

فرمول بهینه‌سازی پیشرفته ارزش فعلی

مهرداد گودرزوند چگینی^{۱*}، اسماعیل اقدامی^۲

۱- دانشیار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد رشت، گروه مدیریت، رشت، ایران

۲- مربی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد لاهیجان، گروه حسابداری، لاهیجان، ایران

رسید مقاله: ۱۸ آبان ۱۳۹۲

پذیرش مقاله: ۲۸ فروردین ۱۳۹۳

چکیده

در حال حاضر برای محاسبه ارزش فعلی اقساط نامساوی باید از محاسبات طولانی استفاده نمود. به عبارتی ارزش فعلی هر قسط باید جداگانه محاسبه و سپس از جمع مبالغ به ارزش فعلی کل دست یافت. در این مقاله روشی ارایه شده که در مواقعی که اختلاف بین پرداخت‌های متوالی ثابت است، می‌توان به واسطه این اختلاف ثابت محاسبات طولانی را حذف و سریع‌تر به پاسخ رسید. در این روش برای محاسبه ارزش فعلی اقساط نامساوی ابتدا اقساط به دو جزء تقسیم می‌شود و سپس ارزش فعلی آن محاسبه می‌شود. و در نهایت راه حل ارایه شده را به یک فرمول تعمیم دادیم. از این روش می‌تواند در محاسبه ارزش فعلی اقساط نامساوی کمک زیادی را ارایه نماید.

کلمات کلیدی: اقساط، نرخ بهره، اوراق قرضه، ارزش فعلی.

۱ مقدمه

استفاده از برخی مزیت‌ها در اقتصاد از جمله مدل‌های ارزش فعلی ما را قادر به حل راحت‌تر مسایل می‌کند [۱]. مدل ارزش فعلی کامل‌ترین ویژگی را در تعیین ارزش جریان‌ات نقدی دارد [۲]. اکثر یافته‌های اخیر حاکی از آن است که روند تغییرات قیمت به واسطه ارزش فعلی جریان‌ات آتی قابل تعیین است [۳]. مطالعاتی که در یک دوره کوتاه مدت در بورس اوراق بهادار آمریکا صورت گرفت موید این امر است [۴]. همچنین بر طبق یافته‌های اکثر مطالعات تجربی مدل ارزش فعلی تکنیکی مفید و ساده برای استفاده است [۵].

روش ارزش فعلی از متداول‌ترین کاربردهای ریاضیات مالی است. محاسبه ارزش فعلی (در زمان صفر یا در زمان حال) پرداخت‌هایی که در آینده صورت می‌گیرد در ارزیابی پروژه‌های سرمایه‌گذاری اهمیت دارد [۶]. از جمله کاربردهای دیگر ارزش فعلی می‌توان به سرمایه‌گذاری در سهام شرکت، خرید یک دارایی که منجر به درآمد یا درآمدهایی در آینده می‌شود، خرید اوراق مشارکت و نظایر آن اشاره کرد [۷].

* عهده دار مکاتبات

پست الکترونیکی: goodarzvand@iaurasht.ac.ir

ارزش فعلی در حالت‌های مختلفی قابل محاسبه است. در حال حاضر برای محاسبه ارزش فعلی هم می‌توان از فرمول و هم از جداول ارزش فعلی استفاده نمود. اما نکته قابل ذکر در این رابطه توجه به ویژگی اقساط است. به عبارتی توجه به مساوی یا نامساوی بودن اقساط. برای محاسبه ارزش فعلی اقساط مساوی می‌توان از فرمول زیر استفاده نمود [۷].

$$pv_{i,n} = A \times \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i}$$

که در آن: A مبلغ هر قسط، i نرخ بهره، n تعداد سال‌هاست. در شرایطی که اقساط نامساوی باشد برای محاسبه ارزش فعلی مجبوریم محاسبات طولانی‌تری را انجام دهیم. به عبارتی ارزش فعلی هر قسط جداگانه محاسبه و سپس از جمع مبالغ به ارزش فعلی کل برسیم. در این حالت می‌توان برای محاسبه ارزش فعلی اقساط نامساوی از فرمول زیر استفاده کرد.

