مجله تحقیق در عملیات و کاربردهای آن، سال ششم، شماره ۳ (پیاپی ۳۰)، پائیز ۹۰، ص ص ۱۲۴-۱۱۵
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

تحلیل حساسیت طبقه بندی بازده به مقیاس در DEA

فرهاد حسین زاده لطفی[۱]، زهرا قلیچ بیگی*[۲]، کبری غلامی[۳]، نازیلاآقایی[۴]

[۱]دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران، تهران، ایران

[۲*]دانشگاه آزاد اسلامی واحد مبارکه، مبارکه، ایران

[۳]دانشگاه آزاد اسلامی واحد بوشهر، بوشهر، ایران

[۴]باشگاه پژوهشگران جوان، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اردبیل، اردبیل، ایران

رسید مقاله: بیست و ششم اردیبهشت ماه ۱۳۹۰
پذیرش مقاله: چهاردهم شهریور ماه ۱۳۹۰

چکیده

تحلیل حساسیت طبقه بندی بازده به مقیاس در DEA بوسیله ی برنامه ریزی خطی مطالعه شده است. سیفورد و همکاران [۱] تحلیل حساسیت بازده به مقیاس را براساس دو شرط بررسی کردند. در این مقاله، تحلیل حساسیت در حالت کلی بحث می شود. برای این منظور، مدل هایی ارایه داده می شود که توسط آن مدل ها نوع بازده به مقیاس و ناحیه ی پایداری طبقه بندی بازده به مقیاس مشخص می شود. اثر تغییرات خروجی روی مدل CCR ماهیت ورودی و اثر تغییرات ورودی روی مدل CCR ماهیت خروجی در نظر گرفته می شود. در این مقاله، تنها تحلیل حساسیت DMU هایی که نا کارای CCR می باشند، در نظر گرفته می شود.

کلمات کلیدی: بازده به مقیاس، DEA، تحلیل حساسیت.

۱ مقدمه

تحلیل پوششی داده ها با ارایه مدل CCR توسط چارنز و همکاران [۲] ابداع شد. سپس مدل CCR توسط بنکر و همکاران [۳] به مدل BCC گسترش یافت. هدف این دو مدل طبقه بندی واحدهای تصمیم گیرنده به دو طبقه کارا و ناکارا می باشد. یکی از موضوعات بسیار مهم در تحلیل پوششی داده ها مشخص کردن نوع بازده به مقیاس (RTS) می باشد. بنکر و همکاران [۴] با استفاده از دوال مدل BCC نوع بازده به مقیاس را مشخص کردند. سپس فار و همکاران [۵-۶] با استفاده از مقدار کارایی نوع بازده به مقیاس را مشخص کردند. مدل های ارایه شده فوق بازده به مقیاس واحدهای تصمیم گیرنده را به سه دسته صعودی، نزولی و ثابت طبقه بندی می کنند. از آنجا که نوع بازده به مقیاس در تحلیل پوششی داده ها به صورت موضعی است. بنابراین تحقیق در مورد پایداری بازده به مقیاس یک موضوع بسیار مهمی است. سیفورد و همکاران [۱] تحلیل حساسیت طبقه بندی بازده به مقیاس در تحلیل پوششی داده ها را با در نظر گرفتن دو شرط محاسبه می کند. ما در این مقاله بدون در نظر گرفتن این دو شرط ناحیه ی پایداری بازده به مقیای را محاسبه می کنیم.

*عهده دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: zahra.ghlichbegi@yahoo.com

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-09-13]

ما چندین مدل برنامه ریزی خطی را برای محاسبه پایداری بازده به مقیاس واحدهای ناکارا ارایه می دهیم. طبقه بندی بازده به مقیاس بر اساس مدل CCR ماهیت ورودی و خروجی برای واحد تصمیم گیرنده ای، امکان دارد متفاوت باشد. برای این منظور تحلیل حساسیت بازده به مقیاس بر حسب مدل CCR ماهیت ورودی و ماهیت خروجی محاسبه می کنیم.

