مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال هجدهم، شماره دوم (پیاپی ۶۹)،تابستان ۰۰، ص ص ۳۵-۲۵
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

بررسی مفاهیم جواب‌های مختلف در مسایل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه با ضرایب بازه‌ای

شیما قلی‌نژاد[۱]، ساناز ریواز[۲*]

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل، ایران

۲- استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل، ایران

رسید مقاله: ۲۸ دی ۱۳۹۸

پذیرش مقاله: ۱۳ آذر ۱۳۹۹

چکیده

مسایل بهینه‌سازی شاخه‌ای از پژوهش را از دیرباز به خود اختصاص داده‌اند. در این حوزه برنامه‌ریزی چندهدفه از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. از آن‌جا که در اکثر مسایل برنامه‌ریزی چندهدفه موجود در دنیای واقعی امکان تعیین ضرایب به طور قطعی وجود ندارد، در این مقاله مسایل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه با ضرایب بازه‌ای مورد بررسی قرار می‌گیرند. متناظر با چنین مسایلی چهار مفهوم جواب، $(\mathbf{A},\mathbf{b})$−لزوما کارای ضعیف، $(\mathbf{A},\mathbf{b})$−لزوما کارا، $(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{C})$−لزوما کارای ضعیف و $(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{C})$−لزوما کارا، معرفی می‌شوند. همچنین شرایط لازم و کافی برای تشخیص چنین جواب‌هایی ارایه می‌شوند. درپایان کارایی نتایج در مثال‌هایی عددی بررسی می‌شوند.

کلمات کلیدی: برنامه‌ریزی بازه‌ای، برنامه‌ریزی خطی چندهدفه، جواب کارا، مساله مجموع وزنی.

۱ مقدمه

انسان روزانه با مسایل تصمیم‌گیری گوناگونی مواجه است که درآن‌ها معیارهای مغایر و چندگانه‌ای برای تصمیم‌گیری وجود دارد. به دلیل رویارویی فراوان با چنین مسایلی، شاخه‌ای به نام برنامه‌ریزی چندهدفه در علم تحقیق در عملیات ایجاد شده‌است [۱]. با توجه به کاربرد وسیع این شاخه در علوم مختلف مانند مهندسی، مدیریت، اقتصاد، ریاضیات و غیره، محققین بسیاری تاکنون بر توسیع و استفاده از آن تمرکز نموده‌اند [۲، ۳].

از آن‌جا که در اکثر مسایل برنامه‌ریزی چندهدفه امکان تعیین داده‌ها و ضرایب مساله به طور قطعی امکان پذیر نیست، بنابراین باید با به‌کارگیری روشی مناسب، داده‌های نامشخص در مساله مدل شوند. در این راستا رویکردهای مختلفی مانند برنامه‌ریزی فازی، برنامه‌ریزی احتمالی و برنامه‌ریزی بازه‌ای وجود دارد[۶-۴]. برخی از

* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: srivaz@nit.ac.ir

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-31]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.2.6.1]

[DOI: 10.52547/jamlu.18.2.25]

محققین به کارایی بیشتر رویکرد برنامه‌ریزی بازه‌ای معتقدند به همین دلیل به بررسی، استفاده و توسیع آن در سال‌های اخیر پرداخته‌اند [۱۰-۸].

در سال ۲۰۰۷ مقاله‌ای توسط اولیویرا[1] و آنتونز[2] ارایه شد که در آن برخی از تحقیقات پیرامون مسایل برنامه‌ریزی خطی چند هدفه با ضرایب بازه‌ای مرور شدند[۱۱]. این محققان خود نیز در سال ۲۰۰۹ به ارایه روشی تعاملی برای برخورد با چنین مسایلی پرداختند [۱۲]. شرایط بهینگی کاروش-کان- تاکر متناظر با مسایل برنامه‌ریزی چند هدفه بازه‌ای نیز در سال ۲۰۰۹ ارایه شد[۱۳]. ریواز و یعقوبی در سال‌های ۲۰۱۳ و ۲۰۱۸ روش‌هایی بر پایه مفهوم بیشینه رگرت جهت برخورد با مسایل برنامه‌ریزی خطی چند هدفه با ضرایب بازه‌ای در توابع هدف معرفی کردند [۱۴، ۱۵]. همچنین با استفاده از همین مفهوم رویکردی به منظور یافتن جواب‌های لزوما کارا در چنین مسایلی توسط ریواز و همکاران در [۱۶] پیشنهاد شد.

در توضیح بیشتر پیرامون کارایی رویکرد برنامه‌ریزی بازه‌ای، مثالی ساده از آن‌چه که ممکن است در یک کارخانه رخ دهد بیان می‌شود [۱۴]. فرض کنید کارخانه‌ای سه محصول P_1، P_2 و P_3 را با توجه به محدودیت‌های بودجه تولید می‌کند. بر اساس تجارب قبلی و نظر کارشناسان مشخص شده است که فروش هر واحد محصول P_i، $i=1,2,3$، سودی مابین $\underline{a}_i$ و $\overline{a}_i$ وقتی که $\underline{a}_i < \overline{a}_i$، برای کارخانه دارد. واضح است که تولید محصولات نیاز به ماده خام دارد. بر اساس تجربه حاصل از تولید در گذشته، مشخص شده است که تولید هر واحد محصول P_i، $i=1,2,3$، مقداری مابین $\underline{b}_i$ و $\overline{b}_i$ وقتی که $\underline{b}_i < \overline{b}_i$، را از یک ماده خام کمیاب مصرف می‌کند. مدیر کارخانه در نظر دارد سود حاصل از فروش را بیشینه و میزان مصرف ماده خام کمیاب را کمینه سازد. به منظور مدل‌سازی این مساله، متغیر x_i به عنوان میزانی از محصول P_i، $i=1,2,3$، که باید تولید شود در نظر گرفته می‌شود. بدین ترتیب مساله به صورت زیر قابل بیان است:

