

یک روش لونیبرگ-مارکوارت اصلاح شده با یک جستجوی خطی جدید غیریکنوا برای حل دستگاه معادلات غیرخطی

کیوان امینی^{۱*}، فرامرز رستمی^۲

۱- دانشیار، دانشگاه رازی، گروه ریاضی، کرمانشاه، ایران

۲- دانشجوی دکتری، دانشگاه رازی، گروه ریاضی، کرمانشاه، ایران

رسید مقاله: ۴ مرداد ۱۳۹۴

پذیرش مقاله: ۱۸ آذر ۱۳۹۴

چکیده

در این مقاله یک روش لونیبرگ-مارکوارت اصلاح شده با یک جستجوی خطی جدید برای حل یک دستگاه معادلات غیرخطی، ارائه می‌شود. در این روش، گام آزمون برابر مجموع یک گام لونیبرگ-مارکوارت و یک تقریب از گام لونیبرگ-مارکوارت در نظر گرفته می‌شود، جایی که در صورت پذیرفته نشدن گام آزمون، استفاده از یک جستجوی خطی جدید غیریکنوا پیشنهاد می‌گردد که همگرایی سراسری روش را نیز تضمین می‌کند. همگرایی مکعبی روش تحت شرط کران خطا که از شرط نامنفردی ماتریس ژاکوبی ضعیف‌تر است، نشان داده می‌شود. در پایان نتایج عددی ارائه شده نشان می‌دهد روش جدید یک روش کارا و موثر است.

کلمات کلیدی: دستگاه معادلات غیرخطی، روش لونیبرگ-مارکوارت، شرط کران خطای موضعی، جستجوی خطی غیریکنوا.

۱ مقدمه

حل دستگاه معادلات غیرخطی

$$F(x) = 0 \quad (1)$$

که در آن $F: R^n \rightarrow R^n$ یک تابع به طور پیوسته مشتق پذیر است، یکی از مسایل مهم در ریاضیات کاربردی است که در اکثر شاخه‌های علوم، نظیر فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، مهندسی، صنعت و ... کاربرد دارد. تاکنون روش‌های زیادی برای حل مساله (۱) ارائه شده است. یکی از روش‌های موجود برای حل این مساله، تبدیل آن با استفاده از یک تابع ارزش مانند $f(x) = \frac{1}{p} \|F(x)\|^p$ به یک مساله بهینه‌سازی غیرخطی از نوع کم‌ترین

* عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: kamini@razi.ac.ir

این روش، یک روش لونیبرگ-مارکوارت اصلاح شده بایک جستجوی خطی جدید غیر مکرر برای حل دستگاه معادلات غیر خطی

مربعات و استفاده از روش های تکراری موجود مانند روش های نیوتن، گاوس نیوتن، شبه نیوتن و ناحیه اطمینان برای حل آن می باشد [۶-۱]، [۱۱-۸].

روش نیوتن یکی از مهم ترین و قدیمی ترین روش های ارایه شده در این رده می باشد. این روش از یک فرایند تکراری به صورت

$$x_{k+1} = x_k + d_k ,$$

استفاده می کند، که در آن d_k یک جواب دستگاه معادلات خطی

$$J_k d_k = -F_k ,$$

است، جایی که $F_k = F(x_k)$ و $J_k = F'(x_k)$ ماتریس ژاکوبی F در x_k است. روش نیوتن با وجود نتایج همگرایی موضعی مناسب، دارای معایب فراوانی است که در جهت مرتفع کردن آن ها اصلاحات متعددی از آن ارایه گردیده است. روش های لونیبرگ-مارکوارت یک خانواده بسیار مهم از الگوریتم ها هستند که در جهت غلبه بر برخی از مشکلات روش نیوتن ارایه گردیده است. در این خانواده به جای جهت نیوتن، جهت d_k از حل دستگاه

$$(J_k^T J_k + \lambda_k I) d = -J_k^T F_k , \quad (2)$$

موسوم به دستگاه لونیبرگ-مارکوارت محاسبه می گردد، جایی که λ_k پارامتر لونیبرگ-مارکوارت، در هر تکرار بهنگام می گردد. نشان داده شده است که در صورت نامنفرد بودن ماتریس ژاکوبی و پیوستگی لیپشیتس آن در جواب مساله، روش لونیبرگ-مارکوارت همانند روش نیوتن همگرایی مجذوری دارد. اما شرط نامنفرد بودن ماتریس ژاکوبی یک شرط قوی است. یاماشیتا و فوکوشیما در [۱] تحت شرایط ضعیف تر موسوم به شرط کران خطای موضعی و با انتخاب پارامتر لونیبرگ-مارکوارت به شکل $\lambda_k = \|F_k\|$ ، همگرایی مجذوری این روش را ثابت کردند. فن و یوان نتایج مشابهی را با انتخاب $\lambda_k = \mu_k \|F_k\|$ ، به دست آوردند [۲]. فن در [۳]، یک نسخه اصلاح شده از روش لونیبرگ-مارکوارت (MLM) را ارایه نمود و تحت شرایط کران خطای موضعی همگرایی مکعبی آن را نشان داد. در این روش در هر تکرار پس از محاسبه d_k با استفاده از حل دستگاه (۲)، بردار

$$y_k = x_k + d_k , \quad (3)$$

محاسبه می گردد. در ادامه با حل دستگاه خطی اصلاح شده

$$(J_k^T J_k + \lambda_k I) d = -J_k^T F(y_k) , \quad (4)$$

بردار \hat{d}_k محاسبه و جهت $s_k = d_k + \hat{d}_k$ تعریف می گردد. با توجه به اینکه جهت s_k لزوماً یک جهت کاهش نیست؛ بنابراین شبیه روش های ناحیه اطمینان و در جهت استفاده مناسب از جهت جدید، با معرفی

$$r_k = \frac{Ared_k}{Pred_k} = \frac{\|F_k\|^2 - \|F(x_k + d_k + \hat{d}_k)\|^2}{\|F_k\|^2 - \|F_k + J_k d_k\|^2 + \|F(y_k)\|^2 - \|F(y_k) + J_k \hat{d}_k\|^2} ,$$

می توان از قاعده زیر استفاده کرد:

$$x_{k+1} = \begin{cases} x_k + s_k & \text{if } r_k \geq p, \\ x_k & \text{otherwise.} \end{cases}$$

