

## تصمیم‌سازی بهینه در مدل گاما گزینش شده تحت یک تابع زیان تعمیم یافته

آزاده کیاپور\*<sup>۱</sup>، مهران نقی‌زاده قمی<sup>۲</sup>

۱- استادیار، دانشگاه آزاد، واحد بابل، دانشکده علوم پایه، گروه آمار

۲- استادیار، دانشگاه مازندران، دانشکده علوم ریاضی، گروه آمار

رسید مقاله: ۱۶ اردیبهشت ۱۳۹۶

پذیرش مقاله: ۱۹ مهر ۱۳۹۶

### چکیده

فرض کنید  $\Pi_1$  و  $\Pi_2$  دو جامعه گامای مستقل باشند که در آن  $\Pi_i$  دارای پارامتر مقیاس نامعلوم  $\theta_i$  و پارامتر شکل معلوم و مشترک  $\alpha$  باشد. با فرض این که  $X_1$  و  $X_2$  به‌طور تصادفی به ترتیب از جوامع  $\Pi_1$  و  $\Pi_2$  استخراج شوند و جامعه متناظر با مشاهده  $X_{(1)} = \max(X_1, X_2)$  یا  $X_{(2)} = \min(X_1, X_2)$  گزینش شود. هدف از این مقاله، یافتن تصمیم‌های بهینه برای پارامترهای مقیاس  $\theta_M$  و  $\theta_r$  از جامعه گامای گزینش شده تحت یک تابع زیان ناوردای مقیاس تعمیم یافته می‌باشد. به این منظور، تصمیم‌های پذیرفتنی و ناپذیرفتنی به فرم  $cX_{(1)}$  یا  $cX_{(2)}$  را در زیر کلاسی از تصمیم‌های ناوردای  $\theta_M$  یا  $\theta_r$  به دست می‌آوریم. همچنین تصمیم‌های بیز و بیز تعمیم یافته  $\theta_M$  و  $\theta_r$  را به دست آورده و نشان می‌دهیم که تصمیم‌های خطی پذیرفتنی هستند. نتایج به دست آمده را برای داده‌های سانسور شده و همچنین برای توزیع‌های رایلی و وایبول به کار می‌بریم.

**کلمات کلیدی:** تصمیم پذیرفتنی، توزیع گاما، داده‌های سانسور شده.

### ۱ مقدمه

در استنباط آماری و در مقوله برآورد پارامترهای یک یا چند جامعه، معمولاً پارامترهایی که قرار است برآورد شوند، قبل از جمع‌آوری نمونه، مشخص هستند و پس از جمع‌آوری نمونه، با استفاده از روش‌های معمول برآوردیابی مانند روش‌های گشتاوری و ماکسیمم درست‌نمایی، برآورد می‌شوند [۱]. همچنین تصمیم‌هایی مانند تصمیم‌های پذیرفتنی و مینیماکس را برای آن به دست می‌آورند؛ ولی در بعضی از مسائل آماری، پارامتر مورد نظر برای برآورد، قبل از جمع‌آوری نمونه، مشخص نیست و بر اساس نمونه‌هایی که برای استنباط مورد استفاده قرار می‌گیرند، مشخص (گزینش) می‌شود. فرض کنید کارخانه‌ای  $k$  ماشین مختلف تولید می‌کند و

\* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: kiapour@baboliau.ac.ir

می خواهد ماشینی با متوسط طول عمر بالا به خریدار بفروشد؛ بنابراین خریدار، علاقه مند است بر آوردی از متوسط طول عمر ماشین خریداری شده از کارخانه را در اختیار داشته باشد.

در دهه های اخیر، مساله بر آورد پارامترهای جامعه گزینش شده مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است. خوانندگان علاقه مند می توانند به میسرا و همکاران [۲]، کومار و همکاران [۳] و نقی زاده قمی و همکاران [۴] مراجعه نمایند.

برای فرمول بندی مساله، فرض کنید  $X_1$  و  $X_2$  دو متغیر تصادفی مستقل مستخرج از جامعه های  $\Pi_1$  و  $\Pi_2$  با توزیع گاما به ترتیب با پارامترهای مقیاس  $\theta_1$  و  $\theta_2$  و پارامتر شکل مشترک و معلوم  $\alpha$  با تابع چگالی احتمال زیر:

$$f(x|\theta_i, \alpha) = \frac{1}{\theta_i^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\theta_i}}, x > 0, \alpha > 0, \theta_i > 0, i = 1, 2. \quad (1)$$

و  $X_{(1)} = \min(X_1, X_2)$  و  $X_{(2)} = \max(X_1, X_2)$  باشند. جامعه متناظر با بزرگ ترین (کوچک ترین) پارامتر مقیاس، بهترین جامعه نامیده می شود. برای گزینش بهترین جامعه، قاعده گزینش طبیعی به این صورت است که جامعه متناظر با  $X_{(1)}$  (گزینش می شود. پارامترهای متناظر با بهترین جامعه عبارتند از:

$$\theta_M = \begin{cases} \theta_1 & X_1 \geq X_2 \\ \theta_2 & X_1 < X_2 \end{cases}, \quad \theta_J = \begin{cases} \theta_1 & X_1 \leq X_2 \\ \theta_2 & X_1 > X_2 \end{cases} \quad (2)$$

لازم به ذکر است که بر آوردگرهای  $X_{(1)}$  و  $X_{(2)}$  به ترتیب بر آوردگرهای ماکسیمم درست نمایی برای پارامترهای  $\theta_M$  و  $\theta_J$  هستند.