$$\max\,(f_1(x_1,x_2,x_3),\ f_2(x_1,x_2,x_3)),$$
$$s.t.$$
$$g_i(x_1,x_2,x_3)\le e_i,\qquad i=1,\dots,m,$$
$$x_1,x_2,x_3\ge 0,$$

که در آن $g_i(x_1,x_2,x_3)\le e_i$، $i=1,\dots,m$، محدودیت‌های مربوط به بودجه را مشخص می‌کند و f_1 و f_2 دو تابع هدف خطی با ضرایب بازه‌ای به فرم زیر هستند:

$$f_1(x_1,x_2,x_3)=[\underline{a}_1,\overline{a}_1]x_1+[\underline{a}_2,\overline{a}_2]x_2+[\underline{a}_3,\overline{a}_3]x_3,$$
$$f_2(x_1,x_2,x_3)=-([\underline{b}_1,\overline{b}_1]x_1+[\underline{b}_2,\overline{b}_2]x_2+[\underline{b}_3,\overline{b}_3]x_3).$$

واضح است که در برنامه‌ریزی چند هدفه با در نظر گرفتن مغایرت توابع هدف، دستیابی به جوابی که هم‌زمان تمامی هدف‌ها را بهینه سازد امکان پذیر نیست. با توجه به عدم وجود چنین جوابی، مفاهیم جواب‌های مختلفی متناظر با مسایل بهینه‌سازی چند هدفه تاکنون معرفی شده است که جواب‌های کارا و کارای ضعیف از جمله معتبرترین این مفاهیم هستند [۱۷،۱]. برخی از محققین این مفاهیم را به برنامه‌ریزی چندهدفه با ضرایب

[1] Oliveira
[2] Antunes

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.2.6.1]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.2.25]

بازه‌ای نیز گسترش داده‌اند. برای نمونه، بیتران[1] در سال ۱۹۸۰ به معرفی جواب‌های لزوما کارا و امکانا کارا در مسایل برنامه‌ریزی چندهدفه با ضرایب هدف بازه‌ای پرداخت[۱۸]. مفاهیم جواب‌های دیگری مانند امکانا کارای ضعیف نیز در[۱۴] متناظر با چنین مسایلی معرفی شده است. تحقیقاتی پیرامون جواب‌های امکانا کارا نیز در [۱۹، ۲۰] انجام شده است. همچنین جواب‌های لزوما کارا در[۲۳-۲۱] مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

در این مقاله نیز مسایل برنامه‌ریزی خطی چند هدفه با ضرایب و پارامترهای بازه‌ای مورد بررسی قرار می‌گیرند. با در نظرگرفتن مفاهیم جواب‌های کارا و کارای ضعیف، مفاهیم جواب‌های بهینی متناظر با این گونه مسایل معرفی می‌شوند. در ادامه سعی می‌شود شرایط لازم و کافی به منظور تشخیص چنین جواب‌هایی ارایه شوند.

برای این منظور در بخش ۲، مفاهیمی از آنالیز بازه‌ای و برنامه‌ریزی چندهدفه مرور می‌شوند. فرم کلی یک مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه با ضرایب بازه‌ای به همراه تعاریف و نکات مربوط به آن در بخش ۳ بیان می‌گردند. قضایا و نتایج اصلی متناظر با مسایل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه با ضرایب بازه‌ای نیز در همین بخش ارایه می‌شوند. در بخش ۴، کارایی نتایج در مثال‌هایی عددی مورد بررسی قرار می‌گیرند. در پایان، بخش ۵ به بحث و نتیجه‌گیری اختصاص می‌یابد.

۲ پیش‌نیازها

در این بخش برخی از مفاهیم موجود در آنالیز بازه‌ای و برنامه‌ریزی چندهدفه که در ادامه به آن‌ها نیاز است، بیان می‌شوند[۴،۱].

یک ماتریس بازه‌ای $\mathbf{A}$ و یک بردار بازه‌ای $\mathbf{b}$ در حالت کلی به ترتیب به صورت زیر قابل نمایش هستند:

$$\mathbf{A}=\left[\underline{A},\overline{A}\right]=\left\{A\in\mathbb{R}^{m\times n}:\underline{A}\le A\le\overline{A}\right\},$$
$$\mathbf{b}=\left[\underline{b},\overline{b}\right]=\left\{b\in\mathbb{R}^{m}:\underline{b}\le b\le\overline{b}\right\},$$

که در آن‌ها

$$\underline{A}\le\overline{A},\ \underline{A},\overline{A}\in\mathbb{R}^{m\times n},$$
$$\underline{b}\le\overline{b},\ \underline{b},\overline{b}\in\mathbb{R}^{m}.$$

مجموعه تمام ماتریس‌های بازه‌ای $m\times n$ بعدی توسط $\Re^{m\times n}$ و مجموعه تمام بردارهای بازه‌ای m بعدی با $\Re^{m}$ نمایش داده می‌شوند.