که در آن p_0 یک مقدار مناسب در بازه $(0, 0.5)$ می باشد. قابل توجه است که معادله (۴) جایگزین معادله

$$(J^T(y_k)J(y_k) + \lambda_k I)d = -J^T(y_k)F(y_k),$$

در روش لوببرگ-مارکوارت گردیده است. جایی که با توجه به پرهزینه بودن محاسبه ماتریس $J(y_k)$ در این رابطه، در رابطه (۴) از تقریب موجود J_k استفاده می شود که باعث کاهش تعداد محاسبات ماتریس ژاکوبی نسبت به روش لوببرگ-مارکوارت می گردد و در نتیجه برای حالاتی که $F(x)$ پیچیده و یا n بزرگ است، بسیار مفید است؛ اما توجه داریم که جهت s_k در روش لوببرگ-مارکوارت لزوماً کاهش نمی یابد و بنابراین تکنیک های جستجوی خطی استاندارد به طور مستقیم در این روش قابل استفاده نیست. این واقعیت، اثبات همگرایی سراسری این روش را مشکل می کند. هدف این مقاله، ارائه یک جستجوی خطی غیریکنوا برای روش لوببرگ-مارکوارت اصلاح شده و اثبات همگرایی سراسری این روش بدون استفاده از روش های ناحیه اطمینان است.

اولین و معروف ترین جستجوی خطی غیریکنوا توسط گریپو و همکارانش در [۴] برای مسایل بهینه سازی به صورت زیر ارائه گردید:

$$f(x_k + \alpha_k d_k) \leq f_{l(k)} + \gamma \alpha_k \nabla f(x_k)^T d_k, \quad (5)$$

که در آن

$$f_{l(k)} = \max_{0 \leq j \leq m(k)} f(x_{k-j}),$$

$$m(0) = 0, \quad 0 \leq m(k) \leq \min\{m(k-1) + 1, N\},$$

(۰ و ۱) $\gamma \in (0, 1)$ و N یک عدد صحیح مثبت است. با توجه به اینکه برای حل دستگاه های خطی تابع f به صورت

$$f(x) = \frac{1}{4} \|F(x)\|^2$$

پرهزینه و ناکارا است. لی و فوکوشیما در [۵] یک جستجوی خطی برای معادلات غیرخطی به صورت زیر ارائه دادند.

$$\|F(x_k + \alpha d_k)\|^2 \leq (1 + \varepsilon_k) \|F_k\|^2 - \sigma_1 \alpha^2 \|d_k\|^2 - \sigma_2 \alpha \|F_k\|^2, \quad (6)$$

که در آن σ_1 و σ_2 دو ثابت مثبت هستند و دنباله $\{\varepsilon_k\}$ در شرط

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k < \infty \quad (7)$$

صدق می کند. همگرایی سراسری و زبرخطی روش تحت شرایط مناسب توسط آن‌ها نشان داده شد. واضح است که در رابطه (۶) نیازی به محاسبه ماتریس ژاکوبی نیست. این خاصیت هنگامی که n بزرگ و یا محاسبه ماتریس ژاکوبی پیچیده است، بسیار مفید است.

با توجه به اینکه در روش لوبزبرگ-مارکوارت اصلاح شده جهت جستجو دو قسمتی است بنابراین جستجوی خطی (۶) نامناسب و غیر قابل استفاده است. زو در [۶] جستجوی خطی مشابهی، به صورت زیر برای روش MLM ارائه داد.

$$\|F(x_k + \alpha d_k + \alpha' \hat{d}_k)\|^2 \leq (1 + \varepsilon_k) \|F_k\|^2 - \sigma_1 \alpha' \|d_k\|^2 - \sigma_2 \alpha' \|\hat{d}_k\|^2 - \sigma_3 \alpha' \|F_k\|^2. \quad (8)$$

که در آن σ_1 ، σ_2 و σ_3 ثابت‌های مثبت و $\{\varepsilon_k\}$ یک دنباله صادق در رابطه (۷) است. همگرایی سراسری و مکعبی این روش تحت شرط کران خطا توسط زو در [۶] نشان داده شده است. نتایج عددی حاصل از اجرای این روش بر روی مسایل Extended Rosenbrock و Extended Powell singular با مقادیر متفاوت n و نقاط شروع گوناگون، کارایی این روش را نشان داد.

ما در این مقاله، با الهام از جستجوهای خطی (۵) و (۸)، یک جستجوی خطی غیریکنوا جدید برای روش لوبزبرگ-مارکوارت اصلاح شده به صورت زیر پیشنهاد می‌نماییم.

$$\|F(x_k + \alpha d_k + \alpha' \hat{d}_k)\|^2 \leq R_k - \sigma_1 \alpha' \|d_k\|^2 - \sigma_2 \alpha' \|\hat{d}_k\|^2 - \sigma_3 \alpha' \|F_k\|^2, \quad (9)$$

که در آن

$$R_k = \beta_k F_{l(k)} + (1 - \beta_k) \|F_k\|^2,$$

جایی که

$$F_{l(k)} = \max_{1 \leq j \leq m(k)} \|F(x_{k-j})\|,$$

و

$$m(0) = 0, \quad 0 \leq m(k) \leq \min\{m(k-1) + 1, N\},$$

N یک عدد طبیعی، σ_1 ، σ_2 و σ_3 ثابت‌هایی مثبت و $\{\beta_k\}$ یک دنباله همگرا به صفر با شرط

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k < \infty, \quad \beta_k \in [0, 1] \quad \forall k \geq 1,$$

است. تفاوت این جستجوی خطی با جستجوی خطی (۸) در جایگزینی جمله اول سمت راست نامساوی با جمله R_k می‌باشد. قابل توجه اینکه هنگامی که $\|F_k\|$ نزدیک جواب است با توجه به کوچک بودن ε_k ، طرف راست رابطه (۸) بسیار کوچک و برقراری آن منوط به ناچیز بودن α_k می‌باشد که ممکن است $\alpha_k d_k + \alpha_k' \hat{d}_k$ به حدی کوچک شود که از دقت ماشین کم‌تر شود و نقش خود را از دست بدهد. برای غلبه بر این مشکل ما در جستجوی خطی جدید استفاده از R_k را جایگزین می‌نماییم. نتایج عددی روی مسایل تست موری و همکارانش

[۷]، نشان می‌دهد که ایده جدید، یک ایده کارا و قابل قبول است. ساختار بخش‌های بعدی مقاله به صورت زیر است.

در بخش بعد پس از بیان الگوریتم جدید، خوش تعریفی آن ثابت می‌شود. در بخش سوم، همگرایی سراسری الگوریتم جدید اثبات می‌گردد. در بخش چهارم نشان داده می‌شود که نرخ همگرایی این روش همانند روش MLM مکعبی است. در پایان نتایج عددی در بخش پنجم نمایانگر کارایی مناسب الگوریتم جدید می‌باشد.

