مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال نوزدهم، شماره اول (پیاپی ۷۲)،بهار ۰۱، ص ص۵۶-۳۷
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

بهینه‌سازی سبد سهام تحت مدل دابل هستون دافی-کان مرکب و محاسبه قیمت اختیار اروپایی

حسین صمیمی حق گذار[1*]، علیرضا نجفی[2]
۱- استادیار، دانشگاه گیلان، دانشکده علوم ریاضی، گروه آمار، رشت، گیلان، ایران
۲- استادیار، دانشگاه گیلان، دانشکده علوم ریاضی، گروه ریاضی کاربردی، رشت، گیلان، ایران

رسید مقاله: ۱۲ دی ۱۳۹۹
پذیرش مقاله: ۳۱ مرداد ۱۴۰۰

چکیده
در این مقاله به ارایه یک صورت جدید از مدل دابل هستون مرکب می‌پردازیم که در آن از مدل دافی-کان مرکب به جای فرایند کاس-اینگرسوال مرکب برای پیش‌بینی نوسان استفاده شده است. با توجه به این مدل، به پیش‌بینی قیمت سهام پرداخته و قیمت اختیار اروپایی را با استفاده از روش مونت-کارلو محاسبه می‌نماییم. در انتها با استفاده از مدل ارایه‌شده، سبد بهینه سهام را تحت مدل میانگین-واریانس مارکوویتز با محدودیت تعداد سهام می‌یابیم و آن را با مدل دابل هستون مرکب مقایسه‌کرده و کارایی آن را نشان می‌دهیم.

کلمات کلیدی: بهینه‌سازی سبدسهام، مدل دابل هستون دافی – کان مرکب، اختیار اروپایی، روش مونت‌کارلو.

۱ مقدمه
تا قبل از سال ۱۹۹۶ مدل‌هایی که برای قیمت‌گذاری سهام یا پیش‌بینی نرخ بهره استفاده می‌شدند دارای نوسان ثابت بوده‌اند[۱، ۲]. در سال ۱۹۹۶ پذیر هستون مدلی با دو عاملی ارایه کرد که در آن فرایند نوسان، مدل برگشت به میانگین کاکس اینگرسوال بود [۳]. ساختار این مدل به صورت زیر است:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dB_{1,t},$$
$$dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t} dB_{2,t},$$
$$dB_{1,t} dB_{2,t} = \rho dt,$$

که در آن μ نشان‌دهنده بازده سهام، κ نشان‌دهنده سرعت برگشت‌پذیر به میانگین، θ نشان‌دهنده میانگین بلند مدت نوسان، σ نشان‌دهنده نوسان و ρ نشان‌دهنده ضریب همبستگی دو حرکت براونی استاندارد B_1 و B_2 است. نوسان مدل هستون تصادفی است و توزیع بازده دارایی دارای دمی سنگین‌تر نسبت به توزیع نرمال است. با

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: samimi@guilan.ac.ir

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-03]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2022.19.1.8.8]
[DOI: 10.52547/jamlu.19.1.37]

همه مزایایی که مدل هستون استاندارد دارد مطالعات تجربی نشان می‌دهد که این مدل قادر به تطبیق فرایند لبخند نوسان موضعی برای اختیارها با سررسید کوتاه مدت نیست [۴]. برای رفع این مشکل دانشمندان مدل‌های مختلفی را معرفی کردند [۴، ۵]. در سال ۲۰۰۹ کریستفرسن با اضافه‌کردن یک فرایند تصادفی دیگر به مدل هستون این مدل را بهبود بخشید. مدل هستون با دو فرایند تلاطم تصادفی تحت عنوان مدل دابل هستون در مقایسه با مدل هستون استاندارد انعطاف بیشتری نسبت به قیمت‌های پرت دارد و در حدود ۲۴ درصد بیشتر از مدل هستون استاندارد آن‌ها را پوشش‌داده و نیز نسبت به تلاطم جزیی قیمت‌ها حساسیت بیشتری از خود نشان می‌دهد [۴، ۶، ۷].

مدل دابل هستون یکی از مهم‌ترین مدل‌های معرفی‌شده است که ساختار آن به صورت زیر است [۴].

$$
\begin{aligned}
dS_t &= \mu S_t dt + \sqrt{V_t^{(1)}} S_t dW_{1,t} + \sqrt{V_t^{(2)}} S_t dW_{2,t} \\
dV_t^{(1)} &= \kappa_1 \left(\theta_1 - V_t^{(1)}\right) dt + \sigma_1 \sqrt{V_t^{(1)}} dB_{1,t} \\
dV_t^{(2)} &= \kappa_2 \left(\theta_2 - V_t^{(2)}\right) dt + \sigma_2 \sqrt{V_t^{(2)}} dB_{2,t} \\
dB_{1,t} dW_{1,t} &= \rho_1 dt \\
dB_{2,t} dW_{2,t} &= \rho_2 dt \\
dB_{1,t} dW_{2,t} &= 0 \\
dB_{2,t} dW_{1,t} &= 0
\end{aligned}
$$

اما فرض اساسی در این مدل مستقل بودن دو فرایند مربوط به نوسان است. در حالی که در بعضی موارد منابع نوسانی که قیمت سهام شرکت‌ها از آنها ناشی می‌شود نه تنها مستقل از هم نیستند بلکه وابسته به یکدیگر نیز می‌باشند.

به مرور زمان و با تکامل مدل‌های مالی رویکردهای متفاوتی برای قیمت‌گذاری سهام بیان شده است. یکی از این موارد ارایه مدل‌های با حافظه است. در مدل‌های مالی که از حرکت براونی استاندارد در ساختار خود استفاده می‌کنند با توجه به ویژگی‌های مستقل و مانا بودن این فرایند نموهای مدل‌ها نیز بی‌حافظه هستند. برای اضافه کردن ویژگی حافظه به مدل‌های مالی می‌توان فرایندهای با حافظه را به‌جای حرکت براونی استاندارد در مدل ها به کار برد. یکی از مهم‌ترین فرایندهای با حافظه حرکت براونی کسری است[۸، ۹]. نماد فرایند حرکت براونی کسری به صورت $\left(B_t^H\right)_{t\geq 0}$ است که در آن $0<H<1$ را شاخص هرست می‌نامند. به ازای مقادیر مختلف این پارامتر نموهای مدل‌های مالی می‌توانند بی‌حافظه ($H=\frac{1}{2}$)، دارای حافظه کوتاه مدت ($0<H<\frac{1}{2}$) یا حافظه بلند مدت ($\frac{1}{2}<H<1$) باشند. زمانی که $\frac{1}{2}<H<1$ است نموهای حرکت براونی کسری دارای همبستگی مثبت هستند. در این حالت فرایند دارای رفتار تجمعی است و می‌توان از آن برای توصیف سیستم‌های باحافظه و با دوام استفاده کرد[۹]. اما استفاده از این فرایند در مدل‌های مالی نیز با مشکلاتی همراه است. استراتژی‌های سرمایه‌گذاری توسط راجرز [۱۰] (۱۹۹۷)، شیریاو و سالوپک[۱۱، ۱۲] (۱۹۹۸) معرفی شد که نشان می‌داد سبدهایی که در آن‌ها از مدل‌های حرکت براونی کسری برای پیش‌بینی قیمت سهام استفاده شده است

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-03]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2022.19.1.8.8]
[DOI: 10.52547/jamlu.19.1.37]

دارای آربیتراژ هستند که این برخلاف قضایای اساسی قیمت‌گذاری می‌باشد. برای رفع این مشکل چریدیتو یک ورژن از حرکت براونی کسری به نام حرکت براونی کسری مرکب $\left(M_t^H\right)_{t\geq 0}$ ارایه کرد که نه تنها دارای حافظه است؛ بلکه استفاده از آن نیز در مدل‌های مالی باعث به وجود آمدن آربیتراژ نمی‌شود.[۱۳، ۱۴]. ساختار حرکت براونی کسری مرکب به صورت زیر است:

$$M_t^H = aB_t + bB_t^H, \qquad a,b\in\mathbb{R}, \quad H\in(0,1).$$

که در آن B و B^H به ترتیب حرکت براونی استاندارد و حرکت براونی کسری هستند. چریدیتو با مطالعه روی این فرایند نشان داد که برای $H\in\left(\frac{3}{4},1\right)$ این فرایند معادل با حرکت براونی استاندارد می‌باشد. در اینجا سعی داریم از فرایند براونی کسری به تنهایی در مدلی که می‌خواهیم ارایه دهیم استفاده نماییم.

یکی دیگر از ابزار مشتقه که در چند دهه اخیر توانسته به صورت گسترده مورد داد و ستد قرار گیرد اختیارها هستند. اختیار معامله اروپایی، اختیار معامله‌هایی هستند کـه اعمال آن‌ها فقط در زمان سررسید مقرر شده، صورت می‌پذیرد و خریدار اختیار معامله هیچ‌گاه قبل از زمان سررسید قیدشده در اختیار معامله، مجاز به استفاده از اختیار معامله خود نیست. اختیار اروپایی یکی از مهم‌ترین انواع اختیارهاست که تحت نظارت بورس در سررسیدهای مختلفی عرضه می‌شود. اما محاسبه قیمت اختیار نیز همواره با مشکلاتی همراه است. با توجه به این‌که در مدل‌های چندعاملی فرمول بسته‌ای برای محاسبه قیمت اختیار نداریم باید از روش‌های عددی یا شبیه‌سازی برای محاسبه قیمت استفاده کنیم. امروزه روش‌های شبیه‌سازی در عرصه علوم مختلف عمومیت‌یافته است. از میان روش‌های مختلف شبیه‌سازی، روش مونت کارلو برای تحقیقات و محاسبات مالی و اقتصادی از سایر شیوه‌ها مناسب‌تر است این روش از نمونه‌گیری تصادفی برای محاسبه نتایج استفاده می‌کند [۱۵].

از مهم‌ترین دغدغه‌های ذهنی سرمایه‌گذاران این است که در یک دوره در کدام دارایی‌ها باید سرمایه‌گذاری شود که در پایان دوره، سرمایه‌گذار متحمل زیان کمتری شود. در مدیریت سبدسهام، هدف، انتخاب مجموعه‌ای از سهام است به نحوی که ریسک حداقل و بازده حداکثر گردد. یکی از مدل‌های شناخته‌شده در زمینه‌ی مهندسی مالی و مدیریت سبد سهام، مدلی است که مارکویتز[1] در سال ۱۹۵۲ ارایه داد. این مدل با ایجاد یک توازون بین ریسک و بازده سبد سهام، سعی دارد بهترین سبد سهام را به گونه‌ای انتخاب نماید که با کم‌ترین ریسک، بیش‌ترین سود ممکن را نصیب سرمایه‌گذار نماید. اهمیت این مدل به حدی است که اکثر مقالات ارایه‌شده در زمینه مدیریت سبد سهام برای تایید اعتبار خود، نتایج کار خود را با این مدل مقایسه کرده‌اند. با بیان این مدل، مفهوم تنوع‌بخشی و استفاده از دارایی‌های مالی مختلف در سبد، مورد توجه بیشتر سرمایه‌گذاران قرار گرفت.