بخش های این مقاله عبارتند از: بخش ۲ : مفاهیم اولیه. بخش ۳: تحلیل حساسیت بازده به مقیاس بر حسب مدل CCR درماهیت ورودی. بخش ۴: تحلیل حساسیت طبقه بندی بازده به مقیاس بر حسب مدل CCR درماهیت خروجی. بخش ۵: مثال. بخش ۶: نتیجه گیری.

۱ مفاهیم اولیه

فرض کنیم DMU_j $(j=1,\cdots,n)$, n واحد متجانس هستند که با به کار بردن بردار ورودی x_j $(j=1,\cdots,n)$ بردار خروجی y_j $(j=1,\cdots,n)$را تولید می نمایند و $x_j \in R^{m\geq\circ}$ $(j=1,\cdots,n)$و $y_j \in R^{s\geq\circ}$ $(j=1,\cdots,n)$.

مدل CCR در ماهیت ورودی توسط چارنز و همکاران [۲] به صورت زیر معرفی شد:

$$
\begin{aligned}
&\text{Min} \quad \theta \\
&\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{io}, \qquad i=1,2,...,m, \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro}, \qquad r=1,2,...,s, \\
&\qquad \lambda_j \geq 0, \qquad j=1,2,...,n.
\end{aligned}
\tag{۱}
$$

توجه کنید که مدل (۱) همواره شدنی است و $0<\theta^* \leq 1$.

همچنین مدل CCR در ماهیت خروجی را می توان به صورت زیر نوشت:

$$
\begin{aligned}
&\text{Max} \quad \varphi \\
&\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq x_{io}, \qquad i=1,2,...,m, \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq \varphi y_{ro}, \qquad r=1,2,...,s, \\
&\qquad \lambda_j \geq 0, \qquad j=1,2,...,n.
\end{aligned}
\tag{۲}
$$

بنکر و همکاران [۳] با استفاده از جواب های بهین مدل (۱) نوع بازده به مقیاس را به صورت زیرمشخص کردند:

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-09-13]

DMU_o دارای بازده به مقیاس ثابت است اگر و فقط اگر حداقل در یکی از جواب های بهینه رابطه $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^*=1$ برقرار باشد. DMU_o دارای بازده به مقیاس صعودی است اگر و فقط اگر برای تمام جواب های بهینه رابطه $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^*<1$ برقرار باشد. DMU_o دارای بازده به مقیاس نزولی است اگر و فقط اگر برای تمام جواب های بهینه رابطه $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^*>1$ برقرار باشد.

۲ تحلیل حساسیت بازده به مقیاس بر حسب مدل CCR در ماهیت ورودی

توجه داشته باشید که تحت مدل CCR در ماهیت ورودی اگر DMU_o دارای بازده به مقیاس ثابت باشد، آن گاه کاهش و افزایش خروجی ها نوع بازده به مقیاس ثابت راتغییر می دهد. اگر DMU_o دارای بازده به مقیاس صعودی باشد، کاهش خروجی ها نوع بازده به مقیاس صعودی را تغییر نمی دهد. به همین ترتیب اگر DMU_o دارای بازده به مقیاس نزولی باشد افزایش خروجی ها نوع بازده به مقیاس نزولی را تغییر نمی دهد تا هنگامی که DMU_o به مرز BCC برسد. بنابراین، ما فقط افزایش خروجی ها را برای DMUهایی که دارای بازده به مقیاس صعودی می باشند را در نظر می گیریم، کاهش خروجی ها را برای DMU هایی که دارای بازده به مقیاس نزولی می باشند در نظر می گیریم و افزایش و کاهش خروجی ها را برای DMUهایی که دارای بازده به مقیاس ثابت می باشند را در نظر می گیریم. توجه کنید که تناسب افزایش خروجی با $\alpha\geq 1$ وتناسب کاهش خروجی با $\beta\leq 1$ برای DMU_o ممکن است. افزایش و کاهش خروجی ها به ترتیب توسط α، β به صورت $(r=1,\ldots,s)\beta y_{ro},\alpha y_{ro}$ نمایش می دهیم. حا ل مقدار β,α را به نحوی محاسبه می کنیم که نوع بازده به مقیاس تغییرنکند. برای محاسبه کردن β,α ابتدا مجموعه های E_o، E_o'، E_o''، T_o، T_o' را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$E_o'=\{DMU$ های کارای CCR$\}$

