

## ارایه یک مدل تحلیل پوششی داده‌ها با محدودیت وزنی به منظور ارزیابی کارایی در صنعت بانکداری

علی ابدالی<sup>۱</sup>، بلال کریمی<sup>۲\*</sup>، سعید محرابیان<sup>۳</sup>

۱- استادیار، مدیریت دولتی، دانشگاه نیروی انتظامی امین و هیات عامل بانک سپه، تهران، ایران

۲- استادیار، ریاضی کاربردی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج، کرج، ایران

۳- استادیار، ریاضی کاربردی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران

رسید مقاله: ۲۶ شهریور ۱۳۹۹

پذیرش مقاله: ۹ اردیبهشت ۱۴۰۰

### چکیده

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) یک روش بر پایه برنامه‌ریزی ریاضی به منظور ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیری (DMUs) با چندین ورودی و خروجی است. در DEA وزن‌های ورودی و خروجی به منظور رسیدن به بهترین کارایی می‌توانند هر مقدار نامنفی را بگیرند. یکی از مشکلات به وجود آمده در این نوع ارزیابی توان تفکیک‌پذیری کم این مدل‌ها است. روش‌های محدودیت وزنی به عنوان یک راه‌حل برای رفع این مشکل و بهبود قدرت تفکیک‌پذیری مدل‌های DEA معرفی شده است. هدف از این مقاله ارایه یک مدل تحلیل پوششی داده‌ها با محدودیت وزنی جدید است. محدودیت ارایه شده با استفاده از میانگین و انحراف معیارهای وزن‌های متغیر مربوط به DMU های کارا است. در نظر گرفتن وزن‌های متغیر به دلیل عدم منحصر به فرد بودن وزن‌های به دست آمده در مدل مضربی می‌باشد. همچنین مدل ارایه شده به منظور ارزیابی کارایی شعب بانک در ایران استفاده می‌شود. در واقع این روش را برای ارزیابی کارایی ۴۰ شعبه از یک بانک تجاری در ایران طی دو سال متوالی به کار خواهیم برد. نتایج اجرای مدل نشان می‌دهد که قدرت تفکیک‌پذیری DMU ها با استفاده از مدل ارایه شده، بالا می‌رود و نتایج آن موارد نظری بیان شده در مورد روش ارایه شده را تایید می‌نماید.

**کلمات کلیدی:** تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)، محدودیت وزنی، وجوه کارا، ارزیابی کارایی بانک.

### ۱ مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) یک تکنیک بر پایه برنامه‌ریزی ریاضی به منظور ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیری (DMUs) با چندین ورودی و چندین خروجی می‌باشد. مدل‌های پایه‌ای مانند مدل CCR [۱] و BCC [۲] ساخته شده در DEA با توجه به تکنولوژی مورد نظر و اصول پذیرفته شده در آن، دارای خواصی هستند. اما امکان دارد که اطلاعات بیشتری در دست باشد که باید در مدل گنجانده شود و یا به خاطر تحولات

\* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: b.karimi1987@gmail.com

پیش آمده، محدودیت‌های جدیدی روی مساله گذاشته شود و یا به علت کم بودن تعداد واحدهای تصمیم‌گیری نسبت به ورودی‌ها و خروجی‌ها، ارزیابی نادرستی از کارایی داشته باشیم و یا این که رابطه‌ای میان ورودی‌ها و خروجی‌ها باشد که نیازمند اعمال محدودیت روی وزن‌ها باشیم [۳].

در مدل‌های DEA، وزن‌های مربوط به ورودی‌ها و خروجی‌ها به گونه‌ای تعیین می‌شوند، که کارایی واحد تحت ارزیابی ماکزیمم گردد و هیچ محدودیتی روی وزن‌ها اعمال نمی‌شود. این آزادی در انتخاب وزن‌ها باعث می‌شود که وقتی واحدی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد، اگر مدل DEA آن را ناکارا اعلام کند این نتیجه قطعی است و باید اطمینان داشته باشیم که این واحد با هیچ وزن دیگری کارا نخواهد بود. اما اگر مدل DEA واحدی را کارا اعلام نماید، این کارایی قطعی نیست و در بهترین شرایط به دست آمده است، پس احتمال اینکه این واحد توسط وزن‌های دیگری ناکارا شود، وجود دارد. لذا به همین دلیل کارایی DEA را کارایی خوش بینانه می‌گویند. به دلیل وجود همین ضعف‌الن و همکاران [۴]، محدودیت‌های DEA را توسعه دادند. به طوری که یک کران بالا و پایین روی خروجی‌ها و ورودی‌ها در نظر گرفتند. در ادامه روش‌های مختلفی برای محدودیت وزنی در DEA معرفی گردید [۵، ۶، ۷].