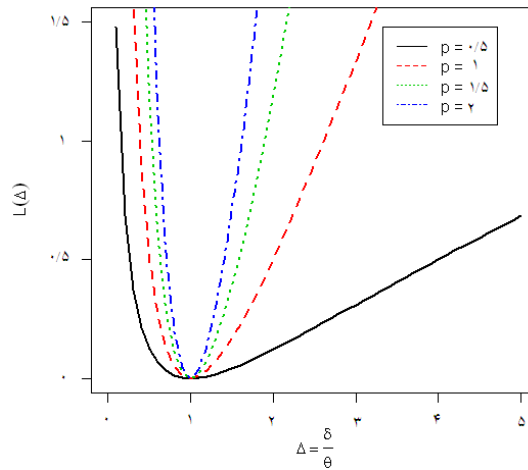
برای فهم بهتر مساله، دو دستگاه را در نظر بگیرید که به طور مستقل قطعاتی با طول عمر  $\theta_1$  و  $\theta_2$  تولید می کنند. فرض کنید  $X_1$  و  $X_2$  به ترتیب طول عمر یک قطعه انتخابی به طور تصادفی از دستگاه شماره ۱ و ۲ باشند. اگر  $X_1 \geq X_2$ ، آن گاه  $\theta_1$  و در غیر این صورت  $\theta_2$  پارامتر جامعه گزینش شده خواهد بود. بنابراین  $\theta_M$  که یک پارامتر تصادفی است، پارامتر جامعه گزینش شده خواهد بود و مهندس کارخانه علاقه مند به بر آورد آن است.

مساله بر آورد پارامترهای جامعه گامای گزینش شده توسط ولایسامی و شارما [۵] و ولایسامی [۶] تحت تابع زیان توان دوم خطا آغاز شد. میسرا و همکاران [۷] نتایج پذیرفتنی و ناپذیرفتنی ولایسامی و شارما [۵] را برای مقادیر دلخواه و معلوم پارامتر شکل توزیع گاما تعمیم دادند. نعمت الهی و معتمد شریعتی [۸] به بر آوردیابی پارامتر مقیاس جامعه گامای گزینش شده تحت تابع زیان آنتروپی پرداختند. در این مقاله، به بر آوردیابی پارامتر مقیاس جامعه ی گامای گزینش شده تحت تابع زیان ناوردای مقیاس تعمیم یافته به فرم زیر:

$$L(\theta, \delta) = \left[ \left( \frac{\delta}{\theta} \right)^{\frac{p}{2}} - \left( \frac{\theta}{\delta} \right)^{\frac{p}{2}} \right]^2 = \left( \frac{\delta}{\theta} \right)^p + \left( \frac{\theta}{\delta} \right)^p - 2 = \Delta^p + \frac{1}{\Delta^p} - 2 \quad (3)$$

پرداخته می شود. شکل ۱ تابع زیان (۳) را برای مقادیر انتخابی  $p$  نشان می دهد. تابع زیان (۳) یک تابع اکیداً محدب بوده و به عنوان تابعی از  $\Delta$  دارای مینیمم یکتا در نقطه  $\Delta = 1$  می باشد. همچنین برای مقادیر کوچک (بزرگ)  $p$ ، تابع زیان، تابعی نامتقارن (متقارن) است.

در بخش دوم، تصمیم های پذیرفتنی  $\theta_M$  و  $\theta_J$  داده شده در رابطه (۲) را در کلاس برآوردگرهای ناوردا به فرم  $cX_{(1)}$  و  $cX_{(2)}$  به دست می آوریم. در بخش سوم، تصمیم های بیز و بیز تعمیم یافته  $\theta_M$  و  $\theta_J$  را به دست می آوریم. یک محاسبه عددی برای مقایسه برآوردگرها در بخش ۴ انجام شده است. نتایج به دست آمده را با داده های سانسور شده نوع دوم و همچنین در توزیع های رایلی و وایبول به کار می بریم. در پایان به بحث و نتیجه گیری پرداخته می شود.