$E_o'=\{DMU$ های کارای CCR که دارای بازده به مقیاس چپ صعودی هستند$\}$

$E_o''=\{E_o'\cup DMU$ های کارای BCC که دارای بازده به مقیاس صعودی هستند$\}$

$$T_o=\{(x,y):\sum_{j\in E_o}\lambda_j x_j\leq x\ ,\sum_{j\in E_o}\lambda_j y_j\geq y\ ,\sum_{j\in E_o}\lambda_j=1,\lambda_j\geq 0,j\in E_o\}$$

$$T_o'=\{(x,y):\sum_{j\in E_o''}\lambda_j x_j\leq x\ ,\sum_{j\in E_o''}\lambda_j y_j\geq y\ ,\sum_{j\in E_o''}\lambda_j=1,\lambda_j\geq 0,j\in E_o''\}$$

بر اساس این دو مجموعه می توانیم مقادیر زیر را تعریف کنیم:

$$\varphi_o^*=Max\{\varphi_o:(x_o,\varphi_o y_o)\in T_o\} \quad (۳)$$

$$\phi_o^*=Max\{\phi_o:(x_o,\phi_o y_o)\in T_o'\} \quad (۴)$$

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-09-13]

قضیه ۱.

الف) DMU_o دارای بازده به مقیاس ثابت است اگر و فقط اگر $\varphi_o^* = 1$ یا $\phi_o^* = 1$ یا $(\varphi_o^* > 1, \phi_o^* < 1)$.

ب) DMU_o دارای بازده به مقیاس نزولی است اگر و فقط اگر $\varphi_o^* < 1$.

ج) DMU_o دارای بازده به مقیاس صعودی است اگر و فقط اگر $\phi_o^* > 1$.

برهان. الف) (i) $(\Rightarrow)$ فرض $\varphi_o^* = 1$ [۱] مشاهده شود.

(ii) $(\Rightarrow)$ فرض $\phi_o^* = 1$ ابتدا متغیرهای جدید را معرفی می کنیم:

$$\hat{\phi}_o = \hat{\theta}\phi_o = 1 \Rightarrow \hat{\theta} = \phi_o^{-1} > 0$$
$$\hat{\lambda}_j = \hat{\theta}\lambda_j \qquad (j \in E_o'')$$

تمام محدودیت های (۴) را در $\hat{\theta}$ ضرب می کنیم و از این رو داریم:

$$\begin{aligned} Min \quad & \hat{\theta} \\ s.t. \quad & \sum_{j \in E_o''} \hat{\lambda}_j x_{ij} \le \hat{\theta} x_{io}, \quad i = 1,\dots,m, \\ & \sum_{j \in E_o''} \hat{\lambda}_j y_{rj} \ge y_{ro}, \quad r = 1,\dots,s, \\ & \sum_{j \in E_o''} \hat{\lambda}_j = \sum_{j \in E_o''} \lambda_j \phi_o^{-1} = \phi_o^{-1} = \hat{\theta}, \\ & \hat{\lambda}_j, \lambda_j \ge 0, \quad j \in E_o''. \end{aligned} \qquad (۵)$$

$\phi_o^* = 1$. بنابراین $\hat{\theta}^* = 1$ یعنی در مدل CCR درماهیت ورودی داریم: $\sum_{j \in E_o} \hat{\lambda}_j^* = 1$ و لذا DMU_o دارای بازده به مقیاس ثابت است.