مدل‌های معرفی شده در حوزه محدودیت وزنی در دسته‌های مختلف به صورت نظری و کاربردی می‌باشند، به عنوان مثال، خلیلی و همکاران [۸] در مقاله‌ای نشان دادند که برخی از روش‌های محدودیت وزنی منجر به نشدنی بودن جواب مدل بهینه‌سازی و محاسبه کارایی می‌شود. همچنین یک روش بهبودیافته ارایه نمودند و مدل بهبودیافته را به عنوان یک کاربرد در مدارس متوسطه کشور پرتقال استفاده نمودند. پودنسکی [۹] به تفسیر دقیقی از محدودیت وزنی برای مدل مضربی پرداخت. میرزائیان و همکاران [۱۰] از طریق ماتریس بده بستان<sup>۱</sup> که یک تغییر در ماتریس ورودی و خروجی می‌دهد، یک روش محدودیت وزنی جدید ارایه دادند. رضی پورقاله زوق و همکاران [۱۱] به پیدا کردن نزدیک‌ترین هدف برای ارزیابی شعب بانک با استفاده از مدل تحلیل پوششی داده‌ها با محدودیت وزنی پرداختند. کیانی و همکاران [۱۲] مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها با محدودیت وزنی سنتی را به شبکه‌ای دو مرحله‌ای گسترش دادند.

اخیراً اسمیلد و ژو [۱۳] یک روش محدودیت وزنی را برای ارزیابی کارایی بانک در شرایط بحران برای بانک‌های اروپایی ارایه نمودند. آن‌ها از ترکیب میانگین و انحراف معیار وزن‌ها بر روی وجه کارا با بعد کامل<sup>۲</sup> استفاده و یک روش محدودیت وزنی در تحلیل پوششی داده‌ها به منظور ارزیابی کارایی و بهبود قدرت تمایز و رتبه‌بندی DMU‌ها ارایه دادند. مشکلی که در اینجا وجود دارد پیدا کردن همه وجوه کارا با بعد کامل سخت و یا نشدنی می‌باشد.

در این مقاله با ایده گرفتن از روش ارایه شده به وسیله اسمیلد و ژو [۱۳] یک روش محدودیت وزنی جدید ارایه می‌شود. مدل ارایه شده شبیه به ایده اهداف ثانویه در کارایی متقاطع تحلیل پوششی داده‌ها است. به این صورت که از ترکیب میانگین و انحراف معیار وزن‌های به دست آمده برای DMU‌های کارا، یک محدودیت

<sup>1</sup> trade-off matrix

<sup>2</sup> fully-dimensional efficient facets

وزنی جدید ساخته می‌شود. به دلیل منحصر به فرد نبودن وزن DMU های کارا، این وزن‌ها را در مدل هدف ثانویه به صورت متغیر در نظر می‌گیریم. در واقع از بین این وزن‌ها باهدف ثانویه به دنبال یافتن کوچک‌ترین بازه برای نسبت وزنی ورودی‌ها هستیم. این نوآوری برای اولین بار در این مقاله ارائه شده است. همچنین روش ارائه شده برای ارزیابی کارایی یک بانک تجاری در ایران استفاده می‌شود و نتایج آن نشان از بالا رفتن قدرت تفکیک پذیری ارزیابی کارایی بعد از اعمال محدودیت وزنی را دارد.

دسته بندی زیر را برای این مقاله داریم: در بخش بعدی به معرفی مفاهیم که در این مقاله از آنها استفاده می‌نماییم، خواهیم پرداخت. بخش سوم شامل روش محدودیت وزنی ارائه شده در این مقاله می‌باشد. در بخش چهارم به منظور روشن شدن مطلب و همچنین اهمیت موضوع در دنیای واقعی یک کاربرد روش برای یک بانک تجاری در ایران آورده خواهد شد. بخش پنجم شامل نتیجه گیری و ارائه پیشنهادها می‌باشد.

## ۲ مدل ارزیابی کارایی

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) یک روش ریاضی به منظور ارزیابی کارایی تعدادی واحد تصمیم‌گیری (DMU) با چندین ورودی و خروجی می‌باشد. مدل‌های مختلفی در تحلیل پوششی داده‌ها به منظور ارزیابی کارایی ارائه شده‌اند که هر کدام شامل ویژگی‌های مختلفی هستند. در این بخش به معرفی برخی از مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها به منظور ارزیابی کارایی پرداخته می‌شود.

### ۲-۱ مدل‌های DEA بدون محدودیت

فرض کنید که  $n$  واحد تصمیم‌گیری در  $T$  سال مختلف به صورت  $(x_{j,t}, y_{j,t}) \in T_+^{m+s}$  (برای  $j=1, \dots, n; t=1, \dots, T$ ) داریم. امتیاز کارایی  $e_{j_0, t_0}$  تحت بازه به مقیاس ثابت، در مدل DEA نامقید با ماهیت خروجی، برای واحد تصمیم‌گیری  $j_0$  در یک سال معین  $t_0$  (یعنی  $(x_{j_0, t_0}, y_{j_0, t_0}) \in T_+^{m+s}$ ) می‌تواند با استفاده از مدل مضربی زیر به دست آید:

$$(e_{j_0, t_0})^{-1} = \min \sum_{k=1}^m v_{j_0, t_0}^k x_{j_0, t_0}^k$$

$$s.t. \quad \sum_{l=1}^s u_{j_0, t_0}^l y_{j_0, t_0}^l = 1, \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^m v_{j_0, t_0}^k x_{j,t}^k - \sum_{l=1}^s u_{j_0, t_0}^l y_{j,t}^l \geq 0, \quad j=1, \dots, n; t=1, \dots, T,$$

$$v_{j_0, t_0}^k, u_{j_0, t_0}^l \geq 0, \quad k=1, \dots, m; l=1, \dots, s.$$

که در آن متغیرهای  $u_{j_0, t_0}^l \in R_+^s$  و  $v_{j_0, t_0}^k \in R_+^m$  وزن‌های ورودی و خروجی هستند که به واحد تصمیم‌گیری تحت بررسی (واحد  $j_0$ ) در سال معین  $t_0$  نسبت داده شده است. تنها محدودیتی که برای این وزن‌ها در نظر گرفته می‌شود، این است که نامنفی باشند.

