مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال چهاردهم، شماره دوم (پیاپی ۵۳)، تابستان ۹۶، ص ص ۱۰۹-۹۵
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

روش ناحیه اعتماد مخروطی برای مینیمم‌سازی تابع پیوسته لیپ‌شیتز موضعی

زهره اکبری[*1]
۱- استادیار، دانشگاه مازندارن، دانشکده علوم ریاضی، گروه ریاضی، بابلسر، ایران

رسید مقاله: ۸ آبان ۱۳۹۵
پذیرش مقاله: ۱۸ فروردین ۱۳۹۶

چکیده
در این مقاله، یک روش ناحیه اعتماد برای مینیمم‌سازی تابع پیوسته لیپ‌شیتز موضعی ارایه می‌گردد. برای این منظور، با استفاده از تقریب روش تندترین کاهش، یک تابع مدل مخروطی هموار برای تابع هدف ناهموار معرفی می‌گردد. سپس روش ناحیه اعتماد مخروطی درحالت هموار روی مدل مخروطی ارایه شده به کار گرفته می‌شود. برای حل زیرمساله مخروطی، روش جستجوی منحنی به شرط آرمیژو مجهز می‌شود تا در هر تکرار، تابع هدف به اندازه کافی کاهش یابد. در انتها همگرایی سراسری روش ارایه شده اثبات می‌شود. در پایان روش ارایه شده در محیط MATLAB پیاده‌سازی شده و نتایج با روش ناحیه اعتماد ناهموار مقایسه می‌شود.

کلمات کلیدی: روش ناحیه اعتماد ناهموار، مدل مخروطی، تابع پیوسته لیپ‌شیتز، روش جستجوی منحنی.

۱ مقدمه
در این مقاله، مساله بهینه‌سازی ناهموار نامقید زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \tag{۱}$$

که در آن $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ تابع پیوسته لیپ‌شیتز موضعی است. مساله (۱)، مساله مهمی با کاربردهایی در جهان واقعی است. برای مثال، مساله مینی-مکس گسسته، مساله مکمل غیرخطی و توابع لاگرانژی و جریمه‌ای در مسایل بهینه‌سازی مقید در حالت هموار، همگی مسایل بهینه‌سازی ناهموار هستند. از این رو، حل این دسته از مسایل مورد توجه بسیاری از محققین قرارگرفته است. روش‌های زیادی برای حل مساله بهینه‌سازی ناهموار ارایه شده است، که می‌توان از روش زیرگرادیان [۱]، روش‌های دسته‌ای[۲-۵]، الگوریتم‌هایی بر اساس روش‌های هموار [۶] و روش‌های مشتق آزاد [۷] به عنوان روش‌های مطرح برای حل مساله بهینه‌سازی ناهموار نام برد. روش دسته‌ای و روش شبه نیوتن برای افزایش کارایی در مراجع [۸-۱۰] ترکیب شده‌اند. اخیرا، روش دسته‌ای گرادیان گسسته حافظه محدود مشتق آزاد برای حل مساله بهینه‌سازی ناهموار نیز پیشنهاد شده است [۱۱].

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: z.akbari@umz.ac.ir

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.2.7.4]

یکی از روش‌ها برای حل مساله بهینه‌سازی ناهموار، روش ناحیه اعتماد است. روش‌های ناحیه اعتماد یکی از مهم‌ترین روش‌های تکراری برای حل مساله بهینه‌سازی هموار است. در واقع، ایده طرح روش ناحیه اعتماد برای توابع ناهموار همان روش ناحیه اعتماد در حالت هموار است[۱۲-۱۴]. در روش ناحیه اعتماد، تابع هدف توسط مدلی مناسب تقریب زده می‌شود[۱۲، ۱۵-۱۸]. به جای تابع هدف، این مدل در یک ناحیه حول نقطه فعلی، x_k ، (موسوم به ناحیه اعتماد) مینیمم می‌شود.

تقریب درجه دوم تابع هدف در نقطه تکرار x_k، براساس بسط تیلور تابع f حول x_k به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$m(x_k,s)=f(x_k)+g_k^T s+۱/۲ s^T B_k s,$$

که در آن $g_k=\nabla f(x_k)$ و B_k یا ماتریس هسی دقیق ($B_k=\nabla^۲ f(x_k)$) و یا تقریب متقارنی از آن است.

همچنین تابع f را می‌توان توسط تابع مدل مخروطی درنقطه تکرار x_k به صورت زیر تقریب زد:

$$c_k(s)=f(x_k)+\frac{g_k^T s}{۱-\alpha_k^T s}+\frac{۱}{۲}\frac{s^T B_k s}{(۱-\alpha_k^T s)^۲},$$

که در آن $\alpha_k\in\mathbb{R}^n$ برداری است که برای هر $s\in\mathbb{R}^n$، $۱-\alpha_k^T s>۰$ است. برای $\alpha_k=۰$، $c_k(s)$ همان مدل درجه دوم است.

بعد از تقریب تابع هدف (با مدل درجه دوم و یا مدل مخروطی)، مدل در ناحیه اعتماد به شعاع Δ_k مینیمم می‌شود. این مساله در الگوریتم ناحیه اعتماد به زیرمساله ناحیه اعتماد معروف است که اساسی‌ترین و پرهزینه‌ترین مرحله است؛ بنابراین در روش‌های ناحیه اعتماد دنباله‌ای از زیرمسایل ناحیه اعتماد حل می‌شوند[۱۷،۲۰]. فرض کنید s_k جواب زیرمساله ناحیه اعتماد باشد. پس از حل زیر مساله باید بررسی شود که آیا نقطه به دست آمده؛ یعنی x_k+s_k ، کاهش کافی در تابع هدف ایجاد می‌کند یا خیر. برای این منظور، نسبت ناحیه اعتماد به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\rho_k=\frac{f(x_k)-f(x_k+s_k)}{\mathrm{pred}_k},$$

که در آن، صورت و مخرج کسر به ترتیب کاهش واقعی و کاهش پیش بینی شده را نشان می‌دهند. باتوجه به مدل تقریبی از تابع هدف (مدل درجه دوم یا مدل مخروطی)، مخرج کسر به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$pred_k=m(x_k,۰)-m(x_k,s_k) \quad \text{یا} \quad pred_k=c_k(۰)-c_k(s_k)$$

مشاهده می‌شودکه اگر صورت با مخرج کسر تناسب خوبی داشته باشد، آن‌گاه این نسبت، با توجه به مثبت بودن مخرج کسر، مثبت و به عدد یک نزدیک است. هر چه این نسبت به یک نزدیک‌تر باشد، آن‌گاه مدل تناسب بهتری با تابع هدف دارد. در مقابل، هر چه این نسبت به صفر نزدیک شود یا حتی منفی باشد، عدم تناسب بین مدل و تابع هدف بیش‌تر ظاهر می‌شود. اگر این نسبت منفی باشد، آن‌گاه جهت به‌دست آمده برای تابع هدف کاهشی نیست.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.2.7.4]