۲ الگوریتم لونیبرگ-مارکوارت اصلاح شده جدید

در این بخش، ابتدا الگوریتم جدید ارائه می‌گردد و سپس خوش تعریفی آن نشان داده می‌شود.

الگوریتم ۱-۲ روش لونیبرگ-مارکوارت اصلاح شده با جستجوی خطی غیریکنوا جدید برای حل دستگاه معادلات غیرخطی

ورودی: بردار آغازین $x \in R^n$ ، مقادیر $\mu > 0$ ، $\varepsilon > 0$ ، $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 > 0$ ، $r, \rho \in (0, 1)$ ، $m \in N$.

گام ۰: قرار بده $k = 0$.

گام ۱: مقادیر $F_k = F(x_k)$ و $J_k = F'(x_k)$ را محاسبه کن. اگر $\|J_k^T F_k\| \leq \varepsilon$ باشد، توقف کن، در غیر این صورت قرار بده

$$\lambda_k = \mu \|F_k\|.$$

گام ۲: بردارهای d_k و \hat{d}_k را از حل دستگاه‌های (۲) و (۴) محاسبه کن.

گام ۳: اگر

$$\|F(x_k + d_k + \hat{d}_k)\| \leq \rho \|F_k\| \quad (10)$$

قرار بده $\alpha_k = 1$ و به گام ۵ برو.

گام ۴: (جستجوی خطی) با محاسبه i_k از رابطه

$$i_k = \min\{i \in \{0, 1, 2, 3, \dots\} \mid r^i \text{ در رابطه (۹) صدق کند}\} \quad (11)$$

قرار بده $\alpha_k = r^{i_k}$.

گام ۵: قرار بده $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k + \alpha_k \hat{d}_k$.

گام ۶: $k := k + 1$ و به گام ۱ برو.

لم‌های زیر خوش تعریفی الگوریتم ۱-۳ را نشان می‌دهد.

لم ۱. فرض کنید دنباله $\{x_k\}$ توسط الگوریتم ۱-۲ تولید شده باشد، در این صورت داریم:

$$\|F_k\| \leq R_k, \quad \forall k \in N. \quad (12)$$

برهان. از تعریف $F_{l(k)}$ به سادگی ملاحظه می‌شود:

این روش، یک روش لوبزک-مارکوارت اصلاح شده بایک جستجوی نخلی جدید غیرمکرر برای حل دستگاه معادلات غیرنخلی

$$\|F_k\|^y \leq F_{l(k)}^y, \quad \forall k \in N,$$

استفاده از این نامساوی و تعریف R_k نتیجه می دهد:

$$\|F_k\|^y = \beta_k \|F_k\|^y + (1 - \beta_k) \|F_k\|^y \leq \beta_k F_{l(k)}^y + (1 - \beta_k) \|F_k\|^y = R_k \quad \forall k \in N.$$

لم ۲. الگوریتم ۱-۲ خوش تعریف است.

برهان. واضح است که اگر $\alpha \rightarrow 0^+$ میل کند آنگاه سمت چپ رابطه (۹) به مقدار $\|F_k\|^y$ و سمت راست آن به مقدار R_k میل می کند. با توجه به اینکه از لم ۱ داریم:

$$\|F_k\|^y \leq R_k, \quad \forall k \in N.$$

بنابراین رابطه (۹) برای هر α ، به اندازه کافی کوچک برقرار و در نتیجه الگوریتم ۱-۲ خوش تعریف است.

۳ همگرایی سراسری

هدف این بخش اثبات همگرایی سراسری الگوریتم ۱-۲ تحت مفروضات مناسب می باشد. برای این منظور تعریف و فرض های زیر لازم است. ابتدا مجموعه تراز Ω را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\Omega = \{x \mid \|F(x)\| \leq \|F\|\}.$$

فرض ۱-۳. یک همسایگی Ω از Ω وجود دارد به طوری که $F(x)$ و $J(x)$ بر آن پیوسته لیپ شیتس هستند؛ یعنی عدد مثبت L موجود است به طوری که:

$$\|F(y) - F(x)\| \leq L \|y - x\|, \quad \forall x, y \in \Omega, \quad (13)$$

و

$$\|J(y) - J(x)\| \leq L \|y - x\|, \quad \forall x, y \in \Omega. \quad (14)$$

به سادگی از (۱۴) می توان نتیجه گرفت که:

$$\|J(x)\| \leq L, \quad \forall x \in \Omega. \quad (15)$$

لم ۳. فرض کنیم دنباله $\{x_k\}$ توسط الگوریتم ۱-۲ تولید شده باشد، در این صورت:

الف) دنباله $\{F_{l(k)}\}$ همگراست.

ب) به ازای هر $k \geq 0$ داریم $x_k \in \Omega$.

برهان. از تعریف $F_{l(k)}$ ، می توان نتیجه گرفت:

$$F_{l(k+1)} \leq \max\{F_{l(k)}, \|F_{k+1}\|\}, \quad (16)$$

از سوی دیگر استفاده از روابط (۹-۱۱)، نتیجه می دهد:

$$\|F_{k+1}\|^y \leq R_k \leq F_{l(k)}^y. \quad (17)$$

روابط (۱۶) و (۱۷)، به سادگی نامساوی زیر را نتیجه می دهند:

$$F_{l(k+1)} \leq F_{l(k)}. \quad (18)$$

در نتیجه دنباله $\{F_{l(k)}\}$ کاهشی، کران دار و بنابراین همگراست؛ بنابراین اثبات (الف) کامل است. اکنون کفایت توجه شود که استفاده متوالی از رابطه (۱۸) نتیجه می دهد:

$$F_{l(k)} \leq F_{l(c)} = \|F\|.$$

با توجه به تعریف $F_{l(k)}$ و نامساوی اخیر داریم:

$$\|F_k\| \leq F_{l(k)} \leq \|F\|.$$

بنابراین $x_k \in \Omega$ و در نتیجه (ب) نیز اثبات می شود.

نتیجه ۱. از قسمت (ب) لم قبل می توان نتیجه گرفت که دنباله $\{\|F_k\|\}$ کران دار است؛ یعنی عدد حقیقی $M > 0$ موجود است به طوری که:

$$\|F_k\| \leq M, \quad \forall k \in N. \quad (19)$$

لم ۴. فرض کنید d_k یک جواب دستگاه (۲) است، آنگاه $\|d_k\|$ از بالا کران دار است.