مساله بهینه‌سازی میانگین-واریانس مارکویتز با اضافه کردن محدودیت‌هایی که منطبق با بازار واقعی باشند به مطالعه‌های متفاوتی گسترش پیدا کرده است، از آن جمله می‌توان به محدودیت تعداد سهام، محدودیت‌های هزینه معاملاتی، محدودیت فروش استقراضی، محدودیت‌های نقدینگی و موارد دیگر اشاره کرد. آن‌ها برای

[1] H. Markowitz

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-03]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2022.19.1.8.8]
[DOI: 10.52547/jamlu.19.1.37]

اعمال محدودیت‌های تعداد سهام، متغیرهای عدد صحیح را به کار بردند و مدل میانگین-واریانس با محدودیت تعداد سهام (CCMV) را بیان نمودند. اما می‌توان با قرار دادن محدودیت‌های بیشتر و در پیش گرفتن رویکردهای مختلف، مدل‌های دیگری نیز معرفی کرد. اما قرار دادن محدودیت‌های بیشتر در بعضی مواقع سبب می‌شود که نتوان با روش‌های معمول آنها را حل کرد و باید از روش‌های دیگر نظیر الگوریتم ژنتیک یا جست و جوی هارمونی کمک گرفت. با اضافه کردن شرط فروش استقراضی به مدل CCMV مدلی دیگر به دست می‌آید که با استفاده از آن می‌توان پرتفویی با بازدهی بالاتر ساخت. در ادامه با انجام پژوهش‌هایی در معرفی معیاری کامل برای اندازه‌گیری ریسک، مفهوم ریسک نامطلوب مطرح گردید و برای محاسبه آن شاخص‌هایی ارایه شد که در آن معیار ارزش در معرض ریسک مورد استقبال زیادی قرار گرفته است. سپس با اصلاح معیار محاسبه ریسک، مدل خطی ارزش در معرض ریسک بر روی بازده تاریخی توسط محققان مطرح شد که این مدل نیز مانند مدل مارکوویتز با رویکرد تبدیل تابع هدف به محدودیت به حل و مدل‌سازی مساله بهینه‌سازی سبد سهام می‌پردازد. ژانگ و همکارانش در سال ۲۰۱۲، یک مدل برنامه ریاضی مبتنی بر مفهوم ارزش در معرض ریسک ارایه دادند که با حداقل‌کردن ارزش در معرض ریسک یک سبد، میزان هر سهم در سبد را مشخص می‌کند و با حداقل‌کردن ارزش در معرض ریسک در چند دوره زمانی مدلی معرفی نمودند [۱۶، ۱۷].

چهارچوب کلی مقاله به صورت زیر است. در بخش دوم به بیان مدل می‌پردازیم و آن را با صورت‌های مختلف مدل هستون مقابسه می‌کنیم. همچنین نشان می‌دهیم نموهای مدل با توجه به مقادیر مختلف شاخص هرست دارای حافظه کوتاه مدت، بی‌حافظه یا حافظه بلند مدت است. در بخش سوم به قیمت‌گذاری اختیار با استفاده از روش مونت کارلو می‌پردازیم و تاثیر پارامتر مدل را بر قیمت اختیار حساب می‌کنیم. در بخش چهارم سبد سهام بهینه را با توجه به داده‌های واقعی بازار، مدل هستون مرکب و مدل هستون دافی کان مرکب می‌یابیم و نشان می‌دهیم مدل معرفی‌شده کارایی بیشتری دارد.

۲ مدل دابل هستون دافی – کان مرکب

در این قسمت مدلی با حافظه بلند مدت بیان می‌کنیم که قسمت نوسان آن از دو فرایند مرتبط با یکدیگر تشکیل شده‌اند. مندلبرات و ون نس در سال ۱۹۶۸ حرکت براونی کسری را معرفی و کاربردهایی از آن را در علوم مختلف بیان کردند[۱۸]. در سال ۱۹۷۱ مندلبرات ایده وجود حافظه بلند مدت را در بازده دارایی‌ها مطرح کرد [۱۹]. در سال ۱۹۷۷ گرین و فیلیتز با استفاده از آماره $\frac{R}{S}$ کلاسیک، بازده روزانه‌ی شاخص بورس نیویورک را مطالعه نمودند و شواهدی قوی مبنی بر وجود حافظه بلندمدت را در آن یافتند [۲۰]. حرکت براونی کسری را می‌توان به صورت یک انتگرال تصادفی نسبت به حرکت براونی به صورت زیر نشان داد [۸].

$$B_t^H = C_H[\int_{-\infty}^{0} \left((t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}B_s + \int_{0}^{t} (t-s)^{H-\frac{1}{2}}\mathrm{d}B_s]$$

که در آن

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-03]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2022.19.1.8.8]
[DOI: 10.52547/jamlu.19.1.37]

$$C_H = \sqrt{\frac{2H\,\Gamma(\frac{3}{2}-H)}{\Gamma(\frac{1}{2}+H)\Gamma(2-H)}}$$

تعریف: فرایند ایستای $X=\{X_t\}_{t\geq 0}$ دارای خاصیت وابستگی بلند مدت است اگر تابع خودکوارایانس $\rho(n)=Cov\big(X(k),X(k+n)\big)$ برای ثابت‌های $c\in\mathbb{R}$ و $\alpha\in(0,1)$ در شرط $\lim_{n\to\infty}\frac{\rho(n)}{cn^{-\alpha}}=1$ صدق کند. در این حالت وابستگی بین X_k و X_{k+n} وقتی n به سمت بی‌نهایت میل می‌کند به کندی ناپدید می‌شود. به عبارت دیگر [۸]

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\rho(n)|=\infty$$

برای $n\geq 1$ فرض کنید $X(n)=B^H(n+1)-B^H(n)$. در این‌صورت $\{X(n)\}_{n\geq 1}$ یک فرایند تصادفی گاوسی مانا با واریانس ۱ است. علاوه بر این تابع خود کوواریانس $X(n)$ به صورت زیر است:

$$\rho_H(n)=\mathrm{E}\big[X(0)\,X(n)\big]=\frac{1}{2}\Big((n+1)^{2H}+(n-1)^{2H}-2n^{2H}\Big)$$

وقتی n به سمت بی نهایت میل می‌کند نتیجه می‌شود:

$$\rho_H(n)\sim H\big(2H-1\big)n^{2H-2}$$

بنابراین

الف: اگر $0<H<\frac{1}{2}$ باشد آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty}|\rho(n)|<\infty$.

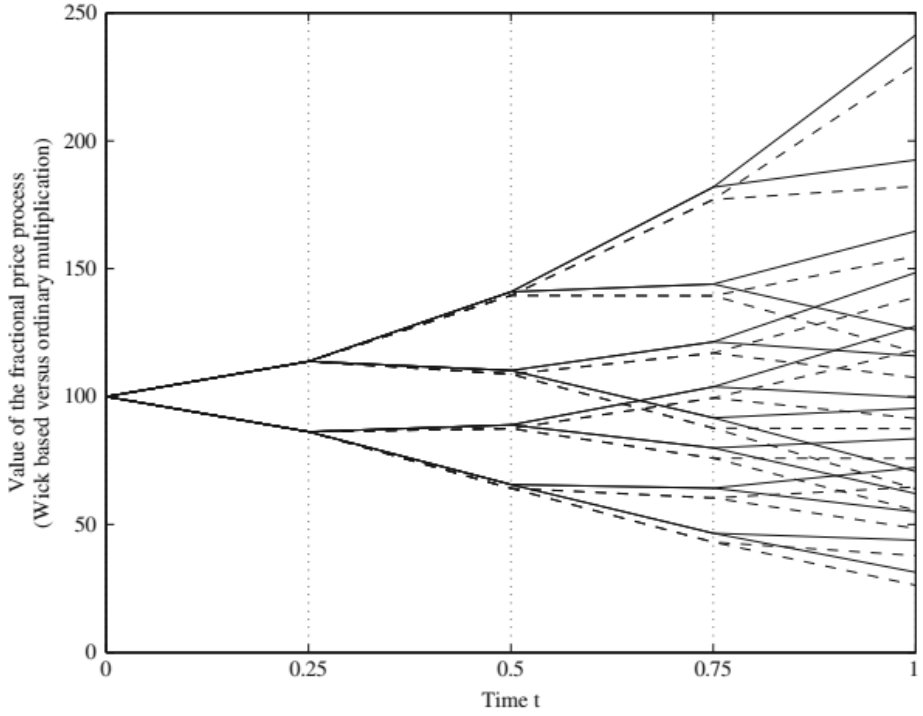
ب: اگر $\frac{1}{2}<H<1$ باشد آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty}|\rho(n)|=\infty$.

محققان نشان دادند که استفاده از این فرایند در مدل‌های مالی باعث به وجود آمدن آربیتراژ می‌شود. در ادامه مثالی را بیان می‌کنیم که نشان می‌دهد استفاده از مثل براونی هندسی کسری باعث به‌وجود آمدن آربیتراژ می‌شود. ساختار مدل براونی هندسی

$$dS_t=\mu S_t\,dt+\sigma S_t\,dB_t^H,\qquad t\geq 0.$$

است. با ارایه شکل ۱، تقریب دو جمله‌ای از این مدل را بر اساس حساب دیفرانسیل ویک بیان می‌کنیم که نشان از وجود آرابیتراژ در مدل دارد.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-03]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2022.19.1.8.8]
[DOI: 10.52547/jamlu.19.1.37]



شکل ۱. قیمت سهام تحت مدل براونی هندسی کسری که نشان دهنده وجود آربیتراژ در فرایند قیمت گذاری دارد.

بالاترین مسیر قیمت سهام را در نظر بگیرید. علی‌رغم این‌که باید در هر گروه میزان افزایش و کاهش قیمت سهام یکسان باشد؛ اما در گره‌های آخر مشخص است در هر صورت قیمت سهام افزایش می‌یابد و این بدین معنی است که آربیتراژ وجود دارد [۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳].

برای حذف آرابیتراژ راهکارهای متفاوتی بیان شده است. به عنوان مثال با قرار دادن محدودیت‌هایی بر روی استراتژی‌های سرمایه‌گذاری یا به‌کار بردن پوشش ریسک دلتا همراه با اضافه‌کردن هزینه‌های معاملاتی می‌توان از وقوع آربیتراژ جلوگیری کرد[۱۲، ۱۴]. همه این موارد را زمانی می‌توان انجام داد که از مدل‌های مالی با نوسان ثابت برای پیش‌بینی قیمت سهام استفاده کرد؛ اما مدل‌های با نوسان ثابت هم به خوبی نمی‌توانند داده‌های بازار را پیش‌بینی کنند.

