مجله ریاضیات کاربردی واحد لاهیجان، سال هشتم، شماره سوم (پیاپی ۳۰)، پاییز ۹۰، ص ص ۸۳-۷۵
شاپا ۶۰۸۳-۲۰۰۸

حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی خطی از مرتبه کسری با استفاده از چندجمله‌ای‌های برنشتاین

محسن میرزایی[1]، بهروز پارسا مقدم[2]،کاظم جلایی[3]
۱و۳- گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد آستارا
۲- دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد لاهیجان

چکیده
معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی خطی با ضرایب ثابت غیر همگن، از مرتبه اول و کسری، کاربردهای زیادی در علوم مهندسی دارند. تاکنون جواب‌های تحلیلی خیلی کمی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی خطی با ضرایب ثابت غیر همگن، از مرتبه کسری به دست آمده است و روش‌های عددی ارایه شده در بسیاری از روش‌ها پیچیده و مشکل می‌باشند. در این مقاله روش جدیدی ارایه شده که بر پایه ماتریس‌های عملگر از توابع برنشتاین می‌باشند که در یک چهار چوب خاصی به دست آمده می‌آیند. با به کارگیری ماتریس عملگر انتگرال، راه حل عددی جدید، برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی خطی با ضرایب ثابت غیر همگن و همگن از مرتبه اول و کسری، به دست آوردیم که با مثال‌های ارایه شده سادگی، وضوح و توانایی این روش نشان داده شده است. در این مقاله منظور از مشتقات کسری، مشتقات کسری کاپوتو می باشند و همواره $1 \leq \alpha > 0$ در نظر گرفته می شود.

کلمات کلیدی: مشتقات کسری، ماتریس عملگر، چند جمله‌ای‌های برنشتاین، روش‌های عددی، معادله لیاپانوف.

۱ مقدمه

استفاده از ماتریس عملگر تقریبی بر پایه توابع متعامد والش اولین بار توسط چن و هی سیاو ارایه شد [۱]. سپس، ماتریس عملگر بر اساس توابع پالس بلوکی توسط چن، تسای و ویو تعمیم داده شد [۲]. ماتریس عملگر لاگر توسط هانق و شیح [۳]، ماتریس عملگر لژاندر توسط وانق [۴]، ماتریس عملگر چیبیشف توسط پاراسکوپولوس [۵]، ماتریس عملگر فوریه توسط پاراسکوپولوس و همکارانش [۶] و اخیراً ماتریس عملگر موجک توسط چن و هی سیاو ارایه شده است [۷].
مهمترین شاخصه روش عملگر تبدیل معادله دیفرانسیل به یک معادله جبری است. این روش نه تنها مسایل را ساده‌تر می کند بلکه سرعت محاسبات را نیز بالا می برد.
با به کارگیری خاصیت انتگرالی ماتریس متعامد پایه $\phi(t)$، تقریبی به صورت زیر را ارایه می‌دهیم.

$$\int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t \phi(\xi)(d\xi)^k \cong Q_\phi^k \phi(t)$$

به طوری که $\phi(t)=[\vec{\phi}_0(t),\vec{\phi}_1(t),\cdots,\vec{\phi}_{m-1}(t)]$ به طوری که درایه‌های $\vec{\phi}_0(t),\vec{\phi}_1(t),\cdots,\vec{\phi}_{m-1}(t)$ نمایش گسسته‌ای از توابع پایه متعامد بر بازه $[0,1]$ و Q_ϕ ماتریس عملگر انتگرالگیر $\phi(t)$ می باشد.

هدف ما به دست آوردن روشی جدید برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی از مرتبه اول و کسری، همگن و غیرهمگن است برای این منظور از چند جمله‌ای‌های برنشتاین متعامد و سری فوریه بر پایه این چندجمله‌ها استفاده می‌کنیم. ساختار ماتریسی که به معادلات دیفرانسیل می‌دهیم ما را به سمت معادلات ماتریسی از جمله معادله لیاپانوف سوق می‌دهد که با روش‌های ارایه شده در این زمینه، می‌توان این نوع معادلات را با دقت بالا حل نمود [۸ و ۹].