$$pv_{i,n} = \frac{A_1}{(1+i)^1} + \frac{A_2}{(1+i)^2} + \frac{A_3}{(1+i)^3} + \dots + \frac{A_n}{(1+i)^n}$$

که در آن A_1 قسط اول، A_2 ، قسط دوم، A_3 ، قسط سوم، ... و A_n قسط n ام است. مشاهده می‌کنید که برای محاسبه ارزش فعلی اقساط نامساوی باید از محاسبات طولانی استفاده کنیم از این رو در شرایطی که اقساط طولانی باشد، امکان اشتباه زیاد خواهد شد. در این مقاله رویکردی ارائه شده که به واسطه آن در شرایطی که اختلاف بین پرداخت‌های متوالی یک مبلغ ثابتی است می‌توان از آن استفاده نمود. در ادامه با ذکر یک مثال نحوه کار ارائه می‌شود.

مثال: فرض کنید که نرخ بهره ۵٪ و اقساط پرداختی به شرح زیر باشد.

جدول ۱. محاسبه نرخ بهره و اقساط پرداختی

سال	مبلغ هر قسط	ارزش فعلی
۱	۵۴۰۰۰	۵۱۴۲۸۵.۷۱
۲	۵۳۴۰۰	۴۸۴۳۵۳.۷۴
۳	۵۲۸۰۰	۴۵۶۱۰۶.۲۵
۴	۵۲۲۰۰	۴۲۹۴۵۰.۶۹
۵	۴۱۶۰۰	۴۰۴۲۹۹.۵
۶	۵۱۰۰۰	۳۸۰۵۶۹.۸۵
۷	۵۰۴۰۰	۳۵۸۱۸۳.۳۹
۸	۴۹۸۰۰	۳۳۷۰۶۶
۹	۴۹۲۰۰	۳۱۷۱۴۷.۵۸
۱۰	۴۸۶۰۰	۲۹۸۳۶۱.۸۴
جمع	۵۱۲۰۰۰۰	۳۹۷۹۸۲۴.۵

همان‌طور که مشاهده می‌شود برای محاسبه ارزش فعلی اقساط نامساوی فوق مجبوریم مسیر طولانی را طی کنیم. در این روش ابتدا ارزش فعلی هر کدام از اقساط محاسبه شده و سپس از جمع مبالغ ارزش فعلی کل (۳۹۷۹۸۲۴/۵) محاسبه شد. حال اگر نرخ بهره تغییر کند مجبوریم برای محاسبه ارزش فعلی درباره این مسیر را طی کنیم. حال به بررسی رویکرد جدید می‌پردازیم.

بررسی اقساط نشان می‌دهد که اختلاف بین هر پرداخت ۶۰۰۰ ریال است. در واقع این اختلاف ناشی از بهره‌ای است که نسبت به مانده بدهی پرداخت می‌شود. از آنجایی که مانده بدهی در هر پرداخت کم می‌شود، در نتیجه کل پرداخت که شامل اصل و بهره است در حال کاهش است.

برای تحلیل بیشتر اقساط را به دو زیر مجموع تقسیم می‌کنیم. زیر مجموعه اول شامل اصل مبلغ (نرخ بهره / اختلاف بین پرداخت‌ها) و مبلغ اختلاف بین پرداخت‌هاست و زیر مجموعه دوم نیز از اختلاف بین مبلغ هر قسط و زیر مجموعه اول به دست می‌آید. مطالب فوق در جدول زیر ارایه شده است.

