*Journal of Operational Research in its Applications*
*Vol.22, NO.2, Summer 2025*
*ISSN: 2251-7286*
*DOI: 10.71773/jamlu-2025-2-2228*

# Ranking of Efficient Decision Making Units Using the DEA-TOPSIS Method with the Common Set of Weights

M. Khanmohammadi*
*Assistant Professor, Department of Mathematics, Islamic Azad University, Islamshahr Branch, Islamshahr, Iran*

***Research Paper***

**Received:** 22 November 2024
**Accepted:** 21 April 2025

**Abstract:** Data envelopment analysis methods classify decision-making units into two groups: Efficient and inefficient. Therefore, a complete ranking of all DMUs is requested by most decision-makers. In this paper, the TOPSIS method is combined with one of the data envelopment analysis models with a set of common weights, and a new combined ranking method of TOPSIS and DEA with common weights is proposed for ranking efficient units, which not only incorporates the advantages of data envelopment analysis methods and the TOPSIS method, but also solves the problems that appear in previous methods. In addition, to avoid extreme or zero values in the input and/or output weights, we include the coefficient of variation (CV) in our proposed model. We compared the proposed model with a number of well-known ranking models and then used this model to rank 20 Iranian bank branches.

**Introduction:** There are various ranking methods for ranking efficient decision-making units in data envelopment analysis. In practice, choosing a ranking method whose results the decision maker can trust is an important issue. In the TOPSIS method, the weights of the indicators are determined by the decision maker, which is a matter of taste. TOPSIS-DEA scientists tried to calculate the weights of the indicators using DEA without using the opinions of others.

**Materials and Methods:** In this paper, we have presented a new model in TOPSIS method to obtain the weights of the indicators. In our proposed model, two options, positive ideal and negative ideal, are introduced and then, by means of the model presented in DEA science, a series of common weights are calculated in such a way that the smoothed distance of all efficient units from the positive ideal has the lowest value and at the same time the smoothed distance of all efficient units from the negative ideal has the highest value. These weights are the best weights that can be introduced for the TOPSIS method indicators, and then, with the help of these weights, the TOPSIS method can be used to rank efficient units.

**Results and Discussion:** The results obtained from our proposed model are quite similar to the valid models of SBM, Cross Efficiency, and TOPSIS method, and this indicates that the results of our model are valid and the weights that our model provides for the TOPSIS method are reasonable weights.
By comparing our model with the TOPSIS method, we conclude that the weights provided in our model are very close to the weights that the decision maker provides for the TOPSIS method, while the advantage of our model is that the weights are obtained by the model itself

* *Corresponding Author: khan55@iau.ac.ir, kh_khanmohamady@yahoo.com.*



[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-04 ]

[ DOI: 10.71773/jamlu-2025-2-2228 ]

*Journal of Operational Research in its Applications*
*Vol.22, NO.2, Summer 2025*
*ISSN: 2251-7286*
*DOI: 10.71773/jamlu-2025-2-2228*

and are not chosen by the decision maker and are not arbitrary. Meanwhile, for the decision maker, determining weights for four units according to the indicators is not a difficult task, but when the number of decision maker units increases, determining logical and non-tasteful weights will be very difficult for the decision maker, and this is one of the advantages of our proposed model.

**Conclusions:** Our goal in this study was to obtain a method for ranking decision-making units with common weights. To rank the decision-making units, we first scaled the input and output data by normalization. After determining the positive and negative ideal points, we calculated an optimal set of joint weights in such a way that the virtual distance of all efficient decision-making units to the positive ideal point is the smallest possible value and the virtual distance of efficient decision-making units to the negative ideal point is the longest possible value. In addition, to avoid extreme or zero values in the input and/or output weights, we included the coefficient of variation in our proposed model, and then we used the TOPSIS ranking index to rank the efficient units under study. This proposed model has five positive features that we mentioned in the article and compared this model with several famous ranking models and then used this model to rank 20 Iranian bank branches.

**Keywords:** Data Envelopment Analysis (DEA), Decision Making Unit (DMU), Positive Ideal Point, Negative Ideal Point, TOPSIS, Coefficient of Variation (CV).

[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-04 ]

[ DOI: 10.71773/jamlu-2025-2-2228 ]

مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال بیست و دوم، شماره دوم (پیاپی ۸۵)،تابستان ۰۴، ص ص ۹۲-۷۱
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱
*DOI: 10.71773/jamlu-2025-2-2228*

# رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا به روش DEA-TOPSIS با مجموعه وزن‌های مشترک

**معصومه خانمحمدی**[1*]
۱- استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، واحد اسلامشهر، دانشگاه آزاد اسلامی، اسلامشهر، ایران

رسید مقاله: ۲ آذر ۱۴۰۳
پذیرش مقاله: ۱ اردیبهشت ۱۴۰۴

## چکیده
روش‌های تحلیل پوششی داده‌ها، واحدهای تصمیم‌گیری را به دو گروه کارآمد و ناکارآمد طبقه‌بندی می‌کنند. بنابراین، رتبه‌بندی کامل تمام DMUها توسط اکثر تصمیم‌گیرندگان درخواست می‌شود. در این مقاله روش TOPSIS را با یکی از مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها با مجموعه وزن‌های مشترک ترکیب شده است و یک روش رتبه‌بندی ترکیبی جدید از TOPSIS و DEA با وزن‌های مشترک برای رتبه‌بندی واحدهای کارا پیشنهاد داده می‌شود که نه تنها مزایای روش‌های تحلیل پوششی داده‌ها و روش TOPSIS را در بر می‌گیرد، بلکه مشکلاتی را که در روش‌های قبلی ظاهر می‌شود، حل می‌کند. درضمن برای جلوگیری از مقادیر شدید یا صفر در وزن‌های ورودی و/یا خروجی ضریب تغییرات (CV) را در مدل پیشنهادی خود گنجانیم. مدل پیشنهادی را با تعدادی مدل رتبه‌بندی معروف مقایسه کردیم و سپس از این مدل برای رتبه‌بندی ۲۰ شعبه بانک ایرانی استفاده نمودیم.

**کلمات کلیدی:** تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)، واحد تصمیم‌گیرنده (DMU)، نقطه ایده‌آل مثبت، نقطه ایده‌آل منفی، تاپسیس(TOPSIS)، ضریب تغییرات (CV).

## ۱ مقدمه
تحلیل پوششی داده‌ها توسط چارنز و همکارانش [۱] (مدلCCR) پیشنهاد داده شد و توسط بنکر و همکارانش با ارایه مدل BCC [۲] بسط داده شد و اکنون به طور گسترده در ارزیابی عملکرد یا ارزیابی بهره‌وری استفاده می‌شود.

ایده اصلی DEA کلاسیک این است که ابتدا مرز تولیدی را که در آن واحدهای تصمیم‌گیری (DMU) کارآمد در نظر گرفته می‌شوند، شناسایی کند. سپس آن DMUها که در مرز نیستند با همتایان خود در مرز مقایسه می‌شوند تا امتیاز کارایی آنها برآورد شود. در واقع تمام DMUهای مرزی دارای سطح عملکرد یکسانی

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: kh_khanmohamady@yahoo.com



[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-04 ]
[ DOI: 10.71773/jamlu-2025-2-2228 ]

هستند و بهترین عملکرد را نشان می‌دهند. یکی از مزایای اصلی DEA این است که به DMUها اجازه می‌دهد تا آزادی کامل در انتخاب وزن‌هایشان داشته باشند که برای ارزیابی آنها برای دستیابی به حداکثر امتیاز کارایی مطلوب است. این انعطاف‌پذیری کامل در انتخاب وزن‌ها در شناسایی DMUهای ناکارآمد مهم است. با این حال، وزن ها با انعطاف پذیری کامل ممکن است مشکلات جدی بسیاری را در کاربردهای عملی ایجاد کنند. یکی از مشکلات این است که این انعطاف پذیری کامل ممکن است قدرت تمایز DEA را بسیار کاهش دهد، به این معنا که DMUهای بسیار زیادی در مرز وجود دارند، که نمی‌توان آنها را در مدل‌های استاندارد DEA رتبه‌بندی کرد. لذا دانشمندان به ارایه روش‌های رتبه‌بندی واحدهای کارا پرداختند. به طور نمونه اندرسون و پیترسون [۳] روش سوپرکارایی را برای رتبه‌بندی واحدهای کارا پیشنهاد دادند که خود یک DMU را از مجموعه مرجع حذف می‌کند. واضح است که این مدل در واقع از مجموعه های مرجع مختلفی برای ارزیابی DMUهای کارآمد و DMUهای ناکارآمد استفاده می‌کند. بعدها تعدادی دانشمند این علم گزارش کردند که روش اندرسون و پیترسون [۳] با استفاده از نمرات سوپر کارایی برای رتبه‌بندی مشاهدات کارآمد، عملکرد رضایت‌بخشی ندارد. ژانگ و همکارانش [۴] یک رویکرد جدید برای استفاده از مرز کارایی و مرز ناکارایی برای افزایش قدرت رتبه‌بندی DEA ایجاد کردند. با استفاده از DEA استاندارد، مرز کارایی قابل تحقق است. برای یافتن مرز ناکارایی، ورودی‌ها را به حداکثر و خروجی‌ها را به حداقل رساندند، به طور معادل می‌گفتند که ورودی‌ها و خروجی‌ها در مدل‌های DEA نامطلوب هستند سپس شاخص های عملکرد برای ترکیب اطلاعات از هر دو مرز فرموله کردند. مطالعه تجربی آنها نشان داد که این شاخص های عملکرد در واقع قدرت تمایز بسیار بیشتری دارند. دکتر جهانشاهلو و همکارانش [۵] یک سیستم رتبه‌بندی برای رتبه‌بندی واحدهای کارا را به نسبت تأثیرشان روی واحدهای ناکارا را پیشنهاد دادند.