در سال ۲۰۰۱ چریدیتو با مطالعه بر روی حرکت براونی کسری موفق به ارایه یک فرایندی شد که به صورت یک ترکیب خطی از حرکت براونی استاندارد و حرکت براونی کسری به دست می‌آمد [۱۴]. ساختار این فرایند به صورت زیر است:

$$M_t = B_t + \lambda B_t^H, \qquad t \geq 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

لم: فرایند حرکت براونی کسری برای $(M_t)_{t\geq 0}$ برای مقادیر $H \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ نیمه مارتینگل نیست.

برای $H = \frac{1}{2}$ این فرایند معادل $\sqrt{1+\lambda^2}$ برابر حرکت براونی استاندارد است و برای مقادیر $H \in \left(\frac{3}{4}, 1\right]$ این فرایند معادل حرکت براونی استاندارد می‌باشد[۱۴].

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-03]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2022.19.1.8.8]
[DOI: 10.52547/jamlu.19.1.37]

با استفاده از این فرایند در مدل‌های مالی با نوسان تصادفی نه تنها می‌توان فرصت‌های آربیتراژی را حذف کرد؛ بلکه می‌توان ویژگی حافظه بلند مدت را به نموهای مدل قیمت‌گذاری سهام اضافه کرد.

اما استفاده از هر مدل مالی با نوسان تصادفی هم برای پیش‌بینی قیمت سهام مناسب نیست. با اینکه مدل هستون به عنوان یک مدل مشهور در این زمینه و البته بسیار کارا شناخته می‌شود اما با اضافه کردن پارامترهایی به این مدل می‌توان مدل‌های بهتری نیز به‌دست آورد. مدل دابل هستون نیز یکی از مدل‌های مشهور است. اما در این مدل دو فرایند نوسان نیز از هم مستقل هستند. اما در واقعیت ممکن است قیمت یک سهام تحت چند عامل نوسانی مختلف باشد که از یک دیگر مستقل نیستند و ارتباطی بین آنها وجود دارد. به عنوان مثال اگر یک شرکت در زمینه صادرات محصولاتش نیز فعالیت داشته باشد علاوه بر آن‌که قیمت محصولاتش به خاطر تغییرات نرخ برابری ارز متغیر است با تغییر نرخ قیمت زمین و دستگاه‌های موجود در آن سهام شرکت تغییر خواهد کرد. پس مناسب دیدیم مدلی را ارایه دهیم که فرایندهای نوسانی آن از یکدیگر مستقل نباشند. برای این منظور از مدل دافی- کان کمک گرفتیم. ساختار مدل پیشنهادی به صورت زیر است

$$
\begin{aligned}
dS_t &= \mu S_t dt + \sqrt{a_1 V_t^{1} + a_2 V_t^{2}}\, S_t dM_{1,t} \\
dV_t^{1} &= \kappa_1 \left(\theta_1 - V_t^{1}\right) dt + \sigma_1 \sqrt{a_1 V_t^{1} + a_2 V_t^{2}}\, dM_{2,t} \\
dV_t^{2} &= \kappa_2 \left(\theta_2 - V_t^{2}\right) dt + \sigma_2 \sqrt{a_1 V_t^{1} + a_2 V_t^{2}}\, dM_{3,t} \\
dM_{1,t} dM_{2,t} &= \rho_1 (dt + \lambda^2 dt^{2H}) \\
dM_{1,t} dM_{3,t} &= \rho_2 (dt + \lambda^2 dt^{2H}) \\
dM_{1,t} dM_{2,t} &= 0
\end{aligned}
$$

لم : نموهای بازده قیمت سهام مدل معرفی شده دارای حافظه بلند مدت هستند.

اثبات : فرض کنید $n \geq 1$ باشد و

$$X_k = \frac{S_{k+1} - S_k}{S_k} = \mu \Delta t_i + \sqrt{a_1 V_k^{1} + a_2 V_k^{2}}\, \Delta M_k$$

با فرض اینکه $E(V_k) = v_k$ و $E(V_{k+n}) = v_{k+n}$ که در آن v_k و v_{k+n} نشان‌دهنده مقدار نوسان در زمان‌های t_k و t_{k+n} و ثابت هستند، نتیجه می‌شود:

$$
\begin{aligned}
\rho(n) &= Cov(X_k, X_{k+n}) \\
&\sim \sigma^2 v_k v_{k+n}\, Cov(\Delta M_k, \Delta M_{k+n}) \\
&= \frac{\sigma^2 v_k v_{k+n}\, h^{2H}}{2} \left[(n+1)^{2H} + (n-1)^{2H} - 2n^{2H} \right] \\
&\sim \sigma^2 v_k v_{k+n}\, H(2H-1) n^{2H-2}
\end{aligned}
$$

که در آن $h = \Delta t_k$ برای $k \geq 1$ است. بنابراین برای $\frac{3}{4} < H < 1$ نتیجه می‌شود:

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-03]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2022.19.1.8.8]
[DOI: 10.52547/jamlu.19.1.37]

$$\circ \neq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\rho(n)\right| = \infty$$

در نتیجه نمو بازده قیمت سهام تحت مدل دارای ویژگی حافظه بلند مدت است. ■

۳ اختیار اروپایی با توجه به مدل دابل هستون دافی-کان مرکب

بیمه کردن دارایی یکی از مواردی است که به سرمایه‌گذار کمک می‌کند تا از ریسک سرمایه‌گذاری در امان باشد. بدین منظور سرمایه‌گذار می‌تواند با خرید چند برگه اختیار همراه با یک استراتژی مناسب بر خلاف استراتژی خرید سهام از ریسک دوری کند. هرچند با خرید چند برگه اختیار سهم ممکن است سرمایه‌گذار مبلغی پول از دست بدهد اما در عوض از ضرر احتمالی بزرگی جلوگیری می‌کند که می‌تواند بسیار بیشتر از قیمت اختیارهای خریداری شده باشد. اختیارها انواع مختلفی دارند که با توجه به تاریخ سررسید و شرایط مربوط به اجرا گذاشتن اختیار به چند گروه تقسیم می‌شوند. اختیار اروپایی را می‌توان به عنوان یک قرارداد در نظر گرفت که دارنده آن این حق (نه اجبار) را دارد که در تاریخ سررسید آن را به اجرا گذاشته و از عایدی احتمالی آن بهره ببرد. در اختیار اروپایی در هنگام بستن قرارداد، زمان تاریخ سررسید و قیمت توافقی آن کاملا مشخص و معلوم است و در قرارداد نوشته می‌شود و برمبنای آن می‌توان قیمت اختیار را به صورت تقریبی به‌دست آورد. بازده اختیار خرید اروپایی در زمان سررسید برابر است با

$$call\ option = \max\left(S_T - K, \circ\right)$$

بازده اختیار فروش نیز به صورت زیر می‌باشد

$$put\ option = \max\left(K - S_T, \circ\right)$$

برای محاسبه قیمت اختیارهای خرید و فروش اروپایی کافی است از فرمول زیر کمک بگیریم

$$call\ option\ price = E\left[e^{-rT} \max\left(S_T - K, \circ\right)\right]$$

و

$$put\ option\ price = E\left[e^{-rT} \max\left(K - S_T, \circ\right)\right].$$

با توجه به این‌که مدل قیمت‌گذاری سهام فرم بسته‌ای ندارد؛ لذا نمی‌توان جواب دقیق قیمت اختیار را به‌دست آورد. برای رفع این مشکل محققان از روش‌های عددی و شبیه‌سازی مختلفی استفاده می‌کنند. روش مونت کارلو یکی از مشهورترین روش‌های شبیه‌سازی است که در آن به کمک نمونه‌گیری می‌توان فرایند را شبیه‌سازی و قیمت اختیار را به واسطه آن تعیین کرد. هر چه میزان شبیه‌سازی بیشتر باشد قیمت اختیار نیز دقیق‌تر است. برای این کار ابتدا با استفاده از روش‌های گسسته‌سازی و شبیه‌سازی مدل قیمت‌گذاری سهام را شبیه‌سازی می‌کنیم و قیمت سهام را به‌دست می‌آوریم. سپس با قرار دادن این مقدار در فرمول قیمت‌گذاری اختیار ارزش آن را محاسبه می‌نماییم. فرض کنید $\circ = t_\circ < t_1 < \ldots < t_n = T$ یک افراز برای بازه زمانی $[\circ, T]$ باشد. در این‌صورت گسسته‌سازی اویلر برای معادله مدل به صورت زیر است:

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-03]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2022.19.1.8.8]
[DOI: 10.52547/jamlu.19.1.37]

$$S_{t_{i+1}} = S_{i+1} = S_i + \mu S_i \Delta t_i + \sqrt{a_1 V_i^{1} + a_2 V_i^{2}} S_i \Delta M_{1,i}, \qquad 0 \le i < n,$$
$$V_{t_{i+1}}^{1} = V_{i+1}^{1} = V_i^{1} + \kappa_1 \left(\theta_1 - V_i^{1}\right) \Delta t_i + \sigma_1 \sqrt{a_1 V_i^{1} + a_2 V_i^{2}} \Delta M_{2,i}, \qquad 0 \le i < n,$$
$$V_{t_{i+1}}^{2} = V_{i+1}^{2} = V_i^{2} + \kappa_1 \left(\theta_1 - V_i^{2}\right) \Delta t_i + \sigma_1 \sqrt{a_1 V_i^{1} + a_2 V_i^{2}} \Delta M_{3,i}, \qquad 0 \le i < n.$$

اکنون به مطالعه تاثیر پارامترهای اختیار بر قیمت آن می‌پردازیم. قیمت توافقی یکی از ارکان قیمت‌گذاری اختیار است. هرچه این قیمت پایین‌تر باشد قیمت اختیار خرید و عایدی آن نیز بیشتر است. اما افزایش قیمت توافقی باعث افزایش قیمت اختیار فروش و عایدی آن می‌شود. جدول‌های ۱ و ۲ تاثیر تغییر قیمت توافقی بر روی اختیار خرید و فروش تحت مدل‌های مختلف را نشان می‌دهد.