برای ثابت $\beta \in [\circ, \frac{۱}{۴})$، اگر $\rho_k > \beta$ باشد، آن‌گاه $x_k + s_k$ را به عنوان نقطه‌ی بعدی پذیرفته می‌شود و قرار می‌دهیم $x_{k+۱} = x_k + s_k$. در این حالت، شعاع ناحیه اعتماد، ماتریس هسی و در حالتی که روش ناحیه اعتماد با مدل مخروطی باشد، بردار α_k نیز به‌هنگام می‌شوند. برای ثابت‌های $\circ < c_۲ < c_۳$، اگر $\rho_k \le c_۲$، آن‌گاه به علت عدم وجود تناسب خوب بین مدل و تابع هدف، شعاع ناحیه اعتماد را کاهش می‌دهیم و اگر $c_۲ < \rho_k < c_۳$، شعاع ناحیه اعتماد ثابت می‌ماند، در غیر این صورت برای $\rho_k \ge c_۳$، شعاع ناحیه اعتماد افزایش می‌یابد. سپس، مدل(درجه دوم یا مخروطی) در ناحیه اعتماد جدید مینیمم می‌شود. این روند تا جایی ادامه می‌یابد که شرط توقف برقرار شود.

تاکنون هیچ تقریب مدل مخروطی برای تابع پیوسته لیپ‌شیتز موضعی ارایه نشده است. در این مقاله، برای اولین بار یک مدل مخروطی برای تابع پیوسته لیپ‌شیتز موضعی ارایه می‌شود. سپس الگوریتم ناحیه اعتماد براساس این مدل مخروطی ارایه می‌گردد. در بخش دوم، مقدمه‌ای کوتاه از آنالیز ناهموار بیان می‌شود. زیرمساله مخروطی برای تابع هدف پیوسته لیپ‌شیتز موضعی در بخش سوم تعریف می‌شود. در بخش چهارم، الگوریتم بهینه‌سازی و همگرایی آن ارایه می‌گردد. بخش پنجم و ششم، به‌ترتیب، به نتایج عددی الگوریتم ناحیه اعتماد و نتیجه‌گیری از مقاله اختصاص یافته است.

۲ مقدمه‌ای بر آنالیز ناهموار

در این بخش، برخی مفاهیم مقدماتی از آنالیز ناهموار را بیان می‌کنیم.

فرض کنید تابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ در نقطه x پیوسته لیپ‌شیتز موضعی است. مشتق جهتی تعمیم یافته کلارک تابع f در نقطه x در جهت p به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۹]:

$$f^{\circ}(x, p) = \limsup_{y \to x, t \downarrow \circ} \frac{f(y + tp) - f(y)}{t}.$$

به سادگی می‌توان نشان داد که این تعمیم مشتق جهتی برای توابع پیوسته لیپ‌شیتز وجود دارد. براساس این تعریف، زیر دیفرانسیل تعمیم‌یافته کلارک به صورت زیر تعریف می‌گردد [۱۹]:

$$\partial f(x) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid f^{\circ}(x; p) \ge \xi^T p \quad \forall p \in \mathbb{R}^n\}.$$

می‌توان مشاهده کرد که $f^{\circ}(x, p) = \sup_{\xi \in \partial f(x)} \xi^T p$. فرض کنید L ثابت لیپ‌شیتز در همسایگی نقطه x باشد. در این صورت داریم:

$$\|\xi\|_۲ \le L, \ \forall \xi \in \partial f(x).$$

در سرتاسر این مقاله، نرم استفاده شده نرم اقلیدسی فرض شده است. اگر تابع f در x مشتق‌پذیر باشد، در این صورت $\nabla f(x) \in \partial f(x)$. علاوه بر این، اگر تابع f در x به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد، در این صورت

$$\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}.$$

اگر x مینیمم (یا یک نقطه ایستای) تابع f باشد، در این صورت $\circ \in \partial f(x)$.

برای $\varepsilon > \circ$، ε- زیردیفرانسیل (گلداشتاین) تابع f در نقطه x به صورت مجموعه زیرتعریف می‌شود:

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.2.7.4]

$$\partial_{\varepsilon} f(x) := \mathrm{cl}\,\mathrm{conv}\left\{\partial f(y), \quad \|x-y\|_{۲} \le \varepsilon\right\},$$

که در آن conv و cl به ترتیب پوسته محدب و بستار مجموعه هستند. اگر $\circ \in \partial_{\varepsilon} f(x)$، در این صورت نقطه x یک نقطه ε - ایستای تابع f نامیده می‌شود.

۳ زیرمساله مخروطی برای تابع پیوسته لیپ‌شیتز موضعی

در این بخش، یک مدل مخروطی برای تابع پیوسته لیپ‌شیتز موضعی ارایه می‌گردد. سپس، ساختار کلی الگوریتم ناحیه اعتماد ناهموار برای تابع پیوسته لیپ‌شیتز بیان می‌شود.

برای ارایه مدلی از تابع ناهموار، زیرگرادیان مناسبی از $\partial_{\varepsilon} f(x)$ را جایگزین گرادیان در حالت هموار می‌کنیم. فرض کنید $v_{\circ}$ همان زیرگرادیان مناسب باشد. در این حالت، مدل مخروطی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$c_k(s) = f(x_k) + \frac{v_{\circ}^T s}{۱-\alpha_k^T s} + \frac{۱}{۲}\frac{s^T B_k s}{(۱-\alpha_k^T s)^{۲}},$$

که در آن، B_k یک ماتریس متقارن و معین مثبت است. در هر تکرار از روش ناحیه اعتماد پیشنهادی، این مدل تحت محدودیت ناحیه اعتماد مینیمم می‌شود؛ یعنی در هر تکرار مساله مینیمم‌سازی زیر

$$\begin{aligned} &Min \quad c_k(s) = f(x_k) + \frac{v_{\circ}^T s}{۱-\alpha_k^T s} + \frac{۱}{۲}\frac{s^T B_k s}{(۱-\alpha_k^T s)^{۲}} \\ &s.t. \\ &\qquad \|s\| \le \Delta_k, \\ &\qquad ۱-\alpha_k^T s > \circ, \end{aligned} \tag{۲}$$

حل می‌شود. Δ_k شعاع ناحیه اعتماد و مساله (۲) نیز زیرمساله ناحیه اعتماد مخروطی است. در ادامه، به محاسبه زیرگرادیان مناسب $v_{\circ}$ می‌پردازیم. فرض کنیم $\varepsilon > \circ$، قرار می‌دهیم:

$$v_{\circ} = \underset{v \in \partial_{\varepsilon} f(x_k)}{\arg\min} \|v\|. \tag{۳}$$