برخی از محققان، برای افزایش قدرت تبعیض جهت رتبه‌بندی واحدهای کارا از وزن‌های مشترک استفاده کردند. یکی از این روش‌ها روش Liu و Peng [۶] می‌باشد. آنها در روش خود یک مجموعه از وزن‌های مشترک برای به دست آوردن بهترین اندازه کارایی برای گروه واحدهای کارا پیشنهاد دادند. امیرتیموری و همکارش در مقاله خود [۷]، ابتدا تعریفی از بهترین واحد تصمیم‌گیری را ارایه دادند و در ادامه با استفاده از یک مدل برنامه‌ریزی خطی با رویکرد وزن‌های مشترک، روشی برای تعیین بهترین واحد تصمیم‌گیرنده کارا در میان تعدادی از واحدهای کارا معرفی کردند، این واحد یکی از واحدهای MPSS از مجموعه امکان تولید است که به عنوان بهترین واحد کار معرفی شد.

در DEA ما گاهی اوقات با مقادیر شدید یا صفر در وزن‌های ورودی و/یا خروجی برای DMUهای بررسی‌شده مواجه می‌شویم. در برخی موارد با عدم تناسب وزن‌ها مواجه می‌شویم، یعنی راه‌حلی که به متغیرهایی با اهمیت کمتر وزن می‌دهد یا به متغیرهای مهم وزن کوچک یا صفر می‌دهد. به خصوص در موارد صفر، وزن ورودی و/یا خروجی به تفسیر نتایج تحلیل کمکی نمی‌کند. در ادبیات تحلیل پوششی داده ها، تلاش های مختلفی برای غلبه بر این مشکل انجام شده است. مشکل وزن‌های غیرواقعی در DEA عمدتاً با تکنیک‌های محدود کردن وزن حل شده است. یکی از روش‌های رتبه‌بندی DMUهای کارآمد، روشی است که بال و همکارانش [۸]، برای



[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-04 ]

[ DOI: 10.71773/jamlu-2025-2-2228 ]

بهبود پراکندگی وزن های ورودی-خروجی بر اساس به حداقل رساندن ضریب تغییرات (CV) ارائه دادند که منجر به بهبود قدرت تمایز روش DEA شده است اما مدل پیشنهادی آنها تفسیر اقتصادی یا مدیریتی ندارد، زیرا DMUها دارای ورودی‌های (خروجی‌های) متفاوتی هستند، بنابراین جهانشاهلو و همکارش [۹]، آن مدل را اصلاح کرده و دو مدل جدید برای رتبه‌بندی DMUهای کارا بر اساس نرم یک و با استفاده از میانگین وزن‌های ورودی-خروجی معرفی کردند.

در زندگی واقعی، مردم اغلب از بیش از یک مرجع برای قضاوت کردن در مورد DMUها استفاده می‌کنند و حتی ممکن است DMU ها را نه تنها با مراجع خوب، بلکه گاهی اوقات با مراجع بد نیز مقایسه می‌کنند. در مقایسه یک DMU، بهتر است که آن به مراجع خوب روی مرز کارایی نزدیکتر باشد. از سوی دیگر، از مراجع بد دور باشد. در واقع، TOPSIS از این ایده در ارزیابی DMUها استفاده کرده است، اگرچه بهترین و بدترین همتایان آن ممکن است قابل تحقق نباشند و می‌توانند دور از واقعیت باشند.

برزگری نژاد و همکارانش [۱۰] روشی برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری در تحلیل پوششی داده‌ها بر اساس نقاط ایده‌آل و ضد ایده‌آل در مجموعه امکان تولید با استفاده از مجموعه وزن‌های مشترک پیشنهاد دادند. آنها در روش خود با حل سه برنامه تمامی واحدهای تصمیم‌گیری را رتبه‌بندی می‌کنند. بنی هاشمی و همکارانش [۱۱]، جهت رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده از سه روش استفاده کردند. آنها در روش پیشنهادی خودشان، ابتدا سه واحد مجازی که شامل بهترین واحد تصمیم‌گیرنده و بدترین واحد تصمیم‌گیرنده و حد وسط را به مجموعه واحدهای تصمیم‌گیرنده اضافه کردند و سپس به ارزیابی کارایی کل واحدها با استفاده از مدل جمعی با بازده به مقیاس متغیر پرداختند. بهترین واحد تصمیم‌گیری دارای کارایی یک و بدترین واحد تصمیم‌گیری، ناکاراترین واحد می‌شودو مابقی واحدهای تصمیم‌گیرنده بر اساس نمره کارایی به‌دست آمده از مدل رتبه‌بندی می‌شوند. آنها برای بررسی اعتبار مدلشان، رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده را با استفاده از روش تاپسیس و روش راه حل ایده‌آل و غیره ایده‌آل مورد بررسی قرار دادند.

همان‌طوری‌که بیان کردیم، روش‌های رتبه‌بندی مختلفی برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری کارا در تحلیل پوششی داده‌ها وجود دارد. اما از آنجایی که هر یک از این روش‌ها نظریه خاصی را برای رتبه‌بندی در نظر می‌گیرند، ممکن است رتبه‌های متفاوتی را ارایه دهند. در عمل، انتخاب یک روش رتبه‌بندی، که تصمیم‌گیرنده بتواند به نتایج آن اعتماد کند، موضوع مهمی است لذا حسین زاده لطفی و همکارانش [۱۲]، برخی از DMUهای کارای CCR را در نظر گرفته و سپس با استفاده از روش‌های رتبه‌بندی که هر کدام مهم و قابل توجه هستند، آنها را رتبه‌بندی کردند. سپس با استفاده از روش TOPSIS رتبه DMUهای کارا را پیشنهاد دادند. روش پیشنهادی آنها امکان استفاده از نتایج تمامی روش‌های رتبه‌بندی موجود را فراهم می‌کند و بنابراین نتایج آن برای تصمیم‌گیرنده قابل اعتمادتر خواهد بود.

در روش TOPSIS، اوزان شاخص‌ها توسط تصمیم‌گیرنده تعیین می‌شود که یک امر سلیقه‌ای می‌باشد. دانشمندان علم TOPSIS-DEA سعی بر این داشتند که با علم DEA بدون استفاده از نظرات دیگران به محاسبه وزنهای شاخص‌ها بپردازند. در این علم با استفاده از مدل‌های مختلف DEA برای به دست آوردن این وزن‌ها،



[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-04 ]

[ DOI: 10.71773/jamlu-2025-2-2228 ]

مدل‌های مختلفی به دست آمده است. سید علی رخشان در مقاله خود [۱۳]، ابتدا با معرفی روش ترکیبی جدید در علم TOPSIS-DEA برای رتبه‌بندی واحدهای کارآمد پیشنهاد دادند که نه تنها مزایای روش‌های تحلیل پوششی داده‌ها و روش‌های تصمیم‌گیری چند معیاره را در بر می‌گیرد، بلکه مشکلاتی را که در روش‌های قبلی رتبه‌بندی ظاهر می‌شود را حل می‌کند. سپس خواص و مزایای روش پیشنهادی خود را مورد بحث و بررسی قرار دادند و با روش سوپر کارایی و چندین مدل رتبه‌بندی دیگر مقایسه کردند و در نهایت روش پیشنهادی خود با با یک مثال اعتبارسنجی کردند.

در فرایند سلسله مراتبی (AHP)، چگونگی به‌دست آوردن یک بردار اولویت از یک ماتریس مقایسه‌ای دوبدو، بسیار حائز اهمیت می‌باشد. به منظور ایجاد یک وزن فراگیر و در عین حال منطقی برای هر معیار یا گزینه تصمیم، سپهریان و همکارانش [۱۴]، یک رویکرد تحلیل مرز دوگانه را پیشنهاد کردند. این رویکرد از دو مدل خاص DEA استفاده می‌کند و وزن‌های یک ماتریس مقایسه دو به دو را نه تنها از دیدگاه خوشبینانه می‌سنجد، بلکه از دیدگاه بدبینانه نیز ارزیابی می‌کند، بنابراین این وزن‌های به دست آمده از این رویکرد تحلیل مرز دوگانه منطقی‌تر و منصفانه‌تر است.

کاظمی و همکارش در تحقیقی [۱۵] که در شرکت صنایع‌روشنایی تولید نور انجام داده‌اند، جهت انتخاب بهینه تامین‌کنندگان در زنجیره تامین ابتدا مهم‌ترین‌شاخص‌های انتخاب تامین‌کننده بر اساس مطالعات گذشته و مصاحبه با مدیران شرکت شناسایی کردند. سپس، با بهره گیری از پرسشنامه، مقایسه‌های زوجی‌شاخص‌ها و تشکیل ماتریس مقایسات زوجی گروهی با توجه به نظرات مدیران شرکت و بر اساس روش تحلیل سلسله مراتبی(AHP)، نرخ‌ناسازگاری مقایسه‌ها مورد ارزیابی قرار دادند. سپس، با رویکردی نوین، وزن‌های نسبی‌شاخص‌ها را در قالب مدل تحلیل پوششی داده‌ها(DEA)، محاسبه کردند و در نهایت، سه تأمین‌کننده شرکت بر اساس روش شباهت به راه‌حل ایده‌آل (TOPSIS) و با توجه به‌شاخص‌های‌تعیین شده، رتبه‌بندی نمودند.

در این مقاله، ما در روش TOPSIS، برای به دست آوردن وزن‌های شاخص‌ها، مدل جدیدی را ارایه دادیم. در مدل پیشنهادی ما، دو تا گزینه ایده‌آل مثبت و ایده‌آل منفی معرفی می‌شود و سپس به وسیله مدل ارایه شده در علم DEA یک سری وزن‌های مشترک طوری محاسبه می‌شود که فاصله نرم یک همه واحدهای کارا از ایده‌آل مثبت کمترین مقدار و همزمان فاصله نرم یک همه واحدهای کارا از ایده‌آل منفی بیشترین مقدار را داشته باشند. این وزنها، بهترین وزن‌هایی می‌باشد که می‌توان برای شاخص‌های روش TOPSIS معرفی کرد و سپس به کمک این وزن‌ها با روش TOPSIS می‌توان به رتبه‌بندی واحدهای کارا پرداخت. مقاله به شرح زیر سازماندهی‌شده است: در بخش ۲، ادبیات و چهارچوب نظری تحقیق را ارایه می‌کنیم که شامل معرفی چهار مدل که عبارت است از مدل مضربی، مدل رتبه‌بندی بال و همکارانش با گنجاندن ضریب تغییرات در مدل CCR، مدل رتبه‌بندی Liu و Peng با کمک وزن‌های مشترک و در آخر معرفی مدل TOPSIS می‌باشد. در بخش ۳، به معرفی روش پیشنهادی DEA-TOPSIS برای رتبه‌بندی واحدهای کارا می‌پردازیم که شامل تلفیق مدل DEA با وزن‌های مشترک و مدل TOPSIS می‌باشد و معرفی مدلی که بهترین وزن‌ها را به دست می‌آورد و در بخش آخر آن



[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-04 ]

[ DOI: 10.71773/jamlu-2025-2-2228 ]

چگونگی گنجاندن ضریب تغییرات در مدل پیشنهادی را معرفی می‌کنیم. در بخش ۴ مزیت‌های روش پیشنهادی را بیان می‌کنیم و با یک مثال آن را با چندین مدل رتبه‌بندی دیگر مقایسه می‌کنیم و سپس مثال تجربی را برای نشان دادن ویژگی‌های مدل پیشنهادی در بخش ۵ ارایه می‌کنیم. در نهایت، نتیجه‌گیری در بخش ۶ ارایه شده است.

