مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال سیزدهم، شماره سوم (پیاپی ۵۰)، پاییز ۹۵، ص ص ۵۱-۲۷
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

ارایه دو مدل جدید برنامه‌ریزی خطی در شرایط عدم قطعیت

علیرضا غفاری حدیقه*[1]

۱- دانشیار، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی کاربردی، تبریز، ایران

رسید مقاله: ۱۸ فروردین ۱۳۹۵
پذیرش مقاله: ۶ شهریور ۱۳۹۵

چکیده

عدم قطعیت یکی از خصوصیت‌های ذاتی مساله‌های طبیعی است. بهینه‌سازی نیز از این وضعیت مستثنی نیست. پارامترهای یک مساله بهینه‌سازی نیز ممکن است دقیقاً مشخص نشده باشند و یا بعد از حل مساله، تغییراتی در آن‌ها به وجود آید. در این مقاله، مساله برنامه‌ریزی خطی در محیط غیرقطعی را بررسی می‌کنیم. فرض می‌کنیم پارامترهای مساله توسط متخصصین حوزه مربوطه مشخص شده‌اند. اساس کار این مقاله، استفاده از نظریه عدم قطعیت است که در سال ۲۰۰۷ توسط لیو در قالب اصول موضوعه ریاضی مطرح شده است. دو مدل مختلف برنامه‌ریزی خطی غیرقطعی معرفی شده و وجود جواب‌های شدنی و بهینه و ارتباط بین این جواب‌ها در دو مدل بررسی می‌شود. نتایج به دست آمده با دو مثال ساده توصیف شده‌اند.

کلمات کلیدی: برنامه‌ریزی خطی، نظریه عدم قطعیت، بهینه‌سازی غیرقطعی.

۱ مقدمه

برنامه‌ریزی خطی بیش از ۶۰ سال است که از دیدگاه‌های مختلف مطالعه شده است و توانمندی خود را در مدل‌بندی بسیاری از مساله‌های کاربردی در حوزه‌های وسیع و مختلف نشان داده است، از نظری عددی قابل رهگیری بوده و تئوری آن تقریبا به اندازه کافی توسعه یافته و نرم‌افزارهای محاسباتی موثری برای حل آن، حتی برای مساله‌های در اندازه‌های بسیار بزرگ، وجود دارند. با این حال یکی از پیش‌فرض‌های اساسی در مدل‌های برنامه‌ریزی خطی، قطعیت پارامترهای مساله است که در عمل بندرت چنین قطعیتی تضمین می‌شود. برخی اوقات، هر چند داده‌های مساله در هنگام مدل‌بندی دقیق برآورد شده بودند، ممکن است بعد از حل مساله، شرایط در محیط واقعی تغییر کند و در نتیجه آن مقادیر دیگر معتبر نباشند. در اثر این تغییرات ممکن است جواب بهینه قبلی، دیگر شدنی و یا بهینه نباشد.

برای درک بهتر ضرورت استفاده از مدل‌های غیرقطعی در برنامه‌ریزی خطی، مساله ساده برنامه‌ریزی تولید را در نظر بگیرید. فرض کنید یک شرکت تولیدی می‌خواهد از بین n محصول تعدادی را برای تولید انتخاب کند طوری که تنها از منابع موجود حداکثر استفاده را کرده و میزان سود حاصل را بیشینه کند. مقدار موجودی

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: hadigheha@azaruniv.edu

[DOR: 20.1001.1.22517286.2016.13.3.5]

منبع i را با b_i نشان می‌دهیم و مقدار منبع i-ام استفاده شده در تولیـد یـک واحـد از محصـول j را نیـز بـا a_{ij} نمایش می‌دهیم. میزان سود خالص به دست آمده از فروش هر واحد از محصـول j نیـز c_j اسـت. اگـر مقـدار تولید محصول j را با x_j نشان دهیم یک مساله برنامه‌ریزی خطی به شکل متعارفی

$$Min_x \left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, i=1,\ldots,m, x_j \geq 0, j=1,\ldots,n \right\}, \tag{1}$$

تولید می‌شود.

در ادامه رویکردهای مختلفی برای عدم قطعیت در داده‌های این مساله را مرور کرده و ایـرادات خـاص هـر کدام را به طور خلاصه یادآوری می‌کنیم. برای سهولت کار فرض می‌کنیم فقـط یکـی از پارامترهـای مسـاله (۱) غیرقطعی است، مثلا c_1.