مرکز و شعاع ماتریس بازه‌ای $\mathbf{A}$ به ترتیب توسط $A_c=\frac{1}{2}\left(\underline{A}+\overline{A}\right)$ و $A_\Delta=\frac{1}{2}\left(\overline{A}-\underline{A}\right)$ و مرکز و شعاع بردار بازه‌ای $\mathbf{b}$ به ترتیب به‌صورت $b_c=\frac{1}{2}\left(\underline{b}+\overline{b}\right)$ و $b_\Delta=\frac{1}{2}\left(\overline{b}-\underline{b}\right)$ معرفی می‌شوند.

[1] Bitran

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.2.6.1]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.2.25]

شایان ذکر است که در این مقاله جهت نمایش ماتریس‌ها و بردارهای بازه‌ای از حروف انگلیسی پررنگ مانند **A** و **b** استفاده می‌شود.

مجموعه تمام بردارهای m بعدی با درایه‌های $\{-1,1\}$ به صورت

$$Y_m = \{y \in \mathbb{R}^m : |y| = e\}$$

نمایش داده می‌شود که $e = (1,...,1)^t$ برداری از این مجموعه است.

یک مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه درحالت کلی به‌صورت زیر قابل بیان است:

$$\begin{aligned} &Min\, Cx = (c^1x,...,c^px)^t, \\ &s.t.\ Ax \le b, \\ &x \ge 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

که در آن $c^ix = \sum_{j=1}^{n} c_j^i x_j$ ، $i = 1,...,p$، یک تابع هدف حقیقی مقدار خطی است. بنابراین C ماتریسی $p \times n$ با سطرهایی به صورت $c^i = (c_1^i,...,c_n^i)$ ، $i = 1,...,p$، است. همچنین A یک ماتریس $m \times n$، b یک بردار m مولفه‌ای و x برداری n مولفه‌ای شامل متغیرهای مساله است.

لازم به ذکر است که نماد t بالای یک بردار یا ماتریس بیان‌گر ترانهاده آن‌ها است. در ادامه دونوع ترتیب جزیی روی بردارها یادآوری می‌شوند.

فرض کنید $A = (a_1,...,a_p)^t$ و $B = (b_1,...,b_p)^t$ دو بردار در $\mathbb{R}^p$ هستند. آن‌گاه

- $A \preceq B$ اگر $a_i \le b_i$ برای هر $i = 1,...,p$ و دست‌کم $1 \le q \le p$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $a_q < b_q$.
- $A \prec B$ اگر $a_i < b_i$ برای هر $i = 1,...,p$.

تعریف ۱[۱] - مساله(۱) را در نظر بگیرید. جواب شدنی x^0

- یک جواب کارا است هرگاه جواب شدنی دیگری مانند x موجود نباشد به قسمی که $Cx \preceq Cx^0$.
- یک جواب کارای ضعیف است هرگاه جواب شدنی دیگری مانند x موجود نباشد به‌طوری‌که $Cx \prec Cx^0$.

تعریف۲ [۱]- بردارناصفر $\lambda = (\lambda_1,...,\lambda_p)$ که در آن $\lambda_i \ge 0$، $i = 1,...,p$ را در نظر بگیرید. مساله برنامه‌ریزی خطی مجموع وزنی متناظر با مساله (۱) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &Min \sum_{i=1}^{p} \lambda_i c^i x, \\ &s.\,t.\ Ax \le b, \\ &x \ge 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

مساله(۲) به اختصار، مساله مجموع وزنی نامیده می‌شود.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.2.6.1]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.2.25]

قضیه۱ [۱]- یک جواب شدنی x^0 از مساله برنامه ریزی خطی چند هدفه (۱)، یک جواب کارای ضعیف این مساله است اگر و تنها اگر یک بردار ناصفر $\lambda = (\lambda_1,...,\lambda_p)$ با خاصیت $\lambda_i \geq 0$ ، $i = 1,...,p$ ، وجود داشته باشد به‌طوری‌که x^0 یک جواب بهینه برای مساله مجموع وزنی (۲) باشد.

قضیه۲ [۱]- یک جواب شدنی x^0 از مساله برنامه ریزی خطی چند هدفه (۱)، یک جواب کارای این مساله است اگر و تنها اگر یک بردار $\lambda = (\lambda_1,...,\lambda_p)$ با خاصیت $\lambda_i > 0$ ، $i = 1,...,p$ ، وجود داشته باشد به‌طوری‌که x^0 یک جواب بهینه برای مساله مجموع وزنی (۲) باشد.

۳ برنامه‌ریزی خطی چندهدفه بازه‌ای

یک مساله برنامه ریزی خطی چند هدفه با ضرایب بازه‌ای در حالت کلی به‌صورت

$$\begin{aligned} &Min\,(\mathbf{c}^1 x,...,\mathbf{c}^p x) = \mathbf{C}x, \\ &s.t.\ \ \mathbf{A}x \leq \mathbf{b}, \\ &\qquad x \geq 0. \end{aligned} \qquad (۳)$$

در نظر گرفته می‌شود.