برهان. با توجه به خواص نرم ماتریسی داریم:

$$\begin{aligned} \|(J_k^T J_k + \lambda_k I)^{-1}\| &= \sqrt{\lambda_{\max}((J_k^T J_k + \lambda_k I)^{-T} (J_k^T J_k + \lambda_k I)^{-1})} \\ &= \sqrt{\lambda_{\max}((J_k^T J_k + \lambda_k I)(J_k^T J_k + \lambda_k I)^T)^{-1}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{\lambda_{\min}((J_k^T J_k)^T + 2\lambda_k J_k^T J_k + \lambda_k^2 I)}} \\ &\leq \lambda_k^{-1} \end{aligned} \quad (20)$$

این نامساوی همراه با روابط (۲) و (۱۵) نتیجه می دهد:

$$\|d_k\| = \|(J_k^T J_k + \lambda_k I)^{-1} J_k^T F_k\| \leq \|(J_k^T J_k + \lambda_k I)^{-1}\| \|J_k\| \|F_k\| \leq L \lambda_k^{-1} \|F_k\| = \frac{L}{\mu}. \quad (21)$$

لم ۵. فرض کنیم دنباله $\{x_k\}$ توسط الگوریتم ۲-۱ تولید شده باشد، اگر رابطه (۱۰) برای تعداد نامتناهی اندیس k برقرار باشد، آنگاه دنباله $\{\|F_k\|\}$ همگرا به صفر است.

برهان. ابتدا برای هر $j \geq 1$ ، مجموعه های H_j و G_j را به صورت زیر معرفی می کنیم:

$$H_j = \{k \leq j \mid k \text{ برقرار است (۱۰)}\}$$

$$G_j = \{0, 1, \dots, j\} \setminus H_j.$$

اکنون فرض کنید رابطه (۱۰) برای تعداد نامتناهی k برقرار باشد، واضح است وقتی $j \rightarrow \infty$ ، تعداد اعضای

مجموعه H_j نیز به سمت ∞ میل می کند، یعنی $|H_j| \rightarrow \infty$ است.

این واقعیت در کنار روابط (۹) و (۱۰) نتیجه می دهد:

$$\|F_{k+1}\| \leq \left(\prod_{i \in G_k} \prod_{i \in H_k} \rho \right) \|F\| = \rho^{|H_k|} \|F\| \rightarrow 0 \quad \text{as } k \rightarrow \infty.$$

بنابراین دنباله $\{\|F_k\|\}$ همگرا به صفر است.

این روش درستی، یک روش لوبنرک-مارکوارت اصلاح شده بایک جستجوی نخلی جدید غیر مکرر برای حل دستگاه معادلات غیر نخلی

اکنون می توان قضیه زیر را بیان کرد که همگرایی سراسری الگوریتم ۲-۱ را ثابت می کند.

قضیه ۶. تحت شرایط فرض ۳-۱، اگر الگوریتم ۲-۱ در تعداد متناهی تکرار خاتمه نیابد، آنگاه

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|J_k^T F_k\| = 0. \quad (22)$$

برهان. با استفاده از برهان خلف، فرض کنید $\tau > 0$ و عدد طبیعی \hat{k} موجود باشند به طوری که:

$$\|J_k^T F_k\| > \tau, \quad \forall k > \hat{k}. \quad (23)$$

این نامساوی همراه با رابطه (۱۵)، برای مقادیر به اندازه کافی بزرگ k نتیجه می دهد:

$$\|F_k\| \geq L^{-1}\tau. \quad (24)$$

بنابراین با استفاده از لم ۵، نامساوی (۱۰) فقط برای تعداد متناهی مقادیر k برقرار است. در نتیجه عدد طبیعی

k موجود است به طوری که رابطه (۹) برای هر $k \geq \hat{k}$ برقرار است؛ بنابراین از رابطه (۹) داریم:

$$\sum_{k=k}^{\infty} \|F(x_k + \alpha_k d_k + \alpha_k \hat{d}_k)\|^r \leq \sum_{k=k}^{\infty} R_k - \sum_{k=k}^{\infty} \sigma_v \alpha_k^r \|d_k\|^r - \sum_{k=k}^{\infty} \sigma_v \alpha_k^r \|\hat{d}_k\|^r - \sum_{k=k}^{\infty} \sigma_r \alpha_k^r \|F_k\|^r,$$

این نامساوی همراه با تعریف $R_k = \beta_k F_{l(k)}^r + (1 - \beta_k) \|F_k\|^r$ و روابط (۹) و (۱۹)، رابطه زیر را نتیجه می دهد:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=k}^{\infty} (\|F(x_k + \alpha_k d_k + \alpha_k \hat{d}_k)\|^r - \|F_k\|^r) + \sum_{k=k}^{\infty} \sigma_v \alpha_k^r \|d_k\|^r + \sum_{k=k}^{\infty} \sigma_v \alpha_k^r \|\hat{d}_k\|^r + \sum_{k=k}^{\infty} \sigma_r \alpha_k^r \|F_k\|^r \\ & \leq \sum_{k=k}^{\infty} \beta_k F_{l(k)}^r \leq \sum_{k=k}^{\infty} \beta_k (F_{l(k)}^r - \|F_k\|^r) \\ & \leq \sum_{k=k}^{\infty} \beta_k M^r \leq M^r \sum_{k=k}^{\infty} \beta_k < \infty. \end{aligned}$$

بنابراین با توجه به گام ۵ الگوریتم ۲-۱ داریم:

$$\sum_{k=k}^{\infty} (\|F(x_{k+1})\|^r - \|F_k\|^r) + \sum_{k=k}^{\infty} \sigma_v \alpha_k^r \|d_k\|^r + \sum_{k=k}^{\infty} \sigma_v \alpha_k^r \|\hat{d}_k\|^r + \sum_{k=k}^{\infty} \sigma_r \alpha_k^r \|F_k\|^r < \infty,$$

یک نتیجه بدیهی این رابطه، رابطه

$$\sum_{k=k}^{\infty} \alpha_k^r \|F_k\|^r < \infty,$$

است. بنابراین $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k \|F_k\| = 0$ ، پس با توجه به (۲۴) داریم:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0. \quad (25)$$

اگر $\bar{\alpha}_k = \frac{\alpha_k}{r}$ باشد آنگاه روابط (۹) و (۱۱) نتیجه می دهند:

$$\|F(x_k + \bar{\alpha}_k d_k + \bar{\alpha}_k \hat{d}_k)\|^r > R_k - \sigma_v \bar{\alpha}_k^r \|d_k\|^r - \sigma_v \bar{\alpha}_k^r \|\hat{d}_k\|^r - \sigma_r \bar{\alpha}_k^r \|F_k\|^r.$$