استفاده از تحلیل حساسیت و برنامه‌ریزی پارامتری یکـی از روش‌هـای سـنتی بـرای بررسـی مسـاله در چنـین وضعیتی است و تحقیقات زیادی در این خصوص از دیدگاه‌های مختلف انجام شده است (به عنوان نمونه به[۱-۳] مراجعه نمایید). در تحلیل حساسیت، تاثیر جایگزینی c_1 با مقدار دیگر در نتیجه نهایی را مطالعه می‌کننـد (کـه در این حالت خاص ممکن است بهینه بودن جواب بهینه موجود خدشه دار شـود). در حـالی کـه هـدف برنامـه‌ریـزی خطی پارامتری یافتن بازه (ناحیه)هایی است که با تغییر پارامترهای مساله در آن ناحیه‌ها، خاصـیت مشخصـی بـرای جواب بهینه پابرجا بماند. به عنوان مثال، بازه تغییرات مجاز برای مقدار c_1 را چنان مشخص می‌کنند که پایـه بهینـه موجود هنوز برای مقادیر c_1 در این بازه، بهینه باقی بماند. در حالتی که چنین تغییراتـی در قیـدهای مسـاله در نظـر گرفته شود، ممکن است مقدار جواب بهینه نیز تغییر کند ولی خاصیت فوق هنوز برقرار باشد. نکته قابـل توجـه در این رویکرد این است که در تحلیل حساسیت و برنامه‌ریزی پارامتری، مقـدار جدیـد پارامترهـا نیـز قطعـی در نظـر گرفته شده و مساله جدید تولید شده با این فرض اساسی حل می‌شود.

دیدگاه دیگر استفاده از نظریه فازی است [۴]. در این دیدگاه، پارامترهـای مسـاله را بـه عنـوان اعـداد فـازی تلقی کرده و در نهایت مدل‌های به دسـت آمـده را بـه مـدل‌هـای قطعـی تبـدیل و حـل مـی‌کننـد [۵]. از ایـرادات برنامه‌ریزی خطی فازی، عدم تشخیص دقیق نوع عدد فازی به کار رفته در مدل است که بر اساس عـددهای فـازی متفاوت استفاده شده در مساله، به نتایج متفاوت و گاه متناقض منجر می‌شود.

راهکار دیگر استفاده از بهینه‌سازی استوار است. در این روش، داده‌های مساله را داخـل مجموعـه‌ای در نظـر می‌گیرند بدون آن‌که برای آن‌ها تابع توزیع احتمال خاصی منتسب شده باشد [۶]. به عنوان مثـال، فـرض مـی‌کننـد که بردار ضرایب تابع هدف در داخل یک بیضیگون قرار دارد. ایـن بـردار بـه همـان انـدازه کـه ممکـن اسـت در مرکز بیضیگون واقع باشد، ممکن است نزدیک مرز بیضیگون نیز باشد. یکی از حالـت‌هـای خـاص ایـن دیـدگاه، برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای است [۷]. در این حالت فرض بر این است که هر پارامتر، مستقل از پارامترهای دیگـر، در داخل یک بازه تغییر می‌کند، در حالی که در حالت کلی ممکن است تعدادی و یا همه این پارامترها بـه نحـوی بـا هم ارتباط داشته باشند. به عبارت دیگر، در برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای می‌توان فرض کـرد کـه مـثلا بـردار ضـرایب تابع هدف به جای آن که داخل یک بیضیگون واقع باشد، داخل یک ابرمکعب قرار دارد. توجه داشـته باشـید کـه

[DOR: 20.1001.1.22517286.2016.13.3.5]

در این رویکرد نیز بازه‌های مورد نظر برای پارامترها توسط متخصصین مربوطه تعیین شده و هنوز مساله عدم قطعیت برای این بازه‌ها نیز مطرح است. در برنامه‌ریزی خطی استوار نیز در نهایت از تبدیل مدل استوار به یک مدل قطعی استفاده کرده و جواب بهینه‌ای تولید می‌کنند که برای مساله اصلی، علیرغم تغییر پارامترها در درون مجموعه‌های مشخص شده، جواب تولید شده بهینه باقی می‌ماند. البته باید توجه کرد که مفهوم جواب بهینه در برنامه‌ریزی خطی استوار با مفهوم متداول جواب بهینه در ادبیات برنامه‌ریزی خطی تا حدی متفاوت است.