$(\Rightarrow)$ (iii) اگر $(\varphi_o^* > 1, \phi_o^* < 1)$ آن گاه DMU_o دارای بازده به مقیاس ثابت است.

I) اگر $(\phi_o^* < 1)$ آن گاه $DMU_o' = (x_o, \phi_o^* y_o)$ را توسط (4) ارزیابی می کنیم و مقدار بهین آن برابر با ۱ می باشد. از (ii) به دست می آوریم $DMU_o' = (x_o, \phi_o^* y_o)$ دارای بازده به مقیاس ثابت است. پس DMU_o نمی تواند دارای بازده به مقیاس صعودی باشد (ما نمی توانیم مقدار خروجی ها راکاهش دهیم و باعث شود که DMU ای که دارای بازده به مقیاس صعودی است به DMU ای که دارای بازده به مقیاس ثابت است، تبدیل شود).

II) اگر $(\varphi_o^* > 1)$ آن گاه $DMU_o' = (x_o, \varphi_o^* y_o)$ را توسط (3) ارزیابی می کنیم و مقدار بهین آن برابر با ۱ می باشد. از (i) به دست می آوریم $DMU_o' = (x_o, \varphi_o^* y_o)$ دارای بازده به مقیاس ثابت است. پس DMU_o نمی تواند دارای بازده به مقیاس نزولی باشد (ما نمی توانیم مقدار خروجی ها را افزایش دهیم و باعث

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-09-13]

شود که DMUای که دارای بازده به مقیاس نزولی است به DMUای که دارای بازده به مقیاس ثابت است، تبدیل شود).

بنابراین از (I) و (II) به دست می آوریم، DMU_o دارای بازده به مقیاس ثابت است.

الف ($\Leftarrow$). [۱] مشاهده شود.

ب ($\Rightarrow$). فرض $\varphi_o^* < 1$ آن گاه اگر $DMU_o' = (x_o, \varphi_o^* y_o)$ را توسط مدل CCR در ماهیت ورودی ارزیابی کنیم مقدار بهین آن برابر با ۱ است.

بنابراین طبق قسمت (الف) DMU_o' دارای بازده به مقیاس ثابت است. پس DMU_o نمی تواند دارای بازده به مقیاس صعودی باشد (ما نمی توانیم مقدار خروجی ها را کاهش دهیم و باعث شود که DMUای که دارای بازده به مقیاس صعودی است به DMUای که دارای بازده به مقیاس ثابت است، تبدیل شود). هم چنین DMU_o نمی تواند دارای بازده به مقیاس ثابت باشد، زیرا از (الف) داریم DMU_o دارای بازده به مقیاس ثابت نیست اگر وفقط اگر $\varphi_o^* \neq 1$ و $\phi_o^* \neq 1$ و (($\phi_o^* > 1$) یا (($\varphi_o^* < 1$)). $\varphi_o^* < 1$ بنابراین $\varphi_o^* \neq 1$ می دانیم که $\phi_o^* \leq \varphi_o^* < 1$ بنابراین $\phi_o^* \neq 1$ پس DMU_o دارای بازده به مقیاس ثابت نیست. بنابراین DMU_o دارای بازده به مقیاس نزولی است.

ب($\Leftarrow$). [۱] مشاهده شود.

ج($\Rightarrow$). فرض $\phi_o^* > 1$ آن گاه اگر $DMU_o' = (x_o, \phi_o^* y_o)$ را توسط مدل CCR در ماهیت ورودی ارزیابی کنیم مقدار بهین آن برابر با ۱ است.

