مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال هجدهم، شماره اول (پیاپی ۶۸)، بهار ۰۰، ص ص ۸۴-۷۳
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

یافتن جواب کارای مساله برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه با ضرایب قیود و بردار منابع فازی

حسن رستم زاده[۱*]، سید مرتضی میردهقان[۲]
۱- کارشناسی ارشد، گروه ریاضی، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران
۲- دانشیار، گروه ریاضی، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

رسید مقاله: ۴ خرداد ۱۳۹۵
پذیرش مقاله: ۱۲ آذر ۱۳۹۹

چکیده
مساله برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه از مسایل مهم چندهدفه می‌باشد. در این نوع مسایل توابع هدف به‌صورت کسری خطی و قیود آن به‌صورت خطی می‌باشد. فرض کنید در مساله برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه، ضرایب قیود و بردار منابع، مقادیر نادقیق فازی باشند. در این صورت مساله برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه به یک مساله برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه فازی تبدیل خواهد شد. در این مقاله ما مساله برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه فازی را به یک مدل پیشنهادی تبدیل کرده و سپس با استفاده از جواب بهینه آن و روشی که در آن از مساله برنامه‌ریزی خطی استفاده شده، یک یا چند جواب کارا برای مساله برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه فازی به دست می‌آوریم.

کلمات کلیدی: مساله برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفه فازی، جواب کارای ضعیف، جواب کارا.

۱ مقدمه
بهینه‌سازی چندهدفه یکی از شاخه‌های مهم تحقیق در عملیات است که مسایل آن شامل چندین تابع هدف می‌باشند. یکی از این مسایل، مساله برنامه ریزی کسری خطی چندهدفه (MOLFP) است که توابع هدف آن به‌صورت کسری می‌باشند. صورت و مخرج این کسرها آفین می‌باشد و ناحیه شدنی آن‌یک چندوجهی است. هر یک از توابع هدف در مسایل برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفه شبه محدب و شبه مقعر هستند، بنابراین دارای خواصی ازجمله مطلق بودن جواب‌های بهینه موضعی و وجود جواب بهینه راسی هستند. روش‌های متعددی برای حل مساله برنامه‌ریزی کسری خطی تک هدفه ازجمله روش چارنز وکوپر[۱] و گیلمار و گومری[۲] وجود دارد. از طرف دیگر برخی از محققان به دنبال پیدا کردن روش‌هایی برای پیدا کردن جواب کارای مسایل برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه بوده‌اند. به عنوان مثال، کورن بلاف و استور[۳] روشی برای پیدا کردن جواب کارای

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: hassan_rostamzade@yahoo.com

ضعیف دسته‌ای از مسایل برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه ارایه دادند. متو و جوئر گوییوا[۴] با استفاده از مساله برنامه‌ریزی غیرخطی، دسته‌ای از جواب‌های کارای ضعیف و کابلرو و هرناندز[۵] جواب‌های تقریبی از این جواب‌ها را پیدا کردند. محققان دیگری ازجمله دینکل بچ[۶]، آلموگی و لوین [۷]، فالک و پالکسی[۸] و کاستا[۹] در این زمینه مقالاتی داشته‌اند. حال اگر ضرایب قیود و بردار منابع مساله برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفه، مقادیر نادقیق فازی باشند، مساله MOLFP، به یک مساله برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه فازی تبدیل خواهد شد. نظریه اعداد فازی اولین بار توسط پروفسور لطفی عسگر زاده[۱۰] در سال (۱۹۶۵) ارایه شد. به تدریج این نظریه در مسایل بهینه‌سازی به‌کار برده شد. ناصری [۱۱] و ناصری وهمکارانش [۱۲] در زمینه حل مسایل برنامه‌ریزی خطی و غیرخطی با مدل فازی مقالاتی به چاپ رسانده‌اند. محققانی از جمله صفایی[۱۳]، خرم و همکارانش[۱۴]، استانوویچ و همکارش[۱۵] و ایسکاندر[۱۶] مقالاتی در خصوص حل مسایل برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه فازی ارایه داده‌اند. ما در این مقاله مساله برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه با ضرایب قیود و بردار منابع فازی را به یک مدل پیشنهادی تبدیل کرده و با استفاده از یک الگوریتم تکراری جواب‌های بهینه این مدل پیشنهادی را به دست می‌آوریم. سپس با ارایه یک روش که در آن از مساله برنامه‌ریزی خطی استفاده شده، علاوه بر این‌که تشخیص داده می‌شود که جواب بهینه به‌دست آمده کارا است یا خیر، جواب کارای دیگری برای مساله برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه فازی به دست خواهیم آورد.