با توجه به این که حل مساله (۳) در بسیاری از موارد عملی نیست، مجموعه $\partial_{\varepsilon} f(x_k)$ با استفاده از پوسته محدب تعداد متناهی از اعضای آن تقریب زده می‌شود[۲۱]. به عبارت دیگر، اگر $W_k = \{\xi_{۱}, \xi_{۲}, \ldots, \xi_l\}$ مجموعه‌ای از اعضای $\partial_{\varepsilon} f(x_k)$ باشد، آن‌گاه $\mathrm{conv}\, W_k$ تقریبی از $\partial_{\varepsilon} f(x_k)$ است و مساله زیر را حل می‌کنیم:

$$\bar{\xi} = \underset{\xi \in \mathrm{conv} W_k}{\arg\min} \|\xi\|. \tag{۴}$$

درحقیقت، $\bar{p} = -\frac{\bar{\xi}}{\|\bar{\xi}\|}$ تقریبی از $v_{\circ}$ و $-\|\bar{\xi}\|$ تقریبی از $f^{\circ}(x, \bar{p})$ است. اگر تقریب به دست آمده در شرط

$$f(x + \varepsilon \bar{p}) - f(x) \le -c_{۱} \varepsilon \|\bar{\xi}\|, \tag{۵}$$

برای $c_{۱} \in (\circ, ۱)$ صدق کند، آن‌گاه $\mathrm{conv} W_k$ یک تقریب قابل قبول برای $\partial_{\varepsilon} f(x_k)$ است. اگر نامساوی (۵) برقرار نباشد، آن‌گاه تقریب $\partial_{\varepsilon} f(x_k)$ با اضافه کردن یک عضو جدید مانند $\xi \in \partial_{\varepsilon} f(x_k)$ به W_k با شرط

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.2.7.4]

$\xi \notin \text{conv}W_k$ بهبود می‌یابد. در واقع مساله (۴) دوباره با $\text{conv}W_k$ جدید حل می‌گردد. حال، چگونگی محاسبه این عضو را که در مرجع [۲۱] آمده است، شرح می‌دهیم. فرض کنید:

$$f(x+\varepsilon\bar{p})-f(x)>-c_1\varepsilon\|\bar{\xi}\|.$$

تابع $h:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$h(t):=f(x+t\bar{p})-f(x)+ct\|\bar{\xi}\|,\qquad t\in\mathbb{R}^+.$$

برای بهبود تقریب $\partial_\epsilon f(x_k)$، نیازی به محاسبه همه اعضای $\partial h(t)$ نیست و تنها کافی است که بردار $\xi\in\partial f(x+t\bar{p})$ طوری محاسبه شود که $\xi^T\bar{p}+c\|\bar{\xi}\|\in\partial h(t)$ و $\xi^T\bar{p}+c\|\bar{\xi}\|\geq 0$. در [۲۱] نحوه محاسبه چنین نقطه‌ای بیان و نشان داده شده است که برای محاسبه آن، نیاز به هزینه محاسباتی زیادی نیست. سپس، قرار داده می‌شود $p_{k+1}=-\frac{\xi_k}{\|\xi_k\|}$. اگر این بردار در شرط آرمیژو

$$f(x+\varepsilon p_{k+1})-f(x)\leq -c\varepsilon\|\xi_k\|,$$

صدق کند، آن‌گاه جهت کاهشی مورد نظر به دست آمده است. در غیر این صورت تقریب $\partial_\varepsilon f(x_k)$ با استفاده از استراتژی بالا، مجددا بهبود می‌یابد تا یک جهت کاهشی محاسبه می‌شود که در شرط آرمیژو صدق می‌کند. در زیر الگوریتم محاسبه‌ی این جهت، آورده شده است:

الگوریتم ۱. الگوریتم تقریب تندترین کاهش [۲۱]

گام ۱. قرار ده: $\delta,c_1,\epsilon\in(0,1)$. $v_1\in\partial_{\Delta_k}f(x_k)$ را به دلخواه انتخاب کن و قرار ده: $W_k=\{v_1\}$ و $l=1$.

گام ۲. مساله بهینه‌سازی زیر را حل کن:

$$v_w=\underset{v\in\text{conv}W_k}{\arg\min}\|v\|^2,$$

اگر $\|v_w\|\leq\delta$، متوقف شو. درغیر این صورت، قرار ده: $p=-\frac{v_w}{\|v_w\|}$.

گام ۳. اگر $f(x_k+\Delta_k p)-f(x_k)\leq -c_1\Delta_k\|v_w\|$، آنگاه متوقف شو، در غیر این صورت به گام ۴ برو.

گام ٤. $v_{l+1}\in\partial_{\Delta_k}f(x_k)$ را طوری انتخاب کن که $v_{l+1}\notin\text{conv}W_k$. قرارده: $W_k=W_k\cup\{v_{l+1}\}$، $l=l+1$ و به گام ۲ برو.

در [۲۱] نشان داده شده است که الگوریتم تقریب تندترین کاهش در تعداد تکرار متناهی یک جهت کاهشی را تولید کرده و تقریبی برای مجموعه $\partial_{\Delta_k}f(x_k)$ پیدا می‌کند.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.2.7.4]

٤ الگوریتم ناحیه اعتماد مخروطی ناهموار و همگرایی سراسری

دراین بخش، الگوریتم ناحیه اعتماد مخروطی برای حل مساله بهینه‌سازی نامقید (١) ارایه می‌شود. فرض کنید $W_k \subseteq \partial_{\Delta_k} f(x_k)$ و $\mathrm{conv} W_k$ بهترین تقریب برای $\partial_{\Delta_k} f(x_k)$ است. مساله زیر را در نظر گیرید:

$$v_k = \underset{v \in \mathrm{conv} W_k}{\arg\min} \|v\|_2^2 .$$

فرض کنید، برای $c_1 \in (0,1)$، رابطه $f(x_k - \Delta_k \frac{v_k}{\|v_k\|_2}) - f(x) \le -c_1 \Delta_k \|v_k\|_2$ برقرار است. براساس زیرگرادیان $v_k \in \partial_\delta f(x_k)$، مدل مخروطی به صورت زیر تعریف می‌گردد(v_k از الگوریتم تقریب تندترین کاهش تولید شده است):

$$\hat{c}_k(s) = f(x_k) + \frac{v_k^T s}{1-\alpha_k^T s} + \frac{1}{2}\frac{s^T B_k s}{(1-\alpha_k^T s)^2},$$

که در آن، B_k یک ماتریس متقارن و معین مثبت است. در kامین تکرار از روش ناحیه اعتماد پیشنهادی، زیرمساله مخروطی زیر حل می‌شود:

$$Min \quad \hat{c}_k(s) = f_k + \frac{v_k^T s}{1-\alpha_k^T s} + \frac{1}{2}\frac{s^T B_k s}{(1-\alpha_k^T s)^2} \tag{۶}$$
$$s.t.$$
$$\|s\| \le \Delta_k .$$

که در آن $1-\alpha_k^T s > 0$. برای حل زیرمساله (۶) از روش جستجوی منحنی استفاده کرده‌ایم [۲۳]. در اینجا الگوریتم بهبودیافته جستجوی منحنی برای حل زیرمساله (۶) به صورت زیر ارایه می‌گردد:

الگوریتم۲. الگوریتم جستجوی منحنی بهبودیافته

گام۱. قرارده: $\bar{s} = -\frac{B_k^{-1} v_k}{1 - v_k^T B_k^{-1} \alpha_k}$. اگر $\|\bar{s}\| \le \Delta_k$، $1-\alpha_k^T \bar{s} > 0$ و $f(x_k + \bar{s}) - f(x_k) \le c_1 \bar{s}^T v_k$، آنگاه قرارده: $s_k = \bar{s}$، در غیر این صورت به گام۲ برو.