هدف از این مدل نسبت دادن وزن‌های نامنفی می‌باشد به طوری که ماکزیمم کارایی برای DMU تحت بررسی (با  $(x_{j_0, t_0}, y_{j_0, t_0}) \in T_+^{m+s}$ ) به دست آید و تنها محدودیت اعمال شده این است که هیچ واحد

تصمیم‌گیری  $j \in n$  در هیچ سال  $t$  ای نمی‌تواند امتیاز کارایی  $\geq 1$  با همان مجموعه وزن‌ها

$$\frac{\sum_{k=1}^m v_{j_0, t_0}^k x_{j, t}^k}{\sum_{l=1}^s u_{j_0, t_0}^l y_{j, t}^l} \geq 1$$

داشته باشد. از آن جایی که محدودیت‌های خاصی روی این مدل اعمال نمی‌شود و به دنبال یافتن ماکزیمم کارایی برای DMU تحت بررسی می‌باشیم، به این مدل‌ها در ادبیات DEA مدل‌های خوش‌بینانه گفته می‌شود و در خروجی آن‌ها ممکن است واحدهای زیادی کارا تشخیص داده شوند و قدرت تفکیک‌پذیری کمی داشته باشند.

## ۲-۲ مدل DEA دارای محدودیت‌های وزنی

فرض کنید  $N^e$  مجموعه DMU هایی باشند که در مدل بدون محدودیت (۱) کارا هستند. یعنی برای مدل (۱) داشته باشیم،  $e_{j_0, t_0} = 1$ . از این رو مجموعه  $N^e = \{(x_{j, t}, y_{j, t}) \in N \mid e_{j, t} = 1\}$  را تعریف می‌نماییم. اکنون وزن‌های میانگین محاسبه می‌شود، اما از آنجایی که وزن‌های بهینه برای واحدهای تصمیم‌گیری کارا در  $N^e$  معمولاً منحصر به فرد نیستند، اسمیلد و ژو [۱۱] پیشنهاد کردند که وزن‌های میانگین را در بین همه‌ی وجوه کارا با بعد کامل محاسبه کنیم. مدنظر قرار دادن وجوه کارا به جای واحد تصمیم‌گیری کارا، این اطمینان را به وجود می‌آورد که اوزان مربوط به هر یک منحصراً تعیین می‌شود و صرفاً گنجاندن وجوه با بعد کامل به معنای مستثنا کردن وجوهی است که اوزان مربوط به آن‌ها در یک یا چند متغیر مساوی با صفر است. بنابراین هر یک از این وجوه دارای مجموعه‌ی منحصر به فردی از اوزان غیر صفر خواهد بود که برای همه واحدهای تصمیم‌گیری که آن وجه را می‌گستراند و یا به آن تعلق دارند، بهینه خواهد بود.

مجموعه وجوه کارا با بعد کامل را با  $F$  نشان می‌دهیم [۱۴] و فرض کنید که  $v_h^k$  و  $u_h^l$  به ترتیب نشان‌دهنده‌ی وزن‌های ورودی و خروجی در وجه  $h$  ام باشند. چون در کاربرد تجربی تنها آن دسته از محدودیت‌های وزن‌دار را به کار می‌گیریم که محدودکننده‌ی بازه وزن در یک ورودی نسبت به وزن ورودی دیگری هستند در مورد آتی محدودیت‌های وزن را تنها برای جفت‌های ورودی تعریف می‌کنیم. اما توجه داشته باشید که این روش به آسانی قابلیت تعمیم به اوزان در جفت‌های ورودی یا در یک وزن ورودی نسبت به یک وزن خروجی محور است.

وزن میانگین برای یک متغیر ورودی  $k$  در بین مجموعه وجوه کارا با بعد کامل به صورت زیر محاسبه

می‌شود:

$$v^{-k} = \sum_{h \in F} v_h^k / |F|$$

که در آن  $|F|$  نشان دهنده‌ی عدد اصلی  $F^1$  (تعداد اعضای مجموعه  $F$ ) است. انحراف استاندارد نمونه متناظر حول میانگین نمونه با  $\sigma_{\bar{v}^k}$  نشان داده می‌شود.

