مجله ریاضیات کاربردی واحد لاهیجان، سال هشتم، شماره ۲ (پیاپی ۲۹)، تابستان ۹۰، ص ص ۱۰-۱
شاپا ۶۰۸۳-۲۰۰۸

تعیین شعاع پایداری یک واحد تصمیم گیرنده در بازده به مقیاس راست و چپ

رضا شاهوردی*، فرزاد رضایی بالف، علی ابراهیم‌نژاد، صغرا نصیری
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد قائمشهر، گروه ریاضی، قائمشهر، ایران

رسید مقاله: ۸۹/۸/۳
پذیرش مقاله: ۹۰/۳/۲۱

چکیده

این مقاله شعاع پایداری یک واحد تصمیم گیرنده را، که بازده به مقیاس راست و چپ آن داده شده است، محاسبه می‌کند به طوری که ویژگی بازده به مقیاس آن در طبقه بندی بازده به مقیاس باقی بماند. با توجه به ابر صفحه‌های تعریف کننده بازده به مقیاس راست و چپ و طبقه بندی DMU، مدل هایی برای اندازه گیری شعاع پایداری پیشنهاد می‌شود.

کلمات کلیدی: شعاع پایداری، بازده به مقیاس، تحلیل پوششی داده ها.

۱ مقدمه

تحلیل پوششی داده ها (DEA) یک تکنیک غیر پارامتری برای اندازه گیری کارایی نسبی یک مجموعه از واحدهای تصمیم گیرنده با ورودی ها و خروجی‌های مشترک است که اولین بار توسط چارنز، کوپر و رودز به عنوان مدل CCR ارایه شد[۵]. بازده به مقیاس معیاری برای شناخت تاثیر تغییرات ورودی‌ها بر تغییرات خروجی ها به عنوان یکی از مفاهیم کاربردی تحلیل پوششی داده‌ها، در اقتصاد خرد مورد توجه قرار گرفت. روش های زیادی برای تعیین این مفهوم در DEA ارایه شده است (بنکر، ۲۰۰٤ ; زارع پیشه و همکاران، ۲۰۰٦)[۳]. با تعیین بازده به مقیاس راست و چپ هادجیکستاس و سوتریو، رفتار یک DMU در جهت افزایش ورودی‌ها و در جهت کاهش ورودی‌ها تعیین می‌شود[٦]. هادجیکستاس و سوتریو روشی برای تعیین این دو مفهوم به کمک دو مدل برنامه ریزی خطی ارایه کردند. زارع پیشه و سلیمانی دامانه یک روش جدید بر پایه الگوریتم سیمپلکس دوال ارایه کردند که با یک مدل برنامه ریزی خطی بازده به مقیاس راست و چپ را محاسبه می‌کند[۲-۱]. در این مقاله مدل هایی برای تعیین سطح تغییرات ورودی‌ها و خروجی‌های یک واحد تصمیم گیرنده، که بازده به مقیاس راست و چپ آن داده شده است، ارایه می‌شود به طوری که ویژگی بازده به مقیاس آن در طبقه بندی بازده به مقیاس باقی بماند.

*عهده دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: *shahverdi_592003@yahoo.com*

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

۲ تعاریف پایه ای و مقدماتی

فرض کنید $n\ (j=1,...,n)$ DMU_j واحد تصمیم گیرنده باشند که هر یک با صرف بردار ورودی $X_j \in R_+^m$ بردار خروجی $Y_j \in R_+^s$ را تولید می کنند. $X_j \geq 0$ و $Y_j \geq 0\ (j=1,...,n)$ حداقل یک مولفه مثبت دارد.

همچنین $X=[X_1,X_2,...,X_n]$ و $Y=[Y_1,Y_2,...,Y_s]$ به ترتیب ماتریس های $m\times n$ و $s\times n$ از ورودی ها و خروجی ها هستند.