## ۲ ادبیات و چهارچوب نظری تحقیق

### ۲-۱ مدل مضربی CCR

فرض می‌کنیم $n$ تا $DMU$ مورد ارزیابی قرار می‌گیرد که آنها را با اندیس $j\left(j=۱,\ldots,n\right)$ معرفی می‌کنیم. هر واحد تصمیم‌گیرنده برای تولید $s$ تا خروجی متفاوت از $m$ تا ورودی متفاوت استفاده می‌کند. ورودی‌ها و خروجی‌های واحد تصمیم‌گیرنده تحت ارزیابی $DMU_O$ را به ترتیب به صورت $X_O=\left(x_{۱o},x_{۲o},\ldots,x_{mo}\right)$ و $Y_O=\left(y_{۱o},y_{۲o},\ldots,y_{so}\right)$ نمایش می‌دهیم.

توجه داشته باشید که همه مولفه‌های بردارهای ورودی و خروجی برای همه واحد های تصمیم‌گیرنده نا منفی می‌باشند و همچنین در هر بردار خواه ورودی و خواه خروجی حداقل یک مؤلفه اکیداً مثبت می‌باشد.

برای ازیابی کارایی $DMU$ تحت ارزیابی $\left(DMU_O\right)$، روش مضربی $CCR$ به طور مقایسه‌ای یک مجموعه از وزن‌های ورودی‌ها و خروجی‌ها را با شرط بازده به مقیاس ثابت را به صورت زیر محاسبه می‌کند:

$$
\begin{aligned}
\theta_o^* = Max \quad & \sum_{r=۱}^{s} y_{ro}u_r \\
s.t \quad & \sum_{i=۱}^{m} x_{io}v_i = ۱, \\
& \sum_{r=۱}^{s} y_{rj}u_r - \sum_{i=۱}^{m} x_{ij}v_i \le ۰, \qquad j=۱,\ldots,n, \\
& v_i \ge \varepsilon > ۰, \qquad i=۱,\ldots,m, \\
& u_r \ge \varepsilon > ۰, \qquad r=۱,\ldots,s.
\end{aligned}
\tag{۱}
$$

که در مدل (۱)، $\varepsilon$ یک عدد ثابت ارشمیدسی مثبت بسیار کوچک می‌باشد که جلوی صفر شدن وزن‌ها را می‌گیرد و $DMU_O$ در مدل (۱) کارا است اگر و تنها اگر $\theta_o^*=۱$ شود.

مجموعه $E$ را به صورت $E=\left\{j\middle|\theta_j^*=۱, j=۱,\ldots,n\right\}$ تعریف می‌کنیم که مجموعه $DMU$های کارا را تشکیل می‌دهند. معمولاً مجموعه $E$ بیش از یک $DMU$ کارا دارد لذا موضوع تبعیض بین واحدهای کارا مورد توجه محققان این علم قرار گرفته است که بسیاری از این محققین روشهایی برای رتبه‌بندی واحدهای کارا ارایه داده‌اند.



[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-04 ]

[ DOI: 10.71773/jamlu-2025-2-2228 ]

## ۲-۲ رتبه‌بندی با استفاده از گنجاندن ضریب تغییرات (روش بال و همکاران)

ضریب تغییرات $(CV)$، نسبت انحراف استاندارد نمونه به میانگین نمونه، تغییرپذیری وزن ها را نسبت به میانگین آنها اندازه‌گیری می‌کند. بال و همکارانش [۸]، ضریب تغییرات ورودی و خروجی را به صورت زیر محاسبه کردند:

$$\bar{u}=\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}u_r,\qquad CV=\frac{\sqrt{\sum_{r=1}^{s}\left(u_r-\bar{u}\right)^2\Big/\left(s-1\right)}}{\bar{u}},$$

$$\bar{v}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}v_i,\qquad CV=\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(v_i-\bar{v}\right)^2\Big/\left(m-1\right)}}{\bar{v}}.$$

و سپس با گنجاندن ضریب تغییرات وزن ورودی–خروجی به مدل CCR مدل CVDEA زیر را پیشنهاد دادند:

$$\begin{aligned}\Theta_o^{*}=Max\quad & \sum_{r=1}^{s}y_{ro}u_r-\frac{\sqrt{\sum_{r=1}^{s}\left(u_r-\bar{u}\right)^2\Big/\left(s-1\right)}}{\bar{u}}-\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(v_i-\bar{v}\right)^2\Big/\left(m-1\right)}}{\bar{v}}\\ s.t\quad & \sum_{i=1}^{m}x_{io}v_i=1,\\ & \sum_{r=1}^{s}y_{rj}u_r-\sum_{i=1}^{m}x_{ij}v_i\le 0,\qquad j=1,\ldots,n,\\ & v_i\ge\varepsilon>0,\qquad i=1,\ldots,m,\\ & u_r\ge\varepsilon>0,\qquad r=1,\ldots,s.\end{aligned}\qquad (۲)$$

این مدل بهینه‌سازی غیرخطی، بر اساس مدل $CCR$، به راحتی با الگوریتم کوهن–توکر (Kuhn-Tucker) قابل حل است. امّا تعریف ضریب تغییرات در این مدل تفسیر اقتصادی یا مدیریتی ندارد، زیرا $DMU$ها دارای ورودی‌ها (خروجی‌های) متفاوتی هستند، بنابراین میانگین وزن بهینه ورودی‌ها (خروجی‌ها) منطقی نیست لذا تعدادی از دانشمندان این علم در صدد اصلاح مدل آنها برآمدند. جهانشاهلو و فیروزی [۹] مدل آنها را اصلاح کرده و دو مدل جدید برای رتبه‌بندی $DMU$های کارا بر اساس نرم یک و با استفاده از میانگین وزن‌های ورودی–خروجی معرفی کردند. آنها میانگین وزن بهینه ورودی‌ها (خروجی‌ها) را به صورت زیر تعریف کردند:

$$\bar{u}_r=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}u_{rj},\qquad CV=\frac{\sqrt{\sum_{r=1}^{s}\left(u_{rk}-\bar{u}\right)^2\Big/\left(s-1\right)}}{\bar{u}},$$

$$\bar{v}_i=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}v_{ij},\qquad CV=\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(v_{ik}-\bar{v}\right)^2\Big/\left(m-1\right)}}{\bar{v}}.$$

و به کمک تعاریف جدید مدل CVDEA را تغییر دادند.



[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-04 ]

[ DOI: 10.71773/jamlu-2025-2-2228 ]

### ۲-۳ رتبه‌بندی واحد های کارا به کمک وزن‌های مشترک (روش Liu و Peng )

لیو و پیگ به منظور حل مساله رتبه‌بندی، یک مجموعه از وزن‌های مشترک برای محاسبه بهترین اندازه کارایی برای یک گروه از $DMU$ های کارا پیشنهاد داده‌اند [۶]. مدل پیشنهادی آنها به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \Delta^* = Min \quad & \sum_{j\in E}\left(\Delta_j^I + \Delta_j^O\right) \\ s.t \quad & \frac{\sum_{r=1}^{s} y_{rj}u_r + \Delta_j^O}{\sum_{i=1}^{m} x_{io}v_i - \Delta_j^I} = 1, \qquad j \in E, \\ & \Delta_j^I, \Delta_j^O \geq 0, \qquad j \in E, \\ & v_i \geq \varepsilon > 0, \qquad i = 1,\ldots,m, \\ & u_r \geq \varepsilon > 0, \qquad r = 1,\ldots,s. \end{aligned} \tag{۳}$$

$v_i$ها وزن‌های مشترک متصل به شاخص ورودی $R$ برای همه $DMU$ های کارا و $u_r$ وزن های مشترک متصل به شاخص خروجی $r\left(r=1,\ldots,s\right)$ برای همه $DMU$ های کارا، $\Delta_j^I$ و $\Delta_j^O$ به ترتیب نشان‌دهنده شکاف مجازی ورودی و شکاف مجازی خروجی $DMU_j\ \left(j\in E\right)$ می‌باشند. هدف مدل (۳) به حداقل رساندن مجموع شکاف های مجازی تمام $DMUs$ کارا است.

از مجموعه وزن‌های مشترک بهینه $u_r^*\left(r=1,\ldots,s\right)$، $v_i^*\left(i=1,\ldots,m\right)$ که از مدل (۳) به دست آورده می‌شود برای محاسبه کارایی مطلق $\left(\theta_j^* = \frac{\sum_{r=1}^{s} y_{rj}u_r^*}{\sum_{i=1}^{m} x_{io}v_i^*}\right)$ هر واحد تصمیم‌گیرنده کارا $\left(DMU_j\ \left(j\in E\right)\right)$ استفاده می‌شود و هر $DMU$ ای که دارای مقدار کارایی مطلق بیشتری باشد مسلماً دارای رتبه بهتری خواهد بود. بنابراین، با این روش رتبه‌بندی همه $DMUs$ کارآمد تکمیل می‌شود.

