مجله تحقیق در عملیات و کاربردهای آن، سال نهم، شماره سوم (پیاپی ۳۴)، پاییز ۹۱، ص ص ۳۵-۲۷
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

تعیین مقدار تراکم در ورودی‌ها با استفاده از مدل Bi-GDEA

مهدیه بابایان*[۱]، عقیله حیدری[۲]، علیرضا داوودی[۳]
۱- دانشگاه پیام نور، کارشناس ارشد گروه ریاضی
۲- دانشگاه پیام نور، دانشیار گروه ریاضی
۳- دانشگاه آزاد اسلامی، واحد نیشابور، گروه ریاضیات، نیشابور، ایران

رسید مقاله: ۲۷ فروردین ۱۳۹۱
پذیرش مقاله: ۱۸ مرداد ۱۳۹۱

چکیده

در این مقاله ابتدا یک مدل تحلیل پوششی داده‌های تعمیم یافته دو هدفی(Bi-GDEA) معرفی می‌شود. با استفاده از این مدل می‌توان یک نگاشت نقطه به مجموعه از یک واحد تصمیم گیرنده ناکارا به زیر مجموعه‌ای از مرز مجموعه امکان تولید به دست آورد. این نگاشت به کمک یک الگوریتم ایجاد می‌شود. در این مقاله با در نظر گرفتن مدل Bi-GDEA و الگوریتم نگاشت نقطه به مجموعه سعی می‌کنیم الگوریتم را طوری توسعه دهیم که به کمک آن بتوان وجود تراکم در ورودی‌ها و میزان آن را برای یک واحد تصمیم گیرنده تعیین کرد.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، تراکم، مدل DEA تعمیم یافته.

۱ مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) یک روش غیر پارامتری برای اندازه گیری کارایی نسبی واحدهای تصمیم گیرنده (DMU) روی چندین ورودی و خروجی است. تحلیل پوششی داده‌ها با روش قدرتمندی که در دست دارد، قادر است مدیریت را در جهت نیل به اهداف عالی سازمان و در جهت استفاده بهینه از منابع و تخصیص آن‌ها و در نهایت کسب سود آوری بیشتر یاری رساند. اگر چه شکل‌های متفاوت و مجزایی از DEA برای اداره کردن مسایل تولید استفاده شده است اما همه مدل‌های DEA در راستای مفهوم مرز کارایی واحدهای تصمیم گیرنده (DMU) برای تبدیل چندین ورودی به چندین خروجی به دست می‌آیند. از جمله مدل‌های مختلف DEA ، مدل CCR، مدلBCC، مدل FG، مدل ST، و غیره ارایه شده‌اند. Yu, Wei [۱] وهمچنین Yuو همکاران در مقاله یک مدل تعمیم یافته برای تحلیل پوششی داده‌ها [۲و۳] یک مدل تعمیم یافتهDEA (GDEA) با سه پارامتر دودویی $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ ، برای ارائه یک مدل یکتا از مدل‌ها و روش‌های DEA معرفی

* عهده دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: m_babayan88@yahoo.com

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]

می‌کنند. همچنین بر پایه مدل GDEA، یک مدل GDEA دو هدفی (Bi-GDEA) پیشنهاد شده است و یک روش کارا برای ساخت تصویر نگاشت نقطه به مجموعه یک واحد غیر کارا ارایه می‌شود که شرح کامل آن در مقاله‌ی "یک مدل تحلیل پوششی داده‌های تعمیم یافته دو هدفی و تصویر نگاشت نقطه به مجموعه [۴] آمده است. در این مقاله الگوریتم نگاشت نقطه به مجموعه را برای تشخیص وجود تراکم در یک واحد و تعیین مقدار آن گسترش می‌دهیم. تراکم در ورودی زمانی صورت می‌گیرد که با افزایش آن ورودی و با ثابت نگه داشتن بقیه ورودی‌ها شاهد کاهش در یک یا چند خروجی بدون بهتر شدن سایر خروجی‌ها باشیم.