جدول ۱. تاثیر تغییر قیمت توافقی بر قیمت اختیار خرید اروپایی تحت مدل هستون –دافی و کان و مدل هستون مرکب همراه با پارامترهای

$a = 0/5,\ b = 0/5,\ \sigma_1 = \sigma_2 = 0/3,\ \lambda = 0/4,\ H = 0/8,\ \theta_1 = \theta_2 = 0/2,\ \kappa_1 = \kappa_2 = 4, \rho_1 = \rho_2 = 0/8$

$V_0^{1} = V_0^{2} = 0/1,\ S_0 = 100,\ T = 1,\ \mu = 0/1,\ r = 0/05.$

	$k = 95$	$k = 100$	$k = 105$	$k = 110$
قیمت اختیار خرید مدل هستون مرکب	۱۳/۹۹۹۳	۹/۹۶۰۵	۴/۹۸۵۲	۰/۴۶۸۳
قیمت اختیار خرید مدل هستون-دافی مرکب	۱۴/۰۵۲۴	۹/۹۹۶۲	۵/۰۰۹۵	۰/۴۸۷۲

جدول ۲. تاثیر تغییر قیمت توافقی بر قیمت اختیار فروش اروپایی تحت مدل هستون –دافی و کان و مدل هستون مرکب همراه با پارامترهای

$a = 0/5,\ b = 0/5,\ \sigma_1 = \sigma_2 = 0/3,\ \lambda = 0/4,\ H = 0/8,\ \theta_1 = \theta_2 = 0/2,\ \kappa_1 = \kappa_2 = 4, \rho_1 = \rho_2 = 0/8$

$V_0^{1} = V_0^{2} = 0/1,\ S_0 = 100,\ T = 1,\ \mu = 0/05,\ r = 0/05.$

	$k = 90$	$k = 100$	$k = 110$	$k = 120$
قیمت اختیار فروش مدل هستون مرکب	۰	۰	۴/۶۵۶۶	۱۴/۱۹۸۳
قیمت اختیار فروش مدل هستون-دافی مرکب	۰	۰	۴/۶۲۳۰	۱۴/۱۷۷۰

قیمت یک اختیار کاملا وابسته به قیمت توافقی آن است و محققان تلاش‌های بسیاری برای تعیین منصفانه قیمت توافقی داشته‌اند. افزایش قیمت توافقی باعث می‌شود که قیمت اختیار خرید کاهش یابد و زیرا دیگر برای سرمایه‌گذار صرفه اقتصادی ندارد. تاریخ سررسید تاثیر به سزایی در قیمت اختیار دارد. هر چه تاریخ سررسید یک اختیار بیشتر می‌شود قیمت توافقی آن نیز بیشتر خواهد شد. علاوه بر این با ثابت در نظر گرفتن دیگر پارامترهای مدل قیمت‌گذاری سهام می‌توان نتیجه گرفت قیمت اختیار خرید فروش با طولانی‌تر شدن زمان سررسید افزایش می‌یابد. نتایج را می‌توان در جداول ۴ و ۵ مشاهده نمود.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-03]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2022.19.1.8.8]
[DOI: 10.52547/jamlu.19.1.37]

جدول ۳. تاثیر تغییر زمان سررسید بر قیمت اختیار خرید اروپایی تحت مدل هستون –دافی و کان و مدل هستون مرکب همراه با پارامترهای
$a=۰/۵,\ b=۰/۵,\ \sigma_۱=\sigma_۲=۰/۳,\ \lambda=۰/۴,\ H=۰/۸,\ \theta_۱=\theta_۲=۰/۲,\ \kappa_۱=\kappa_۲=۴,\rho_۱=\rho_۲=۰/۸$
$V_۰^۱=V_۰^۲=۰/۱,\ S_۰=۱۰۰,\ \mu=۰/۱,\ r=۰/۰۵.$

	$T=۰/۱$	$T=۰/۵$	$T=۱$	$T=۵$
قیمت اختیار خرید مدل هستون مرکب	۰/۴۸۸۶	۲/۵۳۶۰	۵/۰۶۸۶	۲۸/۲۲۰۷
قیمت اختیار خرید مدل هستون-دافی مرکب	۰/۴۹۴۰	۲/۸۵۹۲	۵/۹۴۳۶	۳۰/۴۲۶۷

جدول ٤. تاثیر تغییر زمان سررسید بر قیمت اختیار فروش اروپایی تحت مدل هستون –دافی و کان و مدل هستون همراه با پارامترهای
$a=۰/۵,\ b=۰/۵,\ \sigma_۱=\sigma_۲=۰/۳,\ \lambda=۰/۴,\ H=۰/۸,\ \theta_۱=\theta_۲=۰/۲,\ \kappa_۱=\kappa_۲=۴,\rho_۱=\rho_۲=۰/۸$
$V_۰^۱=V_۰^۲=۰/۱,\ S_۰=۱۰۰,\ \mu=۰/۰۵,\ r=۰/۱.$

	$T=۰/۱$	$T=۰/۵$	$T=۱$	$T=۵$
قیمت اختیار فروش مدل هستون مرکب	۰/۴۹۱۰	۲/۵۵۱۶	۴/۹۹۱۸	۲۰/۸۳۶۲
قیمت اختیار فروش مدل هستون-دافی مرکب	۰/۴۷۵۷	۲/۴۹۸۳	۴/۸۹۹۳	۲۲/۰۷۴۵

یکی دیگر از پارامترهای مهم در قیمت اختیار نرخ بهره است. همان‌گونه که نتایج نشان می‌دهد با افزایش نرخ بهره و با توجه به فرمول قیمت‌گذاری اختیار می‌توان نتیجه گرفت افزایش نرخ بهره موجب کاهش قیمت اختیار خرید و فروش می‌شود. زیرا وقتی نرخ بهره زیاد می‌شود سرمایه‌گذار ترجیح می‌دهد به جای این‌که سرمایه خود را بر روی دارایی ریسکی قرار دهد با قرار دادن آن در موسسات مالی اعتباری و بانک ها علاوه بر کسب سود مناسب، از ریسک نیز دور شود و این ذات بازار است. البته با توجه به فرمول اختیار نیز می‌توان این مورد را تایید کرد. این موارد در جدول ۵ قابل مشاهده است.

جدول ۵. تاثیر تغییر نرخ بهره بر قیمت اختیار خرید اروپایی تحت مدل هستون –دافی و کان و مدل هستون همراه با پارامترهای
$a=۰/۵,\ b=۰/۵,\ \sigma_۱=\sigma_۲=۰/۳,\ \lambda=۰/۴,\ H=۰/۸,\ \theta_۱=\theta_۲=۰/۲,\ \kappa_۱=\kappa_۲=۴,\rho_۱=\rho_۲=۰/۸$
$V_۰^۱=V_۰^۲=۰/۱,\ S_۰=۱۰۰,\ \mu=۰/۱,\ T=۱,\ K=۱۰۰.$

	$R=۰/۰۱$	$R=۰/۰۵$	$R=۰/۱$	$R=۰/۵$
قیمت اختیار خرید مدل هستون مرکب	۱۰/۳۸۲۳	۹/۹۶۰۵	۹/۴۸۹۱	۶/۳۷۴۸
قیمت اختیار خرید مدل هستون-دافی مرکب	۱۰/۴۶۹۱	۹/۹۹۶۲	۹/۵۱۳۰	۶/۳۹۱۲

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-03]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2022.19.1.8.8]
[DOI: 10.52547/jamlu.19.1.37]

جدول ٦. تاثیر تغییر نرخ بهره بر قیمت اختیار فروش اروپایی تحت مدل هستون –دافی و کان و مدل هستون همراه با پارامترهای
$a=۰/۵,\ b=۰/۵,\ \ \sigma_۱=\sigma_۲=۰/۳,\ \lambda=۰/۴,\ H=۰/۸,\ \theta_۱=\theta_۲=۰/۲,\ \kappa_۱=\kappa_۲=۴,\rho_۱=\rho_۲=۰/۸$
$V_{۰}^{۱}=V_{۰}^{۲}=۰/۱,\ \ S_{۰}=۱۰۰,\ \ \mu=۰/۰۵,\ T=۱,\ K=۱۱۰.$

	$R=۰/۰۱$	$R=۰/۰۵$	$R=۰/۱$	$R=۰/۵$
قیمت اختیار فروش مدل هستون مرکب	۴/۸۹۸۵	۴/۶۵۶۶	۴/۴۲۹۷	۲/۹۶۰۳
قیمت اختیار فروش مدل هستون-دافی مرکب	۴/۸۰۹۰	۴/۶۲۳۰	۴/۴۰۴۲	۲/۹۶۵۴

٤ بهینه‌سازی سبد سهام

یکی از مهم‌ترین دغدغه‌های سرمایه‌گذاران یافتن سهام مناسب برای سرمایه‌گذاری است. اما سرمایه‌گذاری روی یک سهم بسیار خطرناک است. یک ضرب‌المثلی در این مورد وجود دارد که بیان می‌کند " تمام تخم‌مرغ‌هایت را در یک سبد قرار نده" و این ضرب المثل به زیبایی بیانگر اهمیت تشکیل سبد سهام توسط سرمایه‌گذار به جای سرمایه‌گذاری روی یک سهم را نشان می‌دهد. مهم‌ترین ویژگی تشکیل سبدسهام کاهش ریسک است. مثلا زمانی را در نظر بگیرید که بازار سرمایه در رکود است. در این مواقع سهام‌های رشدی قطعا وضعیت خوبی را نخواهند داشت و برعکس سهام‌های سیکلی و با ثبات در این وضعیت بازار با ضرر کمتری مواجه هستند. پس با تشکیل یک سبدسهام متنوع می‌توان حتی در حالت رکود بازار نیز از ضررهای بسیار زیاد جلوگیری کرد. اما سوال اینجاست که چطور می‌توان سهام‌های مناسب را انتخاب کرد. بدین منظور دانشمندان راهکارهای متفاوتی را ارایه داده‌اند.

مبانی یکی از این روش‌ها با عنوان تئوری و نظریه سبد سهام نوین در اوایل دهه ۱۹۵۰ میلادی توسط هری مارکوتیز پایه‌ریزی شد و بسیاری از دستاوردهای امروزی این شاخه از علوم مالی، مرهون تلاش و مطالعات وی است. مارکوتیز با معرفی بازده مورد انتظار به عنوان درآمد سبد سهام و واریانس بازده سبد سهام به عنوان ریسک سبد سهام، مدل انتخاب سبد سهام میانگین-واریانس را معرفی کرد[۲۱].

در نظریه پرتفوی میانگین واریانس مارکوویتز، نرخ بازده دارایی‌ها را به عنوان متغیرهای تصادفی مدل‌سازی می‌کنند. در اینجا هدف انتخاب وزن‌های مناسب برای سهام‌ها در پرتفوی می‌باشد. فرض کنید r_i که نشان‌دهنده نرخ بازده دارایی i به ازای $i=۱,۲,...,n$ است یک متغیر تصادفی باشد. در این‌صورت بردار تصادفی زیر را در نظر بگیرید:

$$z=\begin{pmatrix} r_۱ \\ . \\ . \\ . \\ r_n \end{pmatrix}$$

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-03]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2022.19.1.8.8]
[DOI: 10.52547/jamlu.19.1.37]

$\mu(i)=\mathbb{E}(r_i)$، $m=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)^T$ و $cov(z)=\Sigma$ در نظر بگیرید. اگر $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ بردار متناظر با وزن‌ها در پرتفوی باشد آنگاه نرخ بازده پرتفوی برابر با $cov(z)=\Sigma$ است که یک متغیر تصادفی با میانگین m^Tx و واریانس m^Tx می‌باشد. اگر μ_b نرخ بازده مورد انتظار پایه قابل قبول باشد در نظریه مارکوویتز، یک پرتفوی بهینه پرتفویی است که جواب مساله درجه دوم زیر باشد:

$$min \quad \frac{1}{2}x^T\Sigma x$$
$$s.t.\ m^Tx \geq \mu_b,\ e^Tx=1$$

که در آن e نشان‌دهنده بردار واحد است یعنی همه مولفه‌های این بردار برابر با ۱ می‌باشد.