شکل ۱. نمودار تابع زیان (۳) برای مقادیر مختلف  $p$

## ۲ کلاس تصمیم های پذیرفتنی خطی

فرض کنید  $X_1$  و  $X_2$  دو متغیر تصادفی مستقل باشند به طوری که  $X_i$ ،  $i=1,2$  دارای تابع چگالی احتمال گاما داده شده در (۱) باشد. مساله برآورد پارامترهای تصادفی نامعلوم  $\theta_M$  و  $\theta_J$  تحت تابع زیان (۳) نسبت به گروه تبدیل های مقیاس و جایگشتی، ناوردا است؛ بنابراین طبیعی است تنها برآوردگرهای  $\delta$  که ناورداست مقیاس و جایگشتی هستند، یعنی برآوردگرهایی را که در دو شرط زیر صدق می کنند مورد بررسی قرار دهیم.

$$1) \delta(X_1, X_2) = \delta(X_2, X_1),$$

$$2) \delta(cX_1, cX_2) = c\delta(X_1, X_2), c > 0$$

فرض کنید  $X_{(1)} = \min(X_1, X_2)$  و  $X_{(2)} = \max(X_1, X_2)$  باشند. در این بخش، تصمیم های پذیرفتنی و ناپذیرفتنی خطی به فرم  $cX_{(1)}$  و  $cX_{(2)}$  در برآورد پارامترهای  $\theta_M$  و  $\theta_J$  را به ترتیب در زیر کلاس های  $D_1$  و  $D_2$  به فرم زیر به دست می آوریم:

$$D_1 = \{ \delta_{1c} : \delta_{1c}(X_1, X_2) = cX_{(1)}, c > 0 \}, D_2 = \{ \delta_{2c} : \delta_{2c}(X_1, X_2) = cX_{(2)}, c > 0 \}$$

برای یافتن تصمیم های پذیرفتنی  $\theta_M$  و  $\theta_J$  در زیر کلاس های  $D_1$  و  $D_2$  لم زیر را بیان می کنیم.

لم ۱ فرض کنید  $X_1$  و  $X_2$  دو متغیر تصادفی مستقل باشند بطوری که  $X_i$ ،  $i = 1, 2$  دارای تابع چگالی

احتمال گاما داده شده در (۱) با  $\alpha > p$  باشد. همچنین فرض کنید  $S = \frac{X_{(r)}}{\theta_M}$ ،  $U = \frac{X_{(1)}}{\theta_J}$

و  $G_{a,b}(t) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^t x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$  تعریف می کنیم  $a, b > 0$  و به ازای  $\mu = \frac{\max(\theta_1, \theta_2)}{\min(\theta_1, \theta_2)} \geq 1$

$H_{a,b}(t) = G_{a,b}(t) + G_{a,b}(1-t)$  که در آن  $B(0,0)$  تابع بتا است. در این صورت:

الف.  $E(S^k) = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} H_{\alpha, \alpha+k} \left( \frac{1}{1+\mu} \right)$ ، که تابعی صعودی (نزولی) نسبت به  $\mu$  به ازای

$k < 0$  ( $k > 0$ ) می باشد.

ب.  $E(U^k) = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} \left[ 1 - H_{\alpha, \alpha+k} \left( \frac{1}{1+\mu} \right) \right] = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} H_{\alpha+k, \alpha} \left( \frac{1}{1+\mu} \right)$ ، که تابعی صعودی

(نزولی) نسبت به  $\mu$  به ازای  $k > 0$  ( $k < 0$ ) می باشد.

**اثبات:** برای اثبات به نقی زاده قمی و همکاران [۹] مراجعه شود.

در قضیه ی زیر تصمیم های پذیرفتنی به فرم  $cX_{(r)}$  در کلاس برآوردگرهای ناوردای  $D_1$  را به دست می آوریم.

**قضیه ۲** تصمیم های به فرم  $\delta_{vc}(X_1, X_2) = cX_{(r)}$  در زیر کلاس  $D_1$  از تصمیم های ناوردای  $\theta_M$ ، پذیرفتنی

هستند اگر و تنها اگر  $c \in [c_1^*, c_2^*]$ ، که در آن  $\alpha > p$ ،  $c_1^* = \left[ \frac{\Gamma(\alpha-p) G_{\alpha, \alpha-p}(\cdot/\delta)}{\Gamma(\alpha+p) G_{\alpha, \alpha+p}(\cdot/\delta)} \right]^{\frac{1}{p}}$  و

$$c_2^* = \left[ \frac{\Gamma(\alpha-p)}{\Gamma(\alpha+p)} \right]^{\frac{1}{p}}$$

**اثبات** تابع مخاطره ی  $\delta_{vc}(X_1, X_2) = cX_{(r)}$  عبارت است از:

$$\begin{aligned} R(\theta_M, cX_{(r)}) &= E \left( \left( c \frac{X_{(r)}}{\theta_M} \right)^p + \left( \frac{\theta_M}{cX_{(r)}} \right)^p - 2 \right) \\ &= c^p E(S^p) + \frac{1}{c^p} E(S^{-p}) - 2 \end{aligned}$$