دیدگاه دیگر استفاده از مدل‌های تصادفی است. در چنین مدل‌هایی، برای هر یک از پارامترهای مساله تابع توزیع احتمال مناسبی در نظر گرفته می‌شود. به عنوان مثال، می‌توان فرض کرد که تغییرات مقدار c_1 با تابع توزیع احتمال یکنواخت بیان شود. یکی از روش‌های متداول در چنین وضعیتی، جایگزین کردن امید ریاضی متغیرهای تصادفی به جای پارامترها است. در این صورت مساله تصادفی به مساله قطعی جدیدی تبدیل شده و روش‌های متداول برنامه‌ریزی خطی برای آن استفاده می‌شود. از ایرادات موجود در این دیدگاه، نیاز به وجود داده‌های تاریخی برای برآورد مناسب تابع توزیع احتمال هر پارامتر است. هم‌چنین تضمینی برای بهینه بودن جواب به دست آمده در عمل نیز وجود ندارد و تنها دلگرمی نسبی برای تصمیم گیرنده ایجاد می‌کند. در برنامه‌ریزی خطی تصادفی ممکن است عدم قطعیت در برقراری قیدها نیز وجود داشته باشد و کران پایینی برای احتمال برقراری هر قید در نظر گرفته شود [۸]. به عنوان مثال به جای قید خطی در مساله (۱) قید زیر جایگزین شود.

$$g_i\left(x\right)=P\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i\right)\ge\alpha_i,$$

که در آن $0\le\alpha_i\le 1$ و مقدار آن توسط تصمیم گیرنده مشخص می‌شود. توجه داشته باشید که در حالت کلی تابع احتمال $g_i\left(x\right)=P\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i\right)$ غیرخطی بوده و در برخی حالت‌ها حتی ممکن است مساله تولید شده محدب نباشد و حل چنین مسایلی در اکثر موارد ساده نیست.

لازم به یادآوری است که در بسیاری از موارد، داده‌های تاریخی کافی و قابل اعتماد برای برآورد تابع توزیع احتمال مناسب وجود ندارد. به عنوان مثال، تعداد آتشفشان‌های ثبت شده در یک منطقه خاص عملاً داده‌هایی را تولید نمی‌کند. به عنوان نمونه دیگر، میزان تقاضا برای کالاهای با طول عمر کم مانند تلفن‌های همراه هوشمند و لپ‌تاپ‌ها، با توجه به تنوع زیاد محصولات و رقابت شدید بین تولیدکنندگان، از قبل معلوم نبوده و حتی داده‌های موجود برای محصولات مشابه موجود در بازار را نمی‌توان برای برآورد تابع توزیع احتمال میزان تقاضای محصول جدید استفاده کرد و چنین سواستفاده‌ای ممکن است به نتایج بسیار گمراه کننده منجر شود. در برخی موارد دیگر، جمع آوری داده و ثبت مشاهدات به آزمون‌های بسیار پرهزینه نیاز دارد (مانند بررسی مقاومت یک سازه در برابر زلزله) و در برخی دیگر، حتی امکان انجام آزمون و جمع‌آوری داده نیز وجود ندارد (مانند بررسی مقاومت یک پل ساخته شده در برابر نیروی وارد شده بر آن). در چنین مواردی، یکی از راهکارها استفاده از نظر متخصصین حوزه مربوطه است که نظرشان را بر اساس شواهد و مستندات موجود و تجربیاتشان بیان می‌کنند.

برای استفاده از نظر متخصص، دیدگاه‌های مختلفی طراحی شده است. استفاده از روش دلفی [۹] و یا

[DOR: 20.1001.1.22517286.2016.13.3.5.5]

استفاده از نظریه امکان [۱۰] و هم‌چنین نظریه دمپستر-شافر[۱۱-۱۲] از جمله آن‌ها است. در سال ۲۰۰۷، لیو نظریه عدم قطعیت را مطرح کرد [۱۳] و در سال ۲۰۱۱ آن را کامل‌تر کرد [۱۴]. این نظریه یک دیدگاه ریاضی مبتنی بر چهار اصل موضوعه برای مدل‌بندی استنتاج انسان است. به عنوان نمونه در مساله برنامه تولید، نظر یک متخصص در مورد مقدار سود خالص به دست آمده از فروش محصول اول در بازار (c_1) می‌تواند چنین باشد.

