \ z^{-}=\frac{\sum_{j\in B_1} c_j^{-}x_j^{''}+\alpha^{-}}{\sum_{j\in B_1} d_j^{+}x_j^{''}+\sum_{j\in B_2} d_j^{+}x_j^{''}+\beta^{+}}+\frac{\sum_{j\in B_2} c_j^{-}x_j^{''}}{\sum_{j\in B_1} d_j^{-}x_j^{''}+\sum_{j\in B_2} d_j^{-}x_j^{''}+\beta^{-}},$$

$$s.t.\quad \sum_{j\in B_1}|a_{ij}^{\pm}|^{+}\ sign(a_{ij}^{\pm})x_j^{-}+\sum_{j\in B_2}|a_{ij}^{\pm}|^{-}\ sign(a_{ij}^{\pm})x_j^{+}\le b_i^{-}, i=1,\dots,m, \qquad (6)$$

$$x_{j_{opt}}^{+}\ge x_j^{-}\ge 0,\ \ for\ \ j\in B_1,$$

$$x_j^{+}\ge x_{j_{opt}}^{-}\ge 0,\ \ for\ \ j\in B_2.$$

به‌طوری‌که $x_j^{''}=\begin{cases}x_j^{-}, & j\in B_1\\ x_j^{+}, & j\in B_2\end{cases}$ و $x_j^{'}=\begin{cases}x_j^{+}, & j\in B_1\\ x_j^{-}, & j\in B_2\end{cases}$.

اگر $x_{j_{opt}}^{+}$ و $x_{j_{opt}}^{-}$ برای هر $j\in B_1$ و $j\in B_2$ جواب‌های دو زیر مدل باشند آنگاه جواب ILFP به‌صورت $\begin{pmatrix}[x_{1_{opt}}^{-}, x_{1_{opt}}^{+}]\\ \vdots\ ,\ \vdots\\ [x_{n_{opt}}^{-}, x_{n_{opt}}^{+}]\end{pmatrix}$ است.

مجموعه جواب به‌دست آمده از این روش به‌صورت $\mathbf{x}_{opt}^{\pm}$ است. اگر مجموعه جواب به‌دست آمده در بزرگ‌ترین ناحیه‌ی قیود بازه‌ای مدل (۱) قرار نگیرد در این‌صورت مجموعه جواب به‌دست آمده نشدنی خواهد بود؛ لذا از یک فرآیند محدودکننده برای فضای جواب جهت حذف جواب‌های نشدنی به‌کار گرفته می‌شود به‌طوری‌که به این عمل انقباض فضای جواب گویند. در این حالت، از روشی جایگزین جهت پیدا کردن نرخ انقباض برای همه متغیرها با هدف به حداکثر رساندن فضای جواب شدنی استفاده می‌شود به‌طوری‌که هر متغیر را با نرخ متفاوت منقبض می‌کند.

مجموعه جواب $\mathbf{x}_{opt}^{\pm}$ حاصل از روش اول را در نظر بگیرید به‌طوری‌که بخشی از مجموعه جواب به‌دست آمده نشدنی است. شعاع و مرکز بردار بازه‌ای $\mathbf{x}_{opt}^{\pm}$ را به‌دست می‌آوریم. نرخ انقباض را با q_j برای $j=1,\dots,l,l+1,\dots,n$ نشان می‌دهیم به‌طوری‌که در میان جواب $\mathbf{x}_{opt}^{\pm}$، l تای اول از متغیر تصمیم اعداد بازه‌ای هستند و برای $n-l$ تای دیگر داریم $q_j=0$.

اکنون برای به‌دست آوردن نرخ انقباض q_j برای $j=1,\dots,l$ قضیه زیر را داریم:

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.3.4.1]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.3.31]

قضیه۵ فرض کنید $A_1=\{j:a_{ij}^-\geq 0\}$ و $A_2=\{j:a_{ij}^+\leq 0\}$. اگر مجموعه جواب حاصل از روش جایگزین را با $\mathbf{y}^{\pm}$ نمایش دهیم به‌طوری‌که $y_j^{\pm}=[x_j^c-q_j\Delta_{x_j},x_j^c+q_j\Delta_{x_j}]$ در این‌صورت روش جایگزین به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} &Max\ \ q_1\times\cdots\times q_l \\ &s.t.\qquad \sum_{j\in A_1}a_{ij}^-q_j\Delta_{x_j}-\sum_{j\in A_2}a_{ij}^-q_j\Delta_{x_j}\leq b_i^+-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^-x_j^c,\ \ i=1,\ldots,m, \qquad (7)\\ &0\leq q_j\leq 1,\quad for\ \ j=1,\ldots,n. \end{aligned}$$

اثبات: تابع هدف روش جایگزین، ماکزیمم کردن نرخ انقباض هر متغیر تصمیم است به‌طوری‌که فضای جواب شدنی را به حداکثر برسانیم.

اکنون برای محدودیت‌های روش جایگزین داریم:

اگر $\mathbf{y}_{opt}^{\pm}$ مجموعه جواب حاصل از روش جایگزین باشد باید در بزرگ‌ترین ناحیه قیود بازه‌ای مدل (۱) صدق کند دراین‌صورت $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^-y_j\leq b_i^+$ که می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت:

$$\sum_{j\in A_1}a_{ij}^-y_j+\sum_{j\in A_2}a_{ij}^-y_j\leq b_i^+.$$

توجه کنید $a_{ij}^-\geq 0$ برای $j\in A_1$ و $a_{ij}^+\leq 0$ برای $j\in A_2$. بنابراین برای تضمین‌شدنی بودن، کافی‌است که

$$\sum_{j\in A_1}a_{ij}^-y_j^++\sum_{j\in A_2}a_{ij}^-y_j^-\leq b_i^+, i=1,\ldots,m, \qquad (8)$$

به‌طوری‌که $y_j^-=x_j^c-q_j\Delta_{x_j}$ و $y_j^+=x_j^c+q_j\Delta_{x_j}$ برای $j=1,\ldots,n$.