اکنون استفاده از لم ۱، برقراری رابطه زیر را نتیجه می دهد:

$$\|F(x_k + \bar{\alpha}_k d_k + \bar{\alpha}_k^y \hat{d}_k)\|^y - \|F_k\|^y > -\sigma_v \bar{\alpha}_k^y \|d_k\|^y - \sigma_v \bar{\alpha}_k^y \|\hat{d}_k\|^y - \sigma_v \bar{\alpha}_k^y \|F_k\|^y.$$

با استفاده از این نامساوی و رابطه (۱۳)، داریم:

$$\begin{aligned} & \bar{\alpha}_k^y (\sigma_v \|d_k\|^y + \sigma_v \|\hat{d}_k\|^y + \sigma_v \|F_k\|^y) > -(\|F(x_k + \bar{\alpha}_k d_k + \bar{\alpha}_k^y \hat{d}_k)\|^y - \|F_k\|^y) \\ & = -\nu F_k^T (F(x_k + \bar{\alpha}_k d_k + \bar{\alpha}_k^y \hat{d}_k) - F_k) - \|F(x_k + \bar{\alpha}_k d_k + \bar{\alpha}_k^y \hat{d}_k) - F_k\|^y \\ & \geq -\nu F_k^T (F(x_k + \bar{\alpha}_k d_k + \bar{\alpha}_k^y \hat{d}_k) - F_k) - L \bar{\alpha}_k^y (\|d_k\|^y + \|\hat{d}_k\|^y). \end{aligned} \quad (26)$$

از طرف دیگر استفاده از قضیه مقدار میانگین، روابط (۱۳)، (۱۹)، (۲) و (۱۴) را نتیجه می دهد:

$$\begin{aligned} & F_k^T (F(x_k + \bar{\alpha}_k d_k + \bar{\alpha}_k^y \hat{d}_k) - F_k) \\ & = F_k^T (F(x_k + \bar{\alpha}_k d_k + \bar{\alpha}_k^y \hat{d}_k) - F(x_k + \bar{\alpha}_k d_k)) + F_k^T (F(x_k + \bar{\alpha}_k d_k) - F_k) \\ & \leq LM \bar{\alpha}_k^y \|\hat{d}_k\| + F_k^T J_k \bar{\alpha}_k d_k + F_k^T \int_0^1 (J(x_k + t \bar{\alpha}_k d_k) - J_k) \bar{\alpha}_k d_k dt \\ & \leq LM \bar{\alpha}_k^y \|\hat{d}_k\| - \bar{\alpha}_k d_k^T (J_k^T J_k + \lambda_k I) d_k + \frac{1}{\nu} LM \bar{\alpha}_k^y \|d_k\|. \end{aligned} \quad (27)$$

با توجه به روابط (۲۶) و (۲۷) برای عدد مثبت $c_1 = \max\{\sigma_v + L, \sigma_v + L, \sigma_v, \nu LM\}$ داریم:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_k & \geq \frac{d_k^T (J_k^T J_k + \lambda_k I) d_k}{c_1 (\|d_k\|^y + \|\hat{d}_k\|^y + \|F_k\|^y + \|d_k\| + \|\hat{d}_k\|)} \\ & \geq \frac{\lambda_k d_k^T d_k}{c_1 (\|d_k\|^y + \|\hat{d}_k\|^y + \|F_k\|^y + \|d_k\| + \|\hat{d}_k\|)}. \end{aligned} \quad (28)$$

استفاده از روابط (۲)، (۴)، (۱۳)، (۱۵)، (۲۰)، (۲۱) و (۲۴) را نتیجه می دهد که:

$$\begin{aligned} \|\hat{d}_k\| & = \|(J_k^T J_k + \lambda_k I)^{-1} J_k^T F(y_k)\| \\ & \leq \|(J_k^T J_k + \lambda_k I)^{-1} J_k^T (F(y_k) - F_k)\| + \|(J_k^T J_k + \lambda_k I)^{-1} J_k^T F_k\| \\ & \leq L \lambda_k^{-1} \|d_k\| + \|d_k\| \\ & \leq (1 + \frac{L}{\mu \tau}) \|d_k\| \\ & \leq (1 + \frac{L}{\mu \tau}) \frac{L}{\mu}. \end{aligned} \quad (29)$$

اگر $\liminf_{k \rightarrow \infty} \|d_k\| = 0$ باشد، آنگاه با توجه به روابط (۲) و (۱۵) خواهیم داشت:

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|J_k^T F_k\| = \liminf_{k \rightarrow \infty} \|(J_k^T J_k + \lambda_k I) d_k\| = 0,$$

که با رابطه (۲۳) در تناقض است؛ بنابراین عدد مثبت τ_1 موجود است که:

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|d_k\| \geq \tau_1.$$

از این نامساوی همراه با روابط (۲۸)، (۲۱)، (۲۹)، (۱۹) و (۲۴) نتیجه می شود که دنباله $\{\alpha_k\}$ دور از صفر کراندار است، که در تناقض با (۲۵) است؛ بنابراین فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

۴ همگرایی مکعبی

در این بخش نشان داده می شود که الگوریتم ۱-۲ تحت شرط کران خطا^۱، همگرایی مکعبی دارد. در ابتدا چند لم مهم ارایه و سپس قضیه همگرایی مکعبی بیان می گردد.

تعریف ۴-۱. فرض کنید X^* مجموعه تمام جواب های مساله (۱) و D یک زیر مجموعه از R^n باشد به طوری که $D \cap X^* \neq \emptyset$ باشد. در این صورت $\|F(x)\|$ شرط کران خطای موضعی برای مساله (۱) را دارد هرگاه ثابت مثبت c موجود باشد، به طوری که:

$$\|F(x)\| \geq c \operatorname{dist}(x, X^*) \quad \forall x \in D, \quad (30)$$

که در آن $\operatorname{dist}(x, X^*) = \inf_{y \in X^*} \|x - y\|$

در ادامه فرض می شود که \bar{x}_k نزدیک ترین بردار از مجموعه X^* به نقطه x_k باشد. یعنی:

$$\|\bar{x}_k - x_k\| = \operatorname{dist}(x_k, X^*). \quad (31)$$

در جهت اثبات همگرایی مکعبی به فرض های زیر نیاز داریم.

فرض ۴-۲.

۱. مساله (۱) دارای یک جواب $x^* \in X^*$ است.