در مساله (۳)،

- $x = (x_1,...,x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ بردار متغیرها است.
- $\mathbf{c}^i = (\left[\underline{c}_1^{\,i}, \overline{c}_1^{\,i}\right],...,\left[\underline{c}_n^{\,i}, \overline{c}_n^{\,i}\right])$ بردار بازه‌ای ضرایب تابع هدف iام ، $i = 1,...,p$ و $\mathbf{C}_{p\times n} = (\mathbf{c}^1,...,\mathbf{c}^p)^t$ ماتریس بازه‌ای ضرایب تمامی توابع هدف است.
- $\mathbf{A}_{m\times n}$ ماتریس بازه‌ای ضرایب متغیرها در محدودیت‌ها است.
- $\mathbf{b} = (\left[\underline{b}_1, \overline{b}_1\right],...,\left[\underline{b}_m, \overline{b}_m\right])^t$ بردار بازه‌ای سمت راست محدودیت‌ها است.

به منظور ساده‌سازی، در ادامه از مساله(۳) تحت عنوان مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه بازه‌ای یاد می‌شود. با در نظر گرفتن مفاهیم جواب‌های کارا و کارای ضعیف از برنامه‌ریزی خطی چندهدفه، در ادامه تعاریفی از جواب‌های گوناگون متناظر با مساله (۳) ارایه می‌شوند.

تعریف۳- مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه بازه‌ای (۳) را در نظر بگیرید. بردار $x^0 \in \mathbb{R}^n$ جواب،

- **$(\mathbf{A},\mathbf{b})$**-لزوما کارای ضعیف است هرگاه برای هر $A \in \mathbf{A}$، $b \in \mathbf{b}$، یک جواب کارای ضعیف مساله برنامه‌ریزی خطی چند هدفه متناظر برای بعضی $C \in \mathbf{C}$ باشد.
- **$(\mathbf{A},\mathbf{b})$**-لزوما کارا است هرگاه برای هر $A \in \mathbf{A}$، $b \in \mathbf{b}$، جواب کارای مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه متناظر برای بعضی $C \in \mathbf{C}$ باشد.
- **$(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{C})$**-لزوما کارای ضعیف است هرگاه برای هر $A \in \mathbf{A}$، $b \in \mathbf{b}$، $C \in \mathbf{C}$ ، یک جواب کارای ضعیف مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه متناظر باشد.
- **$(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{C})$**- لزوما کارا است هرگاه برای هر $A \in \mathbf{A}$، $b \in \mathbf{b}$، $C \in \mathbf{C}$ ، یک جواب کارا مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه متناظر باشد.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.2.6.1]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.2.25]

مجموعه همه جواب‌های $(\mathbf{A},\mathbf{b})$–لزوما کارای ضعیف، $(\mathbf{A},\mathbf{b})$–لزوما کارا، $(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{C})$–لزوما کارای ضعیف و $(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{C})$– لزوما کارا به ترتیب با $NWE_{\mathbf{Ab}}$، $NE_{\mathbf{Ab}}$، $NWE_{\mathbf{AbC}}$ و $NE_{\mathbf{AbC}}$ نمایش داده می‌شوند. از تعاریف فوق روابط $NE_{\mathbf{Ab}} \subseteq NWE_{\mathbf{Ab}}$ و $NE_{\mathbf{AbC}} \subseteq NWE_{\mathbf{AbC}}$ نتیجه می‌شوند. همچنین واضح است که $NWE_{\mathbf{AbC}} \subseteq NWE_{\mathbf{Ab}}$ و $NE_{\mathbf{AbC}} \subseteq NE_{\mathbf{Ab}}$.

در ادامه مساله مجموع وزنی متناظر با مساله (۳) تعریف می‌شود.

تعریف ٤– بردار ناصفر $\lambda = (\lambda_1,...,\lambda_p)$ که در آن $\lambda_i \geq 0$، $i = 1,...,p$ ، را در نظر بگیرید. مساله مجموع وزنی متناظر با مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه بازه‌ای (۳) به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &Min \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathbf{c}^i x = \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \underline{c}_j^i, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overline{c}_j^i \right] x_j = \mathbf{c}x \\ &s.t. \ \mathbf{A}x = \mathbf{b}, \\ &\quad x \geq 0, \end{aligned} \qquad (۴)$$

که در آن $\mathbf{c} = ([\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \underline{c}_1^i, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overline{c}_1^i],...,[\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \underline{c}_n^i, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overline{c}_n^i])$.

مساله (۴) یک مساله برنامه‌ریزی خطی با ضرایب بازه‌ای است. متناظر با چنین مساله مفاهیم جواب‌های مختلفی وجود دارد[۲۴]. در ادامه، تعاریف مربوط به مفاهیم جواب‌های $(\mathbf{A},\mathbf{b})$–بهینه قوی و $(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{c})$–بهینه قوی ارایه می‌شوند.

تعریف ٥ [۲٤]– مساله برنامه‌ریزی خطی با ضرایب بازه‌ای (۴) را درنظر بگیرید. بردار $x^0 \in \mathbb{R}^n$ یک جواب،

- $(\mathbf{A},\mathbf{b})$–بهینه قوی است هرگاه برای هر $A \in \mathbf{A}$، $b \in \mathbf{b}$، جواب بهینه مساله برنامه‌ریزی خطی متناظر برای بعضی از $c \in \mathbf{c}$ باشد.
- $(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{c})$–بهینه قوی است هرگاه برای هر $A \in \mathbf{A}$، $b \in \mathbf{b}$ ، $c \in \mathbf{c}$، جواب بهینه مساله برنامه‌ریزی خطی متناظر باشد.