بنابراین طبق قسمت (الف) DMU_o' دارای بازده به مقیاس ثابت است. پس DMU_o نمی تواند دارای بازده به مقیاس نزولی باشد (ما نمی توانیم مقدار خروجی ها را کاهش دهیم و باعث شود که DMUای که دارای بازده به مقیاس نزولی است به DMUای که دارای بازده به مقیاس ثابت است، تبدیل شود). هم چنین DMU_o نمی تواند دارای بازده به مقیاس ثابت باشد، زیرا از (الف) داریم DMU_o دارای بازده به مقیاس ثابت نیست اگر و فقط اگر $\varphi_o^* \neq 1$ و $\phi_o^* \neq 1$ و (($\phi_o^* > 1$) یا (($\varphi_o^* < 1$)). $\phi_o^* > 1$ بنابراین $\phi_o^* \neq 1$. می دانیم که $1 < \phi_o^* \leq \varphi_o^*$. بنابراین $\varphi_o^* \neq 1$، پس DMU_o دارای بازده به مقیاس ثابت نیست. بنابراین DMU_o دارای بازده به مقیاس صعودی است.

برهان ج ($\Leftarrow$). برهان خلف، $\phi_o^* > 1$ نباشد، بنابراین $\phi_o^* = 1$ یا $\phi_o^* < 1$. اگر $\phi_o^* = 1$ آن گاه از (الف) نتیجه می شود که DMU_o دارای بازده به مقیاس ثابت است که این تناقض است. اگر $\phi_o^* < 1$ آن گاه متغیرهای جدید را معرفی می کنیم:

$$\hat{\phi}_o = \hat{\theta}\phi_o = 1 \Rightarrow \hat{\theta} = \phi_o^{-1} > 0$$
$$\hat{\lambda}_j = \hat{\theta}\lambda_j \qquad (j \in E_o'')$$

اگر تمام محدودیت های (۴) را در $\hat{\theta}$ ضرب کنیم آن گاه داریم:

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-09-13]

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \hat{\theta} \\
s.t. \quad & \sum_{j\in E_o''} \hat{\lambda}_j x_{ij} \le \hat{\theta}\, x_{io}, \qquad i=1,\dots,m, \\
& \sum_{j\in E_o''} \hat{\lambda}_j y_{rj} \ge y_{ro}, \qquad r=1,\dots,s, \\
& \sum_{j\in E_o''} \hat{\lambda}_j = \sum_{j\in E_o''} \lambda_j \phi_o^{-1} = \phi_o^{-1} > 1, \\
& \hat{\lambda}_j, \lambda_j \ge 0, \qquad j \in E_o''.
\end{aligned}
$$

از این که $\varphi_o^* > 1$، نتیجه می شود $\sum_{j\in E_o} \hat{\lambda}_j > 1$. یعنی در مدل CCR در ماهیت ورودی داریم: $\sum_{j\in E_o} \lambda_j^* > 1$ و $\hat{\theta}^* = 1$ است و این تناقض با صعودی بودن بازده به مقیاس است.

قضیه ۲. فرض کنید DMU_o دارای بازده به مقیاس نزولی است. اگر خروجی ها به $\hat{y}_{ro} = \beta\, y_{ro}$ تبدیل شوند که $\varphi_o^* < \beta \le 1$، آن گاه $DMU_O' = (x_o, \hat{y}_o)$ دارای بازده به مقیاس نزولی است. (β ضریب کاهش خروجی هاست)

برهان. [۱] مشاهده شود.

قضیه ۳. فرض کنید DMU_o دارای بازده به مقیاس صعودی است. اگر خروجی ها به $\hat{y}_{ro} = \alpha\, y_{ro}$ تبدیل شوند که $1 \le \alpha < \phi_o^*$، آن گاه $DMU_o' = (x_o, \hat{y}_o)$ دارای بازده به مقیاس صعودی است.(α ضریب افزایش خروجی هاست).