اکنون معادله (۸) را بازنویسی می‌کنیم:

$$\sum_{j\in A_1}a_{ij}^-y_j^++\sum_{j\in A_2}a_{ij}^-y_j^-=\sum_{j\in A_1}a_{ij}^-(x_j^c+q_j\Delta_{x_j})+\sum_{j\in A_2}a_{ij}^-(x_j^c-q_j\Delta_{x_j})=$$
$$\sum_{j\in A_1}a_{ij}^-x_j^c+\sum_{j\in A_1}a_{ij}^-q_j\Delta_{x_j}+\sum_{j\in A_2}a_{ij}^-x_j^c-\sum_{j\in A_2}a_{ij}^-q_j\Delta_{x_j}\leq b_i^+,$$

در این‌صورت

$$\sum_{j\in A_1}a_{ij}^-q_j\Delta_{x_j}-\sum_{j\in A_2}a_{ij}^-q_j\Delta_{x_j}\leq b_i^+-\sum_{j\in A_1}a_{ij}^-x_j^c-\sum_{j\in A_2}a_{ij}^-x_j^c.$$

بنابراین داریم:

$$\sum_{j\in A_1}a_{ij}^-q_j\Delta_{x_j}-\sum_{j\in A_2}a_{ij}^-q_j\Delta_{x_j}\leq b_i^+-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^-x_j^c.$$

■

بنابراین در روش جایگزین مجموعه جواب شدنی نهایی به‌صورت زیر است:

$$\mathbf{Y}_{j_{opt}}^{\pm}=\{y_{j_{opt}}^{\pm}\mid y_{j_{opt}}^{\pm}=[x_j^c-q_j\Delta_{x_j},x_j^c+q_j\Delta_{x_j}]\}, \qquad (9)$$

و با جایگذاری $\mathbf{y}_{opt}^{\pm}$ در تابع هدف مدل (۵) و (۶)، مقدار تابع هدف روش جایگزین به‌صورت زیر خواهد بود:

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.3.4.1]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.3.31]

$$z^{+}=\frac{\sum_{j\in B_1} c_j^{+}x_j^{c}+\sum_{j\in B_1} c_j^{+}q_j\Delta_{x_j}+\alpha^{+}}{\sum_{j=1}^{n} d_j^{-}x_j^{c}+\sum_{j\in B_1} d_j^{-}q_j\Delta_{x_j}-\sum_{j\in B_2} d_j^{-}q_j\Delta_{x_j}+\beta^{-}}+\frac{\sum_{j\in B_2} c_j^{+}x_j^{c}-\sum_{j\in B_2} c_j^{+}q_j\Delta_{x_j}}{\sum_{j=1}^{n} d_j^{+}x_j^{c}+\sum_{j\in B_1} d_j^{+}q_j\Delta_{x_j}-\sum_{j\in B_2} d_j^{+}q_j\Delta_{x_j}+\beta^{+}}, \qquad (10)$$

$$z^{-}=\frac{\sum_{j\in B_1} c_j^{-}x_j^{c}-\sum_{j\in B_1} c_j^{-}q_j\Delta_{x_j}+\alpha^{-}}{\sum_{j=1}^{n} d_j^{+}x_j^{c}+\sum_{j\in B_1} d_j^{+}q_j\Delta_{x_j}-\sum_{j\in B_2} d_j^{+}q_j\Delta_{x_j}+\beta^{+}}+\frac{\sum_{j\in B_2} c_j^{-}x_j^{c}+\sum_{j\in B_2} c_j^{-}q_j\Delta_{x_j}}{\sum_{j=1}^{n} d_j^{-}x_j^{c}-\sum_{j\in B_1} d_j^{-}q_j\Delta_{x_j}+\sum_{j\in B_2} d_j^{-}q_j\Delta_{x_j}+\beta^{-}}, \qquad (11)$$

مزیت اصلی روش جایگزین این است که مجموعه جواب نهایی کاملا شدنی است گرچه ممکن است بسیاری از جواب‌های شدنی در فرآیند فشرده کردن فضای جواب حذف شوند به‌خصوص نواحی جواب مربوط به کوچک‌ترین ناحیه شدنی.

اگر نقطه مرکزی مجموعه جواب روش اول که مبنای محدود کردن فضای جواب و در نهایت تعیین مجموعه جواب روش جایگزین است نشدنی باشد آنگاه روش جایگزین نیز نشدنی خواهد بود.

در زیربخش بعدی، ما روش دیگری را معرفی خواهیم کرد به‌طوری‌که مجموعه جواب به‌دست آمده کاملا شدنی خواهد بود.

٤-٢ روش دوم

در این زیر بخش، روشی برای حل ILFP معرفی می‌کنیم به‌طوری‌که دارای دو زیر مدل است. زیر مدل اول مشابه با زیر مدل دوم از روش اول است. برای زیر مدل دوم، زیر مدل اول از روش اول را در نظر می‌گیریم. برای تضمین شدنی بودن جواب حاصل از روش دوم، محدودیت اضافی زیر را به زیر مدل دوم اضافه می‌کنیم لذا مجموعه جواب به‌دست آمده از این روش کاملا شدنی است.