گام۲. قرارده: $\tau = \frac{v_k^T v_k}{v_k^T B_k v_k - \alpha_k^T v_k v_k^T v_k}$. اگر $\tau > 0$ و $f(x_k - \tau v_k) - f(x_k) \le -c_1 \tau v_k^T v_k$ و $|\tau| \|v_k\| \le \Delta_k$ باشد، آنگاه قرارده $s_k = -\tau v_k$، در غیر این صورت به گام۳ برو.

گام۳. قرارده: $s_k = -\Delta_k \frac{v_k}{\|v_k\|}$.

درالگوریتم ۲، s_k باید کاهش کافی در تابع هدف ایجاد کند. درگام۳، s_k همان خروجی الگوریتم ۱ است که تقریب تندترین کاهش بوده وکاهش کافی را ایجاد می‌کند؛ بنابراین خروجی الگوریتم۲ کاهش کافی را ایجاد می‌کند. حال میزان کاهش تابع هدف به ازای $x_k + s_k$ را بررسی می‌کنیم. برای این منظور، نسبت کاهش واقعی و کاهش پیش بینی شده به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\rho_k = \frac{f(x_k) - f(x_k + s_k)}{c_k(0) - c_k(s_k)}. \tag{۷}$$

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.2.7.4]

با توجه به ρ_k، شعاع ناحیه اعتماد به‌هنگام می‌شود. برای ثابت $\beta \in [0,\frac{1}{4})$، اگر $\rho_k > \beta$ باشد، آن‌گاه $x_k + s_k$ را به عنوان نقطه‌ی بعدی پذیرفته می‌شود و قرار می‌دهیم $x_{k+1} = x_k + s_k$. دراین‌صورت، باید مدل مخروطی در نقطه x_{k+1} به‌هنگام شود. v_{k+1}را خروجی الگوریتم ۱ در نقطه x_{k+1} در نظر می‌گیریم و داریم:

$$\hat{c}_{k+1}(s) = f(x_{k+1}) + \frac{v_{k+1}^T s}{1-\alpha_{k+1}^T s} + \frac{1}{2}\frac{s^T B_{k+1} s}{(1-\alpha_{k+1}^T s)^2}, \tag{8}$$

که در آن B_{k+1} ماتریس $n \times n$ متقارن است. مدل مخروطی (۸) در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$c_{k+1}(0) = f(x_{k+1}), \quad \nabla c_{k+1}(0) = v_{k+1}, \tag{9}$$

$$c_{k+1}(-s_k) = f(x_k), \quad \nabla c_{k+1}(-s_k) = v_k. \tag{10}$$

قرار دهید $s_k = x_{k+1} - x_k$. شرایط درونیابی (۱۰) منجر به روابط زیر می‌شود:

$$f(x_k) = f(x_{k+1}) - \frac{v_{k+1}^T s_k}{1-\alpha_{k+1}^T s_k} + \frac{1}{2}\frac{s_k^{\;T} B_{k+1} s_k}{(1-\alpha_{k+1}^T s_k)^2}, \tag{11}$$

$$v_k = \frac{1}{1-\alpha_{k+1}^T s_k}\left[I + \frac{\alpha_{k+1} s_k^T}{1-\alpha_{k+1}^T s_k}\right]\left[v_{k+1} - \frac{B_{k+1} s_k}{1-\alpha_{k+1}^T s_k}\right]. \tag{12}$$

برای برقراری شرایط (۱۱) و (۱۲) باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$r^2 = \left[f(x_k) - f(x_{k+1})\right]^2 - \left(v_k^T s_k\right)\left(v_{k+1}^T s_k\right) \geq 0.$$

با استفاده از شرایط درونیابی (۹-۱۲) ، شرط سکانت برقرار بوده و داریم [۲۱]:

$$B_{k+1} = B_k + \frac{y_k y_k^T}{s_k^T y_k} - \frac{B_k s_k s_k^T B_k}{s_k^T B_k s_k}, \tag{13}$$

$$\alpha_{k+1} = \frac{1-\gamma}{v_k^T s_k} v_k. \tag{14}$$

که درآن $y_k = \gamma v_{k+1} - \gamma^3 v_k$، $\gamma = \dfrac{-v_k^T s_k}{f(x_k) - f(x_{k+1}) + r}$.

این روند تا جایی ادامه می‌یابد که شرط توقف برقرار شود. براساس مطالب ذکر شده، روش ناحیه اعتماد مخروطی برای مینیمم‌سازی تابع پیوسته لیپ‌شیتز به صورت زیر ارایه می‌شود:

الگوریتم۳. الگوریتم ناحیه اعتماد مخروطی

گام۱ (مقداردهی پارامترهای اولیه). $\Delta_{\text{Max}}, \Delta_1 > 0$، $\alpha_1, x_1 \in \mathbb{R}^n$، $\theta_\Delta, \delta_1, \theta_\delta, \beta, c_1, c_3 \in (0,1)$، $c_4 > 1$، $0 < c_2 < c_3$ و $\xi_1 \in \partial f(x_1)$. قرار ده: $B_1 = I$ و $k = 1$.

گام۲ (محاسبه جهت کاهشی). فرض کن v_k زیرگرادیان حاصل از الگوریتم۱ در نقطه x_k با پارامترهای Δ_k، $\delta = \delta_k$ و c_1 باشد.

گام۳ (شرط توقف). اگر $\|v_k\| = 0$، آن‌گاه متوقف شو. در غیر این صورت، اگر $\|v_k\| \leq \delta_k$، آن‌گاه قرار ده: $x_{k+1} = x_k$، $\delta_{k+1} = \delta_k \theta_\delta$، $\Delta_{k+1} = \theta_\Delta \Delta_k$، $k = k+1$ و به گام ۲ برو. در غیر این صورت،

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.2.7.4]

قرار ده: $\delta_{k+1}=\delta_k$ و به گام ۴ برو.

گام۴ (حل زیرمساله مخروطی). s_k را از الگوریتم ۲ محاسبه کن.

گام۵ (به‌هنگام‌سازی شعاع ناحیه اعتماد). نسبت ناحیه اعتماد (۷) را محاسبه کن. اگر $\rho_k > \beta$ ،

آن‌گاه قرارده: $x_{k+1}=x_k+s_k$.