۲ ویژگی‌های چندجمله‌ای‌های برنشتاین

چند جمله‌ای‌های برنشتاین از درجه m بر بازه $[0,1]$ به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۰]

$$B_{i,m}(x)=\binom{m}{i}x^{i}(1-x)^{m-1};\quad 0\le i\le m$$

به طوری که

$$\binom{m}{i}=\frac{m!}{i!(m-i)!}$$

چند جمله‌ای‌های برنشتاین فوق تعریف شده بر بازه $[0,1]$، $m+1$ تا چندجمله‌ای از درجه m می‌باشند.

برای راحتی کار، فرض می‌کنیم $B_{i,m}(x)=0$ برای $i<0$ یا $i>m$.

همچنین برای چند جمله‌ای‌های برنشتاین رابطه بازگشتی بر بازه $[0,1]$ به صورت زیر می‌باشد:

$$B_{i,m}(x)=(1-x)B_{i,m-1}(x)+xB_{i-1,m-1}(x)$$

و به آسانی می‌توان نشان داد، هر کدام از چندجمله‌ای‌های برنشتاین مثبت هستند و به ازای تمام مقادیرحقیقی بر بازه $[0,1]$ مجموع تمام چندجمله‌ای‌های برنشتاین برابر یک است یعنی:

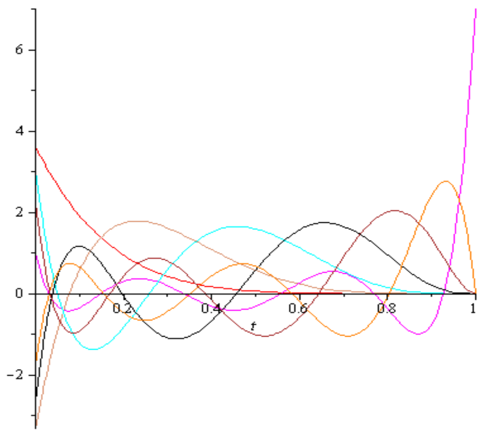
$$\forall x\in[0,1];\quad \sum_{i=0}^{m}B_{i,m}(x)=1$$

۳ تعامد چند جمله‌ای‌های برنشتاین

با استفاده از فرایند گرام – اشمیت برای چند جمله‌ای‌های برنشتاین و نرمال‌سازی آن‌ها بر روی بازه $[0,1]$، یک مجموعه متعامدی که از چندجمله‌ای‌های برنشتاین به دست می‌آوریم و آن‌ها را به صورت زیر نامگذاری می‌کنیم:

$$b_{0,m}, b_{1,m}, \ldots, b_{m,m}$$

که در آن m تعداد چند جمله‌ای‌های برنشتاین موجود در پایه می باشد [۱۰].



شکل ۱. نمودار چندجمله‌ای‌های متعامد برنشتاین برای $m=7$

هر تابع دو بعدی $y(x,t)$ که بر بازه $0 \le x \le 1$ و $0 \le t \le 1$ انتگرالپذیر از مرتبه دو باشد، دارای سری فوریه‌ای به صورت زیر خواهد بود:

$$y(x,t)=\sum_{i}^{m-1}\sum_{j}^{m-1} c_{ij} b_i(x) b_j(t) \tag{1}$$

به طوری که

$$c_{ij}=\int_0^1\int_0^1 y^2(x,t) b_i(x) b_j(t)\, dx\, dt \tag{2}$$

بسط (۱) را می‌توان به صورت ساختار گسسته و ماتریسی زیر بیان کرد:

$$Y(x,t)=B^T(x).C.B(t) \tag{3}$$

که در آن

$$B=\begin{bmatrix} b_0^T \\ b_1^T \\ \vdots \\ b_{m-1}^T \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} & \cdots & b_{0,m-1} \\ b_{1,0} & b_{1,1} & \cdots & b_{1,m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m-1,0} & b_{m-1,1} & \cdots & b_{m-1,m-1} \end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & \cdots & c_{0,m-1} \\ c_{1,0} & c_{1,1} & \cdots & c_{1,m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m-1,0} & c_{m-1,1} & \cdots & c_{m-1,m-1} \end{bmatrix}$$

که در آن C ماتریس ضرایب می‌باشد.