مجموعه امکان تولید T_V با ویژگی بازده به مقیاس متغیر به صورت زیر است:

$$T_V=\left\{(X,Y)\in R_+^{m+s}\ \middle|\ \exists\lambda\in R^n : X\lambda\leq X_o, Y\lambda\geq Y_o, e\lambda=1, \lambda\geq 0\right\}$$

کارایی یک DMU_o خاص می تواند بوسیله مدل پوششی BCC (بنکر، چارنز و کوپر، ۱۹۸۴) در ماهیت خروجی ارزیابی شود:

$$Max\ \left\{\alpha\middle|X\lambda\leq X_o, Y\lambda\geq\alpha Y_o, e\lambda=1, \lambda\geq 0\right\} \qquad (۱)$$

دوال آن که صورت مضربی نامیده می شود به صورت زیر است:

$$Min\left\{VX_o+u_o\ \middle|\ VX-UY+u_o\geq 0, UY_o=1, U\geq 0, V\geq 0\right\} \qquad (۲)$$

تعریف۱ DMU_o یک واحد کارای تکنیکی در ماهیت خروجی است اگر $\alpha^*=1$ در مدل(۱). (* علامت بهینگی است)

تعریف۲ اگر (V^*,U^*,u_o^*) جواب بهینه مدل(۲) باشد آن گاه $V^*X-U^*Y+u_o^*\geq 0$ ابر صفحه تکیه کننده بر مجموعه امکان تولید BCC است.

تعریف۳ اگر $V^*X_o-U^*Y_o+u_o^*=0$ آن گاه DMU_o یک واحد تصمیم گیرنده کارا است و ابر صفحه تکیه کننده ی $V^*X-U^*Y+u_o^*\geq 0$ بر مجموعه امکان تولید، ابر صفحه گذرنده از نقطه (X_o,Y_o) می باشد.

تعریف٤ اگر $V^*X_o-U^*Y_o+u_o^*=0$ و داشته باشیم $V_i^*\neq 0\ (i=1,...,m)$ و $u_r^*\neq 0\ (r=1,...,s)$ آن گاه این ابر صفحه گذرنده از (X_o,Y_o) یک ابر صفحه کارای قوی است.

۳ تعیین شعاع پایداری در تعریف بازده به مقیاس

فرض کنید DMU_o یک واحد کارای تکنیکی در ماهیت خروجی است، که بازده به مقیاس راست (ρ_o^+) و بازده به مقیاس چپ (ρ_o^-) آن تعیین شده است.

توجه. بازده به مقیاس یک ویژگی مرزی است، نه ویژگی خاص یک DMU_o که در نقطه ای روی مرز قرار می گیرد، بنابراین بازده به مقیاس راست DMU_o ویژگی ابر صفحه گذرنده از DMU_o است که در جهت افزایش سطح تغییرات در ورودی ها و خروجی های DMU_o تعریف می شود و بازده به مقیاس چپ ویژگی ابر

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

صفحه گذرنده از DMU_o است که در جهت کاهش سطح تغییرات در ورودی ها و خروجی های DMU_o تعریف می شود.

برای تعیین سطح تغییرات در بردارهای ورودی و خروجی DMU_o، دو دسته متفاوت زیر را در نظر بگیرید.

دسته اول: فرض کنید بازده به مقیاس راست و چپ DMU_o با هم برابر باشند یعنی داشته باشیم $\rho_o^+ = \rho_o^-$ بنابراین میزان سطح افزایش در بردارهای ورودی و خروجی DMU_o از مدل زیر محاسبه می شود:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad \theta_o \\
&Max \quad \alpha_o \\
&s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \le x_{io} + \theta_{io}, && i = 1,...,m, \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \ge y_{ro} + \alpha_{ro}, && r = 1,...,s, \qquad (۳) \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \\
&\quad \sum_{i=1}^{m} v_i \left(x_{io} + \theta_{io}\right) - \sum_{r=1}^{s} u_r \left(y_{ro} + \alpha_{ro}\right) + u_o = 0, \\
&\quad \sum_{i=1}^{m} v_i \left(x_{ij}\right) - \sum_{r=1}^{s} u_r \left(y_{rj}\right) + u_o \ge 0, && j = 1,...,n, \\
&\quad \sum_{i=1}^{m} v_i \left(x_{io}\right) + u_o = 1, \\
&\quad \sum_{r=1}^{s} u_r \left(y_{ro}\right) = 1, \\
&\quad \lambda_j \ge 0, v_i \ge 0, \theta_{io} \ge 0, u_r \ge 0, \alpha_{ro} \ge 0, && \forall j, i, r.
\end{aligned}
$$

که $\theta_o = (\theta_{1o},...,\theta_{mo})$ و $\alpha_o = (\alpha_{1o},...,\alpha_{so})$

اگر (θ_o^*, α_o^*) جواب بهینه مدل (۳) باشد، آن گاه (θ_o^*, α_o^*) اندازه شعاع پایداری DMU_o است به طوری که روی ابر صفحه تعریف کننده بازده به مقیاس راست باقی بماند.