۲ مدل Bi-GDEA و تصویر نگاشت نقطه به مجموعه

برای DMU_{j_0}، با ورودی وخروجی (x_0,y_0)، مدل Bi-GDEA را در نظر می‌گیریم [۴]:

فرض کنیم n واحد داریم که s خروجی $(r=1,...,s;\ j=1,...,n)$ y_{rj} را با استفاده از m ورودی $(i=1,...,m;\ j=1,...,n)$ x_{ij} تولید می‌کنند پس X یک ماتریس ورودی m×n و Y یک ماتریس خروجی s×n است.

$$
\begin{aligned}
&Min \qquad h_0=(k_1\theta - k_2 z)\\
&(p)\ s.t.\\
&\begin{pmatrix} X\lambda-\theta x_0 \\ -Y\lambda+z y_0 \end{pmatrix}\in W^*,\\
&\delta_1(e^T\lambda+\delta_2(-1)^{\delta_3}\lambda_{n+1})=\delta_1,\\
&\lambda\in -K^*,\lambda_{n+1}\geq 0,\\
&\theta\leq 1, z\geq 1.
\end{aligned}
$$

$W\subseteq E^{m+s}$ یک مخروط محدب بسته و IntW≠Ø است. $W^*\subseteq E_+^{m+s}$ مخروط قطبی منفی از W است. $K\subseteq E_+^n$ یک مخروط محدب بسته و IntK≠Ø است همچنین $K^*\subseteq E^n$ مخروط قطبی از K است. $(k_1,k_2)^T$ $(k_1>0,k_2>0)$ وزن‌های مثبت هستند که کارایی تصمیم گیرنده‌ها روی کاهش ورودی‌ها و افزایش خروجی‌ها را به ترتیب توصیف می‌کند.

مقادیر مختلف از پارامترهای دودویی 0-1 ، $\delta_1,\delta_2,\delta_3$ باعث ایجاد مدل‌های تعمیم یافته Bi-GDEA مختلف می‌شوند. با فرض داشتن بردار ورودی و خروجی (x,y) برای هر DMU_j، مجموعه امکان تولید T به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$
T=\left\{(x,y)\,|\,\begin{pmatrix} X\lambda-x \\ -Y\lambda+y \end{pmatrix}\in W^*,\delta_1(e^T\lambda+\delta_2(-1)^{\delta_3}\lambda_{n+1})=\delta_1,\lambda\in -K^*,\lambda_{n+1}\geq 0\right\}
$$

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]

بنابراین برای وزن‌های مختلف (k_1,k_2)، تصویرهای مختلف از واحد تصمیم گیرنده مورد نظر بر روی مرز مجموعه امکان تولید به دست می‌آوریم. اجتماع این تصاویر تحت یک مدل Bi-GDEA یک زیر مجموعه از مرز تولید را تشکیل می‌دهد، که انتخاب‌های بهبود یافته کارا را فراهم می‌کند. ما این مجموعه را یک تصویر نگاشت نقطه به مجموعه می‌نامیم. برای DMU_{j_0}، با ورودی و خروجی (x_0,y_0)، یک نگاشت نقطه به مجموعه به وسیله‌ی

$$F:(x_0,y_0)\to F(x_0,y_0)=\{(\theta x_0,zy_0)\,|\,(\theta x_0,zy_0)\in T,\theta\le 1,z\ge 1\}$$

داده می‌شود، واضح است که $F(x_0,y_0)$ یک زیر مجموعه از مجموعه‌ی امکان تولید T، برای کاهش ورودی x_0 و افزایش خروجی y_0 است. همچنین در مقاله [۴] الگوریتمی برای ساختار تصویر نگاشت نقطه به مجموعه‌ی (x_0,y_0) تعریف می‌شود. به کمک این الگوریتم سعی می‌کنیم مدلی برای تعیین تراکم ارایه دهیم.