همچنین $Y^T=[y_0, y_1, ..., y_{m-1}]$ ساختار گسسته از تابع پیوسته $y(x,t)$ می باشد مقادیر $y_i\,;\ 0\le i\le m-1$ نمونه برداری از خم پیوسته $y(x,t)$ در المانی به ابعاد $\frac{1}{m}\times\frac{1}{m}$ می باشد.

٤ روش پیشنهادی برای حل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی مرتبه اول و مرتبه کسری غیر همگن با ضرایب ثابت

با توجه به تعریف ماتریس عملگر داریم:

$$\frac{d^\alpha B}{dt^\alpha}=Q_B^{-\alpha}B \qquad (۴)$$

که در آن $Q_B^{-\alpha}$ ماتریس عمگر حاصل از چندجمله‌ای‌های متعامد برنشتاین می‌باشد، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}(\frac{\partial}{\partial t})^\alpha Y &= (\frac{\partial}{\partial t})^\alpha (B^T(x).C.B(t)) \\ &= B^T(x).C.[(\frac{\partial}{\partial t})^\alpha B(t)] \\ &= B^T(x).C.Q_B^{-\alpha}B(t)\end{aligned}$$

در نتیجه

$$(\frac{\partial}{\partial t})^{-\alpha} Y = B^T(x).C.Q_B^{\alpha}B(t) \qquad (۵)$$

همچنین به طور مشابه می توان نتیجه گرفت:

$$(\frac{\partial}{\partial x})^{-\beta} Y = B^T(x).(Q_B^{\beta})^T.C.B(t) \qquad (۶)$$

$$(\frac{\partial}{\partial t})^{-\alpha}(\frac{\partial}{\partial x})^{-\beta} Y = B^T(x)(Q_B^{\beta})^T.C.Q_B^{\alpha}B(t) \qquad (۷)$$

لازم به ذکر است مشابه این روابط برای چندجمله‌های متعامد موجک‌ها در منبع [۱۱] ارایه شده‌اند.

حال روش پیشنهادی را برای حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی خطی از مرتبه اول همگن و غیر همگن به کار می‌بریم.

ابتدا مساله را در حالت کلی برای معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی مرتبه اول غیر همگن بررسی می‌کنیم:

$$\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial t}=q(x,t) \qquad x,t>0 \tag{۸}$$

با شرط اولیه $y(x,0)=f(x)$ و شرط مرزی $y(0,t)=h(t)$.

ابتدا از رابطه (۸) نسبت به t انتگرال می‌گیریم:

$$\int_0^t \frac{\partial y}{\partial x}\,dt + y(x,t)-y(x,0)=\int_0^t q(x,t)\,dt \tag{۹}$$

سپس از رابطه (۹) نسبت به x انتگرالگیری می‌کنیم و به دست می‌آوریم:

$$\int_0^x\int_0^t \frac{\partial y}{\partial x}\,dt\,dx+\int_0^x y(x,t)dx-\int_0^x y(x,0)dx=\int_0^x\int_0^t q(x,t)\,dt\,dx \tag{۱۰}$$

یا

$$\int_0^t [y(x,t)-y(0,t)\,dt+\int_0^x y(x,t)dx-\int_0^x y(x,0)dx=\int_0^x\int_0^t q(x,t)\,dt\,dx$$

با اعمال شرایط اولیه و مرزی خواهیم داشت:

$$\int_0^t y(x,t)\,dt+\int_0^x y(x,t)dx=\int_0^t h(t)\,dt+\int_0^x f(x)dx+\int_0^x\int_0^t q(x,t)\,dt\,dx \tag{۱۱}$$

طرف دوم رابطه (۱۱) تابعی دو متغیره از x و t می‌باشد لذا فرض می‌کنیم:

$$g(x,t)=\int_0^t h(t)\,dt+\int_0^x f(x)dx+\int_0^x\int_0^t q(x,t)\,dt\,dx \tag{۱۲}$$

در نتیجه معادله (۸) به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\int_0^t y(x,t)\,dt+\int_0^x y(x,t)dx=g(x,t) \tag{۱۳}$$

حال فرض می‌کنیم:

$$G(x,t)=B^T(x).C_g.B(t) \tag{۱۴}$$

$$Y(x,t)=B^T(x).C_y.B(t) \tag{۱۵}$$

با قرار دادن روابط (۵)، (۶)، (۱۴)و (۱۵) در معادله (۱۳) خواهیم داشت:

$$B^T(x).C_yQ_B.B(t)+B^T(x).C_y.Q_B^T B(t)=B^T(x).C_g.B(t) \tag{۱۶}$$

با ضرب جملات رابطه فوق از راست در $B^T(t)$ و از چپ در $B(x)$ به دست می‌آوریم:

$$C_yQ_B+Q_B^TC_y=C_g \tag{۱۷}$$

معادله حاصله، معادله لیاپانوف می‌باشد که به کمک نرم‌افزارهای ریاضی، قابل حل می‌باشد.