این مقاله از پنج بخش تشکیل شده است. در بخش دوم تعاریف و مفاهیم اساسی در خصوص مساله برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفه، تعریف جواب‌های کارا و مجموعه‌ی فازی به همراه تابع عضویت ذوذنقه‌ای بیان می‌شود. در بخش سوم در ابتدا مساله برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفه با ضرایب قیود و بردار منابع فازی تعریف و سپس با استفاده از روش‌های ذکر شده از حالت فازی خارج و با استفاده از یک روش تکراری جوابی برای مساله پیدا می‌شود که با یک مدل پیشنهادی دیگر تشخیص داده می‌شود که جواب به‌دست آمده کارا است یا خیر. در ادامه با استفاده از جواب کارای حاصل شده با ارایه یک مدل پیشنهادی دیگر می‌توان جواب‌های کارای متفاوتی برای مساله به‌دست آورد. در بخش چهارم مقاله با ارایه یک مثال تمام مطالب گفته شده در بخش‌های قبل قابل مشاهده خواهد بود. در نهایت در بخش پنجم نتیجه‌گیری بیان می‌شود.

۲ تعاریف و مفاهیم اساسی

مساله بهینه‌سازی برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفه، به صورت زیر مدل می‌شود:

$$\begin{aligned} &\max f(x) = [f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x)] \\ &s.t. \quad x \in X = \{x \in R^n : Ax \le b, \ \ x \ge 0\}, \end{aligned} \qquad (۱)$$

که در آن $f_k(x) = \dfrac{c_k x + \alpha_k}{d_k x + \beta_k}$، $c_k, d_k \in R^n$ و $\alpha_k, \beta_k \in R$، برای $k = 1,2,\ldots,p$ و همچنین ناحیه X کراندار می‌باشد. در مساله (۱) بدون از دست دادن کلیت مساله فرض می‌کنیم که برای

[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.1.1.4]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.1.73]

$k=1,2,\ldots,p$، $d_k x+\beta_k>0$. برای $k=1$، مساله (۱) به مساله برنامه‌ریزی کسری خطی (LFP) $max\left\{f\left(x\right)=\dfrac{cx+\alpha}{dx+\beta}:\ x\in X\right\}$، تبدیل خواهد شد. چارنز و کوپر[۱]، با تبدیل مساله برنامه‌ریزی کسری خطی تک هدفه (LFP) به مساله برنامه‌ریزی خطی زیر آن را حل کردند.

$$\begin{aligned}&\max f\left(x\right)=ct+\alpha t\\&s.t.\ \ dy+\beta t=1,\\&y,t\geq 0,\end{aligned}\qquad (۲)$$

که در آن $t=\dfrac{1}{dx+\beta}$ و $y=xt$.

قضیه۲-۱ فرض کنید (y^*,t^*) جواب بهینه مساله (۲) باشد. در این صورت $x^*=\dfrac{y^*}{t^*}$ جواب بهینه مساله LFP می‌باشد.

اثبات. به مرجع [۳] رجوع شود.

تعریف ۲-۲ $\bar{x}\in X$ یک جواب کارا از مساله (۱) است، اگر $x\in X$ وجود نداشته باشد به طوری که $f_k\left(\bar{x}\right)\leqslant f_k\left(x\right)\ ,\ k=1,2,\ldots,p,\ \ f\left(x\right)\neq f\left(\bar{x}\right)$.

تعریف ۲-۳ $\bar{x}\in X$ یک جواب کارای ضعیف مساله (۱) است، هرگاه xی در ناحیه شدنی X وجود نداشته باشد که $f_k\left(\bar{x}\right)<f_k\left(x\right)$، $k=1,2,\ldots,p$.

تعریف ۲-٤ $\bar{x}\in X$ یک جواب کارای اکید مساله (۱) است، هرگاه xی در ناحیه شدنی X وجود نداشته باشد که $f_k\left(\bar{x}\right)\leq f_k\left(x\right)$، $k=1,2,\ldots,p$.

ملاحظه ۲-۵ از تعاریف فوق می‌توان تنیجه گرفت که هر جواب کارا یک جواب کارا ضعیف و هر جواب کارای اکید یک جواب کارا می‌باشد. اما برعکس آن در حالت کلی برقرار نیست.

تعریف ۲-٦ [۱۰] فرض کنید x عنصری از مجموعه مرجع X باشد. در این صورت مجموعه فازی $\tilde{A}$ در X به صورت $\tilde{A}=\left\{\left(x,\mu_{\tilde{A}}\left(x\right)\right):x\epsilon X\right\}$ تعریف می‌شود که در آن تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}\left(x\right):X\rightarrow\left[0,1\right]$ تابعی است که به هر عنصر از مجموعه X ، یک عدد را از بازۀ $\left[0,1\right]$ به عنوان درجه عضویت آن عنصر در مجموعه فازی $\tilde{A}$ نسبت می‌دهد.

تعریف۲-۷ [۱۰] تابع $L:X\rightarrow\left[0,1\right]$ با دو پارامتر α و β را تابع عضویت ذوزنقه‌ای گویند، هرگاه

$$L\left(x;\alpha,\beta\right)=\begin{cases}1 & x<\alpha,\\ \dfrac{\alpha+\beta-x}{\beta} & \alpha\leq x<\alpha+\beta,\\ 0 & x\geq\alpha+\beta,\end{cases}$$

که در آن $x\in X$.