۳ مدل پیشنهادی برای تعیین میزان تراکم

مدل‌هایی که تا کنون برای تعیین وجود و میزان تراکم پیشنهاد شده‌اند همه بر پایه تعریف تراکم ساخته شده‌اند. اما در این‌جا ما یک نگاه جدید به مساله تراکم داریم. به کمک مدل Bi-GDEA و تصویر نگاشت نقطه به مجموعه آن و ترکیب آن با مدل‌های خروجی محور و ورودی محور برای تراکم در راستای هر ورودی به طور جداگانه، تصاویر واحد مورد نظر را روی مرز تراکم و شیب (ρ) خطوط یا ابر صفحه‌های ساخته شده از این تصاویر روی مرز تراکم را مشخص می‌کنیم. چنانچه این شیب منفی باشد، یعنی خط یا ابر صفحه مورد نظر روی مرز تراکم در حال نزول است که این نشان می‌دهد با افزایش ورودی مورد نظر شاهد کاهش خروجی هستیم پس در راستای این ورودی تراکم داریم که در ادامه شیوه‌ای برای محاسبه آن ارایه می‌دهیم.

مدل ارایه شده در جدول ۱ را برای تعیین تراکم ورودی kام در نظر بگیرید [۵]:

جدول ۱. مدلی برای تعیین تراکم ورودی Kام

	ورودی محور (P_{input})		خروجی محور (P_{output})	
Min	θ		$Max\ \ z$	
$s.t.$				
	$\sum_j x_{kj}\lambda_j=\theta x_{k\circ},$	$k=1,...,m,$	$\sum_j x_{ij}\lambda_j=x_{i\circ},$	$i=1,...,m,$
	$\sum_j x_{ij}\lambda_j=x_{i\circ},$	$i=1,...,m\ ,i\ne k,$	$\sum_j y_{rj}\lambda_j\ge y_{r\circ}z,$	$r=1,...,s,$
	$\sum_j y_{rj}\lambda_j\ge y_{r\circ},$	$r=1,...,s,$	$\sum_j \lambda_j=1,$	$j=1,...,n,$
	$\sum_j \lambda_j=1,$	$j=1,...,n,$	$\lambda_j\ge 0,$	$j=1,...,n.$
	$\lambda_j\ge 0,$	$j=1,...,n.$		

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]

برای تعیین تراکم DMU_{j_0} در جهت ورودی k ام $k = ۱,...,m$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:
اگر مقدار بهینه P_{input} برابر ۱ شود ، DMU_{j_0} در جهت ورودی k ام دارای تراکم نیست و اگر مقدار بهینه P_{input} در جهت ورودی k ام کمتر از 1 باشد الگوریتم زیر را برای تعیین وجود و میزان تراکم اجرا می‌کنیم.

الگوریتم تعیین تراکم

مرحله ۱: (i) فرض می‌کنیم $k_۱ = ۱$, $k_۲ = ۱$ و مساله زیر را حل می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
&Min \quad (\theta - z)\\
&(p_۱)\ s.t.\\
&\sum_j x_{kj}\lambda_j = \theta x_{k\circ}, && k = ۱,...,m,\\
&\sum_j x_{ij}\lambda_j = x_{i\circ}, && i = ۱,...,m\ , i \neq k,\\
&\sum_j y_{rj}\lambda_j \geq y_{r\circ} z, && r = ۱,...,s,\\
&\sum_j \lambda_j = ۱, && j = ۱,...,n,\\
&\lambda_j \geq ۰, && j = ۱,...,n,\\
&\theta \leq ۱\ ,\ z = ۱.
\end{aligned}
$$

که جواب بهینه برابر $(\theta_۱, z_۱)$ است.