مثال ۱. معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی خطی

$$\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial t}=0 \qquad x,t>0 \tag{۱۸}$$

با شرایط اولیه و مرزی $y(x,0)=x^2, y(0,t)=t$ را بررسی می کنیم [۱۱].

حل: در این مثال $h(t)=t, q(x,t)=0$ و $f(x)=x^2$ می باشد لذا از رابطه (۱۲) خواهیم داشت:

$$g(x,t)=\int_0^t t\ dt+\int_0^x x^2 dx=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}x^3$$

با استفاده از رابطه (۲) ماتریس ضرایب C_g را برای $0\le i,j\le 6$ به دست می‌آوریم:

$$C_g=\begin{bmatrix} 0.0002386392 & 0.001773906 & 0.006517812 & 0.01491415 & 0.02366776 & 0.02688464 & 0.1860483 \\ 0.0005221245 & 0.002325838 & 0.007281398 & 0.01551632 & 0.02380869 & 0.02661247 & 0.01829465 \\ 0.001673882 & 0.004211872 & 0.01008040 & 0.01871642 & 0.02674297 & 0.02883851 & 0.01952690 \\ 0.004488762 & 0.007922722 & 0.01497132 & 0.02416226 & 0.03184793 & 0.03288423 & 0.02184795 \\ 0.008745009 & 0.01265186 & 0.02025875 & 0.02936426 & 0.03622292 & 0.03602563 & 0.02353533 \\ 0.01174987 & 0.01531814 & 0.02217282 & 0.02996167 & 0.03533037 & 0.03422619 & 0.02209248 \\ 0.008912918 & 0.01111581 & 0.01535250 & 0.02004811 & 0.02311280 & 0.02209248 & 0.01417234 \end{bmatrix}$$

ماتریس عملگر برنشتاین برای $m=7$ عبارتست از:

$$Q_{B_{7\times7}}=\begin{bmatrix} 0.13265306 & 0.25343253 & 0.21933299 & 0.19502182 & 0.16442081 & 0.12749845 & 0.073561239 \\ -0.0093863899 & 0.11224490 & 0.21998022 & 0.17501089 & 0.15272691 & 0.11664387 & 0.067942607 \\ 0.0014150515 & -0.016921555 & 0.091836735 & 0.18407361 & 0.12943473 & 0.10925738 & 0.059833024 \\ -0.0003403522 & 0.0040700206 & -0.02208883 & 0.071428571 & 0.14488359 & 0.083130625 & 0.058494502 \\ 0.00011506005 & -0.0013759181 & 0.007467388 & -0.024147264 & 0.051020408 & 0.10099616 & 0.036126949 \\ -0.000049513962 & 0.00059210087 & -0.0032134523 & 0.010391328 & -0.021955688 & 0.10099616 & 0.036129649 \\ 0.000021440175 & -0.00025638720 & 0.0013914654 & -0.0044995771 & 0.0095070917 & -0.013255491 & 0.010204082 \end{bmatrix}$$

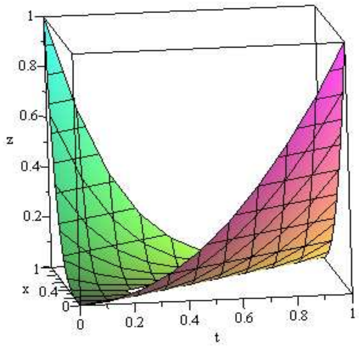
با قرار دادن ماتریس‌های C_g و $Q_{B_{7\times7}}$ در معادله لیاپانوف (۱۷) و حل آن ، ماتریس C_y حاصل می‌شود.