اگر $\rho_k > c_3$ و $\|s_k\|=\Delta_k$، آنگاه قرار ده: $\Delta_{k+1}=\mathrm{Min}\{\Delta_{\mathrm{Max}}, c_4\Delta_k\}$. در غیر این صورت، اگر $\rho_k < c_2$ باشد، قرارده: $\Delta_{k+1}=\theta_\Delta\Delta_k$. در غیر این صورت، قرارده: $\Delta_{k+1}=\Delta_k$ و به گام ۶ برو.

گام٦ (به‌هنگام‌سازی مدل مخروطی). مطابق گام ۲ و گام ۳، زیرگرادیان $v_{k+1}\in\partial f(x_{k+1})$ را انتخاب کن. اگر $r^2\geq 0$ ، B_{k+1} و α_{k+1}را با روابط (۱۳) و (۱۴) به‌هنگام کن. در غیر این صورت قرار ده: $B_{k+1}=I_{n\times n}$، $\alpha_{k+1}=v_{k+1}$، $k=k+1$ و به گام ۴ برو.

دراین‌جا، Δ_{Max} یک کران برای طول گام‌هاست.

توجه. درآزمایش‌های عددی ملاحظه گردید که به علت ناپایداری عددی ممکن است ماتریس B_{k+1} بد وضع (نزدیک به ماتریس نامنفرد) شود؛ بنابراین در پیاده‌سازی، ماتریس B_k زمانی به‌هنگام می‌شود که $r^2 > 10^{-6}$ باشد.

در ادامه، خاصیت همگرایی الگوریتم ناحیه اعتماد مخروطی برای مساله بهینه‌سازی نامقید با تابع هدف پیوسته لیپ‌شیتز موضعی ارایه می‌گردد. قبل از هر چیز فرض‌های زیر را روی مساله در نظر می‌گیریم:

فرض ۱. مجموعه تراز $L:=\{x : f(x)\leq f(x_1)\}$ از پایین کراندار است.

فرض۲. ثابت M_α وجود دارد به طوری که در هر تکرار k، $\|\alpha_k\|\leq M_\alpha$ است.

فرض۳. اعداد نامنفی m_B و M_B وجود دارند به طوری که برای هر $s\in\mathbb{R}^n$ و در هر تکرار k، رابطه زیر برقرار است:

$$m_B\|s\|_2^2\leq s^T B_k s\leq M_B\|s\|_2^2.$$

فرض کنیم مجموعه S شامل اندیس‌هایی است که در آن $\rho_k\geq\beta$ است و مجموعه K، شامل تمام تکرارهاست.

لم ۱. فرض کنید s_kیک جواب زیرمساله (۶) در گام ۴ الگوریتم ۳ بوده و v_k تقریبی از جهت تندترین کاهش در گام۲ آن الگوریتم باشد، در این صورت

$$s_k^T v_k < 0.$$

اثبات. s_k به ۳ حالت زیر می‌تواند محاسبه شود:

حالت ۱: $s_k=-\dfrac{B_k^{-1}v_k}{1-v_k^T B_k^{-1}\alpha_k}$، در این صورت

$$s_k^T v_k=-\frac{v_k^T B_k^{-1}v_k}{1-v_k^T B_k^{-1}\alpha_k}. \tag{۱۵}$$

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.2.7.4]

از آنجایی که $1-\alpha_k^T s_k > 0$ ، بنابراین داریم

$$0<1-\alpha_k^T s_k = 1+\frac{\alpha_k^T B_k^{-1} v_k}{1-v_k^T B_k^{-1}\alpha_k} = \frac{1}{1-v_k^T B_k^{-1}\alpha_k},$$

در نتیجه مخرج کسر (۱۵) مثبت است. از طرف دیگر، از آنجایی که ماتریس B_k معین مثبت است؛ بنابراین صورت کسر (۱۵) نیز مثبت بوده؛ لذا داریم: $s_k^T v_k < 0$.

حالت ۲: $s_k = \frac{-\tau}{\|v_k\|_2} v_k$، که در آن $\tau > 0$، در این صورت $s_k^T v_k = -\tau\|v_k\| < 0$.

حالت۳: اگر $s_k = \frac{-\Delta_k}{\|v_k\|} v_k$ باشد، در این صورت $s_k^T v_k = -\Delta_k \|v_k\|_2 < 0$. ■

برای حل زیر مساله (۶) در گام۴ الگوریتم۳، از روش جستجوی منحنی بهبود یافته استفاده کرده‌ایم. این روش توسیعی بر روش جستجوی منحنی ارایه شده در [۲۳] است. در[۲۳]، نشان داده شده است که جواب تولید شده توسط روش جستجوی منحنی، یک جواب شدنی زیرمساله (۶) است. قضیه ۳.۳ در [۲۳] نشان می‌دهد که جهت s_k تولید شده از روش جستجوی منحنی (بهبودیافته)، در مدل مخروطی کاهش کافی ایجاد می‌کند. ما این قضیه را به صورت لم زیر بیان می‌کنیم:

لم ۲. جهت جستجوی s_k تولید شده از الگوریتم۲، در نامساوی زیر صدق می‌کند:

$$c_k(0)-c_k(s_k) \geq \delta \mathrm{Min}\left\{\frac{\|v_k\|}{\|B_k\|}, \|s_k\|\right\}, \tag{۱۶}$$

که در آن $\delta = \frac{1}{2(1+\Delta_{\mathrm{Max}})M_\alpha}$.

در اثبات همگرایی الگوریتم۳، قضیه زیر اهمیت ویژه‌ای دارد. قضیه زیر نشان می دهد که اگر الگوریتم۳ در تعداد متناهی تکرار متوقف نشود، آنگاه داریم: $\|v_k\| \to 0$.

قضیه ۳. اگر الگوریتم۳ بعد از تعداد متناهی تکرار متوقف نشود، آنگاه

$$\lim_{k\to\infty}\|v_k\| = 0.$$

اثبات. به برهان خلف، فرض کنید $\epsilon > 0$ و عدد مثبت k_1 وجود دارند به طوری برای هر $k \geq k_1$ داریم:

$$\|v_k\| \geq \epsilon. \tag{۱۷}$$

حال، نشان می‌دهیم مجموعه S نامتناهی است. به برهان خلف فرض کنیم تکرارهای موفق متناهی باشند؛ یعنی مجموعه S متناهی است. در این صورت، مجموعه $K_1 = K / S$ نامتناهی است؛ بنابراین $k_s \in K$ وجود دارد به طوری که برای هر $k \geq k_s$، داریم $k \in K_1$. برای هر $k \in K_1$، مطابق گام۵ الگوریتم۳ داریم: $\Delta_{k+1} = \theta_\Delta \Delta_k$. لذا

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.2.7.4]