۳ مساله برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه با ضرایب قیود و بردار منابع فازی

فرض کنید در مساله (۱)، ضرایب قیود و بردار منابع به صورت فازی باشند. در این صورت مدلی به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&\max f(x)=[f_1(x), f_2(x),\dots, f_p(x)]\\&s.t.\ \ x\in X=\left\{x\in R^n:\tilde{A}x\le\tilde{b},\ \ x\ge 0\right\},\end{aligned} \tag{۳}$$

که در آن برای $k=1,2,\dots,p$، و برای $f_k(x)=\dfrac{c_kx+\alpha_k}{d_kx+\beta_k}$ و برای $i=1,\dots,m$ و $j=1,\dots,n$، $\tilde{A}=\left[\tilde{a}_{ij}\right]_{m\times n}$ و $\tilde{b}=\left[\tilde{b}_i\right]_{m\times 1}$. همچنین ناحیه X کراندار و برای هر $x\epsilon X$، $d_kx+\beta_k>0$. $\tilde{A}$ و $\tilde{b}$ ماتریسی از مقادیر نادقیق فازی هستند. در اینجا $\tilde{a}_{ij}$ و $\tilde{b}_i$ به ترتیب به وسیله تابع‌های عضویت $\mu_{\tilde{a}_{ij}}(x):R\to[0,1]$ و $\mu_{\tilde{b}_i}(x):R\to[0,1]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{a}_{ij}}(x)=\begin{cases}1 & x\le a_{ij},\\ \dfrac{a_{ij}+d_{ij}-x}{d_{ij}} & a_{ij}\le x\le a_{ij}+d_{ij},\\ 0 & x\ge a_{ij}+d_{ij},\end{cases}$$

که در آن $x\in R$ و برای $i=1,\dots,m$ و $j=1,\dots,n$، $d_{ij}>0$ فاصله نوسانات مجاز a_{ij} است.

$$\mu_{\tilde{b}_i}(x)=\begin{cases}1 & x\le b_i,\\ \dfrac{b_i+p_i-x}{p_i} & b_i\le x\le b_i+p_i,\\ 0 & x\ge b_i+p_i,\end{cases}$$

که در آن $x\in R$ و برای $i=1,\dots,m$، $p_i>0$ فاصله نوسانات مجاز b_i است. برای این‌که مساله از شکل فازی بودن خود خارج شود نیاز است کران بالا $\left(Z_k^u\right)$ و کران پایین $\left(Z_k^l\right)$ مقدار بهینه‌های هر یک از توابع هدف را به‌دست آورد و این با حل مسایل برنامه‌ریزی کسری زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}&Z_k^1=max\frac{c_kx+\alpha_k}{d_kx+\beta_k}, \qquad k=1,\dots,p,\\&\qquad s.t.\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i,\quad i=1,\dots,m,\\&\qquad\qquad x_j\ge 0,\quad j=1,\dots,n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&Z_k^2=max\frac{c_kx+\alpha_k}{d_kx+\beta_k}, \qquad k=1,\dots,p,\\&\qquad s.t.\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+d_{ij})x_j\le b_i,\quad i=1,\dots,m,\\&\qquad\qquad x_j\ge 0,\quad j=1,\dots,n,\end{aligned}$$

[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.1.1.4]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.1.73]

$$Z_k^{3}=max\frac{c_kx+\alpha_k}{d_kx+\beta_k},\qquad k=1,\dots,p,$$
$$s.t.\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le(b_i+p_i),\quad i=1,\dots,m,$$
$$x_j\ge 0,\qquad j=1,\dots,n,$$

$$Z_k^{4}=max\frac{c_kx+\alpha_k}{d_kx+\beta_k},\qquad k=1,\dots,p,$$
$$s.t.\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+d_{ij})x_j\le(b_i+p_i),\quad i=1,\dots,m,$$
$$x_j\ge 0,\qquad j=1,\dots,n.$$

بعد از حل مسایل بالا به روش چارنز و کوپر [۳]، کران بالا و کران پایین هر یک از توابع هدف برابر است با

$$Z_k^{u}=\max\left\{Z_k^{1},Z_k^{2},Z_k^{3},Z_k^{4}\right\},\qquad\qquad Z_k^{l}=\min\left\{Z_k^{1},Z_k^{2},Z_k^{3},Z_k^{4}\right\}.$$

در ادامه اهداف و قیود به وسیله تابع عضویت تعریف می‌شوند. تابع عضویت اهداف و قیود در دامنه دارای مقادیر پیوسته افزایشی یا کاهشی است و به وسیله کران‌های قابل پذیرش بالا و پایین اهداف و قیود تعریف می‌شوند. تابع عضویت $\mu_{f_k}(x):R^n\to[0,1]$ برای تابع هدف k ام به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mu_{f_k}(x)=\begin{cases}0 & f_k(x)\le Z_k^l\\ \dfrac{f_k(x)-Z_k^l}{Z_k^u-Z_k^l} & Z_k^l\le f_k(x)\le Z_k^u\\ 1 & f_k(x)\ge Z_k^u.\end{cases}$$