جدول ۲. تحلیل اقساط و نرخ بهره

سال	اقساط	اختلاف بین پرداخت‌ها	زیر مجموعه اول*	زیر مجموعه دوم**
۱	۵۴۰۰۰۰		۱۸۰۰۰۰	۳۶۰۰۰۰
۲	۵۳۴۰۰۰	۶۰۰۰	۱۷۴۰۰۰	۳۶۰۰۰۰
۳	۵۲۸۰۰۰	۶۰۰۰	۱۶۸۰۰۰	۳۶۰۰۰۰
۴	۵۲۲۰۰۰	۶۰۰۰	۱۶۲۰۰۰	۳۶۰۰۰۰
۵	۴۱۶۰۰۰	۶۰۰۰	۱۵۶۰۰۰	۳۶۰۰۰۰
۶	۵۱۰۰۰۰	۶۰۰۰	۱۵۰۰۰۰	۳۶۰۰۰۰
۷	۵۰۴۰۰۰	۶۰۰۰	۱۴۴۰۰۰	۳۶۰۰۰۰
۸	۴۹۸۰۰۰	۶۰۰۰	۱۳۸۰۰۰	۳۶۰۰۰۰
۹	۴۹۲۰۰۰	۶۰۰۰	۱۳۲۰۰۰	۳۶۰۰۰۰
۱۰	۴۸۶۰۰۰	۶۰۰۰	۱۲۶۰۰۰	۳۶۰۰۰۰

* نرخ بهره ÷ اختلاف بین پرداخت‌ها = اصل مبلغ → (تعداد سال‌ها مانده در ابتدای هر سال × اختلاف بین پرداخت‌ها) + مبلغ اصل = زیر مجموعه اول
 ** زیر مجموعه اول - مبلغ هر قسط = زیر مجموعه دوم

ارزش فعلی زیر مجموعه اول را می‌توان به کمک اختلاف بین پرداخت‌ها به کمک فرمول زیر محاسبه کرد.

$$\frac{\text{اختلاف بین پرداخت‌ها}}{\text{نرخ بهره}} \times \text{تعداد سال‌ها} = \frac{d}{i} \times n = \frac{6000}{5\%} \times 10 = 1200000$$

ارزش فعلی زیر مجموعه دوم که شامل اقساط مساوی است را می‌توان به کمک فرمول اقساط مساوی محاسبه نمود.

$$PV_{i,n} = A \times \frac{1}{i} \left(1 - \frac{1}{(1+i)^n} \right) \rightarrow = 360000 \times \frac{1}{5\%} \left(1 - \frac{1}{(1+i)^{10}} \right) = 2779824/5$$

در نتیجه از حاصل جمع دو مبلغ ارزش فعلی کل به دست می‌آید.

$$۱۲۰۰۰۰۰ + ۲۷۷۹۸۲۴/۵ = ۳۹۷۹۸۲۴/۵$$

حال رویکرد فوق را در قالب یک فرمول ارایه می‌دهیم.

۱-۱ فرمول

این رویکرد را می‌توانیم به فرمول تعمیم دهیم. برای شروع کار فرمول اقساط مساوی را دوباره بررسی می‌کنیم [۸].

$$PV_{i,n} = A \times \frac{1}{i} \left(1 - \frac{1}{(1+i)^n} \right)$$

جایی که A اولین پرداخت، i نرخ بهره و n تعداد پرداخت‌هاست.

در اقساط نامساوی سالانه اختلاف ثابتی بین پرداخت‌های متوالی وجود دارد که ما آن را d می‌نامیم. در زیر مجموعه اول ما از این اختلاف برای پیدا کردن مبلغ اصلی از هر پرداخت $(\frac{d}{i})$ استفاده کردیم و برای پیدا کردن ارزش فعلی زیر مجموعه اول از رابطه $(\frac{d}{i} \times n)$ استفاده نمودیم. در نتیجه باید آن را در فرمول اصلی لحاظ کنیم [۸].

همچنین ارزش فعلی زیر مجموعه دوم را می‌توانیم به وسیله فرمول اقساط مساوی محاسبه کنیم. با این شرط که پرداخت‌های مجموعه اول را نیز شامل شود. یعنی مبلغ اصلی $(\frac{d}{i})$ به اضافه بهره $(\frac{d}{i} \times n \times i = dn)$. از اینرو مبلغ اقساط مساوی از رابطه $(A = A_1 + \frac{d}{i} + nd)$ قابل محاسبه است. در نتیجه ارزش فعلی تجدید نظر شده چنین می‌تواند باشد [۸].

$$PV_{i,n} = \left(A_1 + \frac{d}{i} + nd \right) \frac{1}{i} \left(1 - \frac{1}{(1+i)^n} \right) - \frac{nd}{i}$$