صد در صد باور دارد که مقدار c_1 بیشتر از ۱۲۰ واحد پولی نیست. هم چنین صد در صد باور دارد که این مقدار حداقل ۸۰ واحد پولی است. ولی نظر او برای میزان باور قرار داشتن مقدار c_1 بین ۸۰ و ۱۲۰، ممکن است چنین بیان شود: «باور او بر این که مقدار c_1 حداکثر ۹۰ واحد پولی است ۰/۲۵ است. به عبارت دیگر، باور این که مقدار سود خالص c_1 ممکن است بیش از ۹۰ واحد پولی باشد ۰/۷۵ است.»

می‌توان تعبیرهای مناسبی نیز برای عدم قطعیت سایر پارامترهای مساله برنامه‌ریزی تولید (۱) آورد. چنین اظهار نظری برای محصولاتی خواهد بود که تجربه‌ای برای فروش آن در بازار وجود ندارد و بنابراین استفاده از برنامه‌ریزی خطی تصادفی نیز معقولانه نخواهد بود. چنین رویکردی را می‌توان در قالب متغیر غیرقطعی خطی بیان کرد (برای توضیح بیشتر در مورد متغیر غیرقطعی خطی به بخش ۲ مراجعه کنید).

توجه داشته باشید که در یک برنامه تولید، برقراری برخی از قیدها الزامی است. به عنوان مثال برقراری قیدهای مربوط به مقدار مواد اولیه استفاده شده در تولید محصولات ممکن است الزامی باشد، در حالی که برقراری برخی دیگر از قیدها همراه با عدم قطعیت مطرح شود. هم‌چنین، حداکثر مقدار تقاضا برای یک محصول خاص را می‌توان به صورت کران بالا برای آن متغیر در نظر گرفت و به صورت یک قید بیان کرد (مثلا $x_i \le u_i$). با توجه به این که میزان تقاضا برای یک محصول جدید نیز یک متغیر غیرقطعی است (متغیر u_i غیرقطعی است)، بنابراین برقراری این قید نیز با قطعیت امکان پذیر نخواهد بود و ممکن است بخواهیم مساله را چنان حل کنیم که باور به برقراری چنین قیدی از حد معینی (مثلا ۰/۹۵) کم‌تر نباشد.

نکته مهمی که باید به آن توجه داشت این است که نظریه عدم قطعیت در مقابل نظریه احتمال قرار ندارد و حوزه استفاده از این دو نظریه کاملاً متفاوت است. نظریه احتمال زمانی استفاده می‌شود که داده‌های ثبت شده‌ی قابل اعتماد برای برآورد تابع توزیع احتمال مناسب پارامترهای مساله وجود دارد. در غیر این صورت، نظریه عدم قطعیت یک الگوی ریاضی مناسب برای بررسی و حل مساله است. با وجود عمر کمی که این نظریه دارد، در علوم و مساله‌های کاربردی جالبی به کار گرفته شده است. به عنوان نمونه، علوم اقتصادی [۱۵]، کنترل بهینه [۱۶] و تحلیل ریسک [۱۷] زمینه‌هایی هستند که نظریه عدم قطعیت به کار گرفته شده است. هم‌چنین در مساله‌های بهینه‌سازی ترکیبیاتی مانند مساله کوتاه‌ترین مسیر [۱۸]، مساله پوشش راسی [۱۹] و مساله جریان بیشینه [۲۰] استفاده شده است.

در این مقاله مساله برنامه‌ریزی خطی را در محیط غیرقطعی با دیدگاه مطرح شده توسط لیو مطالعه می‌کنیم. دو مدل مختلف غیرقطعی معرفی کرده، شرایط وجود جواب برای هر دو مدل را بررسی کرده و نظریه دوگانی برنامه‌ریزی خطی را در محیط غیرقطعی توسیع می‌دهیم و با استفاده از آن‌ها، در مورد ارتباط بین جواب‌های شدنی دو مدل بحث می‌کنیم. نتایج به دست آمده را در مثال‌های ساده توصیف می‌کنیم. لازم به ذکر است که در

[DOR: 20.1001.1.22517286.2016.13.3.3.5]

حال حاضر تنها کلیاتی از یک مدل کلی برای مساله‌های بهینه‌سازی غیرقطعی منتشر شده است و این مقاله اولین کار تحلیلی در این حوزه با تاکید بر برنامه‌ریزی خطی غیرقطعی است.