مساله بهینه‌سازی میانگین-واریانس مارکویتز با اضافه کردن محدودیت‌هایی که منطبق با بازار واقعی بودند به حوزه‌های متفاوتی گسترش پیدا کرده است. به عنوان مثال می‌توان به محدودیت تعداد سهام، محدودیت‌های هزینه معاملاتی، محدودیت فروش استقراضی، محدودیت های نقدینگی و موارد دیگر اشاره کرد. چانگ و همکاران [۲۲] به مدل مارکویتز، محدودیت تعداد سهام را اضافه کردند. آن‌ها برای اعمال محدودیتهای تعداد سهام، متغیرهای عدد صحیح را به کار بردند و مدل میانگین-واریانس با محدودیت تعداد سهام یعنی مدل CCMV را به شکل زیر بیان نمودند:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \lambda\Big(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}x_ix_j\sigma_{i,j}\Big)-(1-\lambda)\Big(\sum_{i=1}^{N}R_ix_i\Big)\\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{N}x_i=1,\\
& \sum_{i=1}^{N}z_i=K,\\
& \varepsilon_iz_i\leq x_i\leq\delta_iz_i,\ \ i=1,\ldots,N,\\
& z_i\in\{0,1\},\ \ i=1,\ldots,N,\\
& x_i\geq 0,\qquad i=1,\ldots,N,
\end{aligned}$$

که در آن K تعداد سهام موجود در سبد سهام را نشان می‌دهد که مطلوب سرمایه‌گذار است و ε_i و δ_i به ترتیب کران پایین و کران بالای نسبت وزن سرمایه‌ی سرمایه‌گذاری شده در سهام i ام را نشان می‌دهد. متغیر z_i یک متغیر صفر و یک است که وقتی سهام i ام در سبد قرار بگیرد مقدار یک و در غیر این صورت مقدار صفر را اختیار می‌کند. در این مدل‌ها، هدف ایجاد سبدهای سهامی می‌باشد که علاوه بر ایجاد توازن بین ریسک و بازده اجازه کنترل تعداد سهام‌های نگهداری‌شده در سبد را بدهد. به عبارتی تنها بر روی سهام‌هایی سرمایه‌گذاری می‌کنیم که برای سطح مشخصی از بازده، ریسک را کاهش می‌دهند یا برای سطح مشخصی از ریسک، بازده را افزایش می‌دهند. این کار در عمل نتایج مطلوبی بر جای می‌گذارد اما حضور چنین

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-03]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2022.19.1.8.8]
[DOI: 10.52547/jamlu.19.1.37]

محدودیت‌هایی باعث می‌شود ناحیه‌ی شدنی مساله بهینه‌سازی سبد سهام مارکویتز، نامحدب شود و مساله جزء دسته مسایل n پی-سخت قرار بگیرد. وجود این محدودیت‌ها سبب می‌شود که مساله با روش‌های کلاسیک به طور کارا قابل حل نباشد؛ لذا برای حل آن می‌توان از روش‌های ابتکاری یا فرا ابتکاری استفاده کرد. در سال‌های اخیر محققان با استفاده از مدل‌های بهینه‌سازی توانسته‌اند با معرفی سبد سهام مناسب کارایی این مدل‌ها را نشان دهند.

در جدول ۷ مقدار بهینه پرتفوی را با توجه به حالت‌های مختلف داده‌ها حساب کرده‌ایم. داده‌های تاریخی همان داده‌های واقعی هستند که با توجه به آنها آمده‌ایم دو مدل هستون مرکب و هستون – دافی و کان مرکب را با هم مقایسه نموده‌ایم. نتایج این جدول نشان می‌دهد که سرمایه‌گذاران می‌توانند از مدل معرفی‌شده سرمایه‌گذاری مطمین در حوزه سهام استفاده کنند. در حقیقت سهام‌هایی که با استفاده از مدل معرفی‌شده در سبد انتخابی قرارگرفته نشان‌دهنده این است که ۸ تا از ۱۰ سهم انتخابی دقیقا همانند انتخاب سهام بر اساس داده‌های واقعی بازار است در حالی که با استفاده از مدل هستون مرکب تنها ۶ سهم از ۱۰ سهم انتخابی مورد تایید است. در حقیقت این جدول کارایی مدل معرفی‌شده را به خوبی نشان می‌دهد. معرفی ۸ سهم انتخابی از میان ۱۰ سهم ممکن، اطمینان زیادی به سرمایه‌گذاران می‌دهد که با اعتماد بیشتری به سرمایه‌گذاری بپردازند و این یکی از مهم‌ترین دلایلی است که مدل‌های مالی پیشرفته‌تر معرفی می‌شوند.

جدول ۷. مقایسه پرتفوی بهینه تحت مدل‌های هستون مرکب و هستون دافی-کان مرکب با توجه داده‌های واقعی بازار.

	Historical return	Portfolio $\lambda = 0.5$	mixed double Heston Duffie-Kan return	Portfolio $\lambda = 0.5$	mixed Heston return	Portfolio $\lambda = 0.5$
Apple Inc (1)	0.0994	0	0.0797	0	-0.0805	0
Accenture plc (2)	0.1503	0	0.1169	0	0.2153	0
Adobe Inc (3)	0.1194	0	0.1307	0	0.2071	0
Automatic Data Processing (4)	0.2523	0	0.2547	0	0.2404	0
Alliance Data Systems(5)	-0.159	0	-0.193	0	-0.1738	0
Autodesk Inc (6)	0.2272	0	0.2186	0	0.3581	1
Akamai Technologies Inc (7)	0.2747	1	0.3291	1	0.3596	1
Applied Materials Inc (8)	0.7472	1	0.6612	1	0.9118	1
Advanced Micro Devices (9)	3.0939	1	3.9968	1	3.9156	1
ANSYS (10)	0.0265	0	0.0204	0	0.1075	0
Amphenol Corp (11)	0.321	1	0.3433	1	0.5134	1
Broadcom Inc (12)	0.2424	0	0.1903	0	0.2805	1
Broadridge Financial Solutions (13)	0.2655	1	0.2723	1	0.2106	0
Cadence Design Systems (14)	0.2284	0	0.3021	1	0.2729	1
Salesforce.com, Inc (15)	- 0.1075	0	- 0.0354	0	-0.0164	0
Cisco Systems (16)	0.1443	0	0.2199	0	0.1982	0
Cognizant Technology Solutions (17)	- 0.0361	0	- 0.0693	0	0.0336	0
Citrix Systems (18)	0.2041	0	0.2212	0	0.1806	0
DXC Technology (19)	0.878	1	0.7993	1	0.8849	1
F5 Networks (20)	0.493	1	0.451	1	0.4703	1
Fidelity National Information Services (21)	0.2626	1	0.2432	0	0.2178	0
Fiserv Inc (22)	0.1875	0	0.1843	0	0.3053	1
FLIR Systems (23)	0.2588	0	0.342	1	0.219	0
FleetCor Technologies Inc (24)	0.0063	0	0.0145	0	-0.0203	0
Fortinet (25)	-0.0036	0	-0.0573	0	0.1202	0
Corning Inc (26)	0.3551	1	0.3405	1	0.2242	0
Global Payments Inc (27)	0.1091	0	0.1536	0	0.1998	0
HP Inc (28)	0.2793	1	0.2685	1	0.1058	0
International Business Machines (29)	0.221	0	0.2317	0	0.1086	0
Intel Corp (30)	0.0671	0	0.0519	0	0.1303	0
Return		0.697		0.7834		0.845
Risk		0.0027		0.0036		0.0018

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-03]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2022.19.1.8.8]
[DOI: 10.52547/jamlu.19.1.37]

در جدول‌های ۸ ، ۹ و ۱۰ کواریانس بین داده‌های واقعی بازار و داده‌های حاصل از پیش‌بینی مدل‌ها را محاسبه کرده‌ایم. سپس از این داده‌ها در ساختار مدل بهینه‌سازی میانگین – واریانس مارکوویتز استفاده کرده و بر اساس آنها پرتفوی بهینه را به‌دست آوردیم.

جدول ۸. کوواریانس بین داده‌های مربوط به سهام‌های پرتفوی بر اساس داده‌های واقعی بازار.

Company	$\times 10^3$														
1	5.64	2.34	2.43	0.02	5.67	4.01	1.53	3.55	4.90	0.35	2.21	3.51	0.79	1.60	1.88
	3.05	1.01	2.18	4.77	2.17	1.35	0.92	1.91	3.23	2.28	4.05	1.14	4.51	3.36	3.60
2	2.34	3.44	2.11	0.39	1.25	0.92	-2.33	2.25	1.91	1.15	1.24	1.98	0.67	1.09	0.76
	0.75	1.66	1.28	5.38	0.34	1.70	1.09	0.71	1.64	1.83	3.16	1.16	2.42	1.95	1.83
3	2.43	2.11	2.24	-0.50	1.59	2.37	-0.32	1.83	3.	0.81	1.	1.94	0.44	0.88	1.44
	1.28	0.26	1.29	3.83	0.73	1.20	-0.12	-0.20	2.98	2.24	1.86	1.75	2.42	1.43	1.89
4	0.02	0.39	-0.50	1.71	0.19	-0.30	-0.41	0.37	1.64	0.62	0.04	0.65	0.15	0.21	-0.53
	-0.10	1.19	-0.03	0.10	-0.13	-0.05	0.94	0.70	-1.40	-0.81	0.52	-0.87	-0.04	0.92	0.47
5	5.67	1.25	1.59	0.19	15.29	7.52	0.73	5.87	13.36	-0.55	3.07	2.80	0.95	2.53	3.94
	4.79	-0.74	4.72	5.84	3.	3.25	1.26	3.50	2.52	4.07	3.90	2.99	9.66	5.66	3.95
6	4.01	0.92	2.37	-0.30	7.52	10.08	3.44	3.96	7.59	1.10	2.76	3.59	0.44	3.06	2.73
	4.54	-2.51	2.95	-1.61	1.70	0.63	-1.93	0.22	6.95	4.37	0.94	3.36	7.46	3.82	3.08
7	1.53	-2.33	-0.32	-0.41	0.73	3.44	15.51	0.74	-2.60	-0.57	1.75	1.40	-0.86	2.95	3.54
	2.09	0.64	-1.08	0.86	2.71	-2.18	-0.86	1.23	2.55	-3.30	-1.71	-1.03	0.53	0.53	-1.50
8	3.55	2.25	1.83	0.37	5.87	3.96	0.74	6.40	6.87	0.97	2.50	3.57	1.72	2.97	2.87
	3.19	1.68	2.11	7.14	0.90	3.02	1.18	1.25	1.75	3.18	3.97	2.10	5.56	3.46	2.77
9	4.90	1.91	3.	1.64	13.36	7.59	-2.60	6.87	30.58	2.81	1.34	6.05	2.28	1.52	8.08
	4.59	4.03	7.64	8.50	3.81	6.58	1.98	0.68	3.75	6.51	3.69	5.40	8.62	7.08	6.13
10	0.35	1.15	0.81	0.62	-0.55	1.10	-0.57	0.97	2.81	1.54	0.27	1.43	0.11	0.46	0.59
	0.07	1.23	0.50	0.81	0.16	0.64	-0.02	-0.40	1.16	0.55	0.64	0.19	0.61	0.78	0.93
11	2.21	1.24	1.	0.04	3.07	2.76	1.75	2.50	1.34	0.27	1.65	1.69	0.51	1.81	1.27
	1.87	0.25	1.	2.27	0.84	0.77	0.37	1.11	1.95	1.24	1.81	0.86	3.16	1.93	1.15
12	3.51	1.98	1.94	0.65	2.80	3.59	1.40	3.57	6.05	1.43	1.69	3.71	1.10	1.90	2.26
	2.52	1.80	1.83	3.43	1.39	1.58	0.71	0.66	3.05	2.17	2.82	1.30	3.42	2.95	2.81
13	0.79	0.67	0.44	0.15	0.95	0.44	-0.86	1.72	2.28	0.11	0.51	1.10	1.08	0.81	0.91
	1.16	0.52	0.79	1.78	0.02	1.19	0.77	0.15	0.50	1.47	1.24	1.07	1.35	1.12	0.83
14	1.60	1.09	0.88	0.21	2.53	3.06	2.95	2.97	1.52	0.46	1.81	1.90	0.81	2.55	1.89
	2.23	0.13	0.83	2.68	0.67	0.91	0.38	0.81	2.23	1.30	1.38	1.25	3.41	2.10	0.82
15	1.88	0.76	1.44	-0.53	3.94	2.73	3.54	2.87	8.08	0.59	1.27	2.26	0.91	1.89	4.87
	2.20	2.20	2.61	5.23	2.16	2.48	0.78	0.56	2.83	1.90	1.26	2.46	3.30	2.43	0.86