قضیه ٦ فرض کنید $E_1=\{j: j\in B_1, a_{ij}^{+}\geq 0\}$، $E_2=\{j: j\in B_1, a_{ij}^{+}\leq 0\}$ و $E_3=\{j: j\in B_2, a_{ij}^{+}\leq 0\}$، $E_4=\{j: j\in B_2, a_{ij}^{-}\geq 0\}$. برای تضمین شدنی بودن مجموعه جواب حاصل، محدودیت زیر به زیر مدل دوم اضافه می‌شود:

$$\sum_{j\in E_1} a_{\eta j}^{-}x_j^{+}+\sum_{j\in E_2} a_{\eta j}^{-}x_{j_{opt}}^{-}+\sum_{j\in E_3} a_{\eta j}^{-}x_j^{-}+\sum_{j\in E_4} a_{\eta j}^{-}x_{j_{opt}}^{+}\leq b_\eta^{+}, \qquad (12)$$

به‌طوری‌که ηاندیس محدودیت‌هایی از مدل (۱) است که $sign(a_{\eta j}^{\pm})=sign(c_j^{\pm}); j\in E_1,E_3$ و $sign(a_{\eta j}^{\pm})\neq sign(c_j^{\pm}); j\in E_2,E_4$.

اثبات: ابتدا زیر مدل اول را حل می‌کنیم و جواب به‌دست آمده به‌صورت $(x_j^{-}; j\in B_1, x_j^{+}; j\in B_2)^t$ را به‌دست می‌آوریم. فرض کنید برای محدودیت η ام مدل (۱) داشته باشیم

$sign(a_{\eta j}^{\pm})=sign(c_j^{\pm}); j\in E_1,E_3$ و $sign(a_{\eta j}^{\pm})\neq sign(c_j^{\pm}); j\in E_2,E_4$.

محدودیت ηام بزرگ‌ترین ناحیه شدنی را در نظر بگیرید یعنی $\sum_{j=1}^{n} a_{\eta j}^{-}x_j\leq b_\eta^{+}$ که می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت:

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.3.4.1]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.3.31]

$$\sum_{j\in E_1} a_{\eta j}^{-} x_j + \sum_{j\in E_2} a_{\eta j}^{-} x_j + \sum_{j\in E_3} a_{\eta j}^{-} x_j + \sum_{j\in E_4} a_{\eta j}^{-} x_j \le b_\eta^{+},$$

توجه کنید برای $a_{\eta j}^{-} \ge 0; j \in E_1, E_4$ و برای $a_{\eta j}^{+} \le 0; j \in E_2, E_3$ بنابراین کافی‌است

$$\sum_{j\in E_1} a_{\eta j}^{-} x_j^{+} + \sum_{j\in E_2} a_{\eta j}^{-} x_{j_{opt}}^{-} + \sum_{j\in E_3} a_{\eta j}^{-} x_j^{-} + \sum_{j\in E_4} a_{\eta j}^{-} x_{j_{opt}}^{+} \le b_\eta^{+}. \quad \blacksquare$$

بنابراین دو زیر مدل روش دوم به‌صورت زیر خواهند بود:

زیر مدل اول:

$$Max\ \ z^{-} = \frac{\sum_{j\in B_1} c_j^{-} x_j^{'} + \alpha^{-}}{\sum_{j\in B_1} d_j^{+} x_j^{'} + \sum_{j\in B_2} d_j^{+} x_j^{'} + \beta^{+}} + \frac{\sum_{j\in B_2} c_j^{-} x_j^{'}}{\sum_{j\in B_1} d_j^{-} x_j^{'} + \sum_{j\in B_2} d_j^{-} x_j^{'} + \beta^{-}}, x_j^{'} = \begin{cases} x_j^{-}, & j \in B_1 \\ x_j^{+}, & j \in B_2 \end{cases}$$

$$s.t. \quad \sum_{j\in B_1} |a_{ij}^{\pm}|^{+}\ sign(a_{ij}^{\pm}) x_j^{-} + \sum_{j\in B_2} |a_{ij}^{\pm}|^{-}\ sign(a_{ij}^{\pm}) x_j^{+} \le b_i^{-}, i = 1,\dots,m, \qquad (13)$$

$$x_j^{-} \ge 0,\ for\ j \in B_1,$$

$$x_j^{+} \ge 0,\ for\ j \in B_2.$$

زیر مدل دوم:

$$Max\ \ z^{+} = \frac{\sum_{j\in B_1} c_j^{+} x_j^{''} + \alpha^{+}}{\sum_{j\in B_1} d_j^{-} x_j^{''} + \sum_{j\in B_2} d_j^{-} x_j^{''} + \beta^{-}} + \frac{\sum_{j\in B_2} c_j^{+} x_j^{''}}{\sum_{j\in B_1} d_j^{+} x_j^{''} + \sum_{j\in B_2} d_j^{+} x_j^{''} + \beta^{+}}, x_j^{''} = \begin{cases} x_j^{+}, & j \in B_1 \\ x_j^{-}, & j \in B_2 \end{cases}$$

$$s.t. \quad \sum_{j\in B_1} |a_{ij}^{\pm}|^{-}\ sign(a_{ij}^{\pm}) x_j^{+} + \sum_{j\in B_2} |a_{ij}^{\pm}|^{+}\ sign(a_{ij}^{\pm}) x_j^{-} \le b_i^{+}, i = 1,\dots,m, \qquad (14)$$

$$\sum_{j\in E_1} a_{\eta j}^{-} x_j^{+} + \sum_{j\in E_2} a_{\eta j}^{-} x_{j_{opt}}^{-} + \sum_{j\in E_3} a_{\eta j}^{-} x_j^{-} + \sum_{j\in E_4} a_{\eta j}^{-} x_{j_{opt}}^{+} \le b_\eta^{+},$$

$$x_j^{+} \ge x_{j_{opt}}^{-} \ge 0,\ for\ j \in B_1,$$

$$x_{j_{opt}}^{+} \ge x_j^{-} \ge 0,\ for\ j \in B_2.$$

۵ مثال‌های عددی و آنالیز نتایج

برای نشان دادن کارایی روش‌های ارایه شده، ابتدا روش‌های پیشنهادی را برای مدل ILFP به‌کار می‌بریم سپس جواب‌های عددی به‌دست آمده را با یکدیگر مقایسه می‌کنیم.