با توجه به قضایای۱و۲، نتایج زیر پیرامون مسایل (۳) و (۴) حاصل می‌شوند.

قضیه ۳– بردار $x^0 \in \mathbb{R}^n$ یک جواب $(\mathbf{A},\mathbf{b})$–لزوما کارای ضعیف برای مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه بازه‌ای (۳) است اگر و تنها اگر یک بردار ناصفر $\lambda = (\lambda_1,...,\lambda_p)$ با خاصیت $\lambda_i \geq 0$ ، برای هر $i = 1,...,p$ ، وجود داشته باشد به‌طوری‌که x^0 یک جواب $(\mathbf{A},\mathbf{b})$–بهینه قوی برای مساله مجموع وزنی(۴) باشد.

قضیه ٤– بردار $x^0 \in \mathbb{R}^n$ یک جواب $(\mathbf{A},\mathbf{b})$–لزوما کارا برای مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه بازه‌ای (۳) است اگرو تنها اگر یک بردار $\lambda = (\lambda_1,...,\lambda_p)$ با خاصیت $\lambda_i > 0$ ، برای هر $i = 1,...,p$ ، وجود داشته باشد به‌طوری‌که x^0 یک جواب $(\mathbf{A},\mathbf{b})$–بهینه قوی برای مساله مجموع وزنی (۴) باشد.

قضیه٥– بردار $x^0 \in \mathbb{R}^n$ یک جواب $(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{C})$–لزوما کارای ضعیف برای مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه بازه‌ای (۳) است اگر و تنها اگر یک بردار ناصفر $\lambda = (\lambda_1,...,\lambda_p)$ با خاصیت $\lambda_i \geq 0$ ، برای هر

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.2.6.1]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.2.25]

p ,...,$i=$۱، وجود داشته باشد به‌طوری‌که x^{0} یک جواب $(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{c})$–بهینه قوی برای مساله مجموع وزنی (۴) باشد.

قضیه٦- بردار $x^{0}\in\mathbb{R}^{n}$ یک جواب $(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{C})$–لزوما کارا برای مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه بازه‌ای (۳) است اگر و تنها اگر یک بردار ناصفر $\lambda=(\lambda_{۱},...,\lambda_{p})$ با خاصیت $\lambda_{i}>۰$ ، برای هر $i=۱,...,p$ ، وجود داشته باشد به‌طوری‌که x^{0} یک جواب $(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{c})$–بهینه قوی برای مساله مجموع وزنی (۴) باشد.

از آوردن اثبات قضایای فوق به دلیل سر راست بودن، صرف نظر شده است.

در ادامه به دنبال ارایه شرایطی جهت تشخیص جواب‌های مختلف، $(\mathbf{A},\mathbf{b})$–لزوما کارای ضعیف، $(\mathbf{A},\mathbf{b})$–لزوما کارا، $(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{C})$–لزوما کارای ضعیف و $(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{C})$–لزوما کارا، در یک مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه بازه‌ای هستیم. برای این منظور، ابتدا به بیان قضایای ۷و ۸ با توجه به نتایج موجود در[۲۴] می‌پردازیم. در واقع این قضایا شرایط لازم و کافی جهت تشخیص $(\mathbf{A},\mathbf{b})$–بهینه قوی و $(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{c})$–بهینه قوی بودن یک بردار $x^{0}\in\mathbb{R}^{n}$ در مساله مجموع وزنی(۴) که یک مساله برنامه‌ریزی خطی با ضرایب بازه‌ای است، را ارایه می‌دهند.

قضیه۷- بردار $x^{0}\in\mathbb{R}^{n}$ با مجموعه‌های $F=\left\{t_{j}\,\middle|\, j=۱,...,f, x^{0}_{t_{j}}=۰\right\}$ و $G=\left\{r_{i}\,\middle|\, i=۱,...,q, \underline{A}_{r_{i},.}x^{0}=\bar{b}_{r_{i}}\right\}$ را در نظر بگیرید. بردار x^{0} یک جواب $(\mathbf{A},\mathbf{b})$–بهینه قوی برای مساله برنامه ریزی خطی با ضرایب بازه‌ای (۴) است اگر و تنها اگر x^{0} یک جواب شدنی مساله(۴) برای هر $A\in\mathbf{A}$، $b\in\mathbf{b}$ باشد و سیستم خطی

$$\underline{A}_{r_{i},.}(x^{۱}-x^{۲})\le ۰,\quad i=۱,...,q, \tag{۵}$$

$$(x^{۱}-x^{۲})_{t_{j}}\ge ۰,\quad j=۱,...,f, \tag{۶}$$

$$\bar{c}x^{۱}-\underline{c}x^{۲}\le -۱, \tag{۷}$$

$$x^{۱},x^{۲}\ge ۰, \tag{۸}$$

فاقد جواب باشد.