چون $\theta_\Delta < ۱$، پس $\lim_{k\to\infty} \Delta_k = ۰$. از طرفی چون $\|s_k\| \le \Delta_k$؛ بنابراین $\lim_{k\to\infty} s_k = ۰$. در این صورت $k_۲ \in K_۱$ وجود دارد به طوری که برای هر $k \ge k_۲$ داریم:

$$\|s_k\| = \mathrm{Min}\left\{\frac{\epsilon}{M_B}, \|s_k\|\right\} \tag{۱۸}$$

از طرف دیگر، برای $k \ge \max\{k_۱, k_۲\}$ و $k \in K_۱$، ρ_k به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$۱-\rho_k = ۱ - \frac{f(x_k) - f(x_k + s_k)}{c_k(۰) - c_k(s_k)},$$

$$= \frac{f(x_k + s_k) - f(x_k) - \dfrac{v_k^T s_k}{۱-\alpha_k^T s_k} - \dfrac{s_k^T B_k s_k}{۲(۱-\alpha_k^T s_k)^۲}}{c_k(۰) - c_k(s_k)}.$$

از رابطه (۱۶) و شرط کاهش کافی درگام ۴ الگوریتم۳ (یا الگوریتم ۲) داریم:

$$\le \frac{c_۱ v_k^T s_k - \dfrac{v_k^T s_k}{۱-\alpha_k^T s_k} - \dfrac{s_k^T B_k s_k}{۲(۱-\alpha_k^T s_k)^۲}}{\delta \|v_k\| \mathrm{Min}\left\{\dfrac{\|v_k\|}{\|B_k\|}, \|s_k\|\right\}}.$$

از فرض۳ و رابطه (۱۷) داریم:

$$\le \frac{c_۱ v_k^T s_k - \dfrac{v_k^T s_k}{۱-\alpha_k^T s_k} - \dfrac{s_k^T B_k s_k}{۲(۱-\alpha_k^T s_k)^۲}}{\delta \|v_k\| \mathrm{Min}\left\{\dfrac{\epsilon}{M_B}, \|s_k\|\right\}},$$

مطابق (۱۸) داریم:

$$= \frac{c_۱ v_k^T s_k - \dfrac{v_k^T s_k}{۱-\alpha_k^T s_k} - \dfrac{s_k^T B_k s_k}{۲(۱-\alpha_k^T s_k)^۲}}{\delta \|v_k\| \|s_k\|}.$$

از آنجایی‌که B_k معین مثبت است؛ لذا عبارت سوم در صورت کسر بالا مثبت بوده و نامساوی زیر برقرار است:

$$\le \frac{c_۱ v_k^T s_k - \dfrac{v_k^T s_k}{۱-\alpha_k^T s_k}}{\delta \|v_k\| \|s_k\|} = \frac{\left(v_k^T s_k\right)\left(c_۱ - \dfrac{۱}{۱-\alpha_k^T s_k}\right)}{\delta \|v_k\| \|s_k\|}. \tag{۱۹}$$

چون طرف راست نامساوی (۱۹) مقداری مثبت باید باشد و ازلم۲ داریم: $v_k^T s_k < ۰$، بنابراین از نامساوی مثلثی داریم:

$$۱-\rho_k \le \frac{۱}{\delta}\left(\frac{۱}{۱-\alpha_k^T s_k} - c_۱\right).$$

از آنجایی که $\lim_{k\to\infty} s_k = ۰$؛ بنابراین:

$$۱-\rho_k \le \frac{۱}{\delta}\left(۱-c_۱\right).$$

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.2.7.4]

اگر c_1 طوری انتخاب شود که نامساوی زیر برقرار شود:

$$\frac{1}{\delta}\left(1-c_1\right)<1-\beta,$$

در این صورت $\rho_k \geq \beta$ است، بنابراین $k \in \mathcal{S}$. که این در تناقض فرض $k \in K_1$ است؛ بنابراین مجموعه $\mathcal{S}$ نامتناهی است.

برای هر $k \in \mathcal{S}$ داریم:

$$\begin{aligned} f(x_k)-f(x_{k+1}) &\geq \beta\left(c_k(s_k)-c_k(0)\right) \\ &\geq \delta\beta\|v_k\|\operatorname{Min}\left\{\frac{\|v_k\|}{\|B_k\|},\|s_k\|\right\} \\ &\geq \delta\beta\epsilon\operatorname{Min}\left\{\|s_k\|,\frac{\epsilon}{M_B}\right\}. \end{aligned}$$

چون دنباله $\{f(x_k)\}$ نزولی و کران‌دار است، پس همگراست؛ بنابراین $f(x_k)-f(x_{k+1})\to 0$ و برای $k \in \mathcal{S}$ داریم:

$$\lim_{k\to\infty}\|s_k\|=0.$$

مطابق گام ۴ در الگوریتم۳ (یا الگوریتم۲)، s_k متعلق به یکی از سه مجموعه زیر است:

$\mathcal{S}_1=\left\{k \mid s_k=-\frac{B_k^{-1}v_k}{1-v_k^T B_k^{-1}\alpha_k}\right\}$، $\mathcal{S}_2=\left\{k \mid s_k=-\tau_k v_k\right\}$ و $\mathcal{S}_3=\left\{k \mid s_k=-\Delta_k\frac{v_k}{\|v_k\|}\right\}$.

فرض کنید $k \in \mathcal{S}_1$، زمانی که $k\to\infty$، داریم $\|s_k\|\to 0$؛ یعنی $\left\|\frac{-B_k^{-1}v_k}{1-v_k^T B_k^{-1}\alpha_k}\right\|\to 0$. از آنجایی که $1-\alpha_k^T s_k>0$، در این صورت $1-v_k^T B_k^{-1}\alpha_k>0$ و داریم:

$$\|s_k\|=\frac{1}{1-v_k^T B_k^{-1}\alpha_k}\left\|B_k^{-1}v_k\right\|.$$

طبق فرض ۳ داریم:

$$m_B\|v_k\|\leq\left\|B_k^{-1}v_k\right\|\leq M_B\|v_k\|.$$

بنابراین $\|v_k\|\to 0$، که متناقض فرض خلف (رابطه (۱۷)) است.

فرض کنید $k \in \mathcal{S}_2$، زمانی که $k\to\infty$، داریم $\|s_k\|\to 0$؛ یعنی $\|-\tau_k v_k\|\to 0$. از آنجایی که $\tau_k>0$. بنابراین $\|v_k\|\to 0$، که متناقض فرض خلف (رابطه (۱۷)) است.

فرض کنید $k \in \mathcal{S}_3$، زمانی‌که $k\to\infty$ داریم $\|s_k\|\to 0$ یعنی $s_k=-\Delta_k\frac{v_k}{\|v_k\|}$. از این رو $\Delta_k\to 0$. ولی $k \in S$ بوده و داریم: $\Delta_{k+1}\geq\Delta_k$ که با $\Delta_k\to 0$ در تناقض است.

■

قضیه زیر شرط لازم همگرایی الگوریتم ۳ را نشان می‌دهد.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.2.7.4]

قضیه٤. الگوریتم۳ یا در تکرار معین $k_{\circ}$ با $\|v_{k_{\circ}}\|=\circ$ متوقف می‌شود و یا دنباله $\{x_k\}_{k\in\mathcal{S}}$ به نقطه حدی x^* با $\circ\in\partial f(x^*)$ همگرا می گردد.