۲. توابع $F(x)$ و $J(x)$ بر $N(x^*, b)$ پیوسته لیپ شیتس هستند؛ یعنی اینکه عدد مثبت L موجود است که:

$$\|F(y) - F(x)\| \leq L \|y - x\|, \quad \forall x, y \in N(x^*, b), \quad (32)$$

و

$$\|J(y) - J(x)\| \leq L \|y - x\|, \quad \forall x, y \in N(x^*, b). \quad (33)$$

که در آن:

$$0 < b < 1, \quad N(x^*, b) = \{x \in R^n \mid \|x - x^*\| \leq b\}.$$

۳. $F(x)$ به طور پیوسته مشتق پذیر است و $\|F(x)\|$ در شرط کران خطای موضعی برای مساله (۱) روی $N(x^*, b)$ صدق می کند.

تذکر ۴-۳. از پیوستگی لیپ شیتس ماتریس ژاکوبی به سادگی نتیجه می شود که:

$$\|F(y) - F(x) - J(x)(y - x)\| \leq L \|y - x\|^2, \quad \forall x, y \in N(x^*, b). \quad (34)$$

لم ۷. فرض کنید شرایط فرض ۲-۴ برقرار است و دنباله $\{x_k\}$ توسط الگوریتم ۱-۲ تولید شده باشد، در این صورت داریم:

$$\|\lambda_k\| = O(\|\bar{x}_k - x_k\|) \quad 1.$$

¹ Error bound condition

$$\|d_k\| = O(\|\bar{x}_k - x_k\|) \quad ۲.$$

$$\|\hat{d}_k\| = O(\|\bar{x}_k - x_k\|) \quad ۳.$$

برهان. با توجه به شرط کران خطای موضعی (۳۰)، رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\lambda_k = \mu \|F(x_k)\| \geq \mu c \|\bar{x}_k - x_k\|. \quad (۳۵)$$

از طرف دیگر از $F(\bar{x}_k) = 0$ و رابطه (۳۲)، نتیجه می‌شود:

$$\lambda_k = \mu \|F(x_k)\| = \mu \|F(\bar{x}_k) - F(x_k)\| \leq \mu L \|\bar{x}_k - x_k\|. \quad (۳۶)$$

روابط (۳۵) و (۳۶) درستی اولین گزاره را نتیجه می‌دهد. اثبات گزاره‌های (۲) و (۳) در [۳] آمده است.

لم ۸. فرض کنید شرایط فرض ۴-۲ برقرار است و دنباله $\{x_k\}$ توسط الگوریتم ۲-۱ تولید شده باشد، در این صورت داریم:

$$\|F_k + J_k d_k\| = o(\|\bar{x}_k - x_k\|) \quad ۱.$$

$$\|F(y_k)\| = o(\|\bar{x}_k - x_k\|) \quad ۲.$$

$$\|F(y_k) + J_k \hat{d}_k\| = o(\|\bar{x}_k - x_k\|) \quad ۳.$$

برهان. اثبات این لم مشابه اثبات لم ۳-۴ از [۶] می‌باشد.

قضیه ۹. فرض کنید شرایط فرض ۴-۲ برقرار است و دنباله $\{x_k\}$ توسط الگوریتم ۲-۱ تولید شده باشد، در این صورت دنباله $\{x_k\}$ به طور مکعبی به x^* همگراست.

برهان. با توجه به رابطه (۳۴) و لم‌های ۷ و ۸، ثابت $c_\rho > 0$ وجود دارد که:

$$\begin{aligned} \|F(x_k + d_k + \hat{d}_k)\| &\leq \|F(x_k + d_k + \hat{d}_k) - F_k - J_k(d_k + \hat{d}_k)\| + \|F_k + J_k(d_k + \hat{d}_k)\| \\ &\leq c_\rho (\|d_k\|^2 + \|\hat{d}_k\|^2) + \|F_k + J_k d_k\| + \|F(y_k) + J_k \hat{d}_k\| + \|F(y_k)\| \\ &\leq o(\|\bar{x}_k - x_k\|). \end{aligned} \quad (۳۷)$$

بنابراین دنباله $\{r_k\}$ همگرا به صفر موجود است که

$$\|F(x_k + d_k + \hat{d}_k)\| \leq r_k \|\bar{x}_k - x_k\| \leq c^{-1} r_k \|F_k\|, \quad (۳۸)$$

که در آن نامساوی آخر به دلیل شرط کران خطای موضعی (۳۰) برقرار است. چون دنباله $\{r_k\}$ همگرا به صفر و $c\rho$ یک عدد ثابت مثبت می‌باشد؛ لذا $k_1 \in N$ موجود است به طوری که:

$$r_k < c\rho, \quad \forall k \geq k_1. \quad (۳۹)$$

از روابط (۳۸) و (۳۹) نتیجه می‌شود:

$$\|F(x_k + d_k + \hat{d}_k)\| \leq \rho \|F_k\|, \quad \forall k \geq k_1. \quad (۴۰)$$

بنابراین برای مقادیر به اندازه کافی بزرگ k ، همواره داریم $\alpha_k = 1$ ؛ بنابراین:

$$x_{k+1} = x_k + d_k + \hat{d}_k, \quad \forall k \geq k_1.$$

ادامه اثبات به طور کامل مشابه استدلال موجود در [۳] است و بنابراین از ارایه‌ی مجدد آن صرف نظر می‌شود.

۵ نتایج عددی

هدف این بخش مقایسه الگوریتم ۱-۲ ارایه شده در این مقاله با دو الگوریتم معروف لوبنرک-مارکوارت اصلاح شده برای حل معادلات غیرخطی می باشد. برای یک نمایش ساده، اسامی مخفف الگوریتمها در کنار مقادیر انتخاب شده برای پارامترهای ثابت هر الگوریتم را به شرح زیر در نظر می گیریم.