با توجه به تابع هدف مساله مجموع وزنی (۴)، نامساوی (۷) به‌صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\sum_{j=۱}^{n}\sum_{g=۱}^{p}\lambda_{g}\bar{c}_{j}^{g}x_{j}^{۱}-\sum_{j=۱}^{n}\sum_{g=۱}^{p}\lambda_{g}\underline{c}_{j}^{g}x_{j}^{۲}\le -۱$$

قضیه ۸- بردار $x^{0}\in\mathbb{R}^{n}$ را با مجموعه‌های $F=\left\{t_{j}\,\middle|\, j=۱,...,f, x^{0}_{t_{j}}=۰\right\}$ و $G=\left\{r_{i}\,\middle|\, i=۱,...,q, \underline{A}_{r_{i},.}x^{0}=\bar{b}_{r_{i}}\right\}$ در نظر بگیرید. بردار x^{0} یک جواب $(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{c})$–بهینه قوی برای مساله برنامه‌ریزی خطی با ضرایب بازه‌ای (۴) است اگر و تنها اگر x^{0} یک جواب شدنی مساله(۴) برای هر $A\in\mathbf{A}$، $b\in\mathbf{b}$ باشد و برای هر $h\in Y_{n-f}$، سیستم خطی

$$\underline{A}_{r_{i},.}\,y\le ۰, i=۱,...,q, \tag{۹}$$

$$y_{t_{j}}\ge ۰,\ j=۱,...,f, \tag{۱۰}$$

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.2.6.1]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.2.25]

$$\sum_{j=1}^{f} \underline{c}_{t_j} y_{t_j} + \sum_{j=f+1}^{n} ((c_c)_{t_j} + h_{j-f}(c_\Delta)_{t_j}) \le -1 \qquad (11)$$

فاقد جواب باشد.

با توجه به تابع هدف مساله مجموع وزنی (۴)، نامساوی (۱۱) معادل با

$$\sum_{j=1}^{f}\sum_{g=1}^{p} \lambda_g \underline{c}^g_{t_j} y_{t_j} + \sum_{j=f+1}^{n}\sum_{g=1}^{p} \lambda_g ((c^g_c)_{t_j} + h_{j-f}(c^g_\Delta)_{t_j}) \le -1,$$

است.

در ادامه این بخش، قضایایی پیرامون مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفی بازه‌ای (۳) جهت ارایه شرایط لازم و کافی برای تشخیص جواب‌های مختلف بیان می‌شوند.

قضیه ۹- بردار $x^0 \in \mathbb{R}^n$ را با مجموعه‌های $F = \{t_j \mid j = 1,..., f, x^0_{t_j} = 0\}$ و $G = \{r_i \mid i = 1,..., q, \underline{A}_{r_i,.} x^0 = \bar{b}_{r_i}\}$ در نظر بگیرید. بردار x^0 یک جواب $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$-لزوما کارای ضعیف برای مساله برنامه‌ریزی خطی چند هدفه بازه‌ای (۳) است اگر و تنها اگر x^0 یک جواب شدنی مساله(۳) برای هر $A \in \mathbf{A}$، $b \in \mathbf{b}$ باشد و به علاوه یک بردار ناصفر $\lambda = (\lambda_1,..., \lambda_p)$ با خاصیت $\lambda_g > 0$، $g = 1,..., p$ موجود باشد به‌طوری‌که سیستم خطی(۸-۵) فاقد جواب باشد.

قضیه ۹ با توجه به قضایای ۳ و ۷ اثبات می‌گردد.

قضیه ۱۰- بردار $x^0 \in \mathbb{R}^n$ را با مجموعه‌های $F = \{t_j \mid j = 1,..., f, x^0_{t_j} = 0\}$ و $G = \{r_i \mid i = 1,..., q, \underline{A}_{r_i,.} x^0 = \bar{b}_{r_i}\}$ در نظر بگیرید. بردار x^0 یک جواب $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$-لزوما کارا برای مساله برنامه‌ریزی خطی چند هدفه بازه‌ای (۳) است اگر و تنها اگر x^0 یک جواب شدنی مساله(۳) برای هر $A \in \mathbf{A}$، $b \in \mathbf{b}$ باشد و به علاوه یک بردار $\lambda = (\lambda_1,..., \lambda_p)$ با خاصیت $\lambda_g > 0$، $g = 1,..., p$ موجود باشد به‌طوری‌که سیستم خطی(۸-۵) فاقد جواب باشد.

با در نظر گرفتن قضایای ۴ و ۷، اثبات قضیه ۱۰ واضح است.

قضیه ۱۱- بردار $x^0 \in \mathbb{R}^n$ را با مجموعه‌های $F = \{t_j \mid j = 1,..., f, x^0_{t_j} = 0\}$ و $G = \{r_i \mid i = 1,..., q, \underline{A}_{r_i,.} x^0 = \bar{b}_{r_i}\}$ در نظر بگیرید. بردار x^0 یک جواب $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{C})$-لزوما کارای ضعیف برای مساله برنامه‌ریزی خطی چند هدفه بازه‌ای (۳) است اگر و تنها اگر x^0 یک جواب شدنی مساله(۳) برای هر $A \in \mathbf{A}$، $b \in \mathbf{b}$ باشد و به علاوه یک بردار ناصفر $\lambda = (\lambda_1,..., \lambda_p)$ با خاصیت $\lambda_g > 0$، $g = 1,..., p$ موجود باشد به‌طوری‌که سیستم خطی(۱۱-۹) فاقد جواب باشد.

قضیه ۱۱ با توجه به قضایای ۵ و ۸ به راحتی ثابت می‌گردد.