مثال ۱ مدل ILFP زیر را در نظر بگیرید

$$Max\ \ z^{\pm} = \frac{-[3,3/5]x_1^{\pm} + [1,1/2]x_2^{\pm} - [3/45,5/79]}{[0/27,1/28]x_1^{\pm} + [1/3,2/9]x_2^{\pm} + [0/5,1/5]},$$

$$s.t. \quad [1,1/1]x_1^{\pm} + [1/6,1/8]x_2^{\pm} \le [11/6,12], \qquad (15)$$

$$[3,4]x_1^{\pm} - [2,3]x_2^{\pm} \ge [6/5,7],$$

$$x_1^{-}, x_2^{-} \ge 0.$$

با استفاده از روش اول برای مدل (۱۵)، زیر مدل‌های زیر را خواهیم داشت:

زیر مدل اول:

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.3.4.1]

[DOI: 10.52547/jamlu.18.3.31]

$$
\begin{aligned}
Max\ \ z^{+} &= \frac{-۳x_{۱}^{-} - ۳/۴۵}{۱/۲۸x_{۱}^{-} + ۲/۹x_{۲}^{+} + ۱/۵} + \frac{۱/۲x_{۲}^{+}}{۰/۲۷x_{۱}^{-} + ۱/۳x_{۲}^{+} + ۰/۵},\\
s.t. \quad & ۱/۱x_{۱}^{-} + ۱/۶x_{۲}^{+} \le ۱۲,\\
& ۴x_{۱}^{-} - ۲x_{۲}^{+} \ge ۶/۵,\\
& x_{۱}^{-}, x_{۲}^{+} \ge ۰.
\end{aligned}
$$

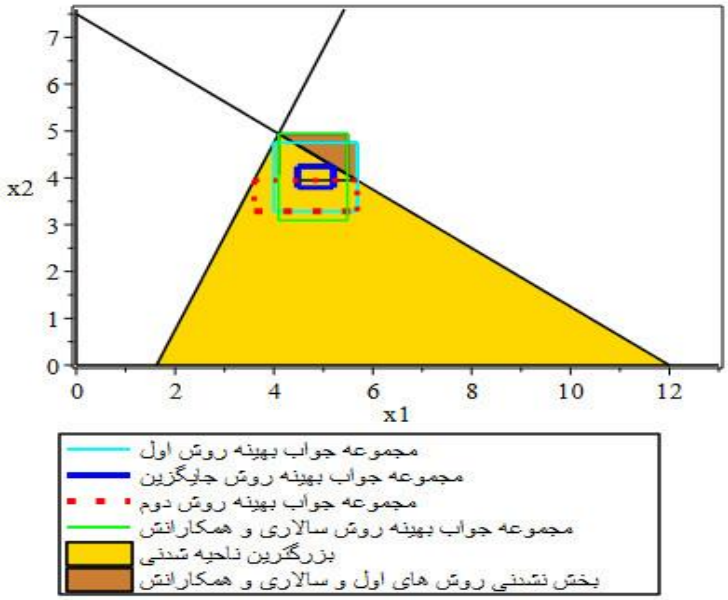
جواب بهینه عبارت است از $x_{۱opt}^{-} = ۴$ و $x_{۲opt}^{+} = ۴/۷۵$ و مقدار تابع هدف عبارت است از $z_{opt}^{+} = -۰/۰۲۲۵$.

زیر مدل دوم:

$$
\begin{aligned}
Max\ \ z^{-} &= \frac{-۳/۵x_{۱}^{+} - ۵/۷۹}{۰/۲۷x_{۱}^{+} + ۱/۳x_{۲}^{-} + ۰/۵} + \frac{x_{۲}^{-}}{۱/۲۸x_{۱}^{+} + ۲/۹x_{۲}^{-} + ۱/۵},\\
s.t. \quad & x_{۱}^{+} + ۱/۸x_{۲}^{-} \le ۱۱/۶,\\
& ۳x_{۱}^{+} - ۳x_{۲}^{-} \ge ۷,\\
& ۰ \le x_{۱opt}^{-} \le x_{۱}^{+},\\
& x_{۲opt}^{-} \ge x_{۲}^{-} \ge ۰.
\end{aligned}
$$

جواب بهینه عبارت است از $x_{۱opt}^{+} = ۵/۶۸۵۷$ و $x_{۲opt}^{-} = ۳/۲۸۵۷$. مقدار تابع هدف عبارت است از $z_{opt}^{-} = -۳/۸۹۴۰$. بنابراین مجموعه جواب بهینه حاصل از روش اول عبارت است از

$\mathbf{x}_{opt}^{\pm} = \begin{pmatrix} [۴/۰۰۰۰, ۵/۶۸۵۷] \\ [۳/۲۸۵۷, ۴/۷۵۰۰] \end{pmatrix}$ و $z_{opt}^{\pm} = [-۳/۸۹۴۰, -۰/۰۲۲۵]$. مجموعه جواب بهینه به‌دست آمده در شکل ۱ نمایش داده شده است.