حال می‌توانیم نسبت وزن‌های میانگین را برای دو ورودی  $k', k''$  محاسبه کنیم و محدودیت‌های وزنی را که ملزم می‌کند نسبت اوزان مجاز برای  $k', k''$  بین نسبت‌های وزن میانگین به علاوه/منهای انحراف‌های استاندارد  $0/5$  باشد به صورت زیر فرموله می‌کنیم:

$$WR(k', k'') = \frac{\frac{-k'}{v} - 0 / \Delta \sigma_{\bar{v}^k}}{\frac{-k''}{v} + 0 / \Delta \sigma_{\bar{v}^k}} \leq \frac{\frac{-k'}{v} + 0 / \Delta \sigma_{\bar{v}^k}}{\frac{-k''}{v} - 0 / \Delta \sigma_{\bar{v}^k}}$$

برای جفت‌هایی از ورودی‌ها که محدودیت‌های نسبی در نظر گرفته‌ایم، بازه‌های متناظر اوزان مجاز از معادله فوق تعریف می‌شوند که به صورت خطی درآمده و صرفاً به صورت محدودیت‌هایی به مدل مضربی DEA (یعنی مدل ۱) افزوده خواهد شد. توجه داشته باشید که در اندکی از موارد که در آن‌ها یک وزن میانگین منهای انحراف‌های استاندارد  $0/5$  منفی می‌شود این مقدار را با یک عدد مثبت کوچک جایگزین می‌کنیم. به علاوه درحالی که انتخاب انحراف استاندارد های  $\pm 0/5$  مانند بازه مربوط به محدودیت‌های وزنی کاملاً نسبی است و هر مقدار دیگر می‌تواند در نظر گرفته شود. مشکل اساسی این روش به دست آوردن همه وجوه کارا با بعد کامل برای هر دسته از DMU ها است. در بخش بعدی رویکرد دیگری برای به دست آوردن محدودیت وزنی ارایه می‌شود.

### ۳ مدل تحلیل پوششی داده‌ها با محدودیت وزنی جدید

در این بخش یک روش محدودیت وزنی جدید ارایه خواهد شد. مدل ارایه شده شبیه به یک مدل هدف ثانویه است، که در آن یک محدودیت وزنی با توجه به وزن‌های بهینه واحدهای کارا در نظر گرفته می‌شود. مدل طوری فرمول‌بندی می‌شود که بازه محدودیت وزنی کم‌ترین طول را داشته باشد. در واقع مدل ارایه شده به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & \min d \\ & s.t. \quad \sum_{k=1}^m v_{j_0, t_0}^k x_{j, t}^k - \sum_{l=1}^s u_{j_0, t_0}^l y_{j, t}^l \geq 0, \quad j \in N^e; t = 1, \dots, T, \\ & \quad \frac{\frac{-k'}{v} - 0 / \Delta \sigma_{\bar{v}^k}}{\frac{-k''}{v} + 0 / \Delta \sigma_{\bar{v}^k}} \geq 0, \\ & \quad \frac{\frac{-k'}{v} - 0 / \Delta \sigma_{\bar{v}^k}}{\frac{-k''}{v} + 0 / \Delta \sigma_{\bar{v}^k}} = d, \end{aligned} \tag{۲}$$

<sup>1</sup> Cardinal

$$\frac{v^{-k'} + \sigma / \Delta \sigma_{v^{-k'}}}{v^{-k''} - \sigma / \Delta \sigma_{v^{-k''}}} - \frac{v^{-k'}}{v^{-k''}} \geq \sigma,$$

$$\frac{v^{-k'} + \sigma / \Delta \sigma_{v^{-k'}}}{v^{-k''} - \sigma / \Delta \sigma_{v^{-k''}}} = d_r,$$

$$v^{-k'} = \sum_{h \in N^e} v_h^{k'} / |N^e|$$

$$\sigma_{v^{-k'}}^r = \sum_{h \in N^e} (v_h^{k'} - v^{-k'})^r / |N^e|$$

$$v^{-k''} = \sum_{h \in N^e} v_h^{k''} / |N^e|$$

$$\sigma_{v^{-k''}}^r = \sum_{h \in N^e} (v_h^{k''} - v^{-k''})^r / |N^e|$$

$$d_1 \geq d, \quad d_r \geq d,$$

$$v_{j_0, t_0}^k, u_{j_0, t_0}^l \geq \sigma, \quad k = 1, \dots, m; \quad l = 1, \dots, s.$$

در این مدل  $d_1$  و  $d_r$  به ترتیب به‌عنوان کران پایین و بالای محدودیت وزنی مربوط به نسبت وزنی

ورودی‌ها یعنی  $\frac{v^{-k'}}{v^{-k''}}$  در نظر گرفته می‌شود و  $d$  کران پایین این دو است که می‌خواهیم به‌عنوان هدف ثانویه

مینیم نمایم. در واقع  $d$  به‌عنوان مینیم فاصله در محدودیت وزنی به دست می‌آید. یعنی طول بازه نسبت وزنی را مینیم نموده‌ایم. به دلیل منحصر به فرد نبودن وزن‌ها در مدل مضربی (۱) برای ساختن محدودیت وزنی با استفاده از مدل (۲) آن‌ها را به‌صورت متغیر در نظر می‌گیریم و اجازه می‌دهیم مدل با توجه به هدف مینیم کردن فاصله محدودیت وزنی، وزن‌ها را به دست آورد. همچنین  $|N^e|$  تعداد واحدهای کارا است. در مدل فوق محدودیت وزنی اعمال شده با استفاده از میانگین وزن‌ها به دست می‌آید و این باعث می‌شود که مدل همواره شدنی باشد.