قید فازی iام یک زیرمجموعه فازی از R^n است به گونه‌ای که تابع عضویت آن یعنی $\mu_{c_i}(x):R^n\to[0,1]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{c_i}(x)=\begin{cases}0 & b_i\le\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j,\\ \dfrac{b_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j}{\sum_{j=1}^{n}d_{ij}x_j+p_i} & \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i\le\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+d_{ij})x_j+p_i,\\ 1 & b_i\ge\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+d_{ij})x_j+p_i.\end{cases}$$

جواب فازی شدنی، زیر مجموعه اهداف و قیود فازی می‌باشد که به تعیین فصل مشترک آنها منجر می‌شود. تابع عضویت جواب فازی از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\mu_D(x)_{x\ge0}=\mu_f(x)_{x\ge0}\cap\mu_c(x)_{x\ge0}=\min\left[\mu_f(x)_{x\ge0},\mu_c(x)_{x\ge0}\right],$$

که در آن $\mu_f(x)$، $\mu_c(x)$ و $\mu_D(x)$ به ترتیب تابع عضویت اهداف، قیود و جواب ها هستند. تابع عضویت جواب‌های فازی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mu_D(x)_{x\geq \circ}=\left(\bigcap_{k=1}^{p}\mu_{f_k}(x)_{x\geq \circ}\right)\cap\left(\bigcap_{k=1}^{p}\mu_c(x)_{x\geq \circ}\right)=min\left[\min_{k=1,\dots,p,\ \ x\geq \circ}\mu_{f_k}(x),\min_{i=1,\dots,m,\ \ x\geq \circ}\mu_{c_i}(x)\right].$$

با توجه به این‌که جواب بهینه، جوابی است که دارای بالاترین مقدار عضویت است، بنابراین:

$$\mu_D(x^*)=\max\underbrace{min\left[\min_{k=1,\dots,p,\ \ x\geq \circ}\mu_{f_k}(x),\min_{i=1,\dots,m,\ \ x\geq \circ}\mu_{c_i}(x)\right]}_{\lambda}. \tag{۴}$$

واضح است که $\circ \leq \lambda \leq 1$. می‌توان مساله (۴) را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} &\max\ \ \lambda \\ &s.t.\ \ \mu_{f_k}(x)\geq\lambda,\quad k=1,\dots,p, \\ &\qquad \mu_{c_i}(x)\geq\lambda,\quad i=1,\dots,m, \\ &\qquad x\geq\circ,\qquad \circ\leq\lambda\leq 1. \end{aligned}$$

سپس مساله فوق به صورت زیر بازنویسی خواهد شد.

$$\begin{aligned} &\max\quad \lambda \\ &s.t.\quad \lambda\left(Z_k^u-Z_k^l\right)-f_k(x)+Z_k^l\leq\circ,\quad k=1,\dots,p, \\ &\qquad \sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}+\lambda d_{ij}\right)x_j+\lambda p_i-b_i\leq\circ,\quad i=1,\dots,m, \\ &\qquad x_j\geq\circ,\qquad \circ\leq\lambda\leq 1. \end{aligned} \tag{۵}$$

قضیه ۳-۱ فرض کنید $(\tilde{x},\tilde{\lambda})$ جواب بهینه مساله (۵) باشد. در این صورت جواب بهینه مساله زیر یک جواب کارا ضعیف برای مساله فازی(۳) خواهد بود.

$$\begin{aligned} &\max\quad f_j(x)\qquad j\in\{1,2,\dots,p\} \\ &s.t.\quad f_k(x)\geq\tilde{\lambda}\left(Z_k^u-Z_k^l\right)+Z_k^l,\ k=1,\dots,p,\quad k\neq j, \\ &\qquad \sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}+\tilde{\lambda}d_{ij}\right)x_j+\tilde{\lambda}p_i-b_i\leq\circ,\quad i=1,\dots,m, \\ &\qquad x_j\geq\circ. \end{aligned} \tag{۶}$$

اثبات. فرض کنید $\hat{x}$ جواب بهینه مساله (۶)باشد و $\hat{x}$ جواب کارا ضعیف مساله (۳) نباشد. در این صورت $\bar{x}$ وجود دارد که برای $k=1,\dots,p$، $\tilde{\lambda}\left(Z_k^u-Z_k^l\right)+Z_k^l\leq f_k(\hat{x})<f_k(\bar{x})$. برای $k\neq j$، $\tilde{\lambda}\left(Z_k^u-Z_k^l\right)+Z_k^l<f_k(\bar{x})$، بنابراین $\bar{x}$ یک جواب شدنی است و $f_j(\hat{x})<f_j(\bar{x})$ که این تناقض است با بهینگی $\hat{x}$. □

قضیه ۳-۲ فرض کنید $(\tilde{x},\tilde{\lambda})$جواب بهینه مساله (۵)و مساله (۶) دارای جواب بهینه منحصر به فرد باشد. در این صورت جواب بهینه مساله (۶)، یک جواب کارای اکید و در نتیجه جواب کارا برای مساله فازی (۳) خواهد بود.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.1.1.4]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.1.73]