جایی که A_1 اولین پرداخت، i نرخ بهره، n تعداد سال‌ها و d اختلاف بین پرداخت‌های متوالی است. از آنجایی که پرداخت‌ها کاهش است d منفی است. سایر متغیرها به شرح زیر است:

$$A_1 = ۵۴۰۰۰۰$$

$$i = ۵\%$$

$$n = ۱۰$$

$$d = -۶۰۰۰$$

$$PV_{۵\%,۱۰} = \left(۵۴۰۰۰۰ + \frac{-۶۰۰۰}{۵\%} + -۶۰۰۰ \times ۱۰ \right) \frac{1}{۵\%} \left(1 - \frac{1}{(1+۵\%)^{۱۰}} \right) - \frac{۱۰ \times -۶۰۰۰}{۵\%} = ۳۹۷۹۸۲۴/۵$$

در مثال فوق با توجه به اینکه اقساط کاهشی بودند d منفی بود. اما اگر اقساط افزایشی باشد d مثبت خواهد بود. برای بررسی مثال فوق را به شرح زیر تغییر می دهیم.

جدول ۳. محاسبه ارزش فعلی

سال	اقساط	ارزش فعلی
۱	۴۸۶۰۰۰	۴۶۲۸۵۷/۱
۲	۴۹۲۰۰۰	۴۴۶۲۵۸/۵
۳	۴۹۸۰۰۰	۴۳۰۱۹۱/۱۲
۴	۵۰۴۰۰۰	۴۱۴۶۴۲/۰۵
۵	۵۱۰۰۰۰	۳۹۹۵۹۸/۳۴
۶	۵۱۶۰۰۰	۳۸۵۰۴۷/۱۴
۷	۵۲۲۰۰۰	۳۷۰۹۷۵/۶۵
۸	۵۲۸۰۰۰	۳۵۷۳۷۱/۱۸
۹	۵۳۴۰۰۰	۳۴۴۲۲۱/۱۶
۱۰	۵۴۰۰۰۰	۳۳۱۵۱۳/۱۵
جمع	۵۱۲۰۰۰۰	۳۹۴۲۶۷۵/۴

جایی که:

$$A_1 = 486000, i = 5\%, n = 10, d = 6000$$

$$PV_{5\%, 10} = \left(486000 + \frac{6000}{5\%} + 6000 \times 10 \right) \frac{1}{5\%} \left(1 - \frac{1}{(1+5\%)^{10}} \right) - \frac{10 \times 6000}{5\%} = 3942675/4$$

۲ کاربرد فرمول در محاسبه ارزش فعلی اوراق قرضه

یکی از کاربردهای فرمول ارایه شده محاسبه ارزش منصفانه اوراق قرضه است. اگر متغیرهای A و d و i و n معلوم باشند به سادگی می توان ارزش فعلی اوراق قرضه را محاسبه کرد. برای تشریح بیشتر به مثال زیر توجه کنید.

فرض کنید شرکتی ۳۰۰۰۰۰ ریال اوراق قرضه را با نرخ بهره اسمی ۱۰٪ منتشر کرده است.

($K = 300000, r = 10\%$). اصل مبلغ (یعنی ۳۰۰۰۰۰ ریال) با ۱۵ قسط مساوی (۲۰۰۰۰ ریال) در پایان هر دوره

به اضافه بهره پرداخت می شود. سوال: اگر نرخ بهره بازار (i) ۸٪ و ۱۲٪ باشد ارزش فعلی چقدر خواهد بود؟

برای حل این سوال ابتدا جدول پرداخت اقساط را به شرح زیر تهیه می کنیم.