بعد از اجرای مدل، محدودیت وزنی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$WR(k', k'') = d_1^* \leq \frac{v^{-k'}}{v^{-k''}} \leq d_r^*$$

مدل فوق یک مدل غیرخطی است. ولی مشکلات محاسبه همه‌ی وجوه کارا را ندارد. در واقع باهدف مینیم

کردن طول بازه محدودیت وزنی شامل وزن‌های واحدهای تصمیم‌گیری کارا، یک محدودیت وزنی برای ارزیابی کارایی تمام واحدهای کارا ارایه شد. پس می‌توان آن را یک روش بهبودیافته برای روش محدودیت وزنی اسمیلد و ژو [۵] در نظر گرفت. در بخش بعدی به‌منظور نشان دادن اهمیت موضوع در دنیای واقعی، یک مثال از ارزیابی شعب بانک تجاری در ایران با استفاده از روش ارایه‌شده خواهیم آورد.

## ۴ مثال عددی

یکی از کاربردهای مهم تحلیل پوششی داده‌ها ارزیابی کارایی در صنعت بانکداری است. در تحقیقات زیادی محققان به ارزیابی کارایی صنعت بانکداری با استفاده تحلیل پوششی داده‌ها پرداخته‌اند [۱۵]. در این بخش به عنوان یک کاربرد از مدل ارایه‌شده به ارزیابی کارایی ۴۰ شعبه از یک بانک تجاری در ایران می‌پردازیم و ویژگی‌های مدل ارایه‌شده را بیان خواهیم نمود.

### ۴-۱ داده‌ها

داده‌های تحقیق مربوط به ۴۰ شعبه طی دو سال ۱۳۹۳ و ۱۳۹۴ است. همچنین ورودی و خروجی‌های این ۴۰ شعبه به صورت زیر می‌باشند:

### ورودی

- ۱- هزینه عملیاتی: شامل همه هزینه‌هایی است که شعب بانک بابت جذب سپرده‌ها متحمل می‌شوند. این هزینه‌ها شامل سود پرداختی، کارمزد پرداختی، هزینه جوائز قرض الحسنه و ... است.
- ۲- هزینه غیرعملیاتی: شامل هزینه‌های اداری و پرسنلی، هزینه استهلاک اموال منقول و غیرمنقول و هزینه‌های مطالبات مشکوک الوصول است.

### خروجی

- ۱- درآمدهای مشاع: از مجموع سود تسهیلات اعطایی و سود و زیان حاصل از سرمایه‌گذاری‌ها حاصل می‌شود که اگر از این درآمد حاصل شده، سهم سود سپرده‌گذاران کسر شود، سهم شعب بانک از درآمدهای مشاع حاصل می‌شود.
  - ۲- درآمد غیرمشاع: مجموع درآمدهای حاصل از کارمزد، مبادلات ارزی و سایر فعالیت‌های مشاوره‌ای شعب بانک است.
  - ۳- نسبت بانکداری الکترونیک: حاصل تقسیم تعداد سرویس انجام‌شده شعبه در حوزه بانکداری الکترونیک به تعداد سرویس‌های ارایه‌شده به مشتریان شعبه بانک می‌باشد.
  - ۴- نسبت کاهش نرخ هزینه عملیاتی: حاصل تقسیم کاهش هزینه عملیاتی ناشی از فعالیت‌های مانند بانکداری الکترونیک به هزینه عملیاتی شعبه است.
- آمار توصیفی (شامل: میانگین، انحراف معیار، مینیمم و ماکزیمم) از ورودی و خروجی‌های این ۴۰ شعبه برای هر دو سال متوالی در جدول ۱ زیر آورده شده است.

جدول ۱. آمار توصیفی مربوط به ورودی‌ها و خروجی‌های دو سال متوالی ۱۳۹۳ و ۱۳۹۴

میانگین	انحراف معیار	مینیمم	ماکزیمم	
ورودی‌های سال ۱۳۹۳				
۰/۳۳۳	۰/۰۷۴۷۰۲	۰/۱۳۱	۰/۴۶۳	هزینه عملیاتی
۳۳/۹۷۵	۹/۴۴۷۵۲۷	۱۵	۴۰	هزینه غیرعملیاتی

خروجی‌های سال ۱۳۹۳				
۱۰۱,۳۴۶,۷۰۳,۰۷۴	۴,۹۰۲,۶۵۰,۳۴۵	۲۱۳۷۳۰۷۷۶۶۵	۳۲,۲۰۱,۳۴۳,۷۳۹	درآمدهای مشاع
۱۱۷,۰۵۳,۴۵۱	۹,۰۸۰,۸۷۰	۲۴۳۰۵۵۳۱/۷۸	۴۸,۹۵۴,۸۸۴	درآمدهای غیر مشاع
۰/۶۳۲	۰/۱۲۹	۰/۱۰۷۷۴۷	۰/۳۶۳	نسبت بانکداری الکترونیک
۰/۵۷۶	۰/۲۷۹	۰/۰۷۸۱۸۹	۰/۴۴۷	نسبت کاهش نرخ هزینه عملیاتی
ورودی‌های سال ۱۳۹۴				
۰/۸۱۳	۰/۱۹۸	۰/۱۳۶۲۶۴	۰/۵۴۹	هزینه عملیاتی
۴۰	۱۵	۱۱/۳۷۸۲۳	۲۵/۸۵	هزینه غیر عملیاتی
خروجی‌های سال ۱۳۹۴				
۱۰,۰۶۱,۰۱۵,۱۱۲	۱,۰۶۴,۹۶۵,۵۵۲	۲۳۵۰۷۰۹۹۲۴	۴,۵۲۸,۵۶۴,۲۱۳	درآمدهای مشاع
۲,۳۳۷,۶۸۷,۴۴۱	۱۴,۹۲۸,۷۵۰	۳۵۹۱۳۲۶۰۲	۱۳۳,۲۸۴,۲۴۹	درآمدهای غیر مشاع
۰/۹۰۵	۰/۶۰۰	۰/۰۶۵۱۴۸	۰/۷۹۵	نسبت بانکداری الکترونیک
۰/۶۴۷	۰/۲۴۱	۰/۰۹۴۲۷۷	۰/۳۷۹	نسبت کاهش نرخ هزینه عملیاتی