و مدل زیر میزان سطح کاهش در بردارهای ورودی و خروجی DMU_o را محاسبه می کند:

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

$$
\begin{aligned}
&Max \quad \theta_o \\
&Max \quad \alpha_o \\
&s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \le x_{io} - \theta_{io}, \qquad i = 1,...,m, \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \ge y_{ro} - \alpha_{ro}, \qquad r = 1,...,s, \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \\
&\sum_{i=1}^{m} v_i \left(x_{io} - \theta_{io}\right) - \sum_{r=1}^{s} u_r \left(y_{ro} - \alpha_{ro}\right) + u_o = 0 \\
&\sum_{i=1}^{m} v_i \left(x_{ij}\right) - \sum_{r=1}^{s} u_r \left(y_{rj}\right) + u_o \ge 0, \qquad j = 1,...,n, \\
&\sum_{i=1}^{m} v_i \left(x_{io}\right) + u_o = 1, \\
&\sum_{r=1}^{s} u_r \left(y_{ro}\right) = 1, \\
&\lambda_j \ge 0,\ v_i \ge 0,\ \theta_{io} \ge 0,\ u_r \ge 0,\ \alpha_{ro} \ge 0, \qquad \forall j, i, r.
\end{aligned}
\tag{۴}
$$

اگر $\left(\theta_o^*, \alpha_o^*\right)$ جواب بهینه مدل (۴) باشد، آن گاه $\left(\theta_o^*, \alpha_o^*\right)$ اندازه شعاع پایداری DMU_o است به طوری که روی ابر صفحه تعریف کننده بازده به مقیاس چپ باقی بماند.

با جای گذاری تابع هدف در مدل (۳) و (۴) به صورت $\sum_{i=1}^{m} \rho_i \theta_i + \sum_{r=1}^{s} \mu_r \alpha_r$ که در آن $\rho_i > 0$ و $\mu_r > 0$ به ترتیب وزن های مربوط به ورودی iام وخروجی rام است یک مدل غیر خطی تک هدفه به دست می آید که توسط نرم افزارهای ریاضی (lingo ، Gams) قابل حل می باشد.

دسته دوم: همه DMU_o هایی را در نظر بگیرید که در دسته اول نیستند. بنابراین ابر صفحه گذرنده از این DMU_o ها منحصر بفرد نیست. برای پیدا کردن ابر صفحه تعریف کننده بازده به مقیاس راست و بازده به مقیاس چپ دو مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad u_o \\
&s.t. \quad \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} + u_o \ge 0, \qquad j = 1,...,n, \\
&\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} + u_o = 1, \\
&\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} = 1, \\
&v_i \ge 0, u_r \ge 0, \qquad \forall i, r.
\end{aligned}
\tag{۵}
$$

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

اگر $\left(V^*,U^*,u_o^*\right)$ جواب بهینه مدل (۵) باشد، آن گاه $V^*X-U^*Y+u_o^*\geq 0$ ابر صفحه تعریف کننده بازده به مقیاس راست DMU_o است.

$$
\begin{aligned}
&Min \quad u_o \\
&s.t. \quad \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} + u_o \geq 0, \qquad j=1,...,n, \\
&\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} + u_o = 1 \qquad (۶) \\
&\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} = 1 \\
&v_i \geq 0, u_r \geq 0, \qquad \forall i,r.
\end{aligned}
$$

اگر $\left(V^*,U^*,u_o^*\right)$ جواب بهینه مدل (۶) باشد آن گاه $V^*X-U^*Y+u_o^*\geq 0$ ابر صفحه تعریف کننده بازده به مقیاس چپ DMU_o است.

بنابراین با پیدا کردن ابرصفحه های تعریف کننده، میزان شعاع پایداری برای DMU_o با مدل های زیر تعریف می شود.