اثبات. فرض کنید $\hat{x}$ جواب بهینه مساله (۶) باشد و $\hat{x}$ جواب کارا اکید مساله (۳) نباشد. در این صورت $\bar{x}$ وجود دارد که برای $k=1,\ldots,p$، $f_k(\hat{x}) \le f_k(\bar{x})$. برای $k \ne j$، $\tilde{\lambda}\left(Z_k^u - Z_k^l\right)+Z_k^l < f_k(\bar{x})$، بنابراین $\bar{x}$ یک جواب شدنی است. حال اگر $f_j(\hat{x}) < f_j(\bar{x})$، آنگاه تناقض است با بهینگی $\hat{x}$ و اگر $f_j(\hat{x}) = f_j(\bar{x})$، آنگاه با منحصر به فرد بودن $\hat{x}$ در تناقض است. بنابراین $\hat{x}$ یک جواب کارای اکید و در نتیجه یک جواب کارا مساله (۳) خواهد بود. □

حال با توجه به اینکه در مساله (۵) و (۶)، $f_k(x)$هایی که در قیود قرار دارند از نوع کسری هستند؛ بنابراین حل این دو مساله با قیود غیرخطی کاری مشکل است. بنابراین ما در اینجا با روشی که در ادامه بیان می‌کنیم، مدل (۵) را به مدلی دیگر تبدیل کرده و سپس با استفاده از یک الگوریتم تکراری آن را حل می‌کنیم. همچنین مدل (۶) را به یک مدل خطی تبدیل کرده و آن را حل می‌کنیم.

برای $f_k(x) = \dfrac{c_k x + \alpha_k}{d_k x + \beta_k}$ که در آن $d_k x + \beta_k > 0$، مساله (۵) به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \lambda \\
s.t. \quad & \lambda\left(Z_k^u - Z_k^l\right)\left(\sum_{j=1}^{n} d_{kj} x_j + \beta_k\right) - \sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_j + \alpha_k + Z_k^l\left(\sum_{j=1}^{n} d_{kj} x_j + \beta_k\right) \le 0, k = 1,2,\ldots,p, \\
& \sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij} + \lambda d_{ij}\right) x_j + \lambda p_i - b_i \le 0, \quad i = 1,\ldots,m, \qquad (7) \\
& x_j \ge 0, \quad 0 \le \lambda \le 1.
\end{aligned}$$

همان‌طور که در قیود مساله (۷) مشاهده می‌شود متغیرهایی به صورت λx_j وجود دارد و این ناحیه شدنی را نامحدب کرده است و با استفاده از روش‌هایی که در حل مسایل برنامه‌ریزی خطی استفاده می‌شد نمی‌توان این مساله را حل کرد. لذا با استفاده از الگوریتم تکراری زیر این مساله را حل می‌کنیم.

۳-۱ الگوریتم تکراری برای پیدا کردن λ_{max}

مرحله یک. فرض می‌کنیم $\lambda = 1$. اگر ناحیه شدنی مساله (۷) ناتهی بود (از فاز یک سیمپلکس استفاده کنید)، آنگاه $\lambda_{max} = 1$ و جواب شدنی پیدا شده x، جواب بهینه مساله (۷) خواهد بود. در غیر این صورت قرار دهید: $\lambda^L = 0$ و $\lambda^R = 1$. به مرحله دو بروید.

مرحله دو. برای مقدار $\lambda_{new} = \dfrac{\lambda^L + \lambda^R}{2}$، مقدار λ^L و λ^R را به صورت زیر به‌روز رسانی کنید.

۱. اگر به ازای λ_{new}، ناحیه شدنی ناتهی بود، آنگاه $\lambda^L = \lambda_{new}$.

۲. اگر به ازای λ_{new}، ناحیه شدنی تهی بود، آنگاه $\lambda^R = \lambda_{new}$.

مرحله دو را تکرار کرده و برای هر λ_{new}، فاز یک سیمپلکس را به‌کار برده تا به λ_{max} و جواب شدنی دست پیدا کنیم.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.1.1.4]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.1.73]

قضیه ۳-۳ فرض کنید $(\tilde{x},\tilde{\lambda})$ جواب بهینه مساله (۷) باشد. در این صورت $\tilde{x}$ جواب کارا مساله (۳) است، هرگاه مقدار بهینه مدل زیر برابر صفر باشد.

$$\begin{aligned} &\max v=\sum_{k=1}^{p}\rho_k \\ &s.t. \quad c_k x+\alpha_k-\rho_k=\lambda^*\left(\left(Z_k^u-Z_k^l\right)+Z_k^l\right)\left(d_k x+\beta_k\right),\ k=1,\dots,p, \\ &\qquad \sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}+\lambda^* d_{ij}\right)x_j+\lambda^* p_i-b_i\le 0,\quad i=1,\dots,m, \\ &\qquad x_j\ge 0,\qquad 0\le\rho_k. \end{aligned} \tag{۸}$$