### ۲-٤ روش TOPSIS

روش (TOPSIS) توسط هوانگ و یون [۱۶] ایجاد شد. این روش چند معیاره بر این مفهوم استوار است که جایگزین انتخاب شده باید کمترین فاصله اقلیدسی را از ایده‌آل مثبت و دورترین فاصله را از ایده‌آل منفی داشته باشد. ایده‌آل مثبت و منفی به این صورت تعریف می‌شوند که بهترین ارزش موجود از یک شاخص، نشان‌دهنده ایده‌آل مثبت آن بوده و بدترین ارزش موجود از آن مشخص کننده ایده‌آل منفی برای آن خواهد بود و همچنین شاخص‌ها جنبه مثبت و منفی دارند. شاخصی که جنبه مثبت دارد شاخص سود و شاخصی که جنبه منفی دارد شاخص هزینه است. فاصله یک گزینه از ایده‌آل ممکن است به صورت اقلیدسی یا به صورت قدرمطلق از فواصل خطی محاسبه گردد.

روش TOPSIS، ماتریس تصمیم گیری $D$ را ارزیابی می کند که دارای $n$ گزینه و $r+s$ شاخص است.



[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-04 ]

[ DOI: 10.71773/jamlu-2025-2-2228 ]

$$D=\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_N \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} X_1 & X_2 & \dots & X_m & Y_1 & Y_2 & \dots & Y_s \end{array} \\ \begin{bmatrix} x'_{11} & x'_{12} & \dots & x'_{1m} & y'_{11} & y'_{12} & \dots & y'_{1s} \\ x'_{21} & x'_{22} & \dots & x'_{2m} & y'_{21} & y'_{22} & \dots & y'_{2s} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x'_{j1} & x'_{j2} & \dots & x'_{jm} & y'_{j1} & y'_{j2} & \dots & y'_{js} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x'_{N1} & x'_{N2} & \dots & x'_{Nm} & y'_{N1} & y'_{N2} & \dots & y'_{Ns} \end{bmatrix} \end{array}$$

$x'_{ij}$ مقدار عددی از گزینه $j$ ام که $(j=1,\dots,N)$ و شاخص $i$ ام که $(i=1,\dots,m)$ است. $y'_{rj}$ مقدار عددی از گزینه $j$ ام که $(j=1,\dots,N)$ و شاخص $r$ ام که $(r=1,\dots,s)$ است.

بنابراین TOPSIS راه حلی ارایه می‌دهد که نه تنها از نظر فرضی بهترین راه حل را دارد، بلکه دورترین راه حل را نیز از بدترین فرضی دارد. روش اصلی TOPSIS برای انتخاب بهترین جایگزین از بین موارد موجود به شرح زیر است:

## قدم اول: نرمالیزه کردن ماتریس تصمیم گیری

این فرایند سعی می‌کند مقیاسهای موجود در ماتریس تصمیم را بدون مقیاس نماید. به این ترتیب که هر کدام از مقادیر بر اندازه بردار مربوط به همان شاخص تقسیم می‌شود. هر درایه $x_{ij},(i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,N)$ و $y_{rj},(r=1,\dots,s,\ j=1,\dots,N)$ از ماتریس تصمیم نرمالیزه شده $R$ از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$x_{ij}=\frac{x'_{ij}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N}\left(x'_{ij}\right)^2}},\quad i=1,\dots,m,\quad j=1,\dots,N.$$

$$y_{rj}=\frac{y'_{rj}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N}\left(y'_{rj}\right)^2}},\quad r=1,\dots,s,\quad j=1,\dots,N.$$

$$R=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} & y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1s} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} & y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2s} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{j1} & x_{j2} & \dots & x_{jm} & y_{j1} & y_{j2} & \dots & y_{js} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \dots & x_{Nm} & y_{N1} & y_{N2} & \dots & y_{Ns} \end{bmatrix}$$

## قدم دوم: وزن دادن به ماتریس تصمیم نرمالیزه‌شده

مجموعه ای از وزن ها $W=(V_1,V_2,\dots,V_m,U_1,U_2,\dots,U_s)$ که $\sum_{i=1}^{m}V_i+\sum_{r=1}^{s}U_r=1$ و توسط تصمیم‌گیرنده $(DMU)$ برای شاخص ها در نظر گرفته می‌شود و با ضرب کردن هر ستون با وزن مربوط به خودش، ماتریس تصمیم نرمالیزه شده وزن‌دار به دست می‌آید:

[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-04 ]

[ DOI: 10.71773/jamlu-2025-2-2228 ]

$$(V,U)=\begin{bmatrix} V_1x_{11} & V_2x_{12} & \dots & V_mx_{1m} & U_1y_{11} & U_2y_{12} & \dots & U_sy_{1s} \\ V_1x_{21} & V_2x_{22} & \dots & V_mx_{2m} & U_1y_{21} & U_2y_{22} & \dots & U_sy_{2s} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ V_1x_{j1} & V_2x_{j2} & \dots & V_mx_{jm} & U_1y_{j1} & U_2y_{j2} & \dots & U_sy_{js} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ V_1x_{N1} & V_2x_{N2} & \dots & V_mx_{Nm} & U_1y_{N1} & U_2y_{N2} & \dots & U_sy_{Ns} \end{bmatrix}$$

**قدم سوم: تعیین راه حل ایده‌آل مثبت و ایده‌آل منفی**

دو گزینه $A^+$ (گزینه ایده‌آل مثبت) و $A^-$ (گزینه ایده‌آل منفی) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A^+=\left\{\left(\min_{1\le j\le N}V_ix_{ij}\,\middle|\,i=1,...,m\right),\left(\max_{1\le j\le N}U_ry_{rj}\,\middle|\,r=1,...,s\right)\right\}=\left(\bar{X}_1,...,\bar{X}_m,\bar{Y}_1,...,\bar{Y}_s\right)=\left(\bar{X},\bar{Y}\right)$$

$$A^-=\left\{\left(\max_{1\le j\le N}V_ix_{ij}\,\middle|\,i=1,...,m\right),\left(\min_{1\le j\le N}U_ry_{rj}\,\middle|\,r=1,...,s\right)\right\}=\left(\tilde{X}_1,...,\tilde{X}_m,\tilde{Y}_1,...,\tilde{Y}_s\right)=\left(\tilde{X},\tilde{Y}\right)$$

دو گزینه ایجاد شده $A^+$ و $A^-$ به ترتیب برترین گزینه و کم اثرترین گزینه می‌باشند.

**قدم چهارم: محاسبه اندازه فاصله**

فاصله بین هر گزینه $(m+s)$ بعدی را می‌توان به روش اقلیدسی سنجید. فاصله گزینه $j$ ام از ایده‌آل مثبت با فرمول زیر به دست می‌آید:

$$d_j^+=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(V_ix_{ij}-\bar{X}_i\right)^2+\sum_{r=1}^{s}\left(U_ry_{rj}-\bar{Y}_r\right)^2},\qquad j=1,...,N.$$

و به طور متشابه فاصله گزینه $j$ ام از ایده‌آل منفی با فرمول زیر به دست می‌آید:

$$d_j^-=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(V_ix_{ij}-\tilde{X}_i\right)^2+\sum_{r=1}^{s}\left(U_ry_{rj}-\tilde{Y}_r\right)^2},\qquad j=1,...,N.$$

**قدم پنجم: محاسبه نزدیکی نسبی $A_j$ نسبت به $A^+$ به صورت زیر محاسبه می‌شود.**

$$C_j^*=\frac{d_j^-}{d_j^++d_j^-},\qquad j=1,...,N,\qquad 0\le C_j^*\le 1.$$

ملاحظه می‌شود که اگر $A_j=A^+$ آنگاه $C_j^*=1$ و اگر $A_j=A^-$ آنگاه $C_j^*=0$.

پس هر چقدر فاصله گزینه $A_j$ به ایده‌آل مثبت نزدیک‌تر باشد $C_j^*$ به واحد نزدیک‌تر و هر چقدر به ایده‌آل منفی نزدیکتر باشد $C_j^*$ به صفر نزدیک‌تر خواهد بود.

**قدم ششم: رتبه‌بندی گزینه‌ها**

بر اساس ترتیب نزولی $C_j^*$ می‌توان گزینه‌ها را رتبه‌بندی کرد.



[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-04 ]

[ DOI: 10.71773/jamlu-2025-2-2228 ]

## ۳ روش پیشنهادی DEA-TOPSIS برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا

همانطور که در مرحله ۲ روش TOPSIS، مشاهده نمودید وزنها توسط تصمیم‌گیرنده مشخص می‌شود و حتی ممکن است این وزن ها توسط تصمیم‌گیرنده نسبتاً خودسرانه و سلیقه‌ای تصمیم‌گیری شود، ما به دنبال روشی بودیم که مقدار وزن‌ها را خود مدل با منطق ریاضی مشخص کند و دستی و سلیقه ای نباشد. یکی از این روشها، برای محاسبه وزنها علم تحلیل پوششی داده ها است لذا سراغ روش‌های DEA-TOPSIS رفتیم. در بیشتر روش‌های موجود در DEA-TOPSIS برای محاسبه وزن‌ها از مدل‌های اصلی DEA مانند CCR و یا BCC استفاده می‌کنند.

یکی از مزایای مهم مدل‌های اصلی تحلیل پوششی داده‌ها این است که به $DMU$ها اجازه داده می‌شود تا آزادی کامل در انتخاب وزن‌هایشان داشته باشند که برای ارزیابی آنها برای دستیابی به حداکثر امتیاز کارایی مطلوب است. ما قصد داریم که در تعیین مقدار وزن‌ها برای همه واحدهای تصمیم‌گیرنده عدالت بیشتری برقرار کنیم. بنابراین برای محاسبه وزن‌ها سراغ روشهای محاسبه کارایی با وزن‌های مشترک رفتیم و قصد داریم مدلی ارایه دهیم که بهترین وزن‌ها را به طور مشترک برای همه واحدهای تصمیم‌گیرنده طوری محاسبه کند که در شرایط تاپسیس صدق کند. سپس بااین وزن‌ها، به کمک روش TOPSIS به رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا می‌پردازیم.