$$C_y=\begin{bmatrix} 0.0010940198 & 0.0072704176 & 0.024112522 & 0.051168866 & 0.069449980 & 0.056297444 & 0.062775871 \\ 0.0013019732 & 0.0011956248 & 0.0042159360 & 0.0093968004 & 0.029471374 & 0.038228992 & -0.0037769908 \\ 0.0061849064 & 0.0050590847 & 0.010480002 & 0.011181242 & 0.0059921469 & 0.023412791 & 0.030883627 \\ 0.017356903 & 0.0074402351 & 0.017632392 & 0.024904561 & 0.023899247 & 0.011122693 & -0.0019857248 \\ 0.029941652 & 0.015886097 & 0.016680357 & 0.030084053 & 0.028336015 & 0.027084127 & 0.031358008 \\ 0.029771621 & 0.019762331 & 0.021078411 & 0.020681156 & 0.030043635 & 0.017151686 & 0.0075736775 \\ 0.036045085 & -0.0016910031 & 0.026667630 & 0.0089048978 & 0.027598665 & 0.011352418 & 0.030016994 \end{bmatrix}$$

تقریبی از $y(x,t)$، به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$Y_{7,7}(x,t)=B_{7,7}^T(x).C_{7\times7}.B_{7\times7}(t)$$

نمودار $Y_{7\times7}(x,t)$ در شکل (۲) نشان داده شده است.

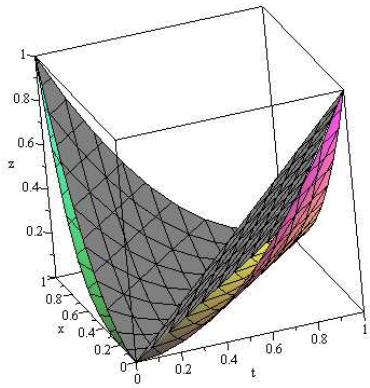


شکل ۲. جواب تقریبی حاصل از حل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی
$\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial t}=\circ\,; y(x,\circ)=x^{۲}, y(\circ,t)=t\,, x,t>\circ$ برای $m=۷$

جواب دقیقی که از حل تحلیلی به دست می‌آید عبارت است از

$$y(x,t)=[t-x-(t-x)^{۲}]u(t-x)+(t-x)^{۲} \qquad (۱۹)$$

به طوری که $u(.)$ تابع هویساید می‌باشد. نمودار رابطه (۱۹) برای مقایسه در شکل (۳) آورده شده است.



شکل ۳. جواب تقریبی به همراه جواب دقیق حاصل از حل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی
$\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial t}=\circ\,; y(x,\circ)=x^{۲}, y(\circ,t)=t \quad x,t>\circ$ برای $m=۷$.

لازم به یادآوری است که برای $m\geq ۲۰$ جواب‌ها از دقت فوق العاده بالا برخوردار می‌باشند.

مثال ۲. معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی خطی

$$\frac{\partial^{\frac{۱}{۲}} y}{\partial x^{\frac{۱}{۲}}}+\frac{\partial^{\frac{۱}{۲}} y}{\partial t^{\frac{۱}{۲}}}=۱ \qquad x,t>\circ \qquad (۲۰)$$

با شرایط اولیه و مرزی $y(x,\circ)=\circ, y(\circ,t)=\circ$ را بررسی می کنیم [۱۱].

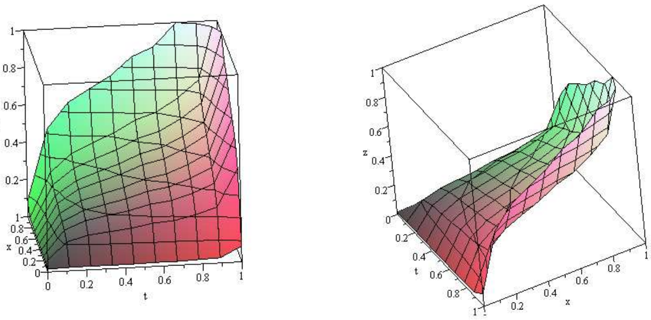
حل: با استفاده از روابط(۵)، (۶) و (۷) و ساده کردن به دست می‌آوریم:

$$C_y Q_B^{\frac{1}{2}} + (Q_B^T)^{\frac{1}{2}} C_y = (Q_B^T)^{\frac{1}{2}} .J .Q_B^{\frac{1}{2}} \qquad (21)$$