جدول ۴. محاسبه ارزش فعلی

سال	اصل مبلغ	بهره	کل مبلغ هر قسط	اختلاف بین پرداخت‌ها	ارزش فعلی با ۸٪	ارزش فعلی با ۱۲٪
۱	۲۰۰۰۰	۳۰۰۰۰	۵۰۰۰۰		۴۶۲۹۶/۳	۴۴۶۴۲/۸۵
۲	۲۰۰۰۰	۲۸۰۰۰	۴۸۰۰۰	۲۰۰۰	۴۱۱۵۲/۳	۳۸۲۶۵/۳
۳	۲۰۰۰۰	۲۶۰۰۰	۴۶۰۰۰	۲۰۰۰	۳۶۵۱۶/۳	۳۲۷۴۱/۸۹
۴	۲۰۰۰۰	۲۴۰۰۰	۴۴۰۰۰	۲۰۰۰	۳۲۳۴۱/۳	۲۷۹۶۲/۷۹
۵	۲۰۰۰۰	۲۲۰۰۰	۴۲۰۰۰	۲۰۰۰	۲۸۵۸۴/۵	۲۳۸۳۱/۹۲
۶	۲۰۰۰۰	۲۰۰۰۰	۴۰۰۰۰	۲۰۰۰	۲۵۲۰۶/۸	۲۰۲۶۵/۲۴
۷	۲۰۰۰۰	۱۸۰۰۰	۳۸۰۰۰	۲۰۰۰	۲۲۱۷۲/۶	۱۷۱۸۹/۲۷
۸	۲۰۰۰۰	۱۶۰۰۰	۳۶۰۰۰	۲۰۰۰	۱۹۴۴۹/۷	۱۴۵۳۹/۷۹
۹	۲۰۰۰۰	۱۴۰۰۰	۳۴۰۰۰	۲۰۰۰	۱۷۰۰۸/۵	۱۲۲۶۰/۷۴
۱۰	۲۰۰۰۰	۱۲۰۰۰	۳۲۰۰۰	۲۰۰۰	۱۴۸۲۲/۲	۱۰۳۰۳/۱۴
۱۱	۲۰۰۰۰	۱۰۰۰۰	۳۰۰۰۰	۲۰۰۰	۱۲۸۶۶/۵	۸۶۲۴/۲۸
۱۲	۲۰۰۰۰	۸۰۰۰	۲۸۰۰۰	۲۰۰۰	۱۱۱۱۹/۲	۷۱۸۶/۹
۱۳	۲۰۰۰۰	۶۰۰۰	۲۶۰۰۰	۲۰۰۰	۹۵۶۰/۱	۵۹۵۸/۵
۱۴	۲۰۰۰۰	۴۰۰۰	۲۴۰۰۰	۲۰۰۰	۸۱۷۱/۱	۴۹۱۰/۸۷
۱۵	۲۰۰۰۰	۲۰۰۰	۲۲۰۰۰	۲۰۰۰	۶۹۳۵/۳	۴۰۱۹/۳۲
جمع	۳۰۰۰۰۰	۲۴۰۰۰۰	۵۴۰۰۰۰		۳۳۲۲۰۲/۶	۲۷۲۷۰۲/۸۴

در جدول فوق با استفاده از رویکرد حاضر محاسبه ارزش فعلی مبالغ فوق با دو نرخ ۸٪ و ۱۲٪ ارایه شده است. حال با استفاده فرمول ارایه شده با دو نرخ ۸٪ و ۱۲٪ ارزش فعلی را محاسبه می‌کنیم. ابتدا متغیرهای مورد نیاز را تعیین می‌کنیم.

$$A_1 = \left[\frac{K}{n} + Kr \right] = \left[\frac{۳۰۰۰۰۰}{۱۵} + (۳۰۰۰۰۰ \times ۱۰\%) \right] = ۵۰۰۰۰$$

$$d = \left[-\frac{K}{n} \times r \right] = -\frac{۳۰۰۰۰۰}{۱۵} \times ۱۰\% = -۲۰۰۰$$

$$n = ۱۵, \quad i = ۸\%, \quad ۱۲\%$$

با در نظر گرفتن متغیرهای الگو و مرتب کردن دوباره آن، ارزش فعلی چنین خواهد بود:

$$PV_{i,r,n} = \frac{K}{n} \left[1 - \frac{r}{i} \right] \frac{1}{i} \left[1 - \frac{1}{(1+i)^n} \right] + \frac{r}{i} K \quad ^1$$