• MLMF: الگوریتم لوبنرک-مارکوارت اصلاح شده توسط فن [۳]

$$p_1 = 0.0001, p_2 = 0.25, p_3 = 0.75, \mu_1 = 0.1, m = 10^{-6}.$$

• MLMZ: الگوریتم لوبنرک-مارکوارت اصلاح شده توسط زو [۶]

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0.005, \rho = 0.8, r = 0.5, \mu = 0.01, \varepsilon_k = \frac{0.5^k}{10}.$$

• MLMN: الگوریتم ۱-۲

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0.005, \rho = 0.8, r = 0.5, \mu = 0.01, \beta_k = \frac{1}{\gamma^k}, N = 5.$$

برای مقایسه مناسب، هر سه الگوریتم روی یک مجموعه از مسایل تست منفرد، که مشابه با [۸] به صورت زیر ساخته می شود، اجرا گردید. ابتدا فرض کنید که $F(x)$ یک تابع تست استاندارد انتخاب شده از [۷] باشد، یک تابع جدید با ژاکوبی منفرد را از آن به صورت زیر می توان ساخت.

$$\hat{F}(x) = F(x) - J(x^*)A(A^T A)^{-1}A^T(x - x^*),$$

که در آن برای $A \in R^{n \times k}$, $1 \leq k \leq n$ یک ماتریس با رتبه ستونی کامل و x^* یک جواب معادله $F(x) = 0$ می باشد. واضح است که

$$\hat{J}(x^*) = J(x^*)(I - A(A^T A)^{-1}A^T),$$

یک ماتریس از رتبه $n - k$ است و $\hat{F}(x^*) = 0$. البته $\hat{F}(x)$ ممکن است ریشه های دیگری نیز داشته باشد که ریشه $F(x) = 0$ نیستند. در این مقاله ما ماتریس $A \in R^{n \times k}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$A = [1, 1, \dots, 1]^T \in R^{n \times 1}.$$

با این انتخاب یک مجموعه از مسایل منفرد از رتبه $n - 1$ تولید می گردد. در کلیه اجراها، یک الگوریتم متوقف می شود اگر:

$$\|J_k^T F_k\| \leq 10^{-4},$$

یا تعداد تکرارهای مورد نیاز از ۱۰۰۰ تجاوز کند. نتایج عددی حاصل از اجرای الگوریتمها بر روی ۵ مساله اول از مسایل موری و همکاران [۷] همراه با توابع توسعه یافته متناظر با آن مسایل، با نقاط شروع و مقادیر متفاوت n ، در جدول ۱ ارایه شده است.

جدول ۱. نتایج عددی اجرای الگوریتم‌ها بر روی مسایل آزمون

Problem	x_i	n	MLMZ NF/NJ/NT	NS?	MLMF NF/NJ/NT	NS?	MLMN NF/NJ/NT	NS ?
Rosenbrock	-۱.۰	۲	۲۹/۱۵/۵۹	Y	۱۹۷/۵۳/۳۰۳	Y	۲۹/۱۵/۵۹	Y
	-۱		۲۳/۱۲/۴۷	Y	۲۱/۱۱/۴۳	Y	۲۳/۱۲/۴۷	Y
	۱		۲۱/۱۱/۴۳	Y	۱۷۵/۴۵/۲۶۵	Y	۲۱/۱۱/۴۳	Y
	۱.۰		۳۴/۱۶/۶۶	Y	۸۹/۳۷/۱۶۳	Y	۲۷/۱۴/۵۵	Y
	۱۰۰		۵۶/۲۴/۱۰۴	Y	۵۵/۲۳/۱۰۱	Y	۳۷/۱۹/۷۵	Y
Extended Rosenbrock	-۱.۰	۱۰۰	-	-	۱۰۷/۴۵/۴۶۰۷	Y	۳۳/۱۷/۱۷۳۳	Y
	-۱		۳۳/۱۷/۱۷۳۳	Y	۱۳۱/۴۶/۴۷۳۱	Y	۳۳/۱۷/۱۷۳۳	Y
	۱		۳۳/۱۷/۱۷۳۳	Y	۸۷/۴۱/۴۱۸۷	Y	۳۳/۱۷/۱۷۳۳	Y
	۱.۰		-	-	۱۰۳/۴۸/۴۹۰۳	Y	۴۱/۲۱/۲۱۴۱	Y
	۱۰۰		۵۹/۳۰/۳۰۵۹	Y	۴۹/۲۲/۲۲۴۹	Y	۵۹/۳۰/۳۰۵۹	Y
Powell Singular	-۱.۰	۴	۱۷/۹/۵۳	Y	۱۷/۹/۵۳	Y	۱۷/۹/۵۳	Y
	-۱		۱۱/۶/۳۵	Y	۱۱/۶/۳۵	Y	۱۱/۶/۳۵	Y
	۱		۱۱/۶/۳۵	Y	۱۱/۶/۳۵	Y	۱۱/۶/۳۵	Y
	۱.۰		۱۷/۹/۵۳	Y	۱۷/۹/۵۳	Y	۱۷/۹/۵۳	Y
	۱۰۰		۲۱/۱۱/۶۵	Y	۲۱/۱۱/۶۵	Y	۲۱/۱۱/۶۵	Y
Extended Powell Singular	-۱.۰	۱۰۰	۱۷/۹/۹۱۷	Y	۱۷/۹/۹۱۷	Y	۱۷/۹/۹۱۷	Y
	-۱		۱۳/۷/۷۱۳	Y	۱۳/۷/۷۱۳	Y	۱۳/۷/۷۱۳	Y
	۱		۱۳/۷/۷۱۳	Y	۱۳/۷/۷۱۳	Y	۱۳/۷/۷۱۳	Y
	۱.۰		۱۷/۹/۹۱۷	Y	۱۷/۹/۹۱۷	Y	۱۷/۹/۹۱۷	Y
	۱۰۰		۳۱/۱۶/۱۶۳۱	Y	۲۳/۱۲/۱۲۲۳	Y	۳۱/۱۶/۱۶۳۱	Y
Extended Powell Badly Scaled	-۱.۰	۱۰۰	۲۰۱/۵۶/۵۸۰۱	N	-	-	۸۴/۳۳/۳۳۸۴	N
	-۱		۶۵/۱۸/۱۸۶۵	N	۶۸۵/۲۳۷/۲۴۳۸۵	N	۱۳/۷/۷۱۳	N
	۱		۲۰۵/۳۷/۳۹۰۵	N	-	-	۱۵/۸/۸۱۵	N
	۱.۰		۱۰۰۹/۱۳۵/۱۴۵۰۹	N	-	-	-	-
	۱۰۰		-	-	-	-	-	-
Wood	-۱.۰	۴	۲۵/۱۳/۷۷	Y	۲۵/۱۳/۷۷	Y	۲۵/۱۳/۷۷	Y
	-۱		۱۹/۱۰/۵۹	Y	۱۹/۱۰/۵۹	Y	۱۹/۱۰/۵۹	Y
	۱		۲۱/۱۱/۶۵	Y	۲۱/۱۱/۶۵	Y	۲۱/۱۱/۶۵	Y
	۱.۰		۲۳/۱۲/۷۱	Y	۲۳/۱۲/۷۱	Y	۲۳/۱۲/۷۱	Y
	۱۰۰		۵۹/۲۴/۱۵۵	Y	۲۷/۱۴/۸۳	Y	۳۵/۱۸/۱۰۷	Y
Extended Wood	-۱.۰	۱۰۰	۲۹/۱۵/۱۵۲۹	Y	۲۷/۱۴/۱۴۲۷	Y	۲۹/۱۵/۱۵۲۹	Y
	-۱		۲۱/۱۱/۱۱۲۱	Y	۲۱/۱۱/۱۱۲۱	Y	۲۱/۱۱/۱۱۲۱	Y
	۱		۲۳/۱۲/۱۲۲۳	Y	۲۱/۱۱/۱۱۲۱	Y	۲۳/۱۲/۱۲۲۳	Y
	۱.۰		۳۰/۱۵/۱۵۳۰	Y	۲۳/۱۲/۱۲۲۳	Y	۳۱/۱۶/۱۶۳۱	Y
	۱۰۰		۱۵۷/۴۲/۴۳۵۷	Y	۱۰۵/۴۱/۴۲۰۵	Y	۱۳۷/۴۱/۴۲۳۷	Y
Helical Valley	-۱.۰	۳	۱۱/۶/۲۹	N	۱۱/۶/۲۹	N	۱۱/۶/۲۹	N
	-۱		۱/۱/۳	Y	۱/۱/۳	Y	۱/۱/۳	Y
	۱		۱۳/۷/۳۴	N	۱۱/۶/۲۹	N	۱۳/۷/۳۴	N
	۱.۰		۱۳/۷/۳۴	N	۱۳/۷/۳۴	N	۱۳/۷/۳۴	N
	۱۰۰		۱۱/۶/۲۹	N	۱۱/۶/۲۹	N	۱۱/۶/۲۹	N
Extended Helical Valley	-۱.۰	۹۹	۱۳/۷/۷۰۶	N	۱۳/۷/۷۰۶	N	۱۳/۷/۷۰۶	N
	-۱		۱/۱/۱۰۰	Y	۱/۱/۱۰۰	Y	۱/۱/۱۰۰	Y
	۱		۱۵/۸/۸۰۷	N	۱۵/۸/۸۰۷	N	۱۵/۸/۸۰۷	N
	۱.۰		۱۵/۸/۸۰۷	N	۲۹/۱۲/۱۲۱۷	N	۱۵/۸/۸۰۷	N
	۱۰۰		۱۵/۸/۸۰۷	N	۱۵/۸/۸۰۷	N	۱۵/۸/۸۰۷	N