شکل ۱. مجموعه جواب بهینه حاصل از روش‌های پیشنهادی برای مدل (۱۵)

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.3.4.1]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.3.31]

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{-} x_j \le b_i^{+}$ بزرگ‌ترین ناحیه شدنی است و بدین معنی است که هر نقطه دلخواه از جواب به‌دست آمده توسط روش اول نباید خارج از بزرگ‌ترین ناحیه شدنی قرار گیرد، در حالی‌که بعضی از نقاط جواب توسط این روش ممکن است در بزرگ‌ترین ناحیه شدنی قرار نگیرند؛ بنابراین جواب به‌دست آمده ممکن است شدنی نباشد.

مدل (۱۵) را در نظر بگیرید، بزرگ‌ترین ناحیه شدنی به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} x_1^{\pm} + 1/6 x_2^{\pm} \le 12, \\ 4 x_1^{\pm} - 2 x_2^{\pm} \ge 6/5. \end{cases}$$

یک نقطه دلخواه از جواب به‌دست آمده را در نظر بگیرید. برای مثال نقطه $(5/6857, 4/75)^t$ در اولین محدودیت بزرگ‌ترین ناحیه شدنی صدق نمی‌کند، یعنی،

$$x_{1opt}^{+} + 1/6 x_{2opt}^{+} \le 12$$

نقطه $(5/6857, 4/75)^t$، یک نقطه شدنی نیست در حالی‌که به‌عنوان یک نقطه از مجموعه جواب بهینه به‌دست آمده توسط روش اول در نظر گرفته شده است. ممکن است یک تعداد نامتناهی از این نقاط وجود داشته باشند که در محدودیت $x_{1opt}^{+} + 1/6 x_{2opt}^{+} \le 12$ صدق نکنند.

بنابراین از روش جایگزین برای اصلاح مجموعه جواب بهینه استفاده خواهیم کرد.

طبق روش جایگزین داریم:

$$\begin{aligned} Max \quad & q_1 \times q_2 \\ s.t. \quad & 0/8429 q_1 + 1/6 \times 0/7322 q_2 \le 12 - 4/8429 - 1/6 \times 4/0179, \\ & -4 \times 0/8429 q_1 - 2 \times 0/7322 q_2 \ge 6/5 - 4 \times 4/8429 + 2 \times 4/0179, \\ & 0 \le q_1, q_2 \le 1. \end{aligned}$$

جواب‌های مدل بالا عبارت است از $q_1 = 0/4321$ و $q_2 = 0/3109$. بنابراین مجموعه جواب بهینه نهایی به‌صورت زیر است $\mathbf{y}_{opt}^{\pm} = \begin{pmatrix} [4/4787, 5/2071] \\ [3/7903, 4/2455] \end{pmatrix}$ و مقدارتابع هدف نهایی عبارت است از $z_{opt}^{\pm} = [-3/1244, -0/1592]$. مجموعه جواب بهینه به‌دست آمده از روش جایگزین کاملا شدنی است و این مجموعه جواب بهینه در شکل ۱ نشان داده شده است.

در فرآیند فشرده کردن فضای جواب ناگزیر برخی از جواب‌های شدنی نیز حذف می‌شوند و لذا مجموعه جواب بهینه به‌طور قابل توجهی کاهش‌یافته است در این‌صورت حدود مقدار تابع هدف نیز کاهش پیدا کرده است.

اکنون روش دوم را برای مدل (۱۵) به‌کار می‌بریم. ابتدا، مدل متناظر با z^{-} را حل می‌کنیم و سپس زیرمدل متناظر با z^{+} را حل می‌کنیم، بنابراین داریم:

زیر مدل اول:

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.3.4.1]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.3.31]

$$
\begin{aligned}
Max\ \ z^- = & \frac{-۳/۵x_۱^+ - ۵/۷۹}{۰/۲۷x_۱^+ + ۱/۳x_۲^- + ۰/۵} + \frac{x_۲^-}{۱/۲۸x_۱^+ + ۲/۹x_۲^- + ۱/۵},\\
s.t. \quad & x_۱^+ + ۱/۸x_۲^- \le ۱۱/۶,\\
& ۳x_۱^+ - ۳x_۲^- \ge ۷,\\
& x_۱^+, x_۲^- \ge ۰.
\end{aligned}
$$

جواب بهینه عبارت است از $x_{۱opt}^+ = ۵/۶۸۵۷$ و $x_{۲opt}^- = ۳/۲۸۵۸$ و مقدار تابع هدف عبارت است از $z_{opt}^- = -۳/۸۹۴۰$.

زیر مدل دوم:

$$
\begin{aligned}
Max\ \ z^+ = & \frac{-۳x_۱^- - ۳/۴۵}{۱/۲۸x_۱^- + ۲/۹x_۲^+ + ۱/۵} + \frac{۱/۲x_۲^+}{۰/۷x_۱^- + ۱/۳x_۲^+ + ۰/۵},\\
s.t. \quad & ۱/۱x_۱^- + ۱/۶x_۲^+ \le ۱۲,\\
& ۴x_۱^- - ۲x_۲^+ \ge ۶/۵,\\
& x_{۱opt}^+ + ۱/۶x_۲^+ \le ۱۲,\\
& ۰ \le x_۱^- \le x_{۱opt}^+,\\
& x_۲^+ \ge x_{۲opt}^- \ge ۰.
\end{aligned}
$$

جواب بهینه عبارت است از $x_{۱opt}^- = ۳/۵۹۸۲$ و $x_{۲opt}^+ = ۳/۹۴۶۴$ و مقدار تابع هدف عبارت است از $z_{opt}^+ = -۰/۰۹۴۳$. بنابراین مجموعه جواب بهینه حاصل از روش دوم عبارت است از $\mathbf{x}_{opt}^{\pm} = \begin{pmatrix} [۳/۵۹۸۲, ۵/۶۸۵۷] \\ [۳/۲۸۵۷, ۳/۹۴۶۴] \end{pmatrix}$ و $z_{opt}^{\pm} = [-۳/۸۹۴۰, -۰/۰۹۴۳]$. مجموعه جواب بهینه در شکل ۱ نمایش داده شده است.