با قراردادن مشتق تابع مخاطره نسبت به  $c$  برابر صفر داریم:

$$\frac{\partial R(\theta_M, cX_{(r)})}{\partial c} = pc^{p-1} E(S^p) - pc^{-p-1} E(S^{-p}) = 0$$

در نتیجه  $c = \left( \frac{E(S^{-p})}{E(S^p)} \right)^{\frac{1}{p}} = c_1(\mu)$ ، با توجه به این که  $\frac{\partial^2 R(\theta_M, cX_{(r)})}{\partial c^2} = \frac{2p^2}{c^{p+2}} E(S^{-p}) > 0$ ؛ بنابراین

تابع مخاطره، مقدار مینیمم خود را به ازای مقدار  $c_1(\mu) = \left( \frac{E(S^{-p})}{E(S^p)} \right)^{\frac{1}{p}}$  اختیار می کند. با استفاده از قسمت

الف لم ۱ نتیجه می شود که  $[E(S^p)]^{-1}$  و  $E(S^{-p})$  توابعی پیوسته، صعودی و مثبت نسبت به  $\mu$  هستند:

بنابراین تابع  $c_1(\mu)$  تابعی پیوسته و صعودی از  $\mu$  بوده و داریم:

$$\inf_{\mu \geq 1} c_1(\mu) = c_1(1) = \left[ \frac{\Gamma(\alpha - p) / \Gamma(\alpha) H_{\alpha, \alpha - p} \left( \frac{1}{2} \right)}{\Gamma(\alpha + p) / \Gamma(\alpha) H_{\alpha, \alpha + p} \left( \frac{1}{2} \right)} \right]^{\frac{1}{2p}},$$

$$= \left[ \frac{\Gamma(\alpha - p) G_{\alpha, \alpha - p} \left( \frac{1}{2} \right)}{\Gamma(\alpha + p) G_{\alpha, \alpha + p} \left( \frac{1}{2} \right)} \right]^{\frac{1}{2p}} = c_1^*,$$

و

$$\sup_{\mu \geq 1} c_1(\mu) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} c_1(\mu) = \left[ \frac{\Gamma(\alpha - p) / \Gamma(\alpha) H_{\alpha, \alpha - p}(\infty)}{\Gamma(\alpha + p) / \Gamma(\alpha) H_{\alpha, \alpha + p}(\infty)} \right]^{\frac{1}{2p}},$$

$$= \left[ \frac{\Gamma(\alpha - p)}{\Gamma(\alpha + p)} \right]^{\frac{1}{2p}} = c_1^*$$

بنابراین برای هر  $c \in [c_1^*, c_1^*]$ ، یک  $\mu \geq 1$  وجود دارد که تابع مخاطره‌ی  $R(\theta_M, cX_{(1)})$  مینیمم مقدار خود را اختیار می‌کند و در نتیجه چنین  $c$  متناظر با یک تصمیم‌های پذیرفتنی است. پذیرفتنی بودن  $\delta_{c_1^*}$  از پیوسته بودن تابع مخاطره نتیجه می‌شود. همچنین برای هر  $\mu \geq 1$  ثابت، تابع مخاطره‌ی  $R(\theta_M, cX_{(1)})$  برای  $c_1(\mu) < c$  یک تابع صعودی از  $c$  و برای  $c_1(\mu) > c$  یک تابع نزولی از  $c$  است. چون برای هر  $\mu \geq 1$ ،  $c \in (-\infty, c_1^*) \cup (c_1^*, \infty)$  برای  $\delta_{c_1^*}(X_1, X_2) = cX_{(1)}$  تصمیم‌های  $\delta_{c_1^*}(X_1, X_2) = cX_{(1)}$  می‌شود که نتیجه می‌شود که این قضیه را کامل می‌کند.

در برآورد  $\theta_M$  ناپذیرفتنی هستند، که این قضیه را کامل می‌کند. در قضیه‌ی زیر تصمیم‌های پذیرفتنی به فرم  $cX_{(1)}$  را در کلاس برآوردگرهای ناوردای  $D_1$  به دست می‌آوریم.

**قضیه ۳** تصمیم‌های به فرم  $\delta_{c_1^*}(X_1, X_2) = cX_{(1)}$  در زیر کلاس  $D_1$  از تصمیم‌های ناوردای  $\theta_J$ ، پذیرفتنی هستند اگر و تنها اگر  $c \in [c_1^*, c_1^*]$ ، که در آن

$$c_1^* = \left[ \frac{\Gamma(\alpha - p)}{\Gamma(\alpha + p)} \right]^{\frac{1}{2p}}, \quad c_1^* = \left[ \frac{\Gamma(\alpha - p) G_{\alpha - p, \alpha}(\cdot / \delta)}{\Gamma(\alpha + p) G_{\alpha + p, \alpha}(\cdot / \delta)} \right]^{\frac{1}{2p}}$$