### ۳-۱ تلفیق مدل DEA با وزن‌های مشترک با TOPSIS

در این بخش روش پیشنهادی خود را توسط الگوریتمی برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم گیری کارا توضیح می‌دهیم. این روش بر اساس تلفیق دو روش DEA و TOPSIS است. به عبارت دیگر از یکی از مدل‌های DEA با مجموعه وزن‌های مشترک برای به دست آوردن وزن‌های مرحله دوم در DEA-TOPSIS استفاده می‌شود. روشی که ارایه می‌دهیم فقط برای رتبه‌بندی $DMU$های کارا استفاده می‌شود و $DMU$های ناکارا با استفاده از ارزش کارایی مدل های DEA رتبه‌بندی می‌شوند. روش DEA-TOPSIS پیشنهادی ما در شش مرحله به شرح زیر معرفی می‌شود:

#### مرحله اول: ایجاد ماتریس تصمیم گیری و نرمالیزه کردن آن

ورودی ها را به عنوان شاخص‌های منفی و خروجی‌ها را به عنوان شاخص‌های مثبت قرار می‌دهیم. این مرحله یک ماتریس بر اساس تمام اطلاعات موجود در ورودی‌ها و خروجی‌ها $DMU$ها (ماتریس تصمیم) را نشان می‌دهد. هر ردیف از این ماتریس یک $DMU$ و هر ستون ورودی یا خروجی را نشان می‌دهد. ماتریس تصمیم‌گیری D دارای n گزینه و $r+s$ شاخص است.

[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-04 ]

[ DOI: 10.71773/jamlu-2025-2-2228 ]

$$D=\begin{bmatrix} x'_{11} & x'_{12} & \dots & x'_{1m} & y'_{11} & y'_{12} & \dots & y'_{1s} \\ x'_{21} & x'_{22} & \dots & x'_{2m} & y'_{21} & y'_{22} & \dots & y'_{2s} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x'_{j1} & x'_{j2} & \dots & x'_{jm} & y'_{j1} & y'_{j2} & \dots & y'_{js} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x'_{N1} & x'_{N2} & \dots & x'_{Nm} & y'_{N1} & y'_{N2} & \dots & y'_{Ns} \end{bmatrix}$$

$\left(x'_{1j}, x'_{2j}, ..., x'_{mj}\right)$ بردار ورودی $DMU_j$ام و $\left(y'_{1j}, y'_{2j}, ..., y'_{sj}\right)$بردار خروجی $DMU_j$ام که $j=1,\dots,N$ می‌باشد، هستند.

برای نرمالیزه کردن، ابتدا داده‌های ورودی و خروجی را با نرمال‌سازی بدون مقیاس می‌کنیم. یعنی ورودی $i$ام و خروجی $r$ام تمام $DMU$ها را به ترتیب بر $R_i^-$ و $R_r^+$ که به صورت زیر تعریف شده است،تقسیم می‌کنیم:

$$R_i^- = \max_{1\le j\le N}\left\{x_{ij}\right\}, \quad i=1,\dots,m,$$

$$R_r^+ = \max_{1\le j\le N}\left\{y_{rj}\right\}, \quad r=1,\dots,s.$$

$$R=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} & y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1s} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} & y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2s} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{j1} & x_{j2} & \dots & x_{jm} & y_{j1} & y_{j2} & \dots & y_{js} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \dots & x_{Nm} & y_{N1} & y_{N2} & \dots & y_{Ns} \end{bmatrix}$$

ما در الگوریتم روش پیشنهادی، مرحله دوم و سوم الگوریتم TOPSIS را جابجا می‌کنیم. به عبارت دیگر، ابتدا مرحله سوم الگوریتم تاپسیس را اجرا می‌کنیم و بعد مرحله دوم را اجرا می‌کنیم. لازم به ذکر است در کلیت الگوریتم خللی وارد نمی‌شود.

## مرحله دوم: بهترین واحد تصمیم‌گیرنده و بدترین واحد تصمیم‌گیرنده

$DMU$ ایده‌آل مثبت (بهترین تصمیم گیرنده): یک $DMU$ مجازی است که می‌تواند از کمترین ورودی برای تولید بیشترین خروجی استفاده کند، یعنی اگر $DMU$ ایده‌آل مثبت را با $\overline{DMU}=\left(\bar{X},\bar{Y}\right)$ نمایش دهیم:

$$\bar{x}_i = \min\left\{x_{ij}\,\middle|\, j=,...,N\right\}, \qquad i=1,...,m,$$

$$\bar{y}_r = \max\left\{y_{rj}\,\middle|\, j=,...,N\right\}, \qquad r=1,...,s.$$

$DMU$ ایده‌آل منفی (بدترین تصمیم گیرنده): یک $DMU$ مجازی است که بیشترین ورودی فقط برای تولید کمترین خروجی مصرف می‌کند، یعنی اگر $DMU$ ایده‌آل منفی را با $D\tilde{M}U=\left(\tilde{X},\tilde{Y}\right)$ نمایش دهیم:

$$\tilde{x}_i = \max\left\{x_{ij}\,\middle|\, j=,...,N\right\}, \qquad i=1,...,m,$$

$$\tilde{y}_r = \min\left\{y_{rj}\,\middle|\, j=,...,N\right\}, \qquad r=1,...,s.$$



[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-04 ]

[ DOI: 10.71773/jamlu-2025-2-2228 ]

نکته: توجه داشته باشید که $DMU$ ایده‌آل مثبت ممکن است در فعالیت تولید عملی حداقل در سطح فنی فعلی وجود نداشته باشد، در حالی که مقداری $DMU$ ایده‌آل منفی ممکن است در فعالیت تولید عملی وجود داشته باشد زیرا از نظر تئوری اتلاف منابع در تولید همیشه یک امکان مجاز بوده است.

**مرحله سوّم: وزن دادن به ماتریس تصمیم نرمالیزه شده**

مجموعه ای از وزن ها $W=(v_1,v_2,...,v_m,u_1,u_2,...,u_s)$ که $\sum_{i=1}^{m}v_i+\sum_{r=1}^{s}u_r=1$ می‌باشد را با کمک مدل پیشنهادیمان با وزن های مشترک که در ادامه توضیح خواهیم داد، به دست می‌آوریم.

## ۳-۲ مدل پیشنهادی برای به دست آوردن بهترین وزن‌ها

در شکل ۱ محورهای عمودی و افقی به ترتیب خروجی مجازی (مجموع $s$ خروجی وزندار شده) و ورودی مجازی (مجموع m ورودی وزن‌دارشده) تنظیم شده اند. اگر یک مجموعه از وزن ها $u_r'(r=1,\ldots,s)$ و $v_i'(i=1,\ldots,m)$ به گونهای داده شده باشد که مختصات $DMU$ ایده‌آل مثبت، بهترین $DMU$ باشد، یعنی $\overline{DMU}=\left(\sum_{i=1}^{m}v_i'\bar{x}_i,\sum_{r=1}^{s}u_r'\bar{y}_r\right)$ بهترین $DMU$ است:

$$\sum_{i=1}^{m}v_i'\bar{x}_i\le\sum_{i=1}^{m}v_i'x_{ij},\ \sum_{r=1}^{s}u_r'\bar{y}_r\ge\sum_{r=1}^{s}u_r'y_{rj},\qquad j=1,\ldots,N.$$

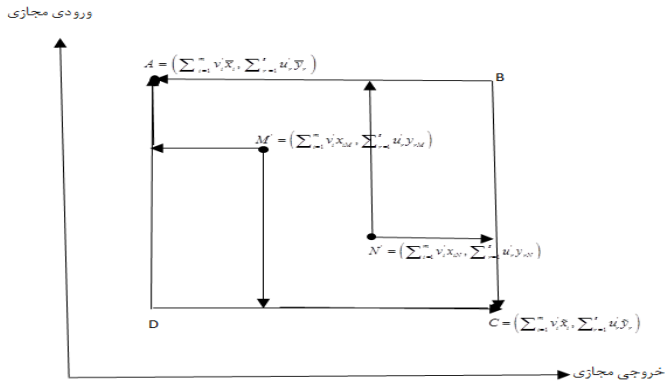
و مختصات $DMU$ ایده‌آل منفی بدترین $DMU$ شود، یعنی $\tilde{DMU}=\left(\sum_{i=1}^{m}v_i'\tilde{x}_i,\sum_{r=1}^{s}u_r'\tilde{y}_r\right)$ بدترین $DMU$ است:

$$\sum_{i=1}^{m}v_i'\tilde{x}_i\ge\sum_{i=1}^{m}v_i'x_{ij},\ \sum_{r=1}^{s}u_r'\tilde{y}_r\le\sum_{r=1}^{s}u_r'y_{rj},\qquad j=1,\ldots,N.$$

بنابراین، مختصات تمام $DMU$ها در یک مربع $ABCD$ در شکل ۱ قرار دارند. برای مثال، مختصات نقاط $M'$ و $N'$ در شکل ۱ عبارت است از:

$$M'=\left(\sum_{i=1}^{m}v_i'x_{iM},\sum_{r=1}^{s}u_r'y_{rM}\right),\qquad N'=\left(\sum_{i=1}^{m}v_i'x_{iN},\sum_{r=1}^{s}u_r'y_{rN}\right).$$

که در قیود بالا صدق می‌کنند.