قضیه ۱۲- بردار $x^0 \in \mathbb{R}^n$ را با مجموعه‌های $F = \{t_j \mid j = 1,..., f, x^0_{t_j} = 0\}$ و $G = \{r_i \mid i = 1,..., q, \underline{A}_{r_i,.} x^0 = \bar{b}_{r_i}\}$ در نظر بگیرید. بردار x^0 یک جواب $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{C})$-لزوما کارا برای مساله برنامه‌ریزی خطی چند هدفه بازه‌ای (۳) است اگر و تنها اگر x^0 یک جواب شدنی مساله(۳) برای هر $A \in \mathbf{A}$،

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.2.6.1]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.2.25]

$b \in \mathbf{b}$ باشد و به علاوه یک بردار $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_p)$ با خاصیت $\lambda_g > 0$، $g = 1, ..., p$ موجود باشد به‌طوری‌که سیستم خطی(۱۱-۹) فاقد جواب باشد.

با درنظر گرفتن قضایای ۶ و ۸، قضیه ۱۲ نتیجه می‌شود.

٤ مثال‌های عددی

به منظور درک بهتر نتایج ارایه شده در بخش۳، مثال‌هایی عددی در ادامه بیان می‌شوند.

مثال ۱- مساله برنامه ریزی خطی دوهدفه بازه‌ای زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} &Min\ [-1,1]x_1 + [-2,1]x_2 + x_3, \\ &Min\ [-1,0]x_1 + [-2,0]x_2 + [-1,2]x_3, \\ &s.t.\ \ x_1 + 2x_2 + [0,1]x_3 \le 3 \\ &\quad x_1 + [1,3]x_2 + [-1,2]x_3 \le [4,6], \\ &\quad x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{aligned} \qquad (12)$$

بردار $x^0 = (1,1,0)^t$، یک جواب شدنی مساله (۱۲) برای هر انتخاب ممکن از بازه‌های موجود در محدودیت‌ها است. این مطلب با توجه به این‌که x^0 در کوچک‌ترین ناحیه شدنی حاصل از مساله (۱۲)،

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + x_3 \le 3, \\ &x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 4, \\ &x_1, x_2, x_3 \ge 0, \end{aligned}$$

صدق می‌کند نتیجه می‌شود.

سیستم خطی(۸-۵) متناظر با مساله (۱۲) با در نظر گرفتن $\lambda_1 = 0$ و $\lambda_2 = 1$ به‌صورت،

$$\begin{aligned} &(x_1^1 - x_1^2) + 2(x_2^1 - x_2^2) \le 0, \\ &x_3^1 - x_3^2 \ge 0, \\ &2x_3^1 + x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 \le -1, \\ &x_1^1, x_1^2, x_2^1, x_2^2, x_3^1, x_3^2 \ge 0, \end{aligned}$$

حاصل می‌شود. نشدنی بودن این سیستم با درنظرگرفتن محدودیت‌های $2x_3^1 + x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 \le -1$ و $x_1^2, x_2^2, x_3^1, x_3^2 \ge 0$، نتیجه می‌شود. بدین ترتیب با توجه به قضیه ۹، $x^0 = (1,1,0)^t$ یک جواب $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$-لزوما کارای ضعیف برای مساله (۱۲) است.

مثال ۲- مساله برنامه‌ریزی خطی دو هدفه بازه‌ای زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} &Min\ -x_1 - 2x_2 + [1,2]x_3, \\ &Min\ 4x_1 + 3x_2 + [3,5]x_3, \\ &s.t.\ \ x_1 + 2x_2 + [-1,1]x_3 \le 3, \\ &\quad x_1 + [-1,3]x_2 + [1,2]x_3 \le [4,5], \\ &\quad x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{aligned} \qquad (13)$$

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.2.6.1]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.2.25]

بردار $x^0 = (۱,۱,۰)^t$، یک جواب شدنی مساله(۱۳) برای هر انتخاب ممکن از بازه‌های موجود در محدودیت‌ها است. این مطلب با توجه به این‌که x^0 در کوچک‌ترین ناحیه شدنی حاصل از مساله (۱۳)،

$$x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ \le ۳,$$
$$x_۱ + ۳x_۲ + ۲x_۳ \le ۴,$$
$$x_۱, x_۲, x_۳ \ge ۰,$$

صدق می‌کند، نتیجه می‌شود.

سیستم خطی(۱۱-۹) متناظر با مساله (۱۳) با در نظر گرفتن $\lambda_۱ = ۱$ و $\lambda_۲ = ۰$ به‌صورت

$$y_۱ + ۲y_۲ - y_۳ \le ۰,$$
$$y_۳ \ge ۰,$$
$$-y_۱ - ۲y_۲ + y_۳ \le -۱,$$

حاصل می‌شود. با توجه به محدودیت‌های $y_۱ + ۲y_۲ - y_۳ \le ۰$, و $-y_۱ - ۲y_۲ + y_۳ \le -۱$, نشدنی بودن این سیستم واضح است. بنابراین طبق قضیه ۱۲، بردار $x^0 = (۱,۱,۰)^t$ یک جواب $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{C})$-لزوما کارای ضعیف برای مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه بازه‌ای (۱۳) است.

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله، مسایل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه با ضرایب بازه‌ای مدنظر قرار گرفتند. متناظر با چنین مسایلی، مفاهیم جواب‌های گوناگونی تعریف شد. در ادامه به منظور تشخیص این‌گونه جواب‌ها در یک مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه با ضرایب بازه‌ای، شرایط لازم و کافی ارایه شدند. در پایان، کارایی نتایج در مثال‌هایی عددی مورد بررسی قرار گرفتند.