هر مساله ۵ نقطه شروع $-1.0x$ ، $-x$ ، x ، $1.0x$ و $100x$ اجرا گردیده است که در آن x همان بردار اولیه پیشنهاد شده توسط موری و همکاران در [۷] می‌باشد. در جدول ۱، تعداد محاسبه تابع و تعداد محاسبات ماتریس ژاکوبی به ترتیب با نمادهای "NF" و "NJ" نشان داده شده است. با توجه به اینکه برای معادلات غیرخطی معمولاً هزینه محاسبه ماتریس ژاکوبی n برابر هزینه محاسبه مقدار تابع است؛ بنابراین در جهت یک مقایسه مناسب، از مقدار:

$$NT = NF + n * NJ$$

به عنوان تعداد محاسبه کل، برای مقایسه الگوریتم‌ها استفاده شده است. حرف "Y" در ستونی که با عنوان "NS" در جدول نام گذاری شده، نمایانگر این است که آن الگوریتم روی آن مساله با موفقیت به جواب x^* رسیده است؛ اما مفهوم حرف "N" در این مکان این است که الگوریتم جوابی غیر از x^* تولید نموده است. به علاوه حالاتی در اجرا که تعداد تکرارها بیش تر از ۱۰۰۰ گردیده و یا الگوریتم به دلایلی موفق به تولید جواب نگردیده، در جدول با علامت "-" نمایش داده شده است. نتایج ارایه شده همگی نشانگر برتری الگوریتم جدید بر الگوریتم‌های دیگر است. از جدول ۱ می‌توان مشاهده نمود که الگوریتم جدید تقریباً ۷۸ درصد از مسایل را با حداقل تعداد محاسبات کل (NT) حل کرده است، جایی که الگوریتم *MLMF* تقریباً ۶۷ درصد و الگوریتم *MLMZ* تنها ۶۴ درصد از مسایل را با حداقل تعداد محاسبات کل (NT) حل می‌کنند. همچنین تعداد شکست‌ها در الگوریتم جدید کم تر از تعداد شکست‌های دو الگوریتم دیگر است. این نتایج نشان می‌دهد که الگوریتم جدید یک الگوریتم کارا و موثر است.

منابع

[۱۱] عهدی اقدم، ص.، رضایپور، ر.، قوسی، س.، (۱۳۸۸). روش‌های تکراری شبه نیوتن برای دستگاه‌های معادلات غیرخطی. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۶(۲۳)، ۱-۱۰.

- [1] Yamashita, N., Fukushima, M., (2001). On the rate of convergence of the Levenberg–Marquardt method. *Computing*, 15, 237–249.
- [2] Fan, J., Yuan, Y. X., (2005). On the quadratic convergence of the Levenberg–Marquardt method without nonsingularity assumption. *Computing*, 74, 23–39.
- [3] Fan, J., (2012). The modified Levenberg–Marquardt method for nonlinear equations with cubic convergence. *Mathematics of Computation*, 81, 447–466.
- [4] Grippo, L., Lampariello, F., Lucidi, S., (1986). A nonmonotone line search technique for Newton's method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 23, 707–716.
- [5] Li, D., Fukushima, M., (1999). A globally and superlinearly convergent Gauss–Newton- based BFGS method for symmetric nonlinear equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 37, 152–172.
- [6] Zhou, W., (2013). On the convergence of the modified Levenberg–Marquardt method with a nonmonotone second order Armijo type line search. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 239, 152-161.
- [7] Moré, J. J., Garbow, B. S., Hillstom, K. E., (1981). Testing unconstrained optimization software, *ACM Transactions on Mathematical Software*, 7, 17–41.
- [8] Schnabel, R. B., Frank, P. D., (1984). Tensor methods for nonlinear equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 21, 815–843.
- [9] Amini, K., Rostami, F., (2015). A new modified two steps Levenberg–Marquardt Method for nonlinear equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 288, 341-350.
- [10] Broyden, C. G., (1967). Quasi-Newton methods and their applications to function minimization. *Mathematics of Computation*, 21, 577–593.