**شکل ۱.** مقایسه واحدهای تصمیم گیرنده با نقاط ایده‌آل مثبت و منفی



[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-04 ]

[ DOI: 10.71773/jamlu-2025-2-2228 ]

**مرحله چهارم: محاسبه اندازه فاصله**

فاصله مجازی $M'$ تا $DMU$ ایده‌آل مثبت $\left(d_M^+\right)$ و تا $DMU$ ایده‌آل منفی $\left(d_M^-\right)$ با استفاده از نرم $L_1$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\left|U\bar{Y}-UY_M\right|+\left|V\bar{X}-VX_M\right|=d_M^+$$
$$\left|U\tilde{Y}-UY_M\right|+\left|V\tilde{X}-VX_M\right|=d_M^-$$

و همچنین فاصله مجازی $N'$ یا سایر $DMU$های کارا تا $DMU$ ایده‌آل مثبت $\left(d_N^+ \text{ or } d_j^+\left(j\in E\right)\right)$ و تا $DMU$ ایده‌آل منفی $\left(d_N^- \text{ or } d_j^-\left(j\in E\right)\right)$ هستند. به طور مشابه محاسبه می‌شود:

$$\left|U\bar{Y}-UY_j\right|+\left|V\bar{X}-VX_j\right|=d_j^+,\qquad j\in E$$
$$\left|U\tilde{Y}-UY_j\right|+\left|V\tilde{X}-VX_j\right|=d_j^-,\qquad j\in E$$

ما می‌خواهیم مجموعه ای بهینه از وزن های $U^*$ و $V^*$ را طوری تعیین کنیم که نقطه ایده‌آل مثبت بهترین نقطه و نقطه ایده‌آل منفی بدترین نقطه باشند و همه $DMU$ های کارا تا حد امکان به نقطه ایده‌آل مثبت نزدیک و از نقطه ایده‌آل منفی دور باشند. ،. به عبارت دیگر، مجموع فاصله های مجازی همه $DMU$های کارا تا نقطه ایده‌آل مثبت $\left(\sum_{j\in E}d_j^+\right)$ کوتاه ترین مقدار و مجموع فاصله های مجازی همه $DMU$های کارا تا نقطه ایده‌آل منفی $\left(\sum_{j\in E}d_j^-\right)$ طولانی ترین مقدار باشند. برای این منظور مدل زیر را پیشنهاد می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
Min\quad & \sum_{j\in E}\left(d_j^+-d_j^-\right)\\
s.t\quad & \frac{UY_j}{VX_j}\le 1, && j\in E,\\
& \left|U\bar{Y}-UY_j\right|+\left|V\bar{X}-VX_j\right|=d_j^+, && j\in E,\\
& \left|U\tilde{Y}-UY_j\right|+\left|V\tilde{X}-VX_j\right|=d_j^-, && j\in E,\\
& V\bar{X}\le VX_j, && j\in E,\\
& U\bar{Y}\ge UY_j, && j\in E,\\
& U\tilde{Y}\ge UY_j, && j\in E,\\
& V\tilde{X}\le VX_j, && j\in E,\\
& \sum_{i=1}^{m}v_i+\sum_{r=1}^{s}u_r=1,\\
& U\ge\varepsilon, U\ge\varepsilon.
\end{aligned}\qquad (۴)$$

واضح است که مدل (۴) غیرخطی است، اما می‌توان این مدل را به راحتی به یک مدل خطی تبدیل کرد، زیرا $U\bar{Y}\ge UY_j,\left(j\in E\right)$ و $V\bar{X}\le VX_j,\left(j\in E\right)$ ، بنابراین داریم:

$$d_j^+=\left|U\bar{Y}-UY_j\right|+\left|V\bar{X}-VX_j\right|=U\bar{Y}-UY_j+VX_j-V\bar{X},\qquad j\in E.$$

و همچنین، $U\tilde{Y}\le UY_j,\left(j\in E\right)$ و $V\tilde{X}\ge VX_j,\left(j\in E\right)$ ، لذا داریم:



[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-04 ]

[ DOI: 10.71773/jamlu-2025-2-2228 ]

$$d_j^- = \left|U\tilde{Y} - UY_j\right| + \left|V\tilde{X} - VX_j\right| = UY_j - U\tilde{Y} + V\tilde{X} - VX_j, \qquad j \in E.$$

پس خطی شده مدل (۵) به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} Min \quad & \sum_{j\in E}\left(d_j^+ - d_j^-\right) \\ s.t \quad & UY_j - VX_j \le 0, && j \in E, \\ & U\bar{Y} - UY_j + VX_j - V\bar{X} = d_j^+, && j \in E, \\ & UY_j - U\tilde{Y} + V\tilde{X} - VX_j = d_j^-, && j \in E, \qquad (۵) \\ & \sum_{i=1}^{m} v_i + \sum_{r=1}^{s} u_r = 1, \\ & d_j^+ \ge 0, d_j^- \ge 0, && j \in E, \\ & U \ge \varepsilon, U \ge \varepsilon. \end{aligned}$$

## ۳-۳ گنجاندن ضریب تغییرات در مدل پیشنهادی

همانطور که در مقدمه و بخش۲-۲ توضیح داده شد در DEA ما گاهی اوقات با مقادیر شدید یا صفر در وزن‌های ورودی و/یا خروجی برای $DMU$های بررسی‌شده مواجه می‌شویم، بال و همکارانش [۸] برای جلوگیری از این مشکل ضریب تغییرات را در مدل CCR گنجاندند، اما مشکلی که در مدل آنها وجود داشت تفاوت ورودی‌ها و خروجی‌ها نسبت به یکدیگر بود لذا میانگینی که آنها تعریف کردند تفسیر اقتصادی نداشت. به سبب اینکه در مدل پیشنهادی، ابتدا همه ورودی‌ها و خروجی‌ها نرمالیزه می‌شوند لذا همه ورودی‌ها و خروجی‌ها دارای ارزش یکسانی هستند پس می‌توان از میانگین مدل آنها در مدل پیشنهادی استفاده کنیم و با توجه به اینکه وزن‌های ورودی‌ها و خروجی‌های مدل در شرط $\sum_{i=1}^{m} v_i + \sum_{r=1}^{s} u_r = 1$ صدق می‌کنند، لذا می‌توان میانگین وزن‌های بهینه ورودی‌ها و خروجی‌ها را به طور یکسان به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\bar{U} = \bar{V} = \frac{1}{m+s}$$

برای جلوگیری از پراکندگی ضرایب مدل، قصد داریم فاصله وزن‌هایی که از مدل پیشنهادی به دست می‌آید از وزن‌های میانگین کم کنیم. به عبارت دیگر قصد داریم فاصله های زیر را به حداقل مقدار ممکن برسانیم:

$$\left|u_r - \bar{U}\right| \le \varepsilon, \quad (r = 1,...,s), \left|v_i - \bar{V}\right| \le \varepsilon, \quad (i = 1,...,m).$$

البته باید این حداقل فاصله را طوری در نظر بگیریم که انعطاف وزن‌ها برای صدق کردن در شرایط مدل از بین نرود؛ لذا ما در این مقاله $\varepsilon = \frac{1}{4(m+s)}$ در نظر می‌گیریم و به جای قیود آخر مدل (۴)، $U \ge \varepsilon, U \ge \varepsilon$، قیود زیر را جایگزین می‌کنیم:

$$\bar{U} - \varepsilon \le U \le \bar{U} + \varepsilon, \qquad \bar{V} - \varepsilon \le V \le \bar{V} + \varepsilon,$$

**قدم پنجم: شاخص عملکرد کلی برای هر $DMU$ کارآمد توسط رابطه زیر محاسبه می‌شود**

$$P_j^* = \frac{d_j^-}{d_j^+ + d_j^-}, \qquad j \in E, \qquad 0 \le P_j^* \le 1.$$



[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-04 ]

[ DOI: 10.71773/jamlu-2025-2-2228 ]

ملاحظه می‌شود که $P_j^*$ برای نقطه ایده‌آل مثبت برابر با یک و برای نقطه ایده‌آل منفی برابر با صفر می‌شود. پس هر چقدر فاصله هر واحد تصمیم‌گیرنده کارا به ایده‌آل مثبت نزدیک‌تر باشد $P_j^*$ به واحد نزدیک‌تر و هر چقدر به ایده‌آل منفی نزدیک‌تر باشد $P_j^*$ به صفر نزدیک‌تر خواهد بود.

**قدم ششم: رتبه‌بندی گزینه ها**

بر اساس ترتیب نزولی $P_j^*$ می‌توان گزینه ها را رتبه‌بندی کرد یعنی هر چه مقدار شاخص $P_j^*$ بزرگ‌تر باشد، عملکرد $DMU$ بهتر است.

## ٤ مزیت‌های روش پیشنهادی

برخی از مزایای روش پیشنهادی ما در DEA-TOPSIS عبارتند از:

- بر اساس روش رتبه‌بندی پیشنهادشده، تنها $DMU$های کارا را رتبه‌بندی می‌شوند و $DMU$های ناکارا با توجه به مقدار کارایی آنها که توسط مدل‌های DEA محاسبه می‌شود رتبه‌بندی خواهند شد. بنابراین در این مورد، روش رتبه‌بندی پیشنهادی با مدل های پایه سازگار است یعنی رتبه $DMU$های کارآمد بالاتر از رتبه واحدهای ناکارآمد است.
- مزیت دیگر روش پیشنهادشده در تعیین مقدار وزن‌ها است. همان‌طور که در مرحله ۲ روش TOPSIS، مشاهده نمودید وزن‌ها توسط تصمیم‌گیرنده مشخص می‌شود و حتی ممکن است این وزن ها نسبتاً سلیقه‌ای و غیرمنطقی تصمیم‌گیری شود، در روش پیشنهادی، وزن‌ها توسط مدل با یک منطق ریاضی قوی به کمک علم تحلیل پوششی داده‌ها محاسبه شده است.
- برتری روش ارایه‌شده در بین روش‌های دیگر DEA-TOPSIS در این می‌باشد که هدف ما در تعیین مقدار وزنها برای همه واحدهای تصمیم‌گیرنده برقراری عدالت بیشتر است. بنابراین برای محاسبه وزن‌ها سراغ روش‌های محاسبه کارایی با وزن‌های مشترک رفتیم و مدلی ارایه دادیم که بهترین وزن‌ها را به طور مشترک برای همه واحدهای تصمیم‌گیرنده طوری محاسبه می‌کند که همه واحدهای تصمیم‌گیرنده همزمان تا حد امکان به نقطه ایده‌آل مثبت نزدیک و از نقطه ایده‌آل منفی دور باشند.
- با توجه به گنجاندن ضریب تغییرات در شروط مدل پیشنهادی، این مدل از پراکندگی نامتعارف وزن‌ها جلوگیری می‌کند و رتبه‌بندی بهتری را برای واحدها ارایه می‌دهد.
- در رتبه‌بندی $DMU$ها روش های مختلفی وجود دارد که همگی مزایا و معایبی دارند. یکی از معایبی که بعضی از این روش‌ها دارند نشدنی بودن مدل ارایه شده است. روش پیشنهادی همواره شدنی است.

با مثال زیر، مدل خودمان را با چند مدل رتبه‌بندی دیگر مقایسه می‌کنیم.