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-03]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2022.19.1.8.8]
[DOI: 10.52547/jamlu.19.1.37]

ادامه جدول ۸

Company	$\times 10^3$														
16	3.05	0.75	1.28	-0.10	4.79	4.54	2.09	3.19	4.59	0.07	1.87	2.52	1.16	2.23	2.20
	3.38	-0.87	1.83	1.60	1.25	1.16	0.23	0.84	3.38	2.71	1.76	2.05	4.61	2.87	2.17
17	1.01	1.66	0.26	1.19	-0.74	-2.51	0.64	1.68	4.03	1.23	0.25	1.80	0.52	0.13	2.20
	-0.87	7.30	1.41	4.57	1.23	1.86	2.39	1.56	-1.95	-1.21	2.60	-0.80	-1.32	1.06	-0.34
18	2.18	1.28	1.29	-0.03	4.72	2.95	-1.08	2.11	7.64	0.50	1.	1.83	0.79	0.83	2.61
	1.83	1.41	3.01	1.79	1.41	2.07	0.65	0.83	2.29	2.69	1.76	2.24	3.51	2.55	1.54
19	4.77	5.38	3.83	0.10	5.84	-1.61	0.86	7.14	8.50	0.81	2.27	3.43	1.78	2.68	5.23
	1.60	4.57	1.79	24.17	1.90	5.64	4.07	2.04	-0.87	1.78	6.89	2.23	4.63	3.60	3.45
20	2.17	0.34	0.73	-0.13	3.	1.70	2.71	0.90	3.81	0.16	0.84	1.39	0.02	0.67	2.16
	1.25	1.23	1.41	1.90	1.95	0.69	0.59	1.20	1.68	0.17	1.11	0.27	1.75	1.61	1.
21	1.35	1.70	1.20	-0.05	3.25	0.63	-2.18	3.02	6.58	0.64	0.77	1.58	1.19	0.91	2.48
	1.16	1.86	2.07	5.64	0.69	2.93	1.37	0.49	0.61	2.33	2.39	1.85	2.73	1.94	1.43
22	0.92	1.09	-0.12	0.94	1.26	-1.93	-0.86	1.18	1.98	-0.02	0.37	0.71	0.77	0.38	0.78
	0.23	2.39	0.65	4.07	0.59	1.37	2.28	1.60	-1.67	-0.40	2.12	-0.44	0.44	1.36	0.54
23	1.91	0.71	-0.20	0.70	3.50	0.22	1.23	1.25	0.68	-0.40	1.11	0.66	0.15	0.81	0.56
	0.84	1.56	0.83	2.04	1.20	0.49	1.60	2.48	-0.74	-0.70	2.01	-0.79	1.72	1.73	0.49
24	3.23	1.64	2.98	-1.40	2.52	6.95	2.55	1.75	3.75	1.16	1.95	3.05	0.50	2.23	2.83
	3.38	-1.95	2.29	-0.87	1.68	0.61	-1.67	-0.74	7.95	3.98	0.74	3.28	4.82	2.45	2.31
25	2.28	1.83	2.24	-0.81	4.07	4.37	-3.30	3.18	6.51	0.55	1.24	2.17	1.47	1.30	1.90
	2.71	-1.21	2.69	1.78	0.17	2.33	-0.40	-0.70	3.98	5.12	1.87	3.85	4.72	2.32	2.46
26	4.05	3.16	1.86	0.52	3.90	0.94	-1.71	3.97	3.69	0.64	1.81	2.82	1.24	1.38	1.26
	1.76	2.60	1.76	6.89	1.11	2.39	2.12	2.01	0.74	1.87	4.80	0.64	3.40	2.88	2.79
27	1.14	1.16	1.75	-0.87	2.99	3.36	-1.03	2.10	5.40	0.19	0.86	1.30	1.07	1.25	2.46
	2.05	-0.80	2.24	2.23	0.27	1.85	-0.44	-0.79	3.28	3.85	0.64	3.68	3.51	1.64	1.06
28	4.51	2.42	2.42	-0.04	9.66	7.46	0.53	5.56	8.62	0.61	3.16	3.42	1.35	3.41	3.30
	4.61	-1.32	3.51	4.63	1.75	2.73	0.44	1.72	4.82	4.72	3.40	3.51	8.64	4.88	3.53
29	3.36	1.95	1.43	0.92	5.66	3.82	0.53	3.46	7.08	0.78	1.93	2.95	1.12	2.10	2.43
	2.87	1.06	2.55	3.60	1.61	1.94	1.36	1.73	2.45	2.32	2.88	1.64	4.88	3.81	2.59
30	3.60	1.83	1.89	0.47	3.95	3.08	-1.50	2.77	6.13	0.93	1.15	2.81	0.83	0.82	0.86
	2.17	-0.34	1.54	3.45	1.	1.43	0.54	0.49	2.31	2.46	2.79	1.06	3.53	2.59	3.69

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-03]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2022.19.1.8.8]
[DOI: 10.52547/jamlu.19.1.37]

جدول ۹. کوواریانس بین داده‌های مربوط به سهام‌های پرتفوی.

Company	$\times 10^3$														
1	0.17	-0.23	-0.05	-0.15	0.14	0.30	-0.01	0.15	-0.12	0.09	0.02	-0.02	0.30	0.04	-0.25
	-0.02	-0.19	0.22	-0.07	-0.09	0.12	-0.05	-0.06	0.22	0.16	-0.04	0.1 0	0.11	0.04	-0.16
2	-0.23	0.69	0.11	0.38	-1.11	0.63	0.54	-0.46	1.	-0.04	-0.51	0.5 0	-0.47	0.35	-0.04
	0.2 0	0.35	-0.2 0	-0.67	-0.2 0	-0.5 0	-0.17	0.15	-0.99	0.17	-0.05	-0.45	-0.55	0.17	-0.16
3	-0.05	0.11	0.29	-0.22	-0.4 0	-0.05	0.63	-0.13	0.52	-0.31	-0.32	-0.01	0.09	0.04	-0.28
	0.03	-0.2 0	0.06	-0.33	-0.39	-0.2 0	-0.13	-0.07	0.1 0	-0.23	-0.25	0.	-0.23	-0.13	0.25
4	-0.15	0.38	-0.22	0.6 0	-0.33	0.3 0	-0.47	-0.34	0.2 0	0.24	-0.03	0.36	-0.49	0.25	0.31
	0.19	0.5 0	-0.32	-0.12	0.44	-0.15	0.04	0.27	-0.83	0.26	0.3 0	-0.27	-0.21	0.24	-0.37
5	0.14	-1.11	-0.4 0	-0.33	8.9 0	-4.36	0.81	-1.	-3.39	-1.87	1.1 0	-2.6 0	-0.35	-1.83	0.22
	1.17	-0.81	-1.8 0	3.48	-3.17	1.08	0.73	0.08	1.07	-0.77	-0.82	1.63	-0.19	-0.06	0.55
6	0.30	0.63	-0.05	0.3 0	-4.36	4.75	0.99	0.74	2.1 0	1.44	-1.08	1.82	0.76	1.33	-1.2
	0.0	0.11	1.14	-2.93	0.2 0	-0.52	-0.79	-0.29	-1.31	1.73	-0.14	-1.24	-0.61	0.86	-1.66
7	-0.01	0.54	0.63	-0.47	0.81	0.99	5.66	-0.5 0	2.5 0	-1.26	-1.54	-0.6 0	0.65	-0.44	-1.93
	0.77	-0.82	-1.03	-1.81	-2.87	-0.09	-0.49	-0.32	-0.22	-0.33	-1.66	-0.63	-1.85	0.18	-0.47
8	0.15	-0.46	-0.13	-0.34	-1.	0.74	-0.5 0	2.02	2.19	1.	0.75	0.19	0.72	-0.27	0.64
	0.	0.02	0.6 0	0.7 0	0.11	0.6 0	-0.03	-1.07	0.57	0.57	0.17	-0.56	0.93	0.26	0.05
9	-0.12	1.	0.52	0.2 0	-3.39	2.1 0	2.5 0	2.19	12.3 0	0.41	-0.69	1.24	0.26	0.31	0.13
	1.39	0.52	-0.11	0.33	-1.66	-0.19	-0.73	-1.61	-1.42	0.81	-0.28	-1.9 0	-0.32	0.85	-0.13
10	0.09	-0.04	-0.31	0.24	-1.87	1.44	-1.26	1.	0.41	1.32	0.53	0.8 0	0.24	0.29	0.6
	-0.22	0.45	0.61	-0.45	1.01	0.17	-0.02	-0.27	-0.38	0.95	0.66	-0.62	0.63	0.31	-0.5 0
11	0.02	-0.51	-0.32	-0.03	1.1 0	-1.08	-1.54	0.75	-0.69	0.53	1.25	-0.3 0	-0.02	-0.56	1.21
	-0.04	0.26	0.01	1.33	0.31	0.58	0.4 0	-0.27	0.36	0.22	0.63	0.07	1.02	-0.06	0.34
12	-0.02	0.5 0	-0.01	0.36	-2.6 0	1.82	-0.6 0	0.19	1.24	0.8 0	-0.3 0	1.16	-0.09	0.78	0.02
	-0.04	0.41	0.61	-1.11	0.51	-0.49	-0.3 0	0.	-1.01	0.84	0.35	-0.6 0	-0.07	0.32	-0.49
13	0.3 0	-0.47	0.09	-0.49	-0.35	0.76	0.65	0.72	0.26	0.24	-0.02	-0.09	0.94	-0.03	-0.57
	-0.04	-0.49	0.45	-0.46	-0.15	0.38	-0.13	-0.41	0.8 0	0.14	-0.26	-0.04	0.18	0.03	-0.18
14	0.04	0.35	0.04	0.25	-1.83	1.33	-0.44	-0.27	0.31	0.29	-0.56	0.78	-0.03	0.8 0	-0.42
	-0.03	0.13	0.49	-0.93	0.5 0	-0.47	-0.27	0.2 0	-0.55	0.36	0.08	-0.15	-0.25	0.19	-0.39
15	-0.25	-0.04	-0.28	0.31	0.22	-1.2 0	-1.93	0.64	0.13	0.6 0	1.21	0.02	-0.57	-0.42	1.73
	0.03	0.73	-0.15	1.44	0.61	0.28	0.41	-0.22	-0.25	0.17	0.84	-0.23	0.96	-0.03	0.55