^۱ ریشه فرمول برای اوراق قرضه‌های که $A_1 = \frac{K}{n} + Kr$ و $d = -\frac{K}{n} \times r$ است چنین است:

$$\begin{aligned} PV_{i,n} &= \left(A_1 + \frac{d}{i} + nd \right) \frac{1}{i} \left[1 - \frac{1}{(1+i)^n} \right] - \frac{nd}{i} = \left[\left(\frac{K}{n} + Kr \right) + \frac{-\frac{K}{n}}{i} + n \left(-\frac{Kr}{n} \right) \right] \frac{1}{i} \left[1 - \frac{1}{(1+i)^n} \right] - \frac{n \left(\frac{Kr}{n} \right)}{i} \\ &= \left(\frac{K}{n} + Kr - \frac{Kr}{in} \right) \frac{1}{i} \left[1 - \frac{1}{(1+i)^n} \right] + \frac{Kr}{i} = \left(\frac{K}{n} - \frac{Kr}{in} \right) \frac{1}{i} \left[1 - \frac{1}{(1+i)^n} \right] + \frac{Kr}{i} \\ &= \frac{K}{n} \left(1 - \frac{r}{i} \right) \frac{1}{i} \left[1 - \frac{1}{(1+i)^n} \right] + \frac{r}{i} K \end{aligned}$$

ارزش فعلی با ۸٪:

$$PV_{8\%, 10\%, 15} = \frac{300000}{15} \left[1 - \frac{10\%}{8\%} \right] \frac{1}{8\%} \left[1 - \frac{1}{(1+8\%)^{15}} \right] + \frac{10\%}{8\%} 300000 = 332202 / 6$$

ارزش فعلی با ۱۲٪:

$$PV_{12\%, 10\%, 15} = \frac{300000}{15} \left[1 - \frac{10\%}{12\%} \right] \frac{1}{12\%} \left[1 - \frac{1}{(1+12\%)^{15}} \right] + \frac{10\%}{12\%} 300000 = 272702 / 8$$

۳ بحث و نتیجه گیری

مفاهیم و تکنیک‌های ارزش فعلی کاربردهای زیادی در حسابداری و مدیریت مالی دارد. در واقع استفاده از تکنیک‌های مختلف ارزش فعلی در محاسبات مالی کمک زیادی را به حل مسایل می‌کند. ارزش فعلی در حالت‌های مختلفی قابل محاسبه است. ارزش فعلی یک مبلغ، ارزش فعلی اقساط مساوی و ارزش فعلی اقساط نامساوی.

اما با توجه به اینکه در هیچ یک از متون تخصیصی حسابداری مالی در رابطه با محاسبه سریع ارزش فعلی اقساط نامساوی فرمولی ارایه نشده است، در نتیجه فرمول ارایه شده در این مقاله می‌تواند در محاسبه ارزش فعلی چنین اقساطی مفید واقع شود و کمک شایانی را به اساتید و دانشجویان این حوزه ارایه نماید.

منابع

- [۶] نیکو مرام، ه.، (۱۳۸۵). فریدون رهنمای رودپشتی و فرشاد هیبتی. مبانی مدیریت مالی، جلد دوم تهران، نشر ترمه، ۱۴۴-۱۴۶.
- [۷] مدرس، ا.، عبدالله‌زاده، ف.، (۱۳۷۸). مدیریت مالی. جلد اول تهران، شرکت چاپ و نشر بازرگانی، ۱۳۵-۱۴۶.
- [1] Campbell, J. Y., Shiller, R. J., (1987). Co-integration and Tests of the Present Value Models, Journal of Political Economy, 95(5), 1062-1088.
- [2] Gutiérrez, M. J., Vázquez, J., (2001). Switching Equilibria. The Present Value Model for Stock Prices Revisited, Electronic copy available at: <http://ssrn.com/abstract>.
- [3] Wisniewski, T. P., Building, K. E., (2008). Can Political Factors Explain the Behavior of Stock Prices Beyond the Standard Present Value Models?, Electronic copy available at: <http://ssrn.com/abstract>.
- [4] Bohl, M. T., Siklos, P. L., (2002). The Present Value Model of US Stock Prices Redux: A New Testing Strategy and Some Evidence, Electronic copy available at: <http://ssrn.com/abstract>.
- [5] Mercereau, B., Miniane, J., (2004). Challenging the Empirical Evidence from Present Value Models of the Current Account, Electronic copy available at: <http://ssrn.com/abstract>.
- [8] Tzur, J., et al., (2007). An advanced present value formula, Electronic copy available at: <http://ssrn.com/abstract>.