### ٤-١ مقایسه مدل پیشنهادی با چند مدل رتبه‌بندی دیگر

داده‌های این مثال را از مقاله Sexton و همکارانش گرفته شده است [۱۷]. این مثال دارای شش $DMU$ است که هر کدام از آنها از دو ورودی برای تولید دو خروجی استفاده می‌کنند. داده ها و کارایی CCR آنها در جدول ۱



[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-04 ]

[ DOI: 10.71773/jamlu-2025-2-2228 ]

نشان داده شده است. طبق جدول ۱، واحدهای تصمیم‌گیرنده A، B، C و D کارای CCR و واحدهای تصمیم‌گیرنده E و F ناکارا می‌باشند. با توجه به اندازه کارایی ستون آخر جدول ۱ واضح است که رتبه واحدهای E و F به ترتیب ۴ و ۵ می‌باشد.

برای رتبه‌بندی واحدهای کارا A، B، C و D، ابتدا، داده‌های ورودی و خروجی را نرمالیزه می‌کنیم، سپس $DMU$ ایده‌آل مثبت $\left(\overline{DMU}\right)$ و $DMU$ ایده‌آل منفی $\left(\tilde{DMU}\right)$ را تعیین می‌کنیم. به منظور رتبه‌بندی چهار $DMU$ توسط مدل پیشنهادی، مدل (۵) را حل می‌کنیم. نتایج این مدل و رتبه‌بندی $DMU$ها در دو ستون آخر جدول ۲ نمایش داده شده است.

**جدول ۱.** ورودی‌ها و خروجی‌های مثال

| $DMU$ | $x_1$ | $x_2$ | $y_1$ | $y_2$ | $\theta^*_{CCR}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| A | ۱۵۰ | ۰/۲ | ۱۴۰۰۰ | ۳۵۰۰ | ۱ |
| B | ۴۰۰ | ۰/۷ | ۱۴۰۰۰ | ۲۱۰۰۰ | ۱ |
| C | ۳۲۰ | ۱/۲ | ۴۲۰۰۰ | ۱۰۵۰۰ | ۱ |
| D | ۵۲۰ | ۲/۰ | ۲۸۰۰۰ | ۴۲۰۰۰ | ۱ |
| E | ۳۵۰ | ۱/۲ | ۱۹۰۰۰ | ۲۵۰۰۰ | ۰/۹۷۸ |
| F | ۳۲۰ | ۰/۷ | ۱۴۰۰۰ | ۱۵۰۰۰ | ۰/۸۶۸ |

**جدول ۲.** نتایج مدل (۴)

| $DMU$ | $x_1$ | $x_2$ | $y_1$ | $y_2$ | $P_j^* = \frac{d_j^-}{d_j^+ + d_j^-}$ | رتبه بندی |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | ۰/۲۸۸۵ | ۰/۱ | ۰/۳۳۳۳ | ۰/۰۸۳۳ | ۰/۶۲۹۱ | ۱ |
| B | ۰/۷۶۹۲ | ۰/۳۵ | ۰/۳۳۳۳ | ۰/۵ | ۰/۳۹۱۳ | ۳ |
| C | ۰/۶۱۵۴ | ۰/۶ | ۱/۰ | ۰/۲۵ | ۰/۵۰۱۵ | ۲ |
| D | ۱/۰ | ۱/۰ | ۰/۶۶۶۷ | ۰/۵۹۵۲ | ۰/۲۹۲۸ | ۴ |
| $\overline{DMU}$ | ۰/۲۸۸۵ | ۰/۱ | ۱/۰ | ۱/۰ | – | – |
| $\tilde{DMU}$ | ۱/۰ | ۱/۰ | ۰/۳۳۳۳ | ۰/۰۸۳۳ | – | – |

حال نتایج رتبه‌بندی خود را با نتایج رتبه‌بندی چند مدل رتبه‌بندی معرف مانند مدل سوپرکارایی (AP) [۳]، مدل SBM [۱۸] و Cross Efficiency [۱۹]، روش TOPSIS [۱۶] و روش TOPSIS-DEA [۱۳] مقایسه می‌کنیم و نتایج این مقایسه را در جدول زیر می‌آوریم:



[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-04 ]

[ DOI: 10.71773/jamlu-2025-2-2228 ]

**جدول ۳.** مقایسه نتایج مدل پیشنهادی ما با نتایج چهار مدل معروف رتبه بندی

| *DMU* | مدل سوپرکارایی | SBM | Cross Efficiency | روش TOPSIS | روش TOPSIS-DEA | مدل پیشنهادی ما |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | ۱ | ۱ | ۱ | ۱ | ۲ | ۱ |
| B | ۲ | ۳ | ۳ | ۳ | ۴ | ۳ |
| C | ۳ | ۲ | ۲ | ۲ | ۱ | ۲ |
| D | ۴ | ۴ | ۴ | ۴ | ۳ | ۴ |

نتایج به دست آمده از مدل پیشنهادی ما کاملاً شبیه مدل‌های معتبر SBM، Cross Efficiency، روش TOPSIS است و این نشان‌دهنده این می‌باشد که نتایج مدل ما دارای اعتبار است و وزن‌هایی که مدل ما برای روش TOPSIS ارایه داده است، وزن‌های منطقی است.

با مقایسه مدل ما با روش TOPSIS، به این نتیجه می‌رسیم که وزن‌های ارایه‌شده در مدل ما، بسیار نزدیک به وزن‌هایی است که تصمیم‌گیرنده برای روش TOPSIS ارایه می‌دهد، درحالی که برتری مدل ما در این است که وزنها را خود مدل به دست می‌آورد و توسط تصمیم‌گیرنده انتخاب‌نشده و سلیقه‌ای نیست. در ضمن برای تصمیم‌گیرنده، تعیین وزن‌ها برای چهار واحد با توجه به شاخص‌ها کار سختی نیست ولی وقتی تعداد واحدهای تصمیم‌گیرنده زیاد می‌شود، تعیین وزن‌های منطقی و غیرسلیقه‌ای برای تصمیم‌گیرنده بسیار سخت و دشوار خواهد بود و این یکی از امتیازهای مدل پیشنهادی می‌باشد.

## ۵ مثال تجربی

در این بخش، قصد داریم ۲۰ شعبه بانک ایران را با روش پیشنهادی خود رتبه‌بندی کنیم. داده‌ها را می‌توان در [۲] و [۲۰] مشاهده کرد (جدول ۴ را ببینید). توجه داشته باشید که داده‌ها مقیاس‌بندی شده‌اند. همان‌طور که در ستون آخر جدول ۴ مشاهده می‌شود، *DMU*های ۱، ۴، ۷، ۱۲، ۱۵، ۱۷ و ۲۰ کارای CCR هستند.

**جدول ٤.** ورودی‌ها و خروجی‌های مثال تجربی

| شعبه | ورودی‌ها | | | خروجی‌ها | | | کارای CCR |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | تعداد کارکنان | ترمینال‌های کامپیوتری | فضا (مترمربع) | سپرده‌ها | وام‌ها | سهام | |
| ۱ | ۰/۹۵۰ | ۰/۷۰۰ | ۰/۱۵۵ | ۰/۱۹۰ | ۰/۵۲۱ | ۰/۲۹۳ | ۱/۰۰۰ |
| ۲ | ۰/۷۹۶ | ۰/۶۰۰ | ۱/۰۰۰ | ۰/۲۲۷ | ۰/۶۲۷ | ۰/۴۶۲ | ۰/۸۳۳ |
| ۳ | ۰/۷۹۸ | ۰/۷۵۰ | ۰/۵۱۳ | ۰/۲۲۸ | ۰/۹۷۰ | ۰/۲۶۱ | ۰/۹۹۱ |
| ۴ | ۰/۸۶۵ | ۰/۵۵۰ | ۰/۲۱۰ | ۰/۱۹۳ | ۰/۶۳۲ | ۱/۰۰۰ | ۱/۰۰۰ |
| ۵ | ۰/۸۱۵ | ۰/۸۵۰ | ۰/۲۶۸ | ۰/۲۳۳ | ۰/۷۲۲ | ۰/۲۴۶ | ۰/۸۹۹ |
| ۶ | ۰/۸۴۷ | ۰/۶۵۰ | ۰/۵۰۰ | ۰/۲۰۷ | ۰/۶۰۳ | ۰/۵۶۹ | ۰/۷۴۸ |
| ۷ | ۰/۷۱۹ | ۰/۶۰۰ | ۰/۳۵۰ | ۰/۱۸۲ | ۰/۹۰۰ | ۰/۷۱۶ | ۱/۰۰۰ |
| ۸ | ۰/۷۸۵ | ۰/۷۵۰ | ۰/۱۲۰ | ۰/۱۲۵ | ۰/۲۳۴ | ۰/۲۹۸ | ۰/۷۹۸ |
| ۹ | ۰/۴۷۶ | ۰/۶۰۰ | ۰/۱۳۵ | ۰/۰۸۰ | ۰/۳۶۴ | ۰/۲۴۴ | ۰/۷۸۹ |
| ۱۰ | ۰/۶۷۸ | ۰/۵۵۰ | ۰/۵۱۰ | ۰/۰۸۲ | ۰/۱۸۴ | ۰/۰۴۹ | ۰/۲۸۹ |
| ۱۱ | ۰/۷۱۱ | ۱/۰۰۰ | ۰/۳۰۵ | ۰/۲۱۲ | ۰/۳۱۸ | ۰/۴۰۳ | ۰/۶۰۴ |



[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-04 ]

[ DOI: 10.71773/jamlu-2025-2-2228 ]