برهان. برهان خلف، اگر DMU_o' بازده به مقیاس صعودی نداشته باشد، بنابراین در ارزیابی DMU_o' با مدل (4) به دست می آوریم، $\hat{\phi}_o^* \le 1$. از این رو داریم:

$$
\begin{aligned}
\phi_o^* = Max \quad & \hat{\phi}_o \\
s.t. \quad & \sum_{j\in E_o''} \lambda_j x_{ij} \le x_{io}, \qquad i=1,\dots,m, \\
& \sum_{j\in E_o''} \lambda_j y_{rj} \ge \hat{\phi}_o \hat{\alpha}\, y_{ro}, \quad r=1,\dots,s, \\
& \sum_{j\in E_o''} \lambda_j = 1, \\
& \lambda_j \ge 0, \qquad j \in E_o''.
\end{aligned}
$$

$\hat{\phi}_o^* = \dfrac{\phi_o^*}{\alpha}$ که ϕ^* جواب بهین مدل (۴) در ارزیابی DMU_o می باشد.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-09-13]

حال اگر $\hat{\phi}_o^* \leq 1$ داریم:

$$\hat{\phi}_o^* = \frac{\phi_o^*}{\alpha} = 1 \Rightarrow \phi_o^* = \alpha$$
$$\hat{\phi}_o^* = \frac{\phi_o^*}{\alpha} < 1 \Rightarrow \phi_o^* < \alpha$$

در نتیجه:

$$\phi_o^* \leq \alpha$$

و این تناقض است با $1 \leq \alpha < \phi_o^*$.

قضیه ٤. فرض کنید DMU_o دارای بازده به مقیاس ثابت است. اگر خروجی ها به $\hat{y}_{ro} = \beta y_{ro}$ تبدیل شوند که $\phi_o^* \leq \chi < \varphi_o^*$، آن گاه $DMU'_o = (x_o, \hat{y}_o)$ دارای بازده به مقیاس ثابت است. (χ ضریب تغییرات خروجی هاست)

برهان. برهان خلف، اگر DMU'_o بازده به مقیاس ثابت نداشته باشد بنابراین دارای بازده به مقیاس نزولی و یا صعودی است. اگر دارای بازده به مقیاس نزولی باشد [۱] مشاهده شود.

حال اگر دارای بازده به مقیاس صعودی باشد، بنابراین در ارزیابی DMU'_o با مدل (۴) به دست می آوریم: $\hat{\phi}^* > 1$. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}_o^* = Max \quad & \hat{\phi}_o \\
s.t \quad & \sum_{j \in E''_o} \lambda_j x_{ij} \leq x_{io}, \qquad i = 1, \ldots, m, \\
& \sum_{j \in E''_o} \lambda_j y_{rj} \geq \hat{\phi}_o \hat{\chi}\, y_{ro}, \quad r = 1, \ldots, s, \\
& \sum_{j \in E''_o} \lambda_j = 1, \\
& \lambda_j \geq 0, \qquad j \in E''_o.
\end{aligned}$$

$\hat{\phi}_o^* = \frac{\phi_o^*}{\chi}$ که ϕ_o^* جواب بهین مدل (4) در ارزیابی DMU_o می باشد. حال اگر $\hat{\phi}_o^* > 1$، آن گاه $\phi_o^* = \frac{\phi_o^*}{\chi} > 1$ و لذا $\chi < \phi_o^*$ و این تناقض است.

٤ تحلیل حساسیت طبقه بندی بازده به مقیاس بر حسب مدل CCR درماهیت خروجی

اکنون آشفتگی ورودی به جای تغییرات خروجی DMU_o در نظر گرفته می شود. توجه کنید تحت مدل CCR ماهیت خروجی، اگر DMU_o دارای بازده به مقیاس ثابت باشد، آن گاه کاهش و افزایش ورودی ها بازده به مقیاس ثابت را تغییر می دهد. اگر DMU_o دارای بازده به مقیاس نزولی باشد آن گاه افزایش ورودی ها بازده به مقیاس نزولی را تغییر نمی دهد. به همین ترتیب، اگر DMU_o دارای بازده به مقیاس صعودی باشد آن گاه کاهش ورودی ها بازده به مقیاس صعودی را تغییر نمی دهد تا هنگامی که DMU_o به مرز CCR برسد. بنابراین فقط افزایش و کاهش ورودی ها را برای DMU های به ترتیب دارای بازده به مقیاس صعودی و نزولی را در نظر