میزان سطح افزایش در بردارهای ورودی و خروجی:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad \sum_{i=1}^{m} \rho_i \theta_{io} + \sum_{r=1}^{s} \mu_r \alpha_{ro} \\
&s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq x_{io} + \theta_{io}, \qquad i=1,...,m, \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro} + \alpha_{ro}, \qquad r=1,...,s, \qquad (۷) \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \\
&\sum_{i=1}^{m} v_i^* \left(x_{io} + \theta_{io}\right) - \sum_{r=1}^{s} u_r^* \left(y_{ro} + \alpha_{ro}\right) + u_o^* = 0 \\
&\lambda_j \geq 0, \theta_{io} \geq 0, \alpha_{ro} \geq 0, \qquad \forall j,i,r.
\end{aligned}
$$

که در آن u_0^*، u_r^*، $r=1,...,s$، v_i^*، $i=1,...,m$ جواب بهینه مدل ۵ می باشد.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

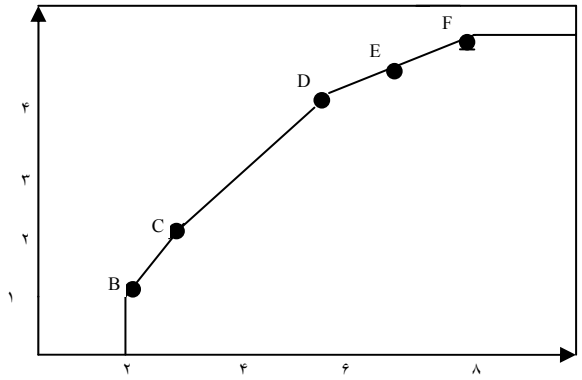
میزان سطح کاهش در بردارهای ورودی و خروجی:

$$
\begin{aligned}
Max \quad & \sum_{i=1}^{m} \rho_i \theta_{io} + \sum_{r=1}^{s} \mu_r \alpha_{ro} \\
s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \le x_{io} - \theta_{io}, && i = 1,...,m, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \ge y_{ro} - \alpha_{ro} && r = 1,...,s, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \\
& \sum_{i=1}^{m} v_i^* (x_{io} - \theta_{io}) - \sum_{r=1}^{s} u_r^* (y_{ro} - \alpha_{ro}) + u_o^* = 0, \\
& \lambda_j \ge 0,\ \theta_{io} \ge 0,\ \alpha_{ro} \ge 0, && \forall j, i, r.
\end{aligned}
\qquad (۸)
$$

که در آن $\left(v_i^*, m,...,1 = i, u_r^*, s,...,1 = r, u_o^*\right)$ جواب بهینه مدل ۶ می باشد.

٤ یک مثال عددی

در این بخش درستی مدل های پیشنهادی در بخش (۳) را به کمک یک مثال عددی که توسط هادجیکستاس و سوتریو (۲۰۰۶) ارایه شده است نشان می دهیم. فرض کنید یک ورودی و یک خروجی داریم $(m = s = 1)$. شکل ۱ را ببینید.



شکل ۱. مجموعه امکان BCC با DMU های B تا F

بازده به مقیاس راست و چپ DMU_o های کارا در ماهیت خروجی از B تا F توسط هادجیکستاس و سوتریو (۲۰۰۶) به صورت جدول ۱ تعیین شدند.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

جدول ۱. بازده به مقیاس راست و چپ DMUهای B تا F

	$B=(2,1)$	$C=(3,2)$	$D=(6,4)$	$E=\left(7,4\frac{1}{4}\right)$	$F=\left(8,4\frac{1}{2}\right)$
ρ_o^+,ρ_o^-	$2,\infty$	$1,\frac{3}{2}$	$\frac{3}{8},1$	$\frac{7}{17},\frac{7}{17}$	$0,\frac{4}{9}$

DMU_E را به عنوان واحد تحت ارزیابی در نظر بگیرید. برای این واحد $\rho_o^+ = \rho_o^-$. بنابراین در دسته اول قرار می گیرد و مدل (۳) در جهت افزایش بردارهای ورودی و خروجی متناظر این واحد به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
Max\quad & \theta+\alpha \\
s.t.\quad & 2\lambda_1+3\lambda_2+6\lambda_3+7\lambda_4+8\lambda_5 \le 7+\theta, \\
& \lambda_1+2\lambda_2+4\lambda_3+\frac{17}{4}\lambda_4+\frac{9}{2}\lambda_5 \ge \frac{17}{4}+\alpha, \\
& \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5=1, \\
& v(7+\theta)-u\left(\frac{17}{4}+\alpha\right)+u_o=0, \\
& 2v-u+u_o \ge 0, \\
& 3v-2u+u_o \ge 0, \\
& 6v-4u+u_o \ge 0, \\
& 7v-\frac{17}{4}u+u_o \ge 0, \\
& 8v-\frac{9}{2}u+u_o \ge 0, \\
& 7v+u_o=1, \\
& \frac{17}{4}u=1, \\
& \lambda_j \ge 0,\quad j=1,\ldots,5,\ v,u,\theta,\alpha \ge 0.
\end{aligned}
$$