(ii) فرض می‌کنیم $k_۱ = ۱$, $k_۲ = ۱$ و مساله زیر را حل می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
&Min \quad (\theta - z)\\
&(p_۲)\ s.t.\\
&\sum_j x_{ij}\lambda_j = x_{i\circ}, && i = ۱,...,m,\\
&\sum_j y_{rj}\lambda_j \geq y_{r\circ} z, && r = ۱,...,s,\\
&\sum_j \lambda_j = ۱, && j = ۱,...,n,\\
&\lambda_j \geq ۰, && j = ۱,...,n,\\
&\theta = ۱\ ,\ z \geq ۱.
\end{aligned}
$$

جواب بهینه برابر $(\theta_۲, z_۲)$ است. قرار می‌دهیم $l = ۲$

مرحله ۲: قرار می‌دهیم

$$k_۱^i = z_{i+۱} - z_i \ ,\ k_۲^i = \theta_{i+۱} - \theta_i \ ,\ \rho_i = \frac{k_۱^i}{k_۲^i} \ , i = ۱,۲,...,l-۱$$

برای $i = ۱,۲,...,l-۱$ ، حل می‌کنیم

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]

$$
\begin{aligned}
&Min && (k_1^i\theta - k_2^i z)\\
&(p(k_1^i, k_2^i)) \quad s.t. &&\\
&&\sum_j x_{kj}\lambda_j = \theta x_{k0}, \qquad & k = 1,\dots,m,\\
&&\sum_j x_{ij}\lambda_j = x_{i0}, \qquad & i = 1,\dots,m,\ i \neq k,\\
&&\sum_j y_{rj}\lambda_j \geq y_{r0} z, \qquad & r = 1,\dots,s,\\
&&\sum_j \lambda_j = 1, \qquad & j = 1,\dots,n,\\
&&\lambda_j \geq 0, \qquad & j = 1,\dots,n,\\
&&\theta \leq 1,\ z \geq 1. &
\end{aligned}
$$

جواب بهینه (θ_i', z_i') به دست می‌آید. اگر

$$\frac{\theta_i' - \theta_i}{\theta_{i+1} - \theta_i} = \frac{z_i' - z_i}{z_{i+1} - z_i} \qquad (1)$$

(θ_i', z_i') کنار گذاشته می‌شود. فرض کنید که $\bar{l}$ نقطه وجود داشته باشد که در (1) صدق نمی‌کند. اگر $\bar{l} = 0$ به مرحله ۳ می‌رویم، در غیر این صورت ادامه می‌دهیم. $\bar{l}$ جواب بهینه (θ_i', z_i') ، $i = 1,\dots,\bar{l}$ ، و l نقطه اصلی (θ_i, z_i)، $i = 1,\dots, l$ ، را بر حسب مولفه‌های اول به ترتیب غیر نزولی مرتب می‌کنیم:

$$\theta_1 \leq \theta_2 < \dots < \theta_{l+\bar{l}} = 1$$

قرار می‌دهیم $l = l + \bar{l}$ و به مرحله ۲ برمی‌گردیم.

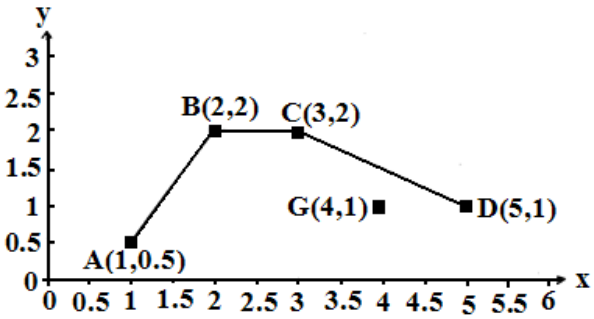
مرحله ۳: اگر $\rho_{l-1} < 0$ واحد تحت بررسی دارای تراکم است. و میزان تراکم به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\delta_K = x_{0K} - \theta_{l-1} x_{0K}$$

برای روشن شدن بیشتر عملکرد الگوریتم یک مثال برگرفته از مرجع [۵] را برای تعیین مقدار تراکم، با این روش حل می‌کنیم:

مثال ۱. واحدهای نشان داده شده در شکل ۱ با یک ورودی و یک خروجی را در نظر بگیرید. وجود تراکم در واحد G را بررسی می‌کنیم.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]



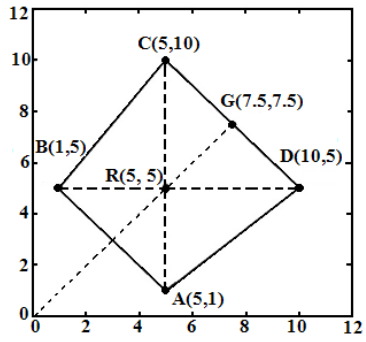
شکل ۱.