**اثبات:** تابع مخاطره‌ی  $\delta_{c_1^*}(X_1, X_2) = cX_{(1)}$  عبارت است از:

$$R(\theta_J, cX_{(1)}) = E \left( \left( c \frac{X_{(1)}}{\theta_J} \right)^p + \left( \frac{\theta_J}{cX_{(1)}} \right)^p - 2 \right),$$

$$= c^p E(U^p) + \frac{1}{c^p} E(U^{-p}) - 2,$$

که تابعی اکیدا محدب نسبت به  $c$  و دارای مینیمم یکتا در  $c = c_v(\mu) = \left( \frac{E(U^{-p})}{E(U^p)} \right)^{\frac{1}{p}}$  می باشد. با استفاده از قسمت ب لم نتیجه می شود که  $[E(U^p)]^{-1}$  و  $E(U^{-p})$  توابعی پیوسته، نزولی و مثبت نسبت به  $\mu$  هستند؛ بنابراین تابع  $c_v(\mu)$  تابعی پیوسته و نزولی از  $\mu$  بوده و در نتیجه داریم:

$$\inf_{\mu \geq 1} c_v(\mu) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} c_v(\mu) = \left[ \frac{\Gamma(\alpha - p) / \Gamma(\alpha) H_{\alpha-p, \alpha}(\circ)}{\Gamma(\alpha + p) / \Gamma(\alpha) H_{\alpha+p, \alpha}(\circ)} \right]^{\frac{1}{p}},$$

$$= \left[ \frac{\Gamma(\alpha - p)}{\Gamma(\alpha + p)} \right]^{\frac{1}{p}} = c_v^*$$

و

$$\sup_{\mu \geq 1} c_v(\mu) = c_v(1) = \left[ \frac{\Gamma(\alpha - p) / \Gamma(\alpha) H_{\alpha-p, \alpha}\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha + p) / \Gamma(\alpha) H_{\alpha+p, \alpha}\left(\frac{1}{2}\right)} \right]^{\frac{1}{p}},$$

$$= \left[ \frac{\Gamma(\alpha - p) G_{\alpha-p, \alpha}\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha + p) G_{\alpha+p, \alpha}\left(\frac{1}{2}\right)} \right]^{\frac{1}{p}} = c_v^*$$

با بحثی مشابه با اثبات قضیه ۲، اثبات کامل می شود.

### ۳ تصمیم های بیز و بیز تعمیم یافته

در این بخش تصمیم های بیز و بیز تعمیم یافته را برای پارامترهای  $\theta_M$  و  $\theta_r$  به دست می آوریم. با استفاده از روش ساکروویتز و ساموئل-کان [۱۰]، ابتدا تصمیم بیز را در حالت تک مولفه ای برای  $\theta_i$ ،  $i = 1, 2$  می یابیم. با در نظر گرفتن توزیع پیشین مزدوج گامای وارونه برای  $\theta_i$ ،  $i = 1, 2$  به صورت  $IGamma(v + \alpha, (x_i + \beta)^{-1})$  با تابع چگالی احتمال زیر:

$$\pi_i^{v, \beta}(\theta_i) = \frac{\beta^v}{\Gamma(v)\theta_i^{v+1}} e^{-\frac{\beta}{\theta_i}}, \quad v > 0, \beta > 0, i = 1, 2. \quad (4)$$

توزیع پسین  $\theta_i | X_i$  نیز گامای وارونه به صورت  $IGamma(v + \alpha, (x_i + \beta)^{-1})$  است. تصمیم بیزی  $\theta_i$  با توجه به پیشین (۴) و تحت تابع زیان (۳) برابر است با

$$\delta_{v, \beta}^i(X_i) = \left( \frac{E(\theta_i^p | X_i)}{E(\theta_i^{-p} | X_i)} \right)^{\frac{1}{p}} = \left[ \frac{\Gamma(v + \alpha - p)}{\Gamma(v + \alpha + p)} \right]^{\frac{1}{p}} (X_i + \beta), \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

حال فرض کنید  $\theta_1$  و  $\theta_r$  دارای پیشین‌های مستقل و هم‌توزیع با تابع چگالی احتمال (۴) باشند. از رابطه (۶) و لم ۳-۲ ساکروویتز و ساموئل-کان [۱۰]، تصمیم‌های بیز یکتای پارامترهای  $\theta_M$  و  $\theta_r$  تحت تابع زیان (۳) با توجه به توزیع پیشین  $\pi^{v,\beta} = (\pi_1^{v,\beta}, \pi_r^{v,\beta})$  به ترتیب عبارتند از:

$$\delta_{v,\beta}^1(X_1, X_r) = \left[ \frac{\Gamma(v+\alpha-p)}{\Gamma(v+\alpha+p)} \right]^{\frac{1}{vp}} (X_{(r)} + \beta)$$