جواب بهینه مدل فوق برابر است با:

$$\left(\theta^*,\alpha^*,\lambda_5^*,v^*,u^*,u_o^*\right)=\left(1,\,0.25,\,1,\,0.5882353E-01,\,0.2352941,\,0.5882353\right)$$

$$\left(X_o+\theta_o^*,\ Y_o+\alpha_o^*\right)=\left(7+1,\ \frac{17}{4}+0/25\right)=\left(8,\frac{9}{2}\right)=DMU_F$$

$\left(\theta^*,\alpha^*\right)=(1,\,0/25)$ میزان شعاع پایداری در جهت ابر صفحه تعریف کننده بازده به مقیاس راست است.

مدل ۴ در جهت کاهش بردارهای ورودی و خروجی:

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

$$
\begin{aligned}
Max \quad & \theta+\alpha \\
s.t. \quad & 2\lambda_1+3\lambda_2+6\lambda_3+7\lambda_4+8\lambda_5 \le 7-\theta, \\
& \lambda_1+2\lambda_2+4\lambda_3+\frac{17}{4}\lambda_4+\frac{9}{2}\lambda_5 \ge \frac{17}{4}-\alpha, \\
& \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5=1, \\
& v\,(7-\theta)-u\left(\frac{17}{4}-\alpha\right)+u_o=0, \\
& 2v-u+u_o \ge 0, \\
& 3v-2u+u_o \ge 0, \\
& 6v-4u+u_o \ge 0, \\
& 7v-\frac{17}{4}u+u_o \ge 0, \\
& 8v-\frac{9}{2}u+u_o \ge 0, \\
& 7v+u_o=1, \\
& \frac{17}{4}u=1, \\
& \lambda_j \ge 0, j=1,...,5,\ v,u,\theta,\alpha \ge 0.
\end{aligned}
$$

جواب بهینه مدل فوق به صورت زیر است:

$$\left(\theta^*,\alpha^*,\lambda_3^*,v^*,u^*,u_o^*\right)=\left(1,\,0.25,\,1,\,0.5882353E-01,\,0.2352941,\,0.5882353\right)$$

$$\left(X_o+\theta_o^*,Y_o+\alpha_o^*\right)=\left(7-1,\frac{17}{4}-0.25\right)=\left(6,4\right)=DMU_D$$

$\left(\theta^*,\alpha^*\right)=\left(1,\,0.25\right)$ میزان شعاع پایداری در جهت ابر صفحه تعریف کننده بازده به مقیاس چپ است.

DMU_C به عنوان واحد تحت ارزیابی، با بازده به مقیاس راست ثابت و بازده به مقیاس چپ صعودی در دسته دوم قرار می گیرد. مدل (۵) برای پیدا کردن ابر صفحه تعریف کننده بازده به مقیاس راست متناظر این واحد به صورت زیراست:

$$
\begin{aligned}
Max \quad & u_o \\
s.t. \quad & 2v-u+u_o \ge 0, \\
& 3v-2u+u_o \ge 0, \\
& 6v-4u+u_o \ge 0, \\
& 7v-\frac{17}{4}u+u_o \ge 0, \\
& 8v-\frac{9}{2}u+u_o \ge 0, \\
& 3v+u_o=1, \\
& 2u=1, \\
& v \ge 0, u \ge 0.
\end{aligned}
$$

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

$(v^*, u^*, u_o^*) = (0.3333333, 0.5, 0)$ جواب بهینه مدل فوق می باشد.

مدل ۶ برای پیدا کردن ابر صفحه تعریف کننده بازده به مقیاس راست متناظر DMU_C به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
Min \quad & u_o \\
s.t. \quad & 2v - u + u_o \geq 0, \\
& 3v - 2u + u_o \geq 0, \\
& 6v - 4u + u_o \geq 0, \\
& 7v - \frac{17}{4}u + u_o \geq 0, \\
& 8v - \frac{9}{2}u + u_o \geq 0, \\
& 3v + u_o = 1, \\
& 2u = 1, \\
& v \geq 0,\ u \geq 0.
\end{aligned}
$$

$(v^*, u^*, u_o^*) = (0.5, 0.5, -0.5)$ جواب بهینه مدل فوق می باشد.