این مقاله در چند بخش تنظیم شده است. بخش ۲ به مرور مختصر از نظریه عدم قطعیت می‌پردازد. بخش۳ دو مدل مختلف غیرقطعی برنامه‌ریزی خطی را مطرح می‌کند. مفهوم جواب شدنی غیرقطعی و جواب بهینه غیرقطعی به وضوح تعریف شده و شرایط وجود چنین جواب‌های شدنی و بهینه بررسی می‌شود. در بخش ۴، نظریه دوگانی در محیط غیرقطعی مطرح شده و دوگان مساله برنامه‌ریزی غیرخطی در هر دو مدل بیان شده و برخی از ارتباط‌های بین جواب‌های شدنی و بهینه دو مدل بررسی شده است. بخش ۵ دو مثال ساده را شامل است که نتیجه‌های به دست آمده را توصیف می‌کنند. بخش پایانی، جمع‌بندی نتایج به دست آمده در مقاله را شامل می‌شود و پیشنهاداتی برای ادامه تحقیق در این زمینه را ارایه می‌کند.

۲ نظریه عدم قطعیت

در این بخش، بعضی از مفهوم‌ها و قضیه‌های نظریه عدم قطعیت بیان می‌شود. برای مطالعه جزییات، خواننده را به [۲۱] ارجاع می‌دهیم.

فرض کنید Γ یک مجموعه ناتهی است. گردایه L از زیرمجموعه‌های Γ را یک جبر روی Γ گویند هرگاه سه شرط زیر برقرار باشند.

۱. $\Gamma\in L$.

۲. اگر Λ آن‌گاه $\Lambda^C\in L$.

۳. اگر $\Lambda_1,\dots,\Lambda_n\in L$ در این صورت

$$\bigcup_{i=1}^{n}\Lambda_i\in L.$$

گردایه L یک σ-جبر روی Γ نامیده می‌شود هرگاه شرط سوم به ازای تعداد شمارا Λ_i برقرار باشد. یعنی

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}\Lambda_i\in L.$$

گردایه L را یک σ-جبر روی Γ در نظر بگیرید. در این صورت (Γ,L) را یک **فضای اندازه‌پذیر** و هر $\Lambda\in L$ را یک مجموعه اندازه‌پذیر یا یک **پیشامد** گویند. کوچک‌ترین σ-جبری که شامل همه بازه‌های باز $\mathbb{R}$ باشد، جبر بورل نامیده شده و با $\mathcal{B}$ نشان داده می‌شود. هر $B\in\mathcal{B}$ را مجموعه بورل گویند. تابع M روی L را یک **تابع اندازه پذیر غیرقطعی** گویند هرگاه در چهار اصل موضوعه زیر صدق کند.

اصل موضوعه ۱: (نرمال بودن) اندازه غیرقطعی مجموعه Γ برابر یک است. یعنی $M\{\Gamma\}=1$.

اصل موضوعه ۲: (دوگانی) برای هر پیشامد Λ داریم $M\{\Lambda\}+M\{\Lambda^c\}=1$.

اصل موضوعه ۳ : (زیرجمعی) برای هر مجموعه شمارا از پیشامدهای $\Lambda_1,\Lambda_2,\dots$ ،

$$M\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty}\Lambda_i\right\}\le\sum_{i=1}^{\infty}M\{\Lambda_i\}.$$

[DOR: 20.1001.1.22517286.2016.13.3.3.5]

سه تایی (Γ, L, M) را فضای غیرقطعی گویند. اندازه متغیر ضربی در سال ۲۰۰۹ توسط لیو معرفی شد[۲۲]. فرض کنید (Γ_k, L_k, M_k) و $k = ۱,۲,\ldots$ فضاهای غیرقطعی باشند. $\Gamma = \Gamma_۱ \times \Gamma_۲ \times \cdots$ یک مجموعه از تمامی چندتاییهای مرتب $(\gamma_۱, \gamma_۲, \ldots)$ است که در آن $\gamma_k \in \Gamma_k$. یک ابرمستطیل اندازه‌پذیر در Γ مجموعه ای به شکل $\Lambda = \Lambda_۱ \times \Lambda_۲ \times \cdots$ است که در آن $\Lambda_k \in L_k$. کوچک‌ترین σ-جبر شامل تمامی ابرمستطیل‌های اندازه‌پذیر Γ را σ-جبر ضربی می‌نامند. حال اصل موضوعه حاصل ضرب به صورت زیر تعریف می‌شود.