اثبات . فرض کنید الگوریتم۳ در تکرار معین $k_{\circ}$ با $\|v_{k_{\circ}}\|=\circ$ متوقف نشود. دنباله $\{x_k\}_{k\in\mathcal{S}}$ را در نظر می گیریم. از آنجایی که مجموعه تراز، مجموعه‌ای کراندار است ؛ بنابراین دنباله $\{x_k\}_{k\in\mathcal{S}}$ حداقل یک نقطه حدی دارد. فرض کنید x^* یک نقطه حدی $\{x_k\}_{k\in\mathcal{S}}$ باشد و $\{x_{k_n}\}$ زیردنباله‌ای از $\{x_k\}_{k\in\mathcal{S}}$ بوده به طوری که $x_{k_n}\to x^*$. از قضیه۳ می‌دانیم که $\|v_{k_n}\|\to\circ$، طبق خاصیت نرم ۲ داریم: $v_{k_n}\to\circ$. از طرفی $\partial f(\cdot)$ نیم‌پیوسته بالایی است و $v_{k_n}\in\partial_{\Delta_k} f(x_{k_n})$ لذا $\circ\in\partial f(x^*)$. ■

۵ نتایج عددی

در این بخش، کارایی الگوریتم ۳ روی برخی مسایل بهینه‌سازی ناهموار ارایه شده در [۱۹] مورد بررسی قرار می گیرد و با الگوریتم ناحیه اعتماد ناهموار در[۲۴] مقایسه می گردد. الگوریتم‌ها در محیط MATLAB2014a پیاده سازی می‌شوند و برای مقایسه این دو الگوریتم تعداد دفعات محاسبه تابع گزارش داده می‌شود. حال مسایل انتخابی را معرفی می کنیم [۱۹]:

۱. $CB۲$

با تابع هدف $f(x)=\mathrm{Max}\{x_۱^۲+x_۲^۴,(۲-x_۱)^۲+(۲-x_۲)^۲,۲e^{x_۲-x_۱}\}$، نقطه شروع $(۲,۲)^T$ و مقدار بهینه ۱/۹۵۴۲۲۲۴۵.

۲. DEM

با تابع هدف $f(x)=\mathrm{Max}\{۵x_۱+x_۲,-۵x_۱+x_۲,x_۱^۲+x_۲^۲+۴x_۲\}$، نقطه شروع $(۱,۱)^T$ و مقدار بهینه ۳-.

۳. LQ

با تابع هدف $f(x)=\mathrm{Max}\{-x_۱-x_۲,-x_۱-x_۲+x_۱^۲+x_۲^۲-۱\}$، نقطه شروع $(۰/۵,۰/۵)^T-$ و مقدار بهینه $-\sqrt{۲}$.

۴. QL

با تابع هدف $f(x)=\mathrm{Max}(f_۱(x),f_۱(x)+۱۰(-۴x_۱-x_۲+۴),f_۱(x)+۱۰(-x_۱-۲x_۲+۶))$، که در آن $f_۱(x)=x_۱^۲+x_۲^۲$ است. نقطه شروع $(-۱,۵)^T$ و مقدار بهینه ۷.۲.

۵. $Mifflin۱$

با تابع هدف $f(x)=-x_۱+۲۰\mathrm{Max}\{x_۱^۲+x_۲^۲-۱,۰\}$، نقطه شروع $(۰/۸,۰/۶)^T$ و مقدار بهینه ۱-.

۶. $Wolfe$

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.2.7.4]

با تابع هدف

$$f(x)=\begin{cases} 5\sqrt{9x_1^2+x_2^2} & x_1 \geq |x_2| \\ 9x_1+16|x_2| & 0<x_1\leq |x_2| \\ 9x_1+16|x_2|-x_1^9 & x_1\leq 0, \end{cases}$$

نقطه شروع $(3,2)^T$ و مقدار بهینه ۸-.

۷. $Rosen-Suzuki$

با تابع هدف $f(x)=\mathrm{Max}_{1\leq i\leq 4} f_i(x)$ که در آن

$$f_1(x)=x_1^2+x_2^2+2x_3^2+x_4^2-5x_1-5x_2-21x_3+7x_4,$$
$$f_2(x)=f_1(x)+10(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_1-x_2+x_3-x_4-8),$$
$$f_3(x)=f_1(x)+10(x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_4^2-x_1-x_4-10),$$
$$f_4(x)=f_1(x)+10(2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1-x_2-x_4-5),$$

با نقطه شروع $(0,0,0,0)^T$ و مقدار بهینه ۴۴-.

۸. $Davidon$ ۲

با تابع هدف $f(x)=\underset{1\leq i\leq 20}{\mathrm{Max}} \ |f_i(x)|$ که در آن

$$f_i(x)=(x_1+x_2t_i-e^{t_i})^2+(x_3+x_4 sin(t_i)-cos(t_i))^2,$$

و $t_i=0.2i$ برای $i=1,2,\cdots,20$. با نقطه شروع $(25,5,-5,-1)^T$ و مقدار بهینه ۱۱۵/۷۰۶۴۴.

پارامترهای الگوریتم۳ مشابه پارامترهای الگوریتم ناحیه اعتماد ناهموار در[۲۴] مقداردهی اولیه شده‌اند:

$$\Delta_{\mathrm{Max}}=\Delta_0=1,\ \delta_1=10^{-4},\ \theta_\Delta=0.5,\ \theta_\delta=1,\ \beta=c_1=10^{-4},\ c_3=0.75,\ c_4=2,\ c_2=0.25,$$

همچنین $\alpha_0=v_0$. الگوریتم زمانی که $\Delta_k<10^{-7}$ پایان می یابد. در جدول ۱، nf، $fopt$، $ntrust$ و $nctr$ به‌ترتیب نشان‌دهنده تعداد دفعات محاسبه تابع، جواب بهینه به دست آمده، الگوریتم ناحیه اعتماد ناهموار و الگوریتم۳ هستند.