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-03]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2022.19.1.8.8]
[DOI: 10.52547/jamlu.19.1.37]

ادامه جدول ۹

Company	$\times 10^3$														
16	-0.02	0.2 0	0.03	0.19	1.17	0.	0.77	0.	1.39	-0.22	-0.04	-0.04	-0.04	-0.03	0.03
	1.1 0	0.02	-0.41	0.54	-1.64	0.07	-0.06	-0.36	-0.55	0.41	-0.38	-0.17	-0.43	0.5 0	-0.09
17	-0.19	0.35	-0.2 0	0.5 0	-0.81	0.11	-0.82	0.02	0.52	0.45	0.26	0.41	-0.49	0.13	0.73
	0.02	0.63	-0.17	0.09	0.68	-0.1 0	0.11	0.12	-0.74	0.26	0.53	-0.4 0	0.17	0.12	-0.1 0
18	0.22	-0.2 0	0.06	-0.32	-1.8 0	1.14	-1.03	0.6 0	-0.11	0.61	0.01	0.61	0.45	0.49	-0.15
	-0.41	-0.17	1.13	-0.47	0.44	-0.19	-0.22	-0.23	0.25	0.48	0.18	0.01	0.52	-0.01	-0.01
19	-0.07	-0.67	-0.33	-0.12	3.48	-2.93	-1.81	0.7 0	0.33	-0.45	1.33	-1.11	-0.46	-0.93	1.44
	0.54	0.09	-0.47	3.66	-0.7 0	0.67	0.53	-0.56	0.82	-0.5 0	0.15	0.71	1.05	-0.03	1.06
20	-0.09	-0.2 0	-0.39	0.44	-3.17	0.2 0	-2.87	0.11	-1.66	1.01	0.31	0.51	-0.15	0.5 0	0.61
	-1.64	0.68	0.44	-0.7 0	4.63	0.12	0.28	0.8 0	0.58	-0.7 0	1.35	-0.02	0.97	-0.61	-0.19
21	0.12	-0.5 0	-0.2 0	-0.15	1.08	-0.52	-0.09	0.6 0	-0.19	0.17	0.58	-0.49	0.38	-0.47	0.28
	0.07	-0.1 0	-0.19	0.67	0.12	0.64	0.22	-0.27	0.65	-0.07	0.08	0.05	0.43	0.01	0.
22	-0.05	-0.17	-0.13	0.04	0.73	-0.79	-0.49	-0.03	-0.73	-0.02	0.4 0	-0.3 0	-0.13	-0.27	0.41
	-0.06	0.11	-0.22	0.53	0.28	0.22	0.22	0.07	0.2 0	-0.2 0	0.21	0.14	0.28	-0.13	0.18
23	-0.06	0.15	-0.07	0.27	0.08	-0.29	-0.32	-1.07	-1.61	-0.27	-0.27	0.	-0.41	0.2 0	-0.22
	-0.36	0.12	-0.23	-0.56	0.8 0	-0.27	0.07	0.76	-0.26	-0.32	0.24	0.29	-0.27	-0.25	-0.18
24	0.22	-0.99	0.1 0	-0.83	1.07	-1.31	-0.22	0.57	-1.42	-0.38	0.36	-1.01	0.8 0	-0.55	-0.25
	-0.55	-0.74	0.25	0.82	0.58	0.65	0.2 0	-0.26	2.01	-0.99	-0.24	0.72	0.66	-0.56	0.63
25	0.16	0.17	-0.23	0.26	-0.77	1.73	-0.33	0.57	0.81	0.95	0.22	0.84	0.14	0.36	0.17
	0.41	0.26	0.48	-0.5 0	-0.7 0	-0.07	-0.2 0	-0.32	-0.99	1.43	0.21	-0.56	0.07	0.62	-0.71
26	-0.04	-0.05	-0.25	0.3 0	-0.82	-0.14	-1.66	0.17	-0.28	0.66	0.63	0.35	-0.26	0.08	0.84
	-0.38	0.53	0.18	0.15	1.35	0.08	0.21	0.24	-0.24	0.21	0.89	-0.13	0.7 0	-0.13	0.0
27	0.1 0	-0.45	0.	-0.27	1.63	-1.24	-0.63	-0.56	-1.9 0	-0.62	0.07	-0.6 0	-0.04	-0.15	-0.23
	-0.17	-0.4 0	0.01	0.71	-0.02	0.05	0.14	0.29	0.72	-0.56	-0.13	0.86	0.11	-0.32	0.35
28	0.11	-0.55	-0.23	-0.21	-0.19	-0.61	-1.85	0.93	-0.32	0.63	1.02	-0.07	0.18	-0.25	0.96
	-0.43	0.17	0.52	1.05	0.97	0.43	0.28	-0.27	0.66	0.07	0.7 0	0.11	1.27	-0.21	0.43
29	0.04	0.17	-0.13	0.2	-0.06	0.86	0.18	0.26	0.85	0.31	-0.06	0.32	0.03	0.19	-0.03
	0.5 0	0.12	-0.01	-0.03	-0.61	0.01	-0.13	-0.25	-0.56	0.62	-0.13	-0.32	-0.21	0.47	-0.43
30	-0.16	-0.16	0.25	-0.37	0.55	-1.66	-0.47	0.05	-0.13	-0.5	0.34	-0.49	-0.18	-0.39	0.55
	-0.09	-0.1 0	-0.01	1.06	-0.19	0.	0.18	-0.18	0.63	-0.71	0.0	0.35	0.43	-0.43	1.04

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-03]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2022.19.1.8.8]

[DOI: 10.52547/jamlu.19.1.37]

جدول ۱۰. کوواریانس بین داده‌های مربوط به سهام‌های پرتفوی.

Company	$\times 10^3$														
1	0.7	0.5	-0.4	-0.2	0.5	-0.3	-0.2	-0.5	1.1	0.3	-0.2	0.2	0.2	-0.2	-0.7
	-0.6	0.0	1.3	-0.6	0.2	-0.4	-0.1	-0.3	-0.3	-0.4	-0.6	0.2	-2.0	0.4	-0.7
2	0.5	1.1	-0.5	-0.1	0.6	-0.4	-1.5	-0.7	2.6	-0.1	0.1	-0.4	-0.4	1.1	-0.7
	0.0	-0.3	0.1	-0.4	-0.7	-0.9	0.7	0.3	-0.9	2.2	-0.4	0.6	-0.9	0.0	0.2
3	-0.4	-0.5	1.1	-0.1	-0.6	0.2	0.1	0.3	-0.4	-0.6	0.2	1.0	1.0	-0.2	0.3
	0.7	-1.2	0.1	- 1.0	-0.1	0.4	0.5	0.0	-0.4	0.2	-0.1	-0.5	2.8	0.1	0.2
4	-0.2	-0.1	-0.1	0.5	-0.0	0.5	-0.2	0.4	-1.99	-0.5	-0.6	0.1	0.1	0.2	0.6
	-0.1	0.3	-0.5	-0.8	0.3	-0.3	-0.5	0.7	0.7	0.1	0.7	0.4	0.5	-0.1	0.2
5	0.5	0.6	-0.6	-0.0	1.4	-0.5	-0.2	-0.7	3.2	0.1	0.5	-1.3	-1.3	-0.0	-1.4
	-1.2	0.4	-1.0	-0.1	-0.7	-0.0	-0.3	-0.7	-0.5	0.4	-0.2	-0.7	-2.5	0.0	-0.2
6	-0.3	-0.4	0.2	0.5	-0.5	4.2	-0.7	1.0	-3.1	-1.1	-0.7	2.4	2.4	-0.2	0.2
	-0.4	-1.1	0.7	0.3	2.0	-0.9	-0.9	-1.3	2.9	- 2.0	0.5	0.2	3.0	-0.3	2.2
7	-0.2	-1.5	0.1	-0.2	-0.2	-0.7	4.2	-0.2	-4.5	1.1	0.3	-2.3	-2.3	-3.0	-1.5
	-1.4	1.0	-0.6	2.0	0.6	2.5	-1.0	0.4	0.6	-3.5	-0.5	-1.5	-2.1	-0.1	-1.0
8	-0.5	-0.7	0.3	0.4	-0.7	1.0	-0.2	1.3	-5.0	-0.5	-0.5	1.7	1.7	-0.1	2.0
	0.9	-0.7	-0.5	-0.7	0.3	-0.2	-0.2	-0.4	0.8	-1.0	0.5	0.5	1.5	-0.2	-0.1
9	1.1	2.6	-0.4	-1.9	3.2	-3.1	-4.5	-5.0	3.2	8.6	5.1	0.4	0.4	4.4	5.1
	0.3	15.2	11.5	25.1	-4.5	2.0	3.6	0.9	4.6	-0.9	0.9	-4.3	0.9	2.6	8.4
10	0.3	-0.1	-0.6	-0.5	0.1	-1.1	1.1	-0.5	8.6	3.0	0.5	-1.4	-1.4	-1.1	-0.1
	0.3	1.9	1.44	4.3	0.4	1.11	0.1	-0.0	-0.2	-3.0	-0.7	-1.2	- 2.8	-0.1	-0.1
11	-0.2	0.1	0.2	-0.6	0.5	-0.7	0.3	-0.5	5.1	0.5	2.1	- 1.0	-1.0	0.0	- 1.0
	-0.1	-0.0	-1.9	3.0	-2.2	0.8	0.9	-1.6	-0.8	1.2	-0.6	-1.2	-0.2	-0.2	0.6
12	0.2	-0.4	1.0	0.1	-1.3	2.4	-2.3	1.7	0.4	-1.4	-1.0	8.0	8.0	0.7	4.5
	2.1	-1.5	5.1	-1.7	-0.1	-2.3	0.7	-1.1	1.9	-0.5	-0.2	2.7	4.7	0.8	0.4
13	0.2	-0.4	1.0	0.1	-1.3	2.4	-2.3	1.7	0.4	-1.4	-1.0	8.0	8.0	0.7	4.5
	2.1	-1.5	5.1	-1.7	-0.1	-2.3	0.7	-1.1	1.9	-0.5	-0.2	2.7	4.7	0.8	0.4
14	-0.2	1.1	-0.2	0.2	-0.0	-0.2	-3.0	-0.1	4.4	-1.1	0.0	0.7	0.7	3.7	1.6
	1.1	1.1	-0.5	-0.4	-0.6	-2.2	0.4	0.1	0.1	4.6	1.7	1.9	2.1	-0.1	1.2
15	-0.7	-0.7	0.3	0.6	- 1.4	0.2	- 1.5	2.0	5.1	-0.1	- 1.0	4.5	4.5	1.6	6.9
	2.5	1.9	2.3	1.4	- 1.1	-0.7	0.8	1.1	2.1	-0.1	1.6	2.4	2.9	0.5	0.1