اصل موضوعه ٤ : (حاصل‌ضرب) فضاهای عدم قطعیت (Γ_k, L_k, M_k) و $k = ۱,۲,\ldots$ را در نظر بگیرید. اندازه غیرقطعی حاصل‌ضربی M در رابطه

$$M\left\{\prod_{k=۱}^{\infty}\Lambda_k\right\} = \bigwedge_{k=۱}^{\infty} M_k\{\Lambda_k\}.$$

صدق کند.که در آن $\Lambda_k \in L_k$.

اصل موضوعه ۴ در نظریه احتمال وجود ندارد و این اصل محل تمایز نظریه احتمال و نظریه عدم قطعیت است. وقتی تعداد فضاهای عدم قطعیت به ۱ محدود شود، نتایج مربوط به این اصل در نظریه عدم قطعیت و نظریه احتمال یکسان خواهد بود، در حالی که تفسیرهای متفاوتی دارند. لازم به ذکر است که اندازه غیرقطعی به عنوان میزان باور به رخ دادن یک پیشامد، بر اساس مشاهده‌ها و تجربه‌های شخصی یک فرد مجرب، تعبیر و تفسیر می‌شود. ممکن است با تغییر شرایط زمانی و مکانی و تغییر شخص متخصص، میزان باور بر وقوع یک پیشامد نیز تغییر کند. بنابراین تا زمانی که تابع باور تغییر نکرده است، نتایج به دست آمده قابل استفاده خواهند بود.

تابع $f : (\Gamma.L) \to \mathbb{R}$ **اندازه‌پذیر** گفته می‌شود هر گاه به ازای هر مجموعه بورل B از $\mathbb{R}$، تصویر معکوس تابع f عضوی از σ-جبر L باشد. یعنی $f^{-۱}(B) = \{\gamma : f(\gamma) \in B\} \in L$. تابع‌های پیوسته و تابع‌های یکنوا نمونه‌هایی از توابع اندازه‌پذیر هستند. **متغیر غیرقطعی** ξ یک تابع از فضای غیرقطعی (Γ, L, M) به $\mathbb{R}$ است طوری که برای هر مجموعه بورل B از $\mathbb{R}$، مجموعه $\{x \in \mathbb{R} | \xi(x) \in B\}$ یک پیشامد باشد. به عبارت دیگر متغیر غیرقطعی ξ، یک تابع اندازه‌پذیر غیرقطعی روی فضای غیرقطعی (Γ, L, M) است.

برای متغیر غیرقطعی ξ ، **تابع توزیع غیرقطعی** φ برای هر $x \in \mathbb{R}$ به صورت $\varphi(x) = M\{\xi \le x\}$ تعریف می‌شود. انواع گوناگونی از متغیرهای غیرقطعی بر حسب نوع تابع توزیع تعریف شده‌اند. در ادامه، متغیرهای غیرقطعی که در این مقاله استفاده شده‌اند بیان می‌شوند. متغیر غیرقطعی ξ را **خطی** نامند هرگاه تابع توزیع غیرقطعی آن به صورت

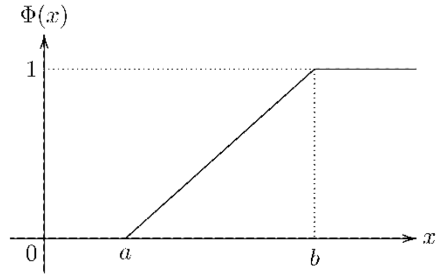
$$\varphi(x) = \begin{cases} ۰ & if \quad x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & if \quad a \le x \le b \\ ۱ & if \quad x > b. \end{cases}$$

باشد. متغیر غیرقطعی خطی را با $L(a,b)$ نشان می‌دهند. نمودار تابع توزیع غیرقطعی خطی در شکل ۱ رسم شده است. متغیر غیرقطعی ξ را **زیگزاگ** گویند و با $Z(a,b,c)$ نشان می‌دهند هرگاه تابع توزیع غیرقطعی آن به صورت