که در آن J یک ماتریس $m\times m$ با درایه های یک می‌باشد.با حل معادله لیاپانوف نتیجه لازمه به دست می‌آید:

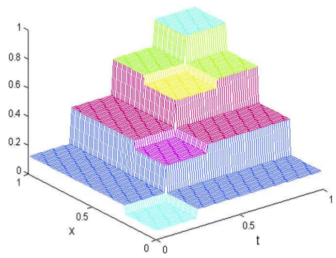
$$y(x,t) \approx Y_{m\times m}(x,t) = B^T(x).C_y.B(t)$$

با در نظر گرفتن $m=10$، نمودار $Y_{10\times 10}(x,t)$ در شکل (۴) نشان داده شده است.



شکل ٤. جواب تقریبی حاصل از حل معادله (۲۰) با شرایط مرزی $y(x,0)=0, y(0,t)=0$ در حالتی که $m=10$ می‌باشد

با توجه به اینکه جواب دقیق را نداریم می‌توان نتیجه به دست آمده را، با جواب ارایه شده در مقاله [۱۱] مقایسه کرد (به شکل(۵) مراجعه شود).



شکل ۵. جواب تقریبی به دست آمده برای معادله (۲۰) با استفاده از چند جمله‌ای‌های متعامد موجک‌ها

۵ بحث

در این مقاله، روشی عددی برای حل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی غیرهمگن از مرتبه اول و مرتبه کسری پیشنهاد شده است. اساس این روش، ماتریس‌های عملگر از توابع متعامد برنشتاین می‌باشد. در این مقاله حالت کلی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی مرتبه اول غیرهمگن مورد بررسی قرار گرفته و کارایی آن به وسیله

مثال نشان داده شده است. سپس روش پیشنهادی را برای حل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی غیرهمگن از مرتبه کسری به کار گرفتیم .ویژگی‌های مفیدی که این روش دارد این است که اولاً بسیار ساده می‌باشد. ثانیاً قابلیت این را دارد که به صورت برنامه کامپیوتری آورده شود. ثالثاً روش پشنهادی، روش پایداری است که با افزایش گام‌ها جواب‌ها ،بهبود می‌یابند و دقیق‌تر می‌شوند.

منابع

[1] Chen, C. F., Hsiao, C. H., (1975). Design of piecewise constant gains for optimal control via Walsh functions. IEEE Transactions on Automatic Control, AC-20, 5, 596-603.

[2] Chen, C. F., Tsay, Y. T., Wu, T. T., (1977). Walsh operational matrices for fractional calculus and their application to distributed parameter systems. Journal of Franklin Institute, 503(3), 267-284.

[3] Shih, D. S., Kung, F.C., Chao, C. M., (1997). Laguerre series approach to the analysis of a linear control system incorporation observers. Int. J. Control, 43(1), 123-128.

[4] Chang, R. Y., Wang, M. L., (1984). Legendre polynomials approximation to dynamic linear state equations with initial or boundary value conditions. Int. J. Control, 40(1), 215-232, 1984.

[5] Paraskevopoulos, P. N., (1983). Chebyshev series approach to system identification, analysis and optimal control. J. Franklin Inst., 316, 135-157.

[6] Paraskevopoulos, P. N., Sparis, P. D., Mouroutsos, S. G., (1985). The Fourier series operational matrix of integration. Int. J. System Sci., 16(2), 171-176.

[7] Chen, C. F., Hsiao, C. H., Haar wavelet method for solving lumped and distributed-parameter systems. IEE Proc. Control Theory Appl., 144(1), 87-94.

[8] Bartels, R. H., Stewart, G. W., (1972). Solution of the matrix equation AX + XB = C, Communications of the ACM 15, 669–713.

[9] Teukolsky, S. A., Vettering, W. T., Flannery, B. P., (1992). Numerical Recipes in C, The Art of Scientific Computing, Second ed., W.H. Press.

[10] Singh, A. K., Singh, V. K., Singh, O. P., (2009). The Bernstein Operational Matrix of Integration. Applied mathematical, 3(49), 2427-2436.

[11] Wu, J. L., (2009). A wavelet operational method for solving fractional partial differential equations numerically, Applied Mathematics and Computation, 214, 31–40.