با پیدا کردن ابر صفحه ها، به کمک مدل (۷) و (۸) متناظر این واحد، شعاع پایداری در جهت بازده به مقیاس راست و چپ محاسبه می شود.

مدل ۷ متناظر DMU_C:

$$
\begin{aligned}
Max \quad & \theta + \alpha \\
s.t. \quad & 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 6\lambda_3 + 7\lambda_4 + 8\lambda_5 \leq 3 + \theta, \\
& \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 + \frac{17}{4}\lambda_4 + \frac{9}{2}\lambda_5 \geq 2 + \alpha, \\
& \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 1, \\
& 0/3333333(3 + \theta) - 0/5(2 + \alpha) + 0 = 0, \\
& \theta \geq 0, \alpha \geq 0, \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, ..., 5.
\end{aligned}
$$

جواب بهینه مدل فوق برابر است با:

$$(\theta^*, \alpha^*, \lambda_3^*) = (3, 2, 1)$$

$$(X_o + \theta_o^*, Y_o + \alpha_o^*) = (3 + 3, 2 + 2) = (6, 4) = DMU_D$$

$(\theta^*, \alpha^*) = (3, 2)$ میزان شعاع پایداری در جهت ابر صفحه تعریف کننده بازده به مقیاس راست است.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]

مدل (۸) متناظر DMU_C :

$$
\begin{aligned}
Max \quad & \theta+\alpha \\
s.t. \quad & 2\lambda_1+3\lambda_2+6\lambda_3+7\lambda_4+8\lambda_5 \le 3-\theta, \\
& \lambda_1+2\lambda_2+4\lambda_3+\frac{17}{4}\lambda_4+\frac{9}{2}\lambda_5 \ge 2-\alpha, \\
& \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5=1, \\
& 0.5(3-\theta)-0.5(2-\alpha)-0.5=0, \\
& \theta \ge 0, \alpha \ge 0, \lambda_j \ge 0, \ j=1,...,5.
\end{aligned}
$$

جواب بهینه مدل فوق برابر است با:

$$
\begin{aligned}
&(\theta^*, \alpha^*, \lambda_1^*) = (1,1,1) \\
&(X_o+\theta_o^*, Y_o+\alpha_o^*) = (3-1, 2-1) = (2,1) = DMU_B
\end{aligned}
$$

$(\theta^*, \alpha^*) = (1,1)$ میزان شعاع پایداری در جهت ابر صفحه تعریف کننده بازده به مقیاس چپ است.

۵ نتیجه گیری

در این مقاله مدل هایی برای تعیین سطح تغییرات ورودی ها و خروجی های یک واحد تصمیم گیرنده، که بازده به مقیاس راست و چپ آن داده شده است، ارایه می شود به طوری که ویژگی بازده به مقیاس آن در طبقه بندی بازده به مقیاس باقی بماند. در جهت ابرصفحه تعریف کننده بازده به مقیاس راست، DMU'-ای به دست می آید که بازده به مقیاس چپ آن معادل بازده به مقیاس راست DMU_o است و در جهت ابرصفحه تعریف کننده بازده به مقیاس چپ، DMU'-ای به دست می آید که بازده به مقیاس راست آن معادل بازده به مقیاس چپ DMU_o می باشد.

منابع

[1] Zarepisheh, M. and Soleimani-damaneh, M. (2009). A dual simplex-based method for determination of the right and left returns to scale in DEA. *European Journal of Operational Research* 194, 585–591.

[2] Zarepisheh, M., Soleimani-damaneh, M., and L. Pourkarimi (2006). Determination of returns to scale by CCR formulation without chasing down alternative optimal solutions. *Applied Mathematics Letters* 19, 964–967.

[3] Banker, R.D., Charnse, A., Cooper, w.w., (1984). some models for estimating technical and scale efficiencies in data envelopment analysis. *Management science* 30, 1078-1092.

[4] Banker, R.D., Cooper, w.w., Thrall, R.M., Seiford, L.M., Zhu, j., (2004). Returns to scale in different DEA models. *European Jounal of Operational Research* 154, 345-362.

[5] Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E., (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research* 2, 429-444.

[6] Hadjicostas, P., Soteriou, A.C., (2006). One-sided elasticities and technical efficiency in multi- output production: A theoretical framework. *European Journal of Operational Research* 168 (2), 425

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-11-02]