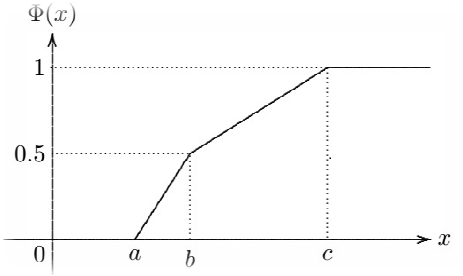
[DOR: 20.1001.1.22517286.2016.13.3.5]

$$\varphi(x)=\begin{cases} 0 & if \quad x\le a \\ \dfrac{x-a}{2(b-a)} & if \quad a\le x\le b \\ \dfrac{x+c-2b}{2(c-b)} & if \quad b\le x\le c \\ 1 & if \quad x>c. \end{cases}$$

باشد. نمودار تابع توزیع غیرقطعی زیگزاگ نیز در شکل ۲ رسم شده است.



شکل ۱ . نمودار نمونه‌ای متغیر غیرقطعی خطی



شکل ۲. نمودار نمونه‌ای متغیر غیرقطعی زیگزاگ

متغیر غیرقطعی به صورت $\xi\equiv c$ را **ثابت** نامند. تابع توزیع غیرقطعی این متغیر به صورت زیر است.

$$\varphi(x)=\begin{cases} 0 & if \quad x\le c \\ 1 & if \quad x>c. \end{cases}$$

توزیع غیرقطعی $\varphi(x)$ **منظم** نامیده می‌شود هرگاه نسبت به xهایی که در رابطه $0<\varphi(x)<1$ صدق می‌کنند، پیوسته و صعودی اکید باشد. علاوه بر این، باید در شرایط $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=1$ صدق کند. توزیع‌های غیرقطعی خطی، زیگزاگ و ثابت نمونه‌هایی از تابع‌های توزیع غیرقطعی منظم هستند. اگر حوزه مقادیر تابع توزیع غیرقطعی منظم $\varphi(x)$ روی مجموعه $(0,1)$ محدود کنیم در این صورت تابع توزیع غیرقطعی معکوس $\varphi^{-1}(\alpha)$ روی بازه $(0,1)$ وجود دارد. البته می‌توان دامنه $\varphi^{-1}(\alpha)$را به صورت زیر به $[0,1]$ گسترش داد.

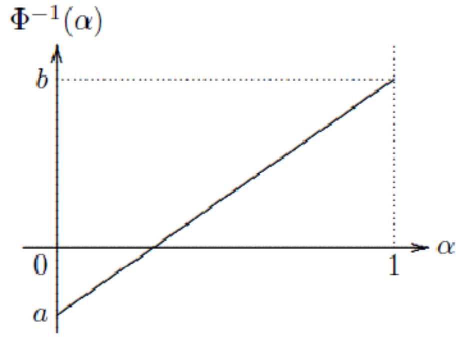
$$\varphi^{-1}(0)=\lim_{\alpha\downarrow 0}\varphi^{-1}(\alpha),\varphi^{-1}(1)=\lim_{\alpha\uparrow 1}\varphi^{-1}(\alpha).$$

تابع توزیع غیرقطعی معکوس خطی $L(a.b)$ به صورت $\varphi^{-1}(\alpha)=(1-\alpha)a+\alpha b$ است و تابع توزیع غیرقطعی معکوس زیگزاگ $Z(a.b.c)$ به صورت

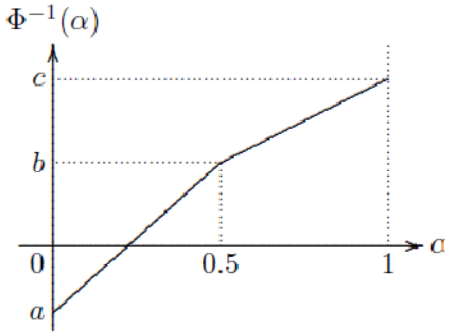
$$\varphi^{-1}(\alpha)=\begin{cases} (1-2\alpha)a+2\alpha b & if \quad \alpha<0/5 \\ (2-2\alpha)b+(2\alpha-1)c & if \quad \alpha\ge 0/5, \end{cases}$$

محاسبه می‌شود. هم‌چنین تابع توزیع غیرقطعی معکوس ثابت $\varphi^{-1}(\alpha)=c$ است. نمودار تابع‌های توزیع غیرقطعی معکوس خطی و زیگزاگ در شکل‌های ۳ و ۴ نشان داده شده‌اند.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2016.13.3.3.5]