و

$$\delta_{v,\beta}^r(X_1, X_r) = \left[ \frac{\Gamma(v+\alpha-p)}{\Gamma(v+\alpha+p)} \right]^{\frac{1}{vp}} (X_{(1)} + \beta)$$

همچنین توجه کنید که تصمیم بیزی حدی پارامترهای  $\theta_M$  و  $\theta_r$  یعنی  $X_{(r)}$   $\delta_{\alpha,\beta}^1(X_1, X_r) = \left[ \frac{\Gamma(\alpha-p)}{\Gamma(\alpha+p)} \right]^{\frac{1}{vp}} X_{(r)}$

و  $\delta_{\alpha,\beta}^r(X_1, X_r) = \left[ \frac{\Gamma(\alpha-p)}{\Gamma(\alpha+p)} \right]^{\frac{1}{vp}} X_{(1)}$  تصمیم‌های بیزی تعمیم‌یافته  $\theta_M$  و  $\theta_r$  با توجه به پیشین ناآگاهی بخش  $\pi(\theta_1, \theta_r) = (\theta_1, \theta_r)^{-1}$ ،  $\theta_1, \theta_r \in \mathbb{R}^+$  هستند.

**پیامد ۴** فرض کنید  $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$  یک زوج نمونه‌های تصادفی مستقل از جامعه  $\Pi_i$ ،  $i = 1, 2$  با تابع چگالی داده شده در (۱) باشند. در نتیجه  $T_j(\mathbf{X}_i) = \sum_{i=1}^n X_{ij}$  یک آماره بسنده کامل برای  $\theta_i$  است و همچنین دارای توزیع گاما با پارامترهای  $n\alpha$  و  $\theta_i$  می‌باشد. بنابراین تمام نتایج بخش‌های ۲ و ۳ با جایگذاری  $n\alpha$  به جای  $\alpha$  و  $T_i(\mathbf{X}_i)$  به جای  $X_i$  برقرار خواهند بود.

#### ۴ محاسبات عددی

در این بخش به مقایسه مخاطره برآوردگر ماکسیمم درستنمایی (ML) و تصمیم بیز تعمیم‌یافته (GB) برای پارامتر  $\theta_M$  می‌پردازیم. جدول ۱ مقادیر مخاطره ML و GB را برای مقادیر انتخابی  $\alpha = 2$ ،  $p = 1$ ،  $\mu = 0.1(0.1)$  و  $n = 10, 30, 50$  نشان می‌دهد. از جدول ۱ مشاهده می‌شود که تصمیم GB دارای مخاطره کم‌تری نسبت به ML می‌باشد. همچنین با افزایش  $n$  از میزان مخاطره تصمیم‌ها کاسته می‌شود.

#### ۵ کاربرد در داده‌های سانسور شده نوع دوم

در بسیاری از مطالعات پزشکی و صنعتی به زمان یا مرحله‌ای می‌رسیم که بعد از آن دیگر قادر به مشاهده یا ثبت واقعه‌ی مورد نظر نخواهیم بود. به این مرحله یا زمان، مرحله یا زمان سانسور می‌گویند. سانسور از راست زمانی رخ می‌دهد که واقعه‌ی مورد نظر پس از زمان یا مرحله‌ی سانسور رخ دهد که ما قادر به ثبت آن نبوده و فقط می‌توانیم بگوییم که تا زمان یا مرحله‌ای مشخص (زمان یا مرحله‌ی سانسور) آن واقعه رخ نداده است. این سانسور

بر اساس نوع زمانی یا مرحله ای بودن سانسور به دو نوع اول و دوم تقسیم می شود، که این دو نیز هر کدام بر اساس نوع تعیین زمان یا مرحله ای سانسور خود به انواع مختلفی تقسیم می شوند. یکی از پرکاربردترین انواع سانسور از راست، سانسور نوع دوم می باشد.