مقدار بهینه P_{input} برابر $\theta^*=۰/۳۳۳۳$ است، پس الگوریتم را برای آن اجرا می‌کنیم. در انتها چون $\rho_۳=-۲$ پس واحد تحت بررسی دارای تراکم است و میزان تراکم به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\delta_۱ = x_{۰۱} - \theta_{l-۱} x_{۰۱} = ۴ - ۰/۷۵ \times ۴ = ۱$$

که این جواب با جواب به دست آمده از روش کوپر در مرجع [۵] معادل است.

مثال ۲. فرض کنید شش واحد A,B,C,D,G,R با دو ورودی $x_۱, x_۲$ به صورت شکل ۲ داریم. خروجی واحد R برابر ۱۰=y است و خروجی دیگر واحد ها برابر ۱ است.



شکل 1.

پاسخ‌های داده شده به این مساله توسط کوپر و دیگران [۵ و۶] در جدول ۲ قابل مشاهده است.

جدول ۲.

DMU	A	B	C	D	G	R
φ^*	۱	۱	۱۰	۱۰	۱۰	۱
$S_۱^{-C*}$	۰	۰	۰	۵	۲/۵	۰
$S_۲^{-C*}$	۰	۰	۵	۰	۲/۵	۰

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]

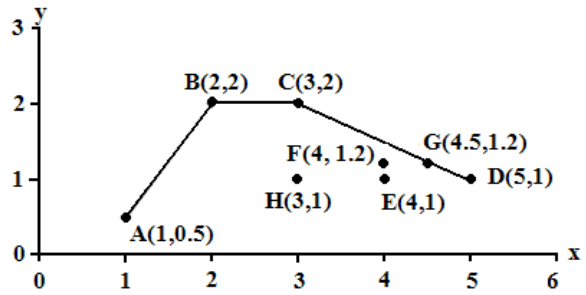
اکنون این مساله را با روش ارایه شده در این فصل حل می‌کنیم. پاسخ را در جدول ۳ آورده‌ایم:

جدول ۳.

واحد	k=1	k=2
A	$P_{input}=۱$	$P_{input}=۱$
	بدون تراکم	بدون تراکم
B	$P_{input}=۱$	$P_{input}=۱$
	بدون تراکم	بدون تراکم
R	$P_{input}=۱$	$P_{input}=۱$
	بدون تراکم	بدون تراکم
C	$P_{input}=۱$	$\rho_۲<۰$
	بدون تراکم	$\delta_۲=x_{۰۲}-\theta_۲x_{۰۲}=۵$
G	$\rho_۲<۰$	$\rho_۲<۰$
	$\delta_۱=x_{۰۱}-\theta_۲x_{۰۱}\simeq ۲/۵$	$\delta_۲=x_{۰۲}-\theta_۲x_{۰۲}\simeq ۲/۵$
D	$\rho_۲<۰$	$P_{input}=۱$
	$\delta_۱=x_{۰۱}-\theta_۲x_{۰۱}=۵$	بدون تراکم

همان‌طور که مشاهده می‌کنید جواب‌های به دست آمده از روش ما دقیقاً با جواب‌های روش کوپر که در جدول ۲ آمده است برابر است.

مثال ۳. اکنون مثالی برگرفته از مرجع [۱] را در نظر بگیرید.که در آن هشت واحد تصمیم گیرنده A,B,C,D,E,F,G,H با یک ورودی و یک خروجی داریم.



شکل 2.

این مثال توسط کوپر و همکاران [۷] حل شده است که پاسخ در جدول ۴ آمده مشاهده است.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]

جدول ٤.

DMU	A	B	C	D	E	F	G	H
S_i^{C*}	۰	۰	۰	۲	۱	۱	۱/۵	۰

در این‌جا این مثال را به وسیله الگوریتم پیشنهادی حل می‌کنیم. پاسخ را در جدول ۵ آورده‌ایم.