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-03]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2022.19.1.8.8]
[DOI: 10.52547/jamlu.19.1.37]

ادامه جدول ۱۰

Company	$\times 10^{3}$														
16	-0.6	0.0	0.7	-0.1	-1.2	-0.4	-1.4	0.9	0.3	0.3	-0.1	2.1	2.1	1.1	2.5
	2.9	-0.7	0.5	0.1	-0.6	-0.9	1.2	0.9	-0.8	1.5	0.1	1.1	3.5	-0.5	0.7
17	0.0	-0.3	-1.2	0.3	0.4	- 1.1	1.0	-0.7	15.2	1.9	-0.0	-1.5	-1.5	1.1	1.9
	-0.7	6.7	1.5	5.8	0.6	0.1	-1.8	1.4	3.1	-0.9	2.4	0.5	-1.7	-0.0	1.4
18	1.3	0.1	0.1	-0.5	- 1.0	0.7	-0.6	-0.5	11.5	1.4	- 1.9	5.1	5.1	-0.5	2.3
	0.5	1.5	9.88	0.8	2.5	-1.0	0.3	1.1	1.8	-3.7	-1.0	1.9	0.4	1.7	-0.3
19	-0.6	-0.4	-1.0	-0.8	-0.1	0.3	2.0	-0.7	25.1	4.3	3.0	-1.7	-1.7	-0.4	1.4
	0.1	5.8	0.8	16.0	- 2.6	2.0	1.2	-0.3	3.7	- 2.0	-0.3	- 1.2	- 1.1	-0.4	4.1
20	0.2	-0.7	-0.1	0.3	-0.7	2.0	0.6	0.3	-4.5	0.4	-2.2	-0.1	-0.1	-0.6	-1.1
	-0.6	0.6	2.5	-2.6	0.57	-0.4	-2.8	-0.4	1.5	-4.7	1.3	-0.6	0.6	-0.3	0.2
21	-0.4	-0.9	0.4	-0.3	-0.0	-0.9	2.5	-0.2	2.0	1.1	0.8	-2.3	-2.3	-2.2	-0.7
	-0.9	0.1	-1.0	2.0	-0.4	3.0	0.4	0.1	-0.5	- 2.8	-0.7	- 2.4	- 1.4	0.4	-1.0
22	-0.1	0.7	0.5	-0.5	-0.3	-0.9	- 1.0	-0.2	3.6	0.1	0.9	0.7	0.7	0.4	0.8
	1.2	- 1.8	0.3	1.2	- 2.8	0.4	2.9	0.8	-1.7	2.5	- 1.6	0.4	0.8	0.5	-0.2
23	-0.3	0.3	0.0	0.7	-0.7	- 1.3	0.4	-0.4	0.9	-0.0	-1.6	-1.1	-1.1	0.1	1.1
	0.9	1.4	1.1	-0.3	-0.4	0.1	0.8	5.7	0.2	2.4	0.2	1.8	1.4	-0.1	0.6
24	-0.3	-0.9	-0.4	0.7	-0.5	2.9	0.6	0.8	4.6	-0.2	-0.8	1.9	1.9	0.1	2.1
	-0.8	3.1	1.8	3.7	1.5	-0.5	- 1.7	0.2	4.9	- 2.3	1.8	1.0	1.9	0.0	2.4
25	-0.4	2.2	0.2	0.1	0.4	- 2.0	-3.5	- 1.0	-0.9	- 3.0	1.2	-0.5	-0.5	4.6	-0.1
	1.5	-0.9	-3.7	- 2.0	- 4.7	- 2.8	2.5	2.4	- 2.3	12.1	0.6	3.3	3.4	-0.4	1.5
26	-0.6	-0.4	-0.1	0.7	-0.2	0.5	-0.5	0.5	0.9	-0.7	-0.6	-0.2	-0.2	1.7	1.6
	0.1	2.4	- 1.0	-0.3	1.3	-0.7	- 1.6	0.2	1.8	0.6	2.6	0.6	1.8	-0.4	1.0
27	0.2	0.6	-0.5	0.4	-0.7	0.2	- 1.5	0.5	- 4.3	- 1.2	- 1.2	2.7	2.7	1.9	2.4
	1.1	0.5	1.9	- 1.2	-0.6	- 2.4	0.4	1.8	1.0	3.3	0.6	3.8	1.2	0.1	0.2
28	- 2.0	-0.9	2.8	0.5	-2.5	3.0	-2.1	1.5	0.9	-2.8	-0.2	4.7	4.7	2.1	2.9
	3.5	-1.7	0.4	- 1.1	0.6	- 1.4	0.8	1.4	1.9	3.4	1.8	1.2	12.9	-0.7	4.3
29	0.4	0.0	0.1	-0.1	0.0	-0.3	-0.1	-0.2	2.6	-0.1	-0.2	0.8	0.8	-0.1	0.5
	-0.5	-0.0	1.7	-0.4	-0.3	0.4	0.5	-0.1	0.0	-0.4	-0.4	0.1	-0.7	0.9	-0.9
30	-0.7	0.2	0.2	0.2	-0.2	2.2	- 1.0	-0.1	8.4	-0.1	0.6	0.4	0.4	1.2	0.1
	0.7	1.4	-0.3	4.1	0.2	- 1.0	-0.2	0.6	2.4	1.5	1.0	0.2	4.3	-0.9	4.1

۵ نتیجه‌گیری

با توجه به پیچیدگی‌های بازارهای مالی نیاز است مدل‌هایی با ساختارهای کامل‌تر برای پیش‌بینی قیمت دارایی معرفی شوند. در این مقاله مدلی را معرفی کردیم که ارتباطی را بین منابع نوسان قیمت سهام ایجاد می‌کرد و دارای حافظه بلند مدت نیز بود بدون این‌که باعث به وجود آمدن آربیتراژ شود. سپس با توجه به این مدل قیمت اختیار را محاسبه نمودیم. در انتها سبد سهام بهینه را با توجه به این مدل معرفی‌شده، مدل هستون مرکب و مدل بهینه سازی میانگین – واریانس مارکوویتز یافتیم و کارایی آن را نشان دادیم. نتایج به‌دست‌آمده بیانگر این است

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-03]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2022.19.1.8.8]
[DOI: 10.52547/jamlu.19.1.37]

در حالتی که از مدل نامبرده برای پیش‌بینی قیمت سهام استفاده شده، ۸ سهم از ۱۰ سهم ممکن مناسب برای سرمایه‌گذاری را درست پیش‌بینی کرده‌ایم.

منابع

[1] F. Black, M. S. Scholes, (1973). The pricing of options and corporate liabilities, J. Polit. Econ. 81, 637-654.

[2] O. Vasicek, (1977). An equilibrium characterization of the term structure, Journal of Financial Economics, . 5, 177-188.

[3] S. Heston,(1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options, Rev. Finance. Stud. 6 (2),327-343.

[4] Fallah, S., & Mehrdoust, F. (2019). On the existence and uniqueness of the solution to the double Heston model equation and valuing Lookback option. Journal of Computational and Applied Mathematics, *350*, 412-422.

[5] Mehrdoust, F., Najafi, A. R., Fallah, S., & Samimi, O. (2018). Mixed fractional Heston model and the pricing of American options. Journal of Computational and Applied Mathematics, *330*, 141-154.

[6] Christoffersen, P., Heston, S. and Jacobs, K. (2009). The shape and term structure of the index option smirk: Why multifactor stochastic volatility models work so well, Management Science, 55, 1914-1932.

[7] Mehrdoust, Farshid, Idin Noorani, and Abdelouahed Hamdi. (2021). Calibration of the double Heston model and an analytical formula in pricing American put option. Journal of Computational and Applied Mathematics.

[8] A. Chronopoulou, F. G. Viens, (2010). Estimation and Pricing under Long-Memory Stochastic Volatil-ity, Department of Statistics, Purdue University 150 N. University St. West Lafayette, IN47907-2067, USA,

[9] S. Rostek, (2008-2009). Option Pricing in Fractional Brownian Markets, Springer, 5-13.

[10] Rogers, L.C.G. (1997): Arbitrage with fractional Brownian motion, Math Finance 7(1), 95-105.

[11] Salopek, D. M. (1998). Tolerance to arbitrage. Stochastic Processes and their Applications, *76*(2), 217-230.

[12] Shiryaev, A. N. (1998). On arbitrage and replication for fractal models.

[13] Cheridito, P. (2003). Arbitrage in fractional Brownian motion models, Finance Stoch. 7(4),,533-553.

[14] Cheridito, P. (2001). Mixed fractional Brownian motion. Bernoulli 7 (6), 913-934.

[15] B. Nomesh, and S. Juneja, (2005). Monte Carlo methods for pricing financial options. Sadhana 30.2-3, 347-385.

[16] Goh, Joel Weiqiang, et al. (2012). Portfolio value-at-risk optimization for asymmetrically distributed asset returns. European Journal of Operational Research, 221.2, 397-406.

[17] Branda, Martin. (2016). Mean-value at risk portfolio efficiency: approaches based on data envelopment analysis models with negative data and their empirical behaviour. 4OR, 14.1, 77-99.

[18] Mandelbrot, Benoit B., and John W. Van Ness. (1968). Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. SIAM review 10.4, 422-437.

[19] Mandelbrot, Benoit B. (1971). When can price be arbitraged efficiently? A limit to the validity of the random walk and martingale models. The Review of Economics and Statistics, 225-236.

[20] Scholz, Michael, Stefan Sperlich, and Jens Perch Nielsen. (2016). Nonparametric long term prediction of stock returns with generated bond yields. Insurance: Mathematics and Economics 69, 82-96

[21] H. Markowitz, Portfolio selection, The Journal of Finance 7 (1952), 77–91.

[22] Khodamoradi, Tahereh, Maziar Salahi, and Ali Reza Najafi. (2020). A note on CCMV portfolio optimization model with short selling and risk-neutral interest rate. Statistics, Optimization & Information Computing, 8.3, 740-748.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-03]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2022.19.1.8.8]

[DOI: 10.52547/jamlu.19.1.37]