مجموعه جواب بهینه به‌دست آمده توسط روش دوم در همه محدودیت‌های بزرگ‌ترین ناحیه شدنی صدق می‌کند؛ بنابراین مجموعه جواب بهینه به‌دست آمده از این روش کاملا شدنی است.

با استفاده از روش سالاری و همکارانش برای مدل (۱۵)، زیر مدل‌های زیر را خواهیم داشت:

زیر مدل اول:

$$
\begin{aligned}
Max\ \ z^+ = & \frac{-۳x_۱ - ۳/۴۵}{۱/۲۸x_۱ + ۲/۹x_۲ + ۱/۵} + \frac{۱/۲x_۲}{۰/۲۷x_۱ + ۱/۳x_۲ + ۰/۵},\\
s.t. \quad & x_۱ + ۱/۶x_۲ \le ۱۲,\\
& ۴x_۱ - ۲x_۲ \ge ۶/۵,\\
& x_۱, x_۲ \ge ۰.
\end{aligned}
$$

جواب بهینه عبارت است از $x_{۱opt} = ۴/۰۹۵۲$ و $x_{۲opt} = ۴/۹۴۰۵$. مقدار تابع هدف عبارت است از $z_{opt}^+ = -۰/۰۰۸۴$.

زیرمدل دوم:

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.3.4.1]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.3.31]

$$
\begin{aligned}
Max\ \ z^{-} &= \frac{-۳/۵x_۱ - ۵/۷۹}{۰/۲۷x_۱ + ۱/۳x_۲ + ۰/۵} + \frac{x_۲}{۱/۲۸x_۱ + ۲/۹x_۲ + ۱/۵},\\
s.t. \qquad & ۱/۱x_۱ + ۱/۸x_۲ \le ۱۱/۶,\\
& ۳x_۱ - ۳x_۲ \ge ۷/۲,\\
& x_۱, x_۲ \ge ۰.
\end{aligned}
$$

جواب بهینه عبارت است از $x_{۱opt} = ۵/۴۸۹۷$ و $x_{۲opt} = ۳/۰۸۹۷$ و مقدار تابع هدف عبارت است از $z^{-}_{opt} = -۳/۹۹۱۵$. بنابراین مجموعه جواب بهینه حاصل از روش اول عبارت است از $\mathbf{x}_{opt} = \begin{pmatrix} [۴/۰۹۵۲, ۵/۴۸۹۷] \\ [۳/۰۸۹۷, ۴/۹۴۰۵] \end{pmatrix}$ و $z^{\pm}_{opt} = [-۳/۹۹۱۵, -۰/۰۰۸۴]$. مجموعه جواب بهینه در شکل ۱ نمایش داده شده است.

یک نقطه دلخواه از جواب به‌دست آمده را در نظر بگیرید. برای مثال نقطه $(۵/۴۸۹۷, ۴/۹۴۰۵)^t$ در اولین محدودیت بزرگ‌ترین ناحیه شدنی صدق نمی‌کند، یعنی $x^{+}_{۱opt} + ۱/۶x^{+}_{۲opt} \le ۱۲$.

نقطه $(۵/۴۸۹۷, ۴/۹۴۰۵)^t$، یک نقطه شدنی نیست در حالی‌که به‌عنوان یک نقطه از مجموعه جواب بهینه به‌دست آمده توسط روش اول در نظر گرفته شده است. ممکن است یک تعداد نامتناهی از این نقاط وجود داشته باشند که در محدودیت $x^{+}_{۱opt} + ۱/۶x^{+}_{۲opt} \le ۱۲$ صدق نکنند.

لازم به ذکر است که اگر چه روش سالاری و همکارانش بهترین و بدترین مقدار بهینه تابع هدف را به‌دست آوردند و هم‌چنین بزرگ‌ترین مجموعه جواب بهینه را به‌دست آوردند اما بخشی از این مجموعه جواب بهینه، نشدنی است. در صورتی که در روش دوم و روش جایگزین، مجموعه جواب بهینه‌ای کاملا شدنی را به‌دست آورده‌ایم.

مثال ۲ مدل ILFP زیر را در نظر بگیرید

$$
\begin{aligned}
Max\ \ z^{\pm} &= \frac{[۲/۶, ۲/۸]x^{\pm}_۱ + [۳/۲, ۴/۱]x^{\pm}_۲ + [۴, ۵]x^{\pm}_۳ + [۳, ۳/۲]}{[۱/۳, ۲/۸]x^{\pm}_۱ + [۲/۴, ۴/۹]x^{\pm}_۲ + [۵, ۶]x^{\pm}_۳ + [۱, ۲]},\\
s.t. \qquad & [۰, ۳]x^{\pm}_۱ + [۱/۵, ۲]x^{\pm}_۲ + [۳/۲, ۵]x^{\pm}_۳ \ge [۱۹/۶, ۲۰], \qquad (۱۶)\\
& [۱, ۵/۵]x^{\pm}_۱ + [/۵, ۳/۵]x^{\pm}_۲ - [۱, ۱/۵]x^{\pm}_۳ \le [۵, ۷],\\
& [۱/۵, ۱/۶]x^{\pm}_۱ - [۲/۸, ۷]x^{\pm}_۲ + [۲/۵, ۳]x^{\pm}_۳ \le [۴, ۵/۹],\\
& x^{-}_۱, x^{-}_۲, x^{-}_۳ \ge ۰.
\end{aligned}
$$

اکنون با استفاده از روش‌های ارایه شده مدل (۱۶) را حل می‌کنیم. نتایج در جدول ۱ آورده شده‌اند.