جدول ٥.

واحد	
A	$P_{input} = ۱$ بدون تراکم
B	$P_{input} = ۱$ بدون تراکم
C	$P_{input} = ۱$ بدون تراکم
H	$\rho_۱ > ۰,\ \rho_۲ = ۰$ بدون تراکم
D	$\delta_۱ = x_{۰۱} - \theta_{l-۱} x_{۰۱} = ۲$
E	$\delta_۱ = x_{۰۱} - \theta_{l-۱} x_{۰۱} = ۱$
F	$\delta_۱ = x_{۰۱} - \theta_{l-۱} x_{۰۱} = ۱$
G	$\delta_۱ = x_{۰۱} - \theta_{l-۱} x_{۰۱} = ۱/۵$

همان طور که مشاهده می‌کنید جواب‌های به دست آمده از روش ما با جواب‌های روش کوپر در جدول ۴ دقیقاً برابر است. با توجه به مثال‌های قبل و اجرای الگوریتم برای آن‌ها معمولاً در مورد واحدهایی که دارای تراکم نیستند با محاسبه مقدار بهینه P_{input}، اگر این مقدار برابر ۱ شود به راحتی می‌توان عدم وجود تراکم را نتیجه گرفت. همچنین برای واحدهای دارای تراکم غالباً با دوبار یا سه بار تکرار مرحله ۲ که در هر دفعه فقط نیاز است که مساله P_{input} حل شود می‌توان به وجود تراکم پی برد و در مرحله ۳ آن را محاسبه کرد.

٤ نتیجه‌گیری

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]

مدل‌های پایه‌ای تراکم در بعضی موارد نمی‌توانند وجود تراکم و میزان آن را به درستی تعیین کنند برای مثال در مساله حل شده بالا به کمک مدل FGL و یا به کمک مدل BCSW برای واحد G، تراکم مشخص نمی‌شود. روش ارایه شده در این مقاله می‌تواند میزان تراکم واحدها را در هر مساله به درستی تعیین کند. همچنین به کمک آن می‌توان معادله ابر صفحه‌ای که باعث ایجاد تراکم شده است تعیین کرد و به طور هم زمان می‌توان معادله ابر صفحه‌های کارا برای واحد مورد نظر را پیدا کرد. تغییرات جزیی در هر مرحله باعث ایجاد سرعت عمل در محاسبات می‌شود. در حالی که روش یک‌مرحله‌ای به مقدار ε وابسته است و در اصل سه مرحله را برای تعیین تراکم انجام می‌دهد.

منابع

[1] Wei, Q. L., Yu, G., (1997). Analyzing properties of K-cones in the generalized data envelopment analysis model. Journal of Econometrics 80.

[2] Yu, G., Wei, Q. L., Brockett, P., (1996). A generalized data envelopment analysis model: A unification and extension of existing methods for efficiency analysis of decision making units, Annals of Operations Research 66.

[3] Yu, G., Wei, Q. L., Brockett, P., Zhou, L., (1996). Construction of all DEA efficient surfaces of the production possibility set under the generalized data envelopment analysis model. European Journal of Operational Research 95.

[4] Wei, Q. L., Yan, H., Xiong, L., (2008). A bi-objective generalized data envelopment analysis model and point-to-set mapping projection. European Journal of Operational Research 190.

[5] Cooper, W. W., Seiford, L. M., Zhu, J. A., (2000). Unified additive model approach for evaluating inefficiency and congestion with associated measures in DEA. Socio-Economic Planning Sciences.

[6] Cooper, W. W., Seiford, L. M., Zhu, J. A., (2001). Slacks and congestion: a response to a comment by R. Färeand S. Grosskopf. Socio Economic Planning Sciences.

[7] Cooper, W. W., Deng, H., Huang, Z. M., Li, S. X., (2002). A one-model approach to congestion indataenvelopment analysis. Socio-Economic Planning Sciences.

[Downloaded from jamlu.lahijan.iau.ir on 2026-10-30]