اثبات. فرض کنید $(\tilde{x},\tilde{\lambda})$ جواب بهینه مساله (۷) و ρ^* جواب بهینه مدل (۸) باشد. با توجه به فرض قضیه، برای $k=1,\dots,p$، $\rho^*_k=0$. بنابراین برای $k=1,\dots,p$، $\frac{c_k\tilde{x}+\alpha_k}{d_k\tilde{x}+\beta_k}=\lambda^*\left(\left(Z_k^u-Z_k^l\right)+Z_k^l\right)$. فرض کنید $\tilde{x}$ جواب کارا مساله (۳) نباشد. در این صورت $\bar{x}$ وجود دارد که برای $k=1,\dots,p$، $f_k\left(\tilde{x}\right)\le f_k\left(\bar{x}\right)$ و برای حداقل یک k یعنی j این نامساوی اکید باشد. بنابراین

$$f_j\left(\tilde{x}\right)<f_j\left(\bar{x}\right)\Rightarrow\tilde{\lambda}\left(Z_k^u-Z_k^l\right)+Z_k^l<\frac{c_j\bar{x}+\alpha_k}{d_j\bar{x}+\beta_k}\Rightarrow$$
$$c_j\bar{x}+\alpha_k>\tilde{\lambda}\left(\left(Z_k^u-Z_k^l\right)+Z_k^l\right)d_j\bar{x}+\beta_k.$$

در نتیجه $\bar{\rho}_j>0$ وجود دارد که $c_j\bar{x}+\alpha_k-\bar{\rho}_j=\tilde{\lambda}\left(\left(Z_k^u-Z_k^l\right)+Z_k^l\right)d_j\bar{x}+\beta_k$ و $\sum_{k=1}^{p}\bar{\rho}_k>0$. این با بهینه بودن ρ^*، در تناقض است. □

در ادامه برای $f_k\left(x\right)=\frac{c_k x+\alpha_k}{d_k x+\beta_k}$ که در آن $d_k x+\beta_k>0$، مساله (۶) به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$\begin{aligned} &max\frac{c_j x+\alpha_j}{d_j x+\beta_j} \\ &s.t.\quad c_k x+\alpha_k\ge\tilde{\lambda}\left(\left(Z_k^u-Z_k^l\right)+Z_k^l\right)\left(d_k x+\beta_k\right),\ k=1,\dots,p,\quad k\ne j, \\ &\qquad \sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}+\tilde{\lambda}\,d_{ij}\right)x_j+\lambda\,p_i-b_i\le 0,\quad i=1,\dots,m, \\ &\qquad x_j\ge 0\,. \end{aligned} \tag{۹}$$

حال اگر $\tilde{x}$ جواب بهینه مساله (۷) باشد، آنگاه دسته قیود اول مساله (۷) برای $k=1,\dots,p$، به صورت $f_k\left(\tilde{x}\right)=\tilde{\lambda}\left(Z_k^u-Z_k^l\right)+Z_k^l$ خواهد بود و طبق تبدیل چارنز وکوپر ($t=\frac{1}{d_j x+\beta_j}$ و $y=xt$)، مساله (۹) به صورت زیر بازنویسی خواهد شد.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.1.1.4]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.1.73]

$$\begin{aligned}
&\max \quad c_j y+\alpha_j t\\
&s.t.\ c_k y+\alpha_k t\ge f_k(\tilde{x})(d_k y+\beta_k t),\ k=1,\ldots,p,\quad k\ne j,\\
&\quad c_k y+\alpha_k t\ge f_k(\tilde{x})(d_k y+\beta_k t),\ k=1,\ldots,p,\quad k\ne j,\\
&\quad \sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}+\frac{f_k(\tilde{x})-Z_k^l}{Z_k^u-Z_k^l}d_{ij}\right)y_j+\frac{f_k(\tilde{x})-Z_k^l}{Z_k^u-Z_k^l}p_i t-b_i t\le 0,\ i=1,\ldots,m,\\
&\quad d_j y+\beta_j t=1,\\
&\quad y\ge 0,\qquad 0<t.
\end{aligned}\tag{10}$$

قضیه ۳-۴ فرض کنید $\left(y^*,t^*\right)$ جواب بهینه مساله (۱۰) باشد. در این صورت $x^*=\frac{y^*}{t^*}$ جواب بهینه مساله (۹) خواهد بود.

اثبات. در ابتدا ادعا می‌کنیم که $t>0$. فرض خلف می‌کنیم که $(y,t)=(\bar{y},0)$ جواب شدنی مدل (۱۰) باشد. در این صورت $\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}+\frac{f_k(\tilde{x})-Z_k^l}{Z_k^u-Z_k^l}d_{ij}\right)\bar{y}_j\le 0$ و $\bar{y}\ge 0$. از این می‌توان نتیجه گرفت که $\bar{y}$ یک جهت دورشونده برای ناحیه کراندار X است که این تناقض است با فرض ابتدایی مساله فازی. بنابراین اگر $\left(y^*,t^*\right)$ جواب بهینه مساله (۱۰) باشد، آنگاه $t^*>0$. حال ثابت می‌کنیم $x^*=\frac{y^*}{t^*}$ جواب بهینه مساله (۹) است.