معرفی مفاهیم جواب‌های جدید و بیان نتایج و شرایطی پیرامون تشخیص آن‌ها در مسایل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه با ضرایب بازه‌ای می‌تواند به عنوان موضوعاتی برای تحقیقات آتی مدنظر قرار گیرند. همچنین بررسی مسایل برنامه‌ریزی چندهدفه با ضرایب بازه‌ای به منظور ارایه روش‌های حل کارآمد و جدید همواره می‌تواند مورد توجه باشد.

قدردانی

نویسنده دوم مقاله مراتب قدردانی خود را از حمایت دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل از طریق اعتبار پژوهشی شماره BNUT/۳۹۵۰۲۵/۰۰ اعلام می‌دارد.

منابع

[1] Ehrgott, M., (2005). Multicriteria optimization. Berlin: Springer.
[2] Ehrgott, M., Klamroth, K. and Schwehm, C., (2004). An MCDM approach to portfolio optimization. European Journal of Operational Research, 155, 752-770.
[3] Wang, J.Y.T., Ehrgott, M., Dirks, K.N. and Gupta, A., (2014). A bilevel multi-objective road pricing model for economic, environmental and health sustainability. Transportation Research Procedia, 3, 393-402.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.2.6.1]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.2.25]

[4] Ghaderi, A. and Khanzadeh, C., (2019). A Combined Stochastic Programming and Robust Optimization Approach for Location-Routing Problem and Solving it via Variable Neighborhood Search algorithm. Journal of Operational Research and Its Applications, 16, 15-36.
[5] Nasseri, H. and Bavandi, S., (2017). Presentation of a model for solving multi-objective programming problems using the hyperbolic membership function. Journal of Operational Research and Its Applications. 14, 21-33.
[6] Moore, R.E., kearfott, R.B. and Cloud, M.J., (2009). Introduction to interval analysis. Philadelphia: SIAM.
[7] Osuna-Gomez, R., Chalco-Cano,Y., Hernandez-jimenez, B. and Aguirre-Cipe, I., (2019). Optimality conditions for fuzzy constrained programming problems. Fuzzy Sets and Systems, 362, 35-54.
[8] Fiedler, M., Nedoma, J., Ramik, J., Rohn, j. and Zimmermann, K., (2006). Linear optimization problems with inexact data. New York: Springer-Verlag.
[9] Ferdowsi, F., Maleki, H.R. and Rivaz, S., (2018). Air refueling tanker allocation based on a multi-objective zero-one integer programming model. Operational Research, https://doi.org/10.1007/s12351-018-0402-5.
[10] Garajova, E. and Hladik, M., (2019). On the optimal solution set in interval linear programming. Computational Optimization and Applications, 72(1), 269-292.
[11] Oliveira, C. and Antunes C.H., (2007). Multiple objective linear programming models with interval coefficients-an illustrative overview. European Journal of Operational Research, 181, 1434-1463.
[12] Oliveira, C. and Antunes C.H., (2009). An interactive method of tackling uncertainty in interval multiple objective linear programming. Journal of Mathematical Sciences, 161, 854-866.
[13] Wu, H.C., (2009). The Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions in multiobjective programming problems with interval-valued objective functions. European Journal of Operational Research, 196, 49-60.
[14] Rivaz, S. and Yaghoobi, M. A., (2013). Minimax regret solution to multiobjective linear programming problems with interval objective functions coefficients. Central European Journal of Operations Research, 21, 625-649.
[15] Rivaz, S. and Yaghoobi, M. A., (2018). Weighted sum of maximum regrets in an interval MOLP problem. International Transactions in Operational Research, 25, 1659-1676.
[16] Rivaz, S., Yaghoobi. M. A. and Hladik, M., (2016). Using modified maximum regret for finding a necessarily efficient solution in an interval MOLP problem. Fuzzy Optimization and Decision Making, 15, 237-253.
[17] Steuer, R.E., (1986). Multiple criteria optimization: theory, computation and application. New York: Wiley.
[18] Bitran, G,R., (1980). Linear multiobjective problems with interval coefficients. Management Science 26, 694-706.
[19] Wang, M.L. and Wang, H.F., (2001). Interval analysis of a fuzzy multiobjective linear programming. International Journal of Fuzzy Systems 34, 558–568.
[20] Inuiguchi, M. and Sakawa, M., (1996). Possible and necessary efficiency in possibilistic multiobjective linear programming problems and possible efficiency test. Fuzzy Sets and Systems 78, 321–341.
[21] Hladík, M., (2008). Computing the tolerances in multiobjective linear programming. Optimization Methods and Software 23, 731–739.
[22] Hladík, M., (2010). On necessary efficient solutions in interval multiobjective linear programming. In C. H. Antunes, D. R. Insua, & L. C. Dias (Eds.), CD-ROM Proceedings of the 25th mini-EURO conference uncertainty and robustness in planning and decision making URPDM 2010, April 15–17 (pp. 1–10). Portugal: Coimbra.
[23] Hladík, M., (2012). Complexity of necessary efficiency in interval linear programming and multiobjective linear programming. Optimization Letters, 6, 893–899.
[24] Luo, J., Li, W. and Wang, Q., (2014). Checking strong optimality of interval linear programming with inequality constraints and nonnegative constraints. Journal of Computational and Applied Mathematics, 260, 180-190.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.2.6.1]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.2.25]