اکنون با توجه به این داده‌ها، به تحلیل کارایی ۴۰ شعبه بانک و مساله محدودیت وزنی آن خواهیم پرداخت.

#### ۴-۲ نتایج

در این زیر بخش ابتدا با استفاده از مدل (۱) کارایی شعب بانک ( $e_{z,i}$ ) طی دو سال ۱۳۹۳ و ۱۳۹۴ محاسبه می‌شود. در واقع ابتدا بدون محدودیت وزنی به ارزیابی کارایی ۴۰ شعبه بانک پرداخته می‌شود. برای حل تمام مدل‌ها از نرم‌افزار لینگو ۱۱ استفاده می‌شود. نتایج اجرای مدل (۱) در جدول ۲ زیر آورده شده است.

جدول ۲. مقدار کارایی شعب بانک بدون محدودیت وزنی

شعبه	مقدار کارایی در سال ۱۳۹۳	مقدار کارایی در سال ۱۳۹۴	شعبه	مقدار کارایی در سال ۱۳۹۳	مقدار کارایی در سال ۱۳۹۴
۱	۱	۰/۸۴۷	۲۱	۱	۰/۴۵۹
۲	۰/۴۹۰	۰/۸۵۵	۲۲	۰/۴۵۷	۰/۸۵۵
۳	۰/۶۲۱	۰/۸۷۷	۲۳	۰/۵۹۹	۱
۴	۰/۵۱۸	۰/۹۱۷	۲۴	۰/۴۶۱	۰/۹۲۶
۵	۰/۶۱۰	۰/۹۰۱	۲۵	۰/۴۳۷	۰/۹۸۰
۶	۰/۶۲۵	۱	۲۶	۰/۴۱۸	۰/۹۹۰
۷	۰/۴۵۹	۱	۲۷	۰/۶۱۳	۱
۸	۰/۴۸۸	۰/۹۸۰	۲۸	۰/۷۰۴	۱
۹	۰/۴۹۸	۱	۲۹	۰/۷۳۵	۰/۷۶۹
۱۰	۰/۶۰۲	۱	۳۰	۰/۶۲۱	۰/۹۵۲

۱	۰/۷۵۲	۳۱	۰/۹۴۳	۰/۴۶۵	۱۱
۰/۹۵۲	۰/۹۰۹	۳۲	۱	۰/۵۰۳	۱۲
۱	۰/۴۲۲	۳۳	۰/۹۳۵	۰/۴۲۲	۱۳
۰/۹۳۵	۱	۳۴	۰/۹۷۱	۰/۴۲۴	۱۴
۰/۹۶۲	۰/۸۲۶	۳۵	۰/۸۴۰	۰/۵۷۸	۱۵
۱	۰/۶۲۵	۳۶	۰/۹۵۲	۰/۳۸۲	۱۶
۱	۰/۳۹۲	۳۷	۰/۹۹۰	۰/۴۳۹	۱۷
۱	۰/۵۹۵	۳۸	۰/۹۵۲	۰/۴۸۵	۱۸
۰/۹۴۳	۰/۴۵۷	۳۹	۰/۹۴۳	۰/۴۶۳	۱۹
۱	۰/۴۷۲	۴۰	۱	۰/۳۹۴	۲۰

همان گونه که از جدول ۲ می توان دید در سال ۱۳۹۴ تعداد ۲ شعبه و در سال ۱۳۹۴ تعداد ۱۶ شعبه از ۴۰ شعبه بانک کارا می باشند. در ادامه با توجه به این شعب کارا و مدل ۲ یک محدودیت وزنی برای مدل ارزیابی این ۴۰ شعبه ارایه خواهیم داد. محدودیت وزنی را برای ورودی اول و دوم در نظر می گیریم. اگر مدل (۲) را با استفاده از داده های شعب کارا اجرا نماییم، جواب بهینه  $d_1^* = 1/0.08$  و  $d_2^* = 1/0.11$  را خواهیم داشت، که با توجه به آن محدودیت وزنی زیر را خواهیم داشت.

$$WR(1,2) = d_1^* \leq \frac{v^1}{v^2} \leq d_2^* \rightarrow WR(1,2) = 1/0.08 \leq \frac{v^1}{v^2} \leq 1/0.11$$

$$\rightarrow WR(1,2) = 1/0.08 \leq v^2 - v^1 \leq 0, \quad v^1 - 1/0.11 v^2 \leq 0$$

در ادامه با توجه به محدودیت وزنی ارایه شده و اضافه کردن آن به مدل (۱)، شعب بانک را دوباره ارزیابی خواهیم نمود، که نتایج آن در جدول ۳ زیر آورده شده است.