$$\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}+\lambda d_{ij}\right)x^*_j t+\tilde{\lambda}\,p_i t-b_i t=\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}+\frac{f_k(\tilde{x})-Z_k^l}{Z_k^u-Z_k^l}d_{ij}\right)y^*_j+\frac{f_k(\tilde{x})-Z_k^l}{Z_k^u-Z_k^l}p_i t-b_i t\le 0.$$

به علاوه

$$c_k x^* t+\alpha_k t=c_k y+\alpha_k t\ge f_k(\tilde{x})(d_k y+\beta_k t)=f_k(\tilde{x})(d_k x^* t+\beta_k t).$$

برای $k=1,\ldots,p$ و $k\ne j$، می‌توان نتیجه گرفت که $\frac{c_k x^*+\alpha_k}{d_k x^*+\beta_k}\ge f_k(\tilde{x})$. بنابراین x^* یک جواب شدنی مساله (۹) می‌باشد. حال نشان می‌دهیم که x^* یک جواب بهینه مساله (۹) است. فرض خلف می‌کنیم که x^* جواب بهینه نباشد. بنابراین یک جواب شدنی $\bar{x}$ از مساله (۹) وجود دارد، به طوری که

$$\frac{c_j\bar{x}+\alpha_j}{d_j\bar{x}+\beta_j}\le\frac{c_j x^*+\alpha_j}{d_j x^*+\beta_j}\tag{11}$$

فرض کنید $\bar{t}=\frac{1}{d_j\bar{x}+\beta_j}$ و $\bar{y}=\bar{x}\bar{t}$. به آسانی می‌توان نشان داد که $(\bar{y},\bar{t})$، یک جواب شدنی از مساله (۱۰) می‌باشد. به علاوه از رابطه (۱۱) داریم:

$$c_j\bar{y}+\alpha_j\bar{t}\le c_j y^*+\alpha_j t^*$$

و این تناقض است با بهینگی $\left(y^*,t^*\right)$. بنابراین $x^*=\frac{y^*}{t^*}$ جواب بهینه مساله (۹) خواهد بود. □

مساله (۱۰) یک مساله برنامه‌ریزی خطی می‌باشد و طبق قضیه‌های ۳-۱و ۳-۲ جواب بهینه مساله (۱۰)، جواب کارای ضعیف و جواب بهینه منحصر به فرد آن، جواب کارای مساله فازی (۳) می‌باشد.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.1.1.4]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.1.73]

٤ مثال عددی

مساله *MOLFP* فازی زیر را در نظر بگیرید.

$$\max\left\{Z_1=\frac{x_2+3}{2x_1+2},\;\; Z_1=\frac{x_2+3}{2x_1+2}\,\Big|\,\tilde{1}x_1\le\tilde{4},\;\tilde{1}x_2\le\tilde{4},\;\; x\ge 0\right\}. \qquad (12)$$

که در آن $d_{ij}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$، فاصله نوسانات مجاز a_{ij} و $p_i=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$، فاصله نوسانات مجاز b_i می‌باشد. برای $k=1,2$، کران بالا $\left(Z_k^u\right)$ و کران پایین $\left(Z_k^l\right)$ مساله (۱۲) برابر است با:

$$Z_1^l=\frac{5}{2},\qquad Z_1^u=\frac{9}{2},\qquad Z_2^l=2,\qquad Z_2^u=11.$$

مدل (۷) برای مساله (۱۲)، به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
\max\quad & \lambda\\
s.t.\quad & \left(4\lambda+5\right)x_1-x_2+4\lambda+2\le 0,\\
& -x_1-x_2+9\lambda+2\le 0,\\
& \left(1+\lambda\right)x_1+\lambda x_2+\lambda-4\le 0,\\
& 2\lambda x_1+\left(1+2\lambda\right)x_2+2\lambda-4\le 0,\\
& x_1\ge 0,\; x_2\ge 0,\; 0\le\lambda\le 1.
\end{aligned}\qquad (13)$$

با استفاده از الگوریتم ۳-۳ مساله (۱۳) را حل کرده و پس از ۶۰ تکرار جواب بهینه زیر به‌دست می‌آید:

$$\lambda_{max}=0/1218\,,\qquad x_1=0/0939,\qquad x_2=3/0023.$$

نقطه $\left(0/0939,3/0023\right)$ جواب کارا برای مساله (۱۲) می‌باشد زیرا مقدار بهینه مدل زیر برابر صفر می‌باشد.

$$\begin{aligned}
\max\quad & \sum_{k=1}^{2}\rho_k\\
s.t.\quad & x_1+x_2-\rho_1=3/0962\\
& -5/4871x_1+x_2-\rho_2=2/4871\\
& 1/1218x_1+/1218x_2\le 3/8782,\\
& 0/2436x_1+1/2436x_2\le 3/7564,\\
& x_1\ge 0,\; x_2\ge 0.
\end{aligned}$$