جدول ۱. مخاطره برآوردگر ML و GB برای مقادیر مختلف حجم نمونه

$n = 50$		$n = 30$		$n = 10$		$\mu$
GBE	MLE	GBE	MLE	GBE	MLE	
۰/۰۹۰۹	۰/۱۰۰۱	۰/۱۴۲۸	۰/۱۶۷۱	۰/۲۴۷۷	۰/۳۷۷۱	۰/۱
۰/۰۹۰۸	۰/۱۰۰۲	۰/۱۴۲۰	۰/۱۶۷۸	۰/۲۳۹۶	۰/۳۵۱۳	۰/۲
۰/۰۹۰۷	۰/۱۰۰۲	۰/۱۳۹۲	۰/۱۷۱۵	۰/۲۲۹۱	۰/۳۷۱۶	۰/۳
۰/۰۹۰۴	۰/۱۰۰۶	۰/۱۳۴۲	۰/۱۷۷۸	۰/۲۱۸۲	۰/۳۸۹۹	۰/۴
۰/۰۸۸۹	۰/۱۰۲۳	۰/۱۲۹۲	۰/۱۸۵۲	۰/۲۰۸۹	۰/۴۰۶۳	۰/۵
۰/۰۸۴۶	۰/۱۰۹۲	۰/۱۲۴۱	۰/۱۹۲۲	۰/۲۰۱۷	۰/۴۱۹۲	۰/۶
۰/۰۸۳۲	۰/۱۱۲۸	۰/۱۲۰۱	۰/۱۹۷۸	۰/۱۹۶۷	۰/۴۲۸۳	۰/۷
۰/۰۸۰۳	۰/۱۱۵۶	۰/۱۱۷۲	۰/۲۰۱۶	۰/۱۹۳۵	۰/۴۳۳۷	۰/۸
۰/۰۷۸۰	۰/۱۱۷۱	۰/۱۱۵۷	۰/۲۰۳۶	۰/۱۹۱۸	۰/۴۳۶۶	۰/۹
۰/۰۷۶۷	۰/۱۱۷۶	۰/۱۱۵۲	۰/۲۰۴۳	۰/۱۹۱۴	۰/۴۳۷۵	۱

سانسور نوع دوم اغلب در انجام آزمون های طول عمر به کار می رود. در مجموعه نمونه ای سانسور شده ای نوع دوم،  $r$  کوچک ترین مشاهدات از یک نمونه ای تصادفی  $n$  تایی قابل مشاهده هستند. به عبارت دیگر تمام  $n$  عضو نمونه در آزمایش قرار می گیرند؛ اما به جای انجام آزمایش تا پایان از کارافتادگی تمامی اعضای نمونه، این کار را تا زمانی انجام می دهیم که  $r$  عضو از کار بیفتند. این کار موجب صرفه جویی در زمان و هزینه های آزمایش خواهد شد.

باید توجه کرد که در این نوع سانسور، تعداد مشاهدات لازم یعنی  $r$  مقداری ثابت است و پیش از شروع آزمایش تعیین می شود، اما طول دوره ای آزمایش یک متغیر تصادفی است.

فرض کنید  $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ ،  $i = 1, 2$  دو نمونه ای تصادفی مستقل از جامعه های نمایی  $\Pi_1$  و  $\Pi_2$  با تابع چگالی احتمال (۱) به ترتیب با پارامترهای مقیاس نامعلوم  $\theta_1$  و  $\theta_2$  و پارامتر شکل معلوم و مشترک  $\alpha = 1$  باشند. فرض کنید  $X_{i(j)}$ ،  $i = 1, 2$ ،  $j = 1, 2, \dots, n$  آماره ای ترتیبی  $X_i$  باشد. متغیر تصادفی  $TT_i = \sum_{j=1}^r X_{i(j)} + (n-r)X_{i(r)}$ ،  $i = 1, 2$  را در نظر بگیرید. با استفاده از قضیه ۴-۱-۱ صفحه ۱۵۳ لاولس ([۱۱])،  $TT_i$ ،  $i = 1, 2$ ، دارای توزیع گاما با پارامترهای  $r$  و  $\theta_i$  است. فرض کنید  $TT_{(0)} = \min(X_1, X_2)$  و  $TT_{(r)} = \max(X_1, X_2)$  باشد. جامعه ای متناظر با  $TT_{(r)}$  را  $TT_{(r)}$  و  $TT_{(0)}$  را گزینش می کنیم. علاقه مند به برآورد پارامترهای تصادفی  $\theta_M$  و  $\theta_r$  تعریف شده به صورت زیر هستیم:

$$\theta_M = \begin{cases} \theta_1 & TT_1 \geq TT_2 \\ \theta_2 & TT_1 < TT_2 \end{cases}, \quad \theta_J = \begin{cases} \theta_1 & TT_1 \leq TT_2 \\ \theta_2 & TT_1 > TT_2 \end{cases}.$$

چون  $TT_i$ ,  $i=1,2$ ، دارای توزیع گاما با پارامترهای  $r$  و  $\theta_i$  است، می‌توان نتایج بخش‌های ۲ و ۳ را با جایگزینی  $\alpha$  با  $r$  و  $X_i$  با  $TT_i$ ,  $i=1,2$  با استفاده از داده‌های سانسور شده (سانسور راست از نوع دوم)، به کار برد.