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-09-13]

می گیریم و افزایش و کاهش ورودی ها را برای DMU هایی که دارای بازده به مقیاس ثابت می باشند را در نظر می گیریم. توجه کنید که تناسب افزایش ورودی با $\eta \geq 1$ و تناسب کاهش ورودی با $\varepsilon \leq 1$ برای DMU_o ممکن است. افزایش و کاهش ورودی ها را به ترتیب توسط ε,η به صورت $\varepsilon y_{ro}, \eta y_{ro}$ $(r=1,\ldots,s)$ نمایش می دهیم. حا ل مقدار ε,η را به نحوی محاسبه می کنیم که نوع بازده به مقیاس تغییر نکند. در رابطه با محاسبه ε,η ابتدا مجموعه های F_o، F'_o، T'''_O، ψ_O و ζ_o را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$F_o = \{$ DMU های کارای CCR که دارای بازده به مقیاس راست نزولی هستند $\}$

$F'_o = \{ F_o \bigcup$ DMU های کارای BCC که دارای بازده به مقیاس نزولی هستند $\}$

$$T'''_O = \{(x,y) : \sum_{j\in F'_o} \lambda_j x_j \geq x \ , \sum_{j\in F'_o} \lambda_j y_j = y \quad , \sum_{j\in F'_o} \lambda_j = 1 \quad , \lambda_j \geq 0, j \in F'_o\}$$

$$\psi_o^* = Max\{\psi_o : (\psi_o x_o, y_o) \in T'''_o\} \qquad (۶)$$

$$\zeta_o^* = Min\{\zeta_o : (\zeta_o x_o, y_o) \in T_o\} \qquad (۷)$$

به طوری که (x_o, y_o) نشان دهنده بردار ورودی و خروجی DMU_o می باشد.

قضیه ۵.

الف. DMU_o دارای بازده به مقیاس ثابت است اگر و فقط اگر $\psi_o^* = 1$ یا $\zeta_O^* = 1$ یا $(\psi_O^* > 1, \zeta_O^* < 1)$.

ب. DMU_o دارای بازده به مقیاس صعودی است اگر و فقط اگر $\zeta_o^* > 1$.

ج. DMU_o دارای بازده به مقیاس نزولی است اگر و فقط اگر $\psi_o^* < 1$.

برهان. با توجه به برهان قضیه (۱) بدیهی است.

قضیه ٦ . فرض کنید DMU_o دارای بازده به مقیاس صعودی است. اگر ورودی ها به $\hat{x}_{io} = \eta x_{io}$ تبدیل شوند که $1 \leq \eta < \zeta_o^*$، آن گاه $DMU'_o = (\hat{x}_o, y_o)$ دارای بازده به مقیاس صعودی است.

برهان. با توجه به برهان قضیه (۳) بدیهی است.

قضیه ۷. فرض کنید DMU_o دارای بازده به مقیاس نزولی است. اگر ورودی ها به $\hat{x}_{io} = \varepsilon x_{io}$ تبدیل شوند که $\psi_o^* < \varepsilon \leq 1$، آن گاه $DMU'_o = (\hat{x}_o, y_o)$ دارای بازده به مقیاس نزولی است.

برهان. با توجه به برهان قضیه (۲) بدیهی است.

قضیه ۸ . فرض کنید DMU_o دارای بازده به مقیاس ثابت است. اگر ورودی ها به $\hat{x}_{io} = \beta x_{io}$ تبدیل شوند که $\zeta^* \leq \beta \leq \psi_o^*$، آن گاه $DMU'_o = (\hat{x}_o, y_o)$ دارای بازده به مقیاس ثابت است. (β ضریب تغییرات ورودی هاست)

برهان. با توجه به برهان قضیه (۴) بدیهی است.