شکل ۳. تابع توزیع غیرقطعی معکوس خطی



شکل ٤. تابع توزیع غیرقطعی معکوس زیگزاگ

متغیرهای غیرقطعی $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ را **مستقل** گویند هرگاه برای مجموعه‌های بورل $B_1, B_2, \ldots, B_n$ داشته باشیم

$$M\left\{\bigcap_{i=1}^{n} \xi_i \in B_i\right\} = \bigwedge_{i=1,\ldots,n} M\left\{\xi_i \in B_i\right\}.$$

متغیر غیرقطعی ξ را **نامنفی** گویند هر گاه $M\{\xi < 0\} = 0$ و **مثبت** گویند هرگاه $M\{\xi \geq 0\} = 1$. به طور مشابه متغیرهای غیرقطعی نامثبت و منفی نیز تعریف می‌شوند.

قضیه بعدی یکی از خاصیت‌های اساسی و پرکاربرد نظریه عدم قطعیت را بیان می‌کند.

قضیه ۱. (**قضیه ۱–۲** [۲۱]) فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ متغیرهای غیرقطعی هستند. علاوه بر این f را یک تابع اندازه‌پذیر حقیقی–مقدار در نظر بگیرید. در این صورت تابع $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ نیز یک متغیر غیرقطعی است.

در عمل هیچ روش مشخصی برای به دست آوردن تابع توزیع غیرقطعی برای یک متغیر غیرقطعی وجود ندارد. قضیه بعدی کمک می‌کند تا در شرایط خاص، بدون دانستن مستقیم تابع توزیع غیرقطعی، تابع توزیع غیرقطعی معکوس آن را به دست آوریم.

قضیه ۲. (**قضیه ۸–۲** [۲۱]) فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ متغیرهای غیرقطعی مستقل به ترتیب با توزیع‌های غیرقطعی منظم $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ هستند. اگر تابع f صعودی اکید باشد در این صورت متغیر $\xi = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ غیرقطعی با توزیع غیرقطعی معکوس

$$\Psi^{-1}(\alpha) = f\left(\varphi_1^{-1}(\alpha), \varphi_2^{-1}(\alpha), \ldots, \varphi_n^{-1}(\alpha)\right),$$

است.

نتیجه ۱. با فرض‌های قضیه۲، متغیر غیرقطعی $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$ تابع توزیع غیرقطعی معکوس

$$\Psi^{-1}(\alpha) = \varphi_1^{-1}(\alpha) + \varphi_2^{-1}(\alpha) + \cdots + \varphi_n^{-1}(\alpha),$$

را دارد.

یکی از مفهوم‌های اساسی و مهم نظریه عدم قطعیت، مفهوم امید ریاضی یک متغیر غیرقطعی است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$E[\xi]=\int_{0}^{+\infty}M\{\xi\geq x\}dx-\int_{-\infty}^{0}M\{\xi\leq x\}dx,$$

که در آن، باید حداقل یکی از انتگرال‌ها متناهی باشد. به راحتی ثابت می‌شود که امید ریاضی متغیر غیرقطعی خطی $L(a,b)$ عبارت است از $\frac{a+b}{۲}$ و امید ریاضی متغیر غیرقطعی زیگزاگ $Z(a,b,c)$ نیز به صورت $\frac{a+۲b+c}{۴}$ است.

قضیه بعدی روش محاسبه امید ریاضی غیرقطعی یک تابع خطی از متغیرهای غیرقطعی مستقل را بیان می‌کند.

قضیه ۳. (قضیه ۳۰-۲ از [۲۱]) فرض کنید ξ و η دو متغیر غیرقطعی مستقل با امید ریاضی غیرقطعی متناهی هستند. هم‌چنین فرض کنید a و b دو عدد حقیقی هستند. در این صورت

$$E[a\xi+b\eta]=aE[\xi]+bE[\eta].$$

۳ بهینه‌سازی غیرقطعی

بهینه‌سازی غیرقطعی را لیو[۲۳] برای مسایلی که در آن‌ها متغیرهای غیرقطعی نیز وجود دارند، ارایه کرد. x را متغیر تصمیم قطعی و ξ را متغیر تصمیم غیرقطعی در نظر بگیرید. لیو قالب عمومی برای بهینه‌سازی غیرقطعی را به صورت زیر ارایه داده است.

$$Min