مجموعه جواب بهینه به‌دست آمده از روش دوم کاملا شدنی است در حالی‌که مجموعه جواب بهینه به‌دست آمده از روش اول شدنی نیست. برای مثال، نقطه $(۲/۸۷۰۹, ۳/۴۵۴۰, ۲/۹۵۴۰)^t$ در دومین محدودیت بزرگ‌ترین ناحیه شدنی یعنی $x_{۱opt} + ۲/۵x_{۲opt} - ۱/۵x_{۳opt} \le ۷$ صدق نمی‌کند و یا نقطه $(۲/۸۷۰۹, ۰/۹۴۸۵, ۴/۵۰۵۹)^t$ در سومین محدودیت بزرگ‌ترین ناحیه شدنی یعنی، $۱/۵x_{۱opt} - ۷x_{۲opt} + ۲/۵x_{۳opt} \le ۵/۹$ صدق نمی‌کند. بنابراین

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.3.4.1]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.3.31]

از روش جایگزین جهت پیدا کردن نرخ انقباض استفاده می‌کنیم. با حل مدل جایگزین، نرخ انقباض $(q_1, q_2, q_3)^t = (1,0/6543,1)^t$ را به‌دست می‌آوریم. جواب‌های اصلاح‌شده مدل (۱۶) را به‌دست می‌آوریم و مجموعه جواب بهینه جواب به‌دست آمده از روش جایگزین نسبت به روش اول کاهش یافته است و مجموعه جواب بهینه کاملا شدنی است. مجموعه جواب بهینه به‌دست آمده از روش سالاری و همکارانش شدنی نیست زیرا نقطه $(0/0000,0/4875,0/1349)^t$ در اولین محدودیت بزرگ‌ترین ناحیه شدنی یعنی $3x_{1_{opt}} + 2x_{2_{opt}} + 5x_{3_{opt}} \geq 19/6$ صدق نمی‌کند و یا نقطه $(5/9836,2/7322,0/1349)^t$ در دومین محدودیت بزرگ‌ترین ناحیه شدنی یعنی $x_{1_{opt}} + 2/5x_{2_{opt}} - 1/5x_{3_{opt}} \leq 7$ صدق نمی‌کند؛ لذا مجموعه جواب بهینه حاصل از روش سالاری و همکارانش کاملا شدنی نیست.

جدول ۱. مجموعه جواب‌های بهینه به‌دست آمده روش‌های پیشنهادی برای مدل (۱۶)

روش‌ها	مجموعه جواب بهینه	مقدار تابع هدف
روش اول	$\begin{pmatrix}[1/1111,1/2708]\\[0/9485,3/9930]\\[2/9540,4/2533]\end{pmatrix}$	[0/7547,1/3252]
روش دوم	$\begin{pmatrix}[1/1111,2/8709]\\[0/9485,3/4540]\\[2/9540,4/5059]\end{pmatrix}$	[0/7547,1/3482]
روش جایگزین	$\begin{pmatrix}[1/1111,2/8709]\\[1/3816,3/0210]\\[2/9540,4/5059]\end{pmatrix}$	[0/7474,1/3373]
روش سالاری و همکارانش	$\begin{pmatrix}[0/0000,5/9836]\\[0/4875,2/7322]\\[0/1349,3/8834]\end{pmatrix}$	[0/7050,2/1346]

٦ نتیجه‌گیری

در این مقاله، مدل ILFP را مورد مطالعه قرار دادیم. دو روش برای به‌دست آوردن مجموعه جواب بهینه ILFP معرفی کردیم. در هر دو روش، مدل ILFP به دو زیر مدل تبدیل می‌شود. در روش اول، ممکن است یک مجموعه جواب بهینه که بعضی از نقاط آن شدنی نیستند را به‌دست آوریم یعنی یک تعداد از نقاط بزرگ‌ترین ناحیه شدنی را نقض می‌کنند. بنابراین برای حذف بخش نشدنی، از یک فرآیند محدود کردن فضای جواب در جهت حذف بخش نشدنی استفاده کردیم که به این عمل انقباض فضای جواب می‌گویند. برای به‌دست آوردن نرخ انقباض از روش جایگزین استفاده کردیم به‌طوری‌که هر متغیر را با نرخ متفاوت منقبض می‌کند. مجموعه جواب بهینه به‌دست آمده از این روش به‌طور قابل توجهی کاهش می‌یابد اما مجموعه جواب بهینه نهایی به‌دست آمده کاملا شدنی است. در روش دوم، برای تضمین شدنی بودن مجموعه جواب بهینه حاصل، یک محدودیت اضافی به زیر مدل دوم اضافه کردیم. بنابراین یک مجموعه جواب بهینه کاملا شدنی را به‌دست می‌آوردیم.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.3.4.1]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.3.31]

منابع

[1] Allahdadi, M., Mishmast Nehi, H. (2017). New solution space for solving the interval linear programming model. Journal of Operational Research in Its Applications, 14(2), 111-121.