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱/۰۰۰ | ۰/۶۲۸ | ۰/۹۲۳ | ۰/۱۲۳ | ۰/۲۵۵ | ۰/۶۵۰ | ۰/۸۱۱ | ۱۲ |
| ۰/۸۱۷ | ۰/۲۶۱ | ۰/۶۴۵ | ۰/۱۷۶ | ۰/۳۴۰ | ۰/۸۵۰ | ۰/۶۵۹ | ۱۳ |
| ۰/۴۷۰ | ۰/۲۴۳ | ۰/۵۱۴ | ۰/۱۴۴ | ۰/۵۴۰ | ۰/۸۰۰ | ۰/۹۷۶ | ۱۴ |
| ۱/۰۰۰ | ۰/۰۹۸ | ۰/۲۶۲ | ۱/۰۰۰ | ۰/۴۵۰ | ۰/۹۵۰ | ۰/۶۸۵ | ۱۵ |
| ۰/۶۳۹ | ۰/۴۶۴ | ۰/۴۰۲ | ۰/۱۱۵ | ۰/۵۲۵ | ۰/۹۰۰ | ۰/۶۱۳ | ۱۶ |
| ۱/۰۰۰ | ۰/۱۶۱ | ۱/۰۰۰ | ۰/۰۹۰ | ۰/۲۰۵ | ۰/۶۰۰ | ۱/۰۰۰ | ۱۷ |
| ۰/۴۷۳ | ۰/۰۶۸ | ۰/۳۴۹ | ۰/۰۵۹ | ۰/۲۳۵ | ۰/۶۵۰ | ۰/۶۳۴ | ۱۸ |
| ۰/۴۰۸ | ۰/۱۱۱ | ۰/۱۹۰ | ۰/۰۳۹ | ۰/۲۳۸ | ۰/۷۰۰ | ۰/۳۷۲ | ۱۹ |
| ۱/۰۰۰ | ۰/۷۶۴ | ۰/۶۱۵ | ۰/۱۱۰ | ۰/۵۰۰ | ۰/۵۵۰ | ۰/۵۸۳ | ۲۰ |
| – | ۱/۰۰۰ | ۱/۰۰۰ | ۱/۰۰۰ | ۰/۱۵۵ | ۰/۵۵۰ | ۰/۵۸۳ | $\overline{DMU}$ |
| – | ۰/۰۹۸ | ۰/۲۶۲ | ۰/۰۹۰ | ۱/۰۰۰ | ۱/۰۰۰ | ۱/۰۰۰ | $\tilde{DMU}$ |

نتایج حاصل از اجرای مدل ارایه شده در این مقاله و رتبه‌بندی شعب بانک‌های کارا در جدول ۵ نمایش داده است. ضمنا نتایج رتبه‌بندی مدل DEA-TOPSIS [۱۶] را جهت مقایسه کردن نتایج در ستون آخر جدول ۵ آورده شده است. با توجه به نتایج رتبه‌بندی مدل پیشنهادی ما و مدل DEA-TOPSIS [۱۶]، متوجه می‌شویم که بانک شعبه ۱۵ در مدل DEA-TOPSIS [۱۶]، دارای رتبه اول و در مدل ما دارای رتبه آخر بین ۷ واحد کارا می‌باشد و شعبه ۴ دارای رتبه اول است. اگر داده های ورودی و خروجی شعب ۱۵ و ۴ را مورد مقایسه قرار دهیم، می‌بینیم که ورودیهای دوم و سوم شعبه ۴، تقریبا نصف ورودی‌های شعبه ۱۵ می‌باشد. درضمن خروجی دوم شعبه چهارم، ۲.۵ برابر و خروجی سوش ۱۰ برابر خروجی سوم شعبه پانزده است. پس در کل، عملکرد شعبه چهار بهتر از شعبه پانزده می‌باشد. به راحتی می‌توان مابقی نتایج دو مدل را با یکدیگر مقایسه کرد و ببینیم که نتایج مدل ما به واقعیت نزدیک‌تر می‌باشد.

**جدول ۵.** نتایج مدل پیشنهادی و مدل DEA-TOPSIS

| شعب کارا | $P_j^* = \frac{d_j^-}{d_j^+ + d_j^-}$ | رتبه‌بندی با روش پیشنهادی | رتبه‌بندی روش TOPSIS |
|---|---|---|---|
| ۱ | ۰/۴۷۷۲ | ۶ | ۷ |
| ۴ | ۰/۶۸۰۴ | ۱ | ۲ |
| ۷ | ۰/۶۷۵۳ | ۲ | ۳ |
| ۱۲ | ۰/۶۵۱۳ | ۳ | ۵ |
| ۱۵ | ۰/۴۰۲۱ | ۷ | ۱ |
| ۱۷ | ۰/۵۷۷۲ | ۵ | ۶ |
| ۲۰ | ۰/۵۸۶۴ | ۴ | ۴ |



[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-04 ]

[ DOI: 10.71773/jamlu-2025-2-2228 ]

## ٦ نتیجه‌گیری

هدف ما در این مطالعه به دست آوردن روشی برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده با وزن‌های مشترک بود. برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم گیرنده، ابتدا داده‌های ورودی و خروجی را با نرمال‌سازی مقیاس‌بندی کردیم، پس از تعیین نقطه ایده‌آل مثبت و ایده‌آل منفی، مجموعه‌ای بهینه از وزن‌های مشترک را به گونه‌ای محاسبه کردیم که فاصله مجازی کل واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا تا نقطه ایده‌آل مثبت کمترین مقدار ممکن و همچنین فاصله مجازی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا تا نقطه ایده‌آل منفی طولانی ترین مقدار باشد. درضمن برای جلوگیری از مقادیر شدید یا صفر در وزن های ورودی و/یا خروجی ضریب تغییرات را در مدل پیشنهادی خود گنجاندیم، سپس از شاخص رتبه‌بندی TOPSISبرای رتبه‌بندی واحدهای کارا تحت بررسی استفاده کردیم. این مدل ارایه شده دارای پنج ویژگی مثبت می‌باشد که در مقاله ذکر کردیم و این مدل را با چندین مدل معروف رتبه‌بندی مقایسه کردیم و سپس از این مدل برای رتبه‌بندی ۲۰ شعبه بانک ایرانی استفاده کردیم.

## منابع


[1] Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units, European Journal of Operational Research 2, 429-444.

[2] Banker, R. D., Charnes, A., Cooper, W.W. (1984). Some Methods for Estimating Technical and Scale Inefficiency in Data Envelopment Analysis, Management Science Vol.30, No.9, pp.1078-1092.

[3] Andersen, P., Petersen, N.C. (1993). A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis, Management Science 39, 1261-1264.

[4] Zhang, D., Qi, L., Li, X., Liu, W.B. (2007). DEA Analysis Based on both Efficient and Anti-efficient Frontiers. Kent Business School, university of Kent. October 2007 .Working Paper No.144.

[5] Jahanshahloo, G.R., Junior, H.V., Lotfi, F.H., Akbarian, D. (2007). A new DEA ranking system based on changing the reference set, European Journal of Operational Research 181(1) 331-337.

[6] Liu, F. H. F., Hsuan Peng, H. H. (2008). Ranking of DMUs on the DEA frontier with common weights.Computers and Operations Research, 35(5),1624-37.

[7] Amirtimori, A., Pariad, R. (2024), A method based on joint weights to determine the best decision unit in data envelopment analysis, Journal of operations research in its applications, 20th year, Volume 20, number 2, (series 77), winter 02, 137-167, Shapa 2251-7286. (In Persian)

[8] Bal, H., Orkcu, H. H., Celebioglu, S. (2008). A new method based on the dispersion of weights in data envelopment analysis. Computers & Industrial Engineering 54, 502–512.

[9] Jahanshahloo, G.R., Firoozi Shahmirzadi, P. (2013). New methods for ranking decision making units based on the dispersion of weights and Norm 1 in Data Envelopment Analysis. Computers & Industrial Engineering 65, 187–193.

[10] Barzegarinegad, A., Jahanshahloo, G., Rostamy-Malkhalifeh, M. (2014). A Full Ranking for Decision Making Units Using Ideal and Anti-Ideal Points in DEA. The Scientific World Journal, Volume 2014, Article ID 282939, 8 pages. http://dx.doi.org/10.1155/2014/282939.

[11] Bani Hashemi, S. A., Khalilzadeh, M., Shahraki, A., Rostami Mal Khalifa, M. (2024). Ranking of efficient and inefficient decision-making units with unfavorable data based on the combined DEA and TOPSIS model, Journal of operations research in its applications, 20th year, Volume 20, number 1, (series 76), spring 02, pp. 33-48, Shapa 2251-7286. (In Persian)

[12] Hosseinzadeh Lotfi, F., Fallahnejad, R., and Navidi, N. (2011). Ranking Efficient Units in DEA by Using TOPSIS Method. Applied Mathematical Sciences, 5 (17), 805 – 815.

[13] Rakhshan. S. A. (2017). Efficiency ranking of decision making units in data envelopment analysis by using TOPSIS-DEA method. Journal of the Operational Research Society (2017). Doi: 10.1057/s41274-017-0237-0.

[14] Sepehrian, Z., Khosh Tiynat, S., Ebadi, S. (2024). Determining the weights in the process of hierarchical analysis using the double border analysis approach, Journal of operations research in its applications, 19th year, Volume 19, number 2, (series 73), summer 01, 93-111, Shapa 2251-7286. (In Persian)




[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-04 ]

[ DOI: 10.71773/jamlu-2025-2-2228 ]

[15] Kazemi, M. Alizadeh, A. Zovarem. (2024). Optimum selection of suppliers based on AHP-DEA-TOPSIS hybrid approach, Journal of operations research in its applications, 10th year, Volume 10, number 4, (series 39), winter 92, pp. 37-53, Shapa 2251-7286. (In Persian)
[16] Hwang, C.L., and Lin, M.J. (2012). Group Decision Making Under Multiple Criteria: Methods and Applications (Vol. 281). Springer Science & Business Media.
Hwang, C.L., and Yoon, K. (2012). Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications a State-of-the-Art Survey (Vol. 186). Springer Science & Business Media.
[17] Sexton, T.R, Silkman, R.H, Hogan, A.J. (1986). Data envelopment analysis: Critique and extensions. In: Silkman, R.H. (Ed.), Measuring Efficiency: An Assessment of Data Envelopment Analysis. Jossey-Bass, San Francisco, CA, 73-105.
[18] Tone, K., (2002), A slacks-based measure of super-efficiency in data envelopment analysis, European Journal of Operational Research. 143, 32–41.
[19] Despotis, K., Smirlis, Y.G. (2002). Data envelopment analysis with imprescis data, European Journal of Operational Research 140, 24-36.
[20] Cooper, W.W., Park, K.S., Yu, G. (1999). IDEA and AR-IDEA: models for dealing with imprecise data in DEA, Management Science 45, 597-607.

[ Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-04 ]

[ DOI: 10.71773/jamlu-2025-2-2228 ]