## ۶ کاربرد در توزیع‌های وایبول و رایلی

فرض کنید  $(y_1, y_2, \dots, y_r)$  یک نمونه سانسور شده از توزیع وایبول با تابع چگالی احتمال

$$\delta_{v,\beta}^i(X_i) = \left( \frac{E(\theta_i^p | X_i)}{E(\theta_i^{-p} | X_i)} \right)^{\frac{1}{2p}} = \left[ \frac{\Gamma(v+\alpha-p)}{\Gamma(v+\alpha+p)} \right]^{\frac{1}{2p}} (X_i + \beta), \quad i=1,2. \quad (6)$$

باشند که در آن  $v$  پارامتر شکل معلوم و  $\theta$  پارامتر مقیاس نامعلوم باشند. در این صورت  $X = Y^v$  دارای توزیع نمایی با پارامتر  $\theta$  خواهد بود. زمان کل آزمایش برابر است با

$$S_r = \sum_{i=1}^r y_{(i)}^v + (n-r)y_{(r)}^v, \quad n > r.$$

و یک برآوردگر نارایب برای  $\theta$  برابر است با  $S^* = S_r / r$ . همچنین  $2S_r / \theta \sim \chi_{2r}^2$ . همچنین دقت کنید که توزیع رایلی از توزیع وایبول به ازای  $v=2$  به دست می‌آید. در این صورت علاقه مند به برآورد پارامترهای تصادفی  $\theta_M$  و  $\theta_J$  تعریف شده به صورت زیر:

$$\theta_M = \begin{cases} \theta_1 & S_1 \geq S_2 \\ \theta_2 & S_1 < S_2 \end{cases}$$

و

$$\theta_J = \begin{cases} \theta_1 & S_1 \leq S_2 \\ \theta_2 & S_1 > S_2 \end{cases}$$

هستیم؛ بنابراین تمام نتایج مطرح شده در بخش‌های قبل برای نمونه سانسور از توزیع وایبول با پارامتر شکل معلوم  $v$  و توزیع رایلی برقرار خواهد بود.

## ۷ بحث و نتیجه‌گیری

هدف از این مقاله، تصمیم‌سازی بهینه برای پارامترهای مقیاس  $\theta_M$  و  $\theta_J$  از جامعه گامای گزینش شده تحت یک تابع زیان ناوردای مقیاس تعمیم‌یافته می‌باشد. تصمیم‌های پذیرفتنی و ناپذیرفتنی به فرم  $cX_{(r)}$  یا  $cX_{(1)}$  در زیر کلاسی از تصمیم‌های ناوردای  $\theta_M$  یا  $\theta_J$  به دست آمدند. همچنین تصمیم‌های بیز و بیز تعمیم‌یافته  $\theta_M$  و  $\theta_J$  محاسبه شدند که همانگونه که بیان شد تصمیم‌های خطی پذیرفتنی بودند. سپس کاربردی از نتایج با داده‌های سانسور شده نوع دوم بیان شد. یکی از تصمیم‌های بهینه که در نظریه تصمیم آماری مورد توجه است، تصمیم‌های

مینیماکس می باشد. یافتن برآوردگرهای مینیماکس برای پارامترهای  $\theta_I$  و  $\theta_M$  به عنوان یک مساله باز باقی می ماند.

### سپاسگزاری

نویسندگان مقاله از حمایت های مالی و معنوی دانشگاه آزاد بابل بابت به پایان رساندن طرح تحقیقاتی که منجر به یافته های مقاله حاضر شده است کمال تشکر و قدردانی را دارند.

### منابع

- [۱] فیاض موقر، ا.، محمودی، ز.، (۱۳۹۴). استنباط آماری براساس برآوردگر گشتاوری وزنی احتمالی تعدیل یافته. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۷، ۸۷-۷۹.
- [2] Misra, N., Van Der Meulen, E. C., Branden, K.V., (2006a). On some inadmissibility results for the scale parameters of selected gamma populations. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 136, 2340-2351.
- [3] Kumar, S., Mahapatra, A. K., Vellaisamy, P., (2009). Reliability estimation of the selected exponential populations. *Statistics and Probability Letters*, 79, 1372-1377.
- [4] Naghizadeh, M., Namatollahi, N., Parsian, A., (2012). Estimation after selection under reflected normal loss function. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 41, 1040-1051.
- [5] Vellaisamy, P., Sharma, D., (1989). A note on the estimation of the mean of the selected gamma population. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 18(2), 555-560.
- [6] Vellaisamy, P., (1992). Inadmissibility results for the selected scale parameter. *Annals of Statistics*. 20, 2183-2191.
- [7] Misra, N., van der Meulen, E. C., Branden, K. V., (2006b). On estimating the scale parameter of the selected gamma population under the scale invariant squared error loss function. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 186, 268-282.
- [8] Nematollahi, N., Motamed-Shariati, F., (2009). Estimation of the scale parameter of the selected gamma population under the entropy loss function. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 38, 208-221.
- [9] Naghizadeh, M., Namatollahi, N., Parsian, A., (2010). On estimation following selection with applications in k-Records and censored data, *JIRSS*, 9(2), 59-79.
- [10] Sackrowitz, H., Cahn, E. S., (1987). Evaluating the chosen population: a Bayes and minimax approach. *IMS Lecture Notes-Monograph Series: Adaptive Statistical Procedures and Related Topics* 8, 386-395.
- [11] Lawless, J. F., (2003). *Statistical models and methods for lifetime data*. John Wiley, New York.