[2] Khoshandam, L. (2019). An Extension to Imprecise Data Envelopment Analysis, Journal of Operational Research in Its Applications, 16(1), 117-129.

[3] Cui, L., Li, Y., Huang, G. (2016). Double-sided fuzzy chance-constrained linear fractional programming approach for water resources management. Engineering Optimization , 48, 949-965.

[4] Das, S. K., Mandal, T. (2017). A MOLFP method for solving linear fractional programming under fuzzy environment. International journal of research in industrial engineering, 6(3), 202-213.

[5] Ghadle, K. P., Pawar, T. S. (2015). An Alternative Method for Solving Linear Fractional Programming Problems. international journal recent scientific research, 6, 4418-4420.

[6] Jiao, H., Liu, S. (2014). A new linearization technique for minimax linear fractional programming. International Journal of Engineering and Technology, 91, 1730-1743.

[7] Kumar-Das, S. (2019). A new method for solving fuzzy linear fractional programming problem with new ranking function. International journal of research in industrial engineering, 8(4), 384-393.

[8] Liu, F., Wen, Z., Xu, Y. (2016). A fuzzy fractional chance-constrained programming model for air quality management under uncertainty. *Engineering* Optimization ,48, 135-153.

[9] Singh, S. K., Yadav, S. P. (2016). Fuzzy programming approach for solving intuitionistic fuzzy linear fractional programming problem. international journal of fuzzy systems ,18, 263-269.

[10] Wu, H. C. (2015). Parametric continuous-time linear fractional programming problems. Journal of Inequalities and Applications, 1, 1-22.

[11] Charnes, A., Cooper, W. W. (1962). Programming with linear fractional functionals. Naval Research Logistics Quarterly, 9(3-4), 181-186.

[12] Dinkelbach, W. (1967). On nonlinear fractional programming, Management Science, 13(7), 492–498.

[13] Liu, S., Lin, Y. (2006). Grey Information, Theory and Practical Applications, Springer-Verlag, London.

[14] Veeramani, C., Sumathi, M. (2016). Solving the linear fractional programming problem in a fuzzy environment: Numerical approach. Applied Mathematical Modelling, 40, 6148-6164.

[15] Ebrahimnejad, A., Jafarnejad Ghomi, S., Mirhosseini-Alizamini, S. M. (2018). A revisit of numerical approach for solving linear fractional programming problem in a fuzzy environment. Applied Mathematical Modelling, 57, 459-473.

[16] Nayak, S., Ojha, A. K. (2018). Multi-objective Linear Fractional Programming Problem with Fuzzy Parameters. Soft Computing for Problem Solving, 79-90.

[17] Naseri S. H., Taleshian F., Taghinezhad N. A., Khalili F. (2013). Quadratic Progamming With Fuzzy Parameters: An Extension Principle Approach. Journal of Operational Research in Its Applications, 9(4), 9-25.

[18] Hladik, M. (2010). Generalized linear fractional programming under interval uncertainty. European Journal of Operational Research, 205(1), 42-46.

[19] Borza, M., Rambely, A. S., Saraj, M. (2012). Solving linear fractional programming problems with interval coefficients in the objective function. A new approach. Applied Mathematical Sciences, 6, 3443- 3452.

[20] Jeyakumar, V., Li, G., Srisatkunarajah, S. (2013). Strong duality for robust minimax fractional programming problems. European Journal of Operational Research, 228(2), 331-336.

[21] Sun, X. K., Chai, Y. (2014). On robust duality for fractional programming with uncertainty data. Positivity, 18, 9-28.

[22] Mostafaee, A., Hladik, M. (2020). Optimal value bounds in interval fractional linear programming and revenue efficiency measuring. Central European Journal of Operational Research, 28(3), 963-981.

[23] Salary Pour Sharif Abad, F., Allahdadi, M., Mishmast Nehi, H. (2020). Interval linear fractional programming: optimal value range of the objective function. Computational and Applied Mathematics, 260-271.

[24] Zhou, F., Huang, G. H., Chen, G. X., Guo, H. C. (2009). Enhanced-interval linear programming. European Journal of Operational Research, 199, 323-333.

[25] Moore, R. E. (1979). Method and Application of Interval Analysis. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 74-79.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.3.4.1]

[DOI: 10.52547/jamlu.18.3.31]

[26] Ishibuchi, H., Tanaka, H. (1990). Multi objective programming in optimization of the interval objective function. European Journal of Operational Research, 48(2), 219-225.
[27] Darvishi, D., Forrest, J., Liu, S. (2019). A comparative analysis of grey ranking approaches. Grey Systems Theory and Application, 9(4), 472-487.
[28] Hansen, H., Walster, G. W. (1992). Global Optimization Using Interval Analysis: Second Edition, Revised and Expanded. New York: Dekker.
[29] Fiedler, M., Nedoma, J., Ramik, J., Rohn, J., Zimmermann, K. (2006). Linear optimization problems with inexact data. Springer, New York.
[30] Tong, S. C. (1994). Interval number, fuzzy number linear programming. fuzzy sets and systems, 66, 301-306.
[31] Alefeld, G., Herzberger, J. (1983). Introduction to Interval Computations. New York: Academic Press.
[32] Salary Pour Sharif Abad , F., Allahdadi , M. , Mishmast Nehi , H. (2020) . Interval Linear Fractional Programming Problem: Optimal Solution Range of the Decision Variables . Thai Journal of Mathematics, submitted .

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.3.4.1]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.3.31]