توجه داشته باشید که قضیه (۵) تنها تحلیلی برای پایداری طبقه بندی بازده به مقیاس نیست بلکه طبقه بندی بازده به مقیاس را نیز نشان می دهد.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-09-13]

۵ مثال عددی

فرض مجموعه ی داده ها شامل ۱۰ ، DMU است هر کدام دارای یک ورودی و یک خروجی مـی باشـند. مقدار داده ها در جدول (۱) نشان داده شده است.

جدول ۱. داده های مثال عددی

DMU	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
ورودی (x_j)	۲	۳	۶	۷	۸	۶	۸	۹	۱۰	۸
خروجی (y_j)	۱	۲	۴	۴.۲۵	۴.۵	۱	۲	۳	۴.۴	۴

DMU_2 و DMU_3 کارای CCR هستند و $E'_o = \{DMU_2\}$ و $E''_o = \{DMU_1$ و $DMU_2\}$، DMU_7، DMU_8 و DMU_{10} دارای بازده به مقیاس ثابت هستند و DMU_6, DMU_1 دارای بازده به مقیاس صعودی هستند و DMU_4, DMU_5 و DMU_9 دارای بازده به مقیاس نزولی می باشند. جدول (۲) مقدار حساسیت بازده به مقیاس DMUهای ۶ و ۷ و ۸ و ۹و ۱۰ را هنگامی که مقدار خروجی را تغییر می دهیم نشان می دهد.

جدول ۲. مقدار حساسیت بازده به مقیاس

DMU	۶	۷	۸	۹	۱۰
حساسیت	$\phi_O^* = 2$	$\varphi_O^* = 2, \phi_O^* = 1$	$\varphi_O^* = 4/3, \phi_O^* = 2/3$	$\varphi_O^* = 4/4.4$	$\varphi_O^* = 1, \phi_O^* = 0.5$
نتیجه	$\alpha \in [1,2)$	$\chi \in [1,2]$	$\chi \in [2/3, 4/3]$	$\beta \in (4/4.4, 1]$	$\chi \in [0.5,1]$

٦ نتیجه گیری

مدل هایی را ارایه دادیم که توسط آن مدل ها ناحیه ی پایداری طبقه بندی بازده به مقیاس مشخص شد. اثر تغییرات خروجی روی مدل CCR در ماهیت ورودی و اثر تغییرات ورودی روی مدل CCR ماهیت خروجی را در نظر گرفتیم. هم چنین مدل هایی که ارایه دادیم نوع بازده به مقیاس را به دست می آورد. در این مقاله تنها واحدهای ناکارا بررسی شدند. باید توجه داشت که آشفتگی واحدهای کارا ممکن است طبقه بندی بازده به مقیاس را تغییر دهد. بنابراین بررسی موقعیت هایی که واحدهای کارا و ناکارا دچار اشفتگی شوند می تواند موضوع تحقیق دیگری باشد.

منابع

[1] Seiford, L. M., Zhu, J,. (1999). Sensitivity and stability of the classifications of return to scale in data envelopment analysis. Journal of Productivity analysis 12, 55-77.

[2] Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes, E., (1978). Measuring the efficiency of decision making units. European Journal of Operation Research 2, 429-444.

[3] Banker, R. D., Charnes, A., Cooper, W.W., (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. Management Science 30, 1078-1092.

[4] Banker, R. D., Thrall, R. M., (1992). Estimation of returns to scale using data envelopment analysis. European Journal of Operation Research 62, 74-84.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-09-13]

[5] Fare, R., Grosskopf, S., Lovell, C. A. K., (1985).The measurement of efficiency of production. Boston: Kluwer Nijhoff.
[6] Fare, R., Grosskopf, S., Lovell, C. A. K., (1994).Production frontiers. Cambridge University Press.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-09-13]