جدول ۱. نتایج عددی مقایسه الگوریتم ناحیه اعتماد ناهموار و ناحیه اعتماد مخروطی ناهموار

شماره مساله	nf_{ntrust}	nf_{nctr}	$fopt_{ntrust}$	$fopt_{nctr}$
۱	۱۱۵	۳۱	۱/۹۵۳۸۰۱۱۷	۱/۹۵۳۹۷۱۹
۲	۱۹۱	۱۴۲	-۲/۹۹۹۹۹۹۹	-۲/۹۹۹۹۹۹۹
۳	۸۶	۵۸	-۱/۴۱۴۲۱۳۵۶	-۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۲
٤	۱۰۸	۱۱۶	۷/۲	۷/۲۰۰۰۰۰
٥	۱۵۷	۱۳۳	-۰/۹۹۹۹۹۹۹۹	-۰/۹۹۹۹۹۹۹۹
٦	۱۳۱	۱۱۵	-۷/۹۹۹۹۹۹۹	-۷/۹۹۹۹۹۹۹
۷	۷۰۰	۲۷۲	-۴۳/۹۹۹۹۹۹۹	-۴۳/۹۹۹۹۹۹۹
۸	۲۴۲۰۷	۳۴۷	۱۱۵/۷۰۶۴۳۹۸	۱۱۵/۷۰۶۴۳۹۸۴۲۴

با توجه به جدول ۱، نتایج عددی نشان می‌دهندکه مدل مخروطی تابع ناهموار را بهتر تقریب زده؛ لذا تعداد دفعات محاسبه تابع در روش ناحیه اعتماد مخروطی به طور قابل توجهی کم‌تر ازتعداد دفعات محاسبه تابع در روش ناحیه اعتماد ناهموار است.

٦ نتیجه و جمع بندی

در حالت هموار، به دلیل درجه آزادی بیش تر مدل مخروطی نسبت به مدل درجه دوم، تابع هدف (که دو بار به طور پیوسته مشتق‌پذیر است) توسط مدل مخروطی تقریب زده شده است؛ زیرا توابعی که رفتار غیر درجه دوم دارند؛ یعنی انحنای شان چندین بار عوض می شود، با مدل مخروطی بهتر تقریب زده می‌شوند؛ لذا مدل مخروطی مسائل بیشتری را می‌تواند تقریب بزند. الگوریتم ناحیه اعتماد ناهموار و الگوریتم ناحیه اعتماد مخروطی ارایه شده روی برخی مسایل استاندارد مورد بررسی قرار گرفت. از نتایج به دست آمده، می‌توان گفت الگوریتم ناحیه اعتماد با مدل مخروطی بر الگوریتم ناحیه اعتماد ناهموار برتری دارد.

در این مقاله، برای اولین بار مدل مخروطی را برای تابع پیوسته لیپ‌شیتز موضعی ارایه کرده و الگوریتم ناحیه اعتماد ناهموار را روی این مدل در نظر گرفتیم و همگرایی سراسری آن را تحت فرضیه‌های مستدل اثبات کردیم. درکارهای آتی سعی می‌شود که الگوریتم ناحیه اعتماد ناهموار و الگوریتم ناحیه اعتماد مخروطی ارایه شده روی مسایل استاندارد با ابعاد بالا مقایسه گردد. حدس زده می‌شود که نتایج عددی بیانگر کارایی روش پیشنهاد شده است. در حالت ناهموار به خصوص برای توابع نامحدب مشکل تقریب تابع هدف دو چندان می‌شود؛ بنابراین با استفاده از مدل مخروطی توابع نامحدب بهتر تقریب زده می‌شوند.

منابع

[۲۰] طاعتی، ا.، صلاحی، م.، (۱۳۹۵). یک الگوریتم کارا برای زیرمساله‌ی ناحیه اطمینان توسیع یافته با دو قیدخطی. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن،۱۳(۲)، ۱۹–۳۳.

[1] Shor, N. Z., (1985). Minimization methods for non-differentiable functions. Berlin, Springer.
[2] Frangioni, A., (2002). Generalized bundle methods. SIAM J. on Optimization, 13, 117-156.
[3] Mäkelä, M. M., (2002). Survey of bundle methods for nonsmooth optimization. Optimization Methods and Software, 17, 1-29.
[4] Hiriart-Urruty, J., Lemaréchal, C., (1993). Convex analysis and minimization algorithms II: advanced theory and bundle method. Berlin, Springer.
[5] Schramm, H., Zowe, J., (1992). A version of the bundle idea for minimizing a nonsmooth function: Conceptual idea, convergence analysis, numerical results. SIAM Journal of Optimization, 2, 121-152.
[6] Polak, E., Royset, J. O., (2003). Algorithms for finite and semi-infinite min-max problems using adaptive smoothing technique. Journal of Optimization Theory and Applications, 119, 421-457.
[7] Bagirov, A. M., (2003). Continuous subdifferential approximations and their applications. Journal of Mathematical Sciences, 115, 2567-2609.
[8] Luksan, L., Vlcek, J., (1998). A bundle-Newton method for nonsmooth unconstrained minimization. Mathematical Programming, 83, 373-391.
[9] Luksan, L., Vlcek, J., (2001). Globally convergent variable metric method for nonconvex nondifferentiable unconstrained minimization. Journal of Optimization Theory and Applications, 111, 407-430.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.2.7.4]

[10] Lewis, A. S., Overton, M. L., (2012). Nonsmooth optimization via quasi-Newton methods. Mathematical Programming, doi: 10.1007/s10107-012-0514-2, 1-29.

[11] Karmitsa, N., Bagirov, A. M., (2012). Limited memory discrete gradient bundle method for nonsmooth derivative-free optimization. Optimization, 61, 1491-1509.

[12] Conn, A. R., Gould, N. I. M., Toint, Ph. L., (2000). Trust-region methods. Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics.

[13] Qi, L., Sun, J., (1994). A trust region algorithm for minimization of locally Lipschitzian functions. Mathematical Programming, 66, 25-43.

[14] Dennis, J., Li, S., Tapia, R., (1995). An unified approach to global convergence of trust region methods for nonsmooth optimization. Mathematical Programming, 68, 319-346.

[15] Davidon, W.C., (1980). Conic approximation and collinear scaling for optimizers. SIAM Journal on Numerical Analysis, 17, 281-268.

[16] Gourgeon, H., Nocedal, J., (1985). A Conic algorithm for optimization. SIAM Journal of Scientific Stochastical Computation, 6, 253-267.

[17] Nocedal, J., Wright, S.J., (1999). Numerical optimization. Berlin, Springer.

[18] Di, S., Sun, W., (1996). Trust region method for conic model to solve unconstrained optimization problems. Optimization Methods and Software, 6, 237-263.

[19] Bagirov, A., Karmitsa, N., Mäkelä, M. M., (2014). Introduction to nonsmooth optimization: theory, practice and software. Berlin, Springer.

[21] Mahdavi-Amiri, N., Yousefpour, R., (2012). An effective nonsmooth optimization algorithm for locally Lipschitz functions. Journal of Optimization Theory and Applications, 155, 180-195,

[22] Fu, J.H., Sun, W.Y., Sampaio, D., (2005). An adaptive approach of conic trust-region method for unconstrained optimization problems. Journal of Applied Mathematics and Computation, 19, 347-365.

[23] Qu, S. J., Jiang, S. D., Zhu, Y., (2009). A conic trust-region method and its convergence properties. Computers and Mathematics with Applications, 57, 513-528.

[24] Akbari, Z., Yousefpour, R., Peyghami, M. R., (2015). A new nonsmooth trust region algorithm for locally lipschitz unconstrained optimization problems. Journal of Optimization Theory and Applications, 164, 733-754.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.2.7.4]