جدول ۳. مقدار کارایی شعب بانک با محدودیت وزنی

شعبه	مقدار کارایی در سال ۱۳۹۳	مقدار کارایی در سال ۱۳۹۴	شعبه	مقدار کارایی در سال ۱۳۹۳	مقدار کارایی در سال ۱۳۹۴
۱	۰/۷۳۵	۰/۷۹۴	۲۱	۰/۲۹۹	۰/۵۴۱
۲	۰/۳۳۶	۰/۵۰۰	۲۲	۰/۳۶۸	۰/۵۳۵
۳	۰/۴۱۳	۰/۵۲۶	۲۳	۰/۵۹۵	۱
۴	۰/۳۴۰	۰/۵۰۸	۲۴	۰/۲۲۷	۰/۹۲۶
۵	۰/۳۷۷	۰/۷۱۹	۲۵	۰/۲۷۴	۰/۹۶۲
۶	۰/۵۱۸	۰/۷۸۱	۲۶	۰/۳۷۳	۰/۹۹۰
۷	۰/۲۳۲	۰/۴۷۴	۲۷	۰/۳۴۶	۱
۸	۰/۳۷۹	۰/۸۲۶	۲۸	۰/۶۹۴	۱
۹	۰/۳۱۷	۰/۷۱۴	۲۹	۰/۷۳۰	۰/۷۶۹
۱۰	۰/۵۴۹	۰/۸۴۷	۳۰	۰/۶۱۷	۰/۹۴۳

۰/۶۹۹	۰/۵۶۸	۳۱	۰/۴۲۲	۰/۳۱۰	۱۱
۰/۶۱۰	۰/۶۰۲	۳۲	۱	۰/۲۵۳	۱۲
۰/۹۹۰	۰/۳۰۹	۳۳	۰/۳۸۹	۰/۳۱۴	۱۳
۰/۹۲۶	۰/۳۸۳	۳۴	۰/۵۷۵	۰/۳۱۶	۱۴
۰/۹۶۲	۰/۸۲۰	۳۵	۰/۵۳۸	۰/۲۹۳	۱۵
۱	۰/۶۲۱	۳۶	۰/۹۴۳	۰/۲۴۴	۱۶
۱	۰/۲۶۲	۳۷	۰/۴۴۱	۰/۳۱۳	۱۷
۱	۰/۳۱۸	۳۸	۰/۴۰۷	۰/۲۸۷	۱۸
۰/۹۳۵	۰/۴۰۷	۳۹	۰/۴۰۸	۰/۲۸۱	۱۹
۱	۰/۳۲۷	۴۰	۱	۰/۳۱۰	۲۰

همان‌طور که در جدول ۳ می‌بینید، بعد از اجرای مدل (۱) با محدودیت وزنی در سال ۱۳۹۳ هیچ شعبه‌ای کارا نیست و در سال ۱۳۹۴ تعداد شعب کارا از ۱۶ به ۹ شعبه کاهش پیدا کرد. این نشان می‌دهد که قدرت تفکیک‌پذیری مدل بالا رفته است. علاوه بر این در جدول ۴ زیر میانگین و انحراف معیار کارایی شعب بانک به تفکیک سال برای قبل و بعد از محدودیت وزنی آورده شده است.

جدول ۴. کارایی مربوط به شعب بانک بعد از محدودیت وزنی

قبل از محدودیت وزنی	بعد از محدودیت وزنی	
۰/۴۰۹	۰/۵۶۰	میانگین کارایی در سال ۱۳۹۳
۰/۱۵۵	۰/۱۵۷	انحراف معیار کارایی در سال ۱۳۹۳
۰/۷۶۵	۰/۹۵۵	میانگین کارایی در سال ۱۳۹۴
۰/۲۲۱	۰/۵۵۴	انحراف معیار کارایی در سال ۱۳۹۴

همان‌طور که می‌بینید میانگین کارایی بعد از محدودیت وزنی برای هر دو سال ۱۳۹۳ و ۱۳۹۴ کمتر شده است و این با توجه به محدودیت وزنی اعمال شده است. در واقع وزن‌های غیرمتعارف در ارزیابی شعب بانک حذف شده است و شعب اجازه دارند وزن‌های خود را در بازه محدودیت وزنی انتخاب نمایند. از طرفی دیگر اگر به انحراف معیار کارایی قبل و بعد از اعمال محدودیت وزنی توجه شود، می‌بینید که انحراف معیار بعد از اعمال محدودیت وزنی کاهش پیدا کرده است و این نشان می‌دهد که پراکندگی نمره کارایی حاصل از وجود وزن‌های غیرمتعارف در اندازه‌گیری کارایی از بین رفته است.

## ۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله به ارایه یک روش بهبودیافته محدودیت وزنی در تحلیل پوششی داده‌ها پرداختیم. مدل ارایه‌شده با توجه به یک مدل دیگر (به اسم مدل ثانویه) یک بازه محدودیت وزنی ایجاد خواهد نمود، که هدف آن مینیمم کردن نسبت وزن‌ها از بازه انحراف آن می‌باشد. بعد از ارایه مدل به منظور نشان دادن اهمیت روش، آن را بر روی

یک مثال از دنیای واقعی اجرا نمودیم. این مثال شامل داده‌های ۴۰ بانک برای دو سال متوالی ۱۳۹۳ و ۱۳۹۴ می‌باشد. محدودیت ایجاد شده تعداد شعب کارا را کم نموده و میانگین کارایی این ۴۰ شعبه را افزایش می‌دهد، که این با توجه به ماهیت محدودیت وزنی معمول می‌باشد. پس این روش با حذف وزن‌های غیرمتعارف در ارزیابی کارایی شعب بانک رویکرد ارزیابی را بهبود می‌دهد. در این مقاله مدل هدف ثانویه با توجه به مینیم کردن بازه محدودیت وزنی فرمول‌بندی شد. اما می‌توان با رویکردهای دیگر به‌عنوان مثال ماکزیمم کردن بازه محدودیت وزنی و یا پیدا کردن تفاسیر مدیریتی و استفاده در مدل هدف ثانویه، روش‌های بهبود یافته دیگری ارائه نمود. مورد دیگری می‌تواند با در نظر گرفتن محدودیت وزنی روی وزن‌های خروجی یا ترکیب از وزن‌های ورودی یا خروجی با همین روش ارائه شده در این مقاله انجام شود. می‌توان روش ارائه شده را با نظرات مدیر در خصوص محدودیت‌های وزنی ادغام نمود و یک رویکرد جدید ارائه کرد، که هر یک از این موضوع‌ها می‌تواند مبنای کارهای آینده باشند.

## منابع

- [1] Charnes, A., Cooper, W.W. and Rhodes, E. (1978), Measuring the efficiency of decision making units, *European Journal of Operational Research*, 2, 429-444.
- [2] Banker, R.D. (1984). Estimating most productive scale size using Data Envelopment Analysis, *European Journal of Operational Research* 17(1), 35-44.
- [3] Shafiei, M. (2017). Designing a Multi-level Data Envelopment Analysis Model to Evaluate the Efficiency of Financial Organizations. *Journal of Operational Research and Its Applications*, 14(2), 41-66.
- [4] Allen, R., Athanassopoulos, A., Dyson, R. G., Thanassoulis, E. (1997). Weights restrictions and value judgments in data envelopment analysis: Evolution, development and future directions. *Annals of Operations Research*, 73, 13-34.
- [5] Zhiani Rezai, H., Mahmoodi Meymand, U. (2010). Symmetric weights restrictions in data envelopment analysis: Simultaneous symmetry in input and output weights in the multiple model of CCR output nature. *Journal of Operational Research and Its Applications*, 7 (2), 43-53.
- [6] Thanassoulis, E., Portela, M. C. A. S., Allen, R. (2004). Incorporating value judgments in DEA. In: Cooper, W.W., Seiford, L.W., Zhu, J. (Eds.), *Handbook on Data Envelopment Analysis*. Kluwer Academic Publishers, 99-138.
- [7] Tracy, D.L., Chen, B. (2005). A generalized model for weight restrictions in data envelopment analysis. *Journal of Operational Research Society*, 56, 390-396.
- [8] Khalili, M., Camanho, A.S., Portela, M., Alirezadee, M.R. (2010). The measurement of relative efficiency using data envelopment analysis with assurance regions that link inputs and outputs. *European Journal of Operational Research*, 203(3), 761-770.
- [9] Podinovski, V. V. (2016). Optimal weights in DEA models with weight restrictions, *European Journal of Operational Research*, 254(3), 916-924.
- [10] Mirzaiyan, M., Sanei, M., Hosseinzadeh Lotfi, F., Mohammad Reza, M. (2019). Evaluation of Financial Ratios in DEA-R model with production trade-offs and weight restrictions. *Journal of mathematical extension*, 13(2), 69-91.
- [11] Razipour-GhalehJough, S., Hosseinzadeh Lotfi, F., Jahanshahloo, G., Rostamy-malkhalifeh, M., Sharafi, H. (2020). Finding closest target for bank branches in the presence of weight restrictions using data envelopment analysis. *Ann Oper Res*, 288, 755-787.
- [12] Kiaei, H., Kazemi Matin, R., Nasser, S.H. Production trade-offs and weight restrictions in two-stage network data envelopment analysis. *International Journal of Applied Decision Sciences*, 13(1), 21-45.
- [13] Asmild, M., Zhu, M. (2016). Controlling for the use of extreme weights in bank efficiency assessments during the financial crisis. *European Journal of Operational Research*, 251(3), 999-1015.

- [14] Olesen, O. B., Petersen, N. C. (2003). Identification and use of efficient faces and facets in DEA. *Journal of Productivity Analysis*, 20(1), 323–360.
- [15] Khoshandam, L. 2020. Ranking by Using Improved Cross Efficiency Based on Perturbation Problem: An Application to Iranian Commercial Banks. *Journal of Operational Research and Its Applications*, 17 (2), 127-144.