با استفاده از نقطه $\left(0/0939,3/0023\right)$، مساله‌های زیر را طبق مدل (۶) نوشته و با حل آنها جواب کارای دیگری برای مساله (۱۲) پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\max\quad & y_2+3t\\
s.t.\quad & y_1+y_2\ge 3/0962\\
& 1/1218y_1+/1218y_2-3/8782t\le 0,\\
& 0/2436y_1+1/2436y_2-3/7564t\le 0,\\
& 2y_1+2t=1,\\
& y_1\ge 0,\; y_2\ge 0,\; t\ge 0.
\end{aligned}\qquad (14)$$

$$
\begin{aligned}
\max \quad & y_1 + y_2 \\
s.t. \quad & ۵/۴۸۷۱ y_1 - y_2 \le -۲/۴۸۷۱ \\
& ۱/۱۲۱۸ y_1 + /۱۲۱۸ y_2 \le ۳/۸۷۸۲, \\
& ۰/۲۴۳۶ y_1 + ۱/۲۴۳۶ y_2 \le ۳/۷۵۶۴, \\
& y_1 \ge ۰,\ y_2 \ge ۰.
\end{aligned}
\qquad (۱۵)
$$

جواب بهینه منحصر به فرد مدل (۱۴) برابر $y^* = (۰/۰۰۰۰, ۳/۳۷۳۳)$ و $t^* = ۱/۲۱۳۴$ است. بنابراین جواب کارای دیگر برای مساله (۱۲) برابر است با

$$x^* = \frac{y^*}{t^*} = (۰/۰۰۰۰, ۲/۷۸)$$

و جواب بهینه منحصر به فرد مدل (۱۵) برابر $y^* = (۰/۰۹۳۹, ۳/۰۰۲۳)$ و $t^* = ۱$ است. بنابراین

$$x^* = \frac{y^*}{t^*} = (۰/۰۹۳۹, ۳/۰۰۲۳)$$

که همان مقدار بهینه مساله (۱۳) است، جواب کارای مساله (۱۲) می‌باشد.

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله ما مساله برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه با ضرایب قیود و بردار منابع فازی را به یک مدل پیشنهادی تبدیل کرده و با استفاده از یک الگوریتم تکراری جواب‌های بهینه این مدل پیشنهادی را به دست می‌آوریم، سپس با ارایه یک روش که در آن از مساله برنامه‌ریزی خطی استفاده می‌شود، علاوه بر اینکه تشخیص داده می‌شود که این جواب بهینه کارا است یا خیر، جواب کارای دیگری برای مساله برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه فازی به دست می‌آوریم.

منابع

[1] Charnes, A. and Cooper. W.W. (1962). Programming with linear fractional functions, Naval Research Logistics, 9, 181-186.

[2] Gilmore, P.C. and Gomory, R.E. (1963). A linear programming approach to the cutting stock problem. Part II, Operations Research, 11, 863-888.

[3] Kornbluth. J.S.H. and Steuer, R.E. (1981). Multiple objective linear fractional programming, Management Sciences, 27, 1024-1039.

[4] Metev, B. And Gueorguieva, D. (2000). A simple method for obtaining weakly efficient points in multiobjective linear fractional programming problems, European Journal of Operational Research, 126, 386-390.

[5] Caballero, R. and Hernandez, M. (2004). The controlled estimation method in the multiobjective linear fractional problem, Computers and Operations Research, 31, 1821-1832.

[6] Dinkelbach, W. (1967). On nonlinear fractional programming, Management Sciences, 13 (7), 492-498

[7] Almogy, Y. and Levin, O. (1971). A class of fractional programming problems, Operations Research, 19, 57-67.

[8] Falk, J.E. and Palocsay, S.W. (1994). Image space analysis of generalized fractional programs, Journal of Global Optimization, 4, 63-88.
[9] Costa, J.P. (2007). Computing non-dominated solutions in MOLFP, European Journal of Operational Research, 181, 1464-1475.
[10] Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets, Information and Control, 8, 338-353.
[11] Naseri, S. H. (2007). Fuzzy simplex methods for solving fuzzy linear programming problems, Journal of Operational Research in Its Applications, 4(13), 67-76.
[12] Naseri, S. H. and Talshian, F. (1391). Quadratic programming problem with fuzzy coefficients: A solution method based on the principle of expansion, Journal of Operational Research in Its Applications, 9(4), 9-25.
[13] Safaei, N. (2014). A new method for solving fully fuzzy linear fractional programming with a triangular fuzzy numbers , App. Math. and Comp. Intel, 3, 273–281.
[14] Khorram, E. and Ezzati, R. and Valizadeh, Z. (2014). Linear fractional multiobjective optimization problems subject to fuzzy relational equations with a continuous Archimedean triangular norm, 267, 225–239.
[15] Stanojevic, B. and Stanojevic, M. (2014). Comment on fuzzy mathematical programming for multi objective linear fractional programming problem, Fuzzy Sets and Systems, 246, 156–159.
[16] Iskander, M. G. (2004). A Possibility Programming Approach for Stochastic Fuzzy Multiobjective Linear Fractional Programs, Computers and Mathematics with Applications, 48, 1603-1609.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2021.18.1.1.4]
[DOI: 10.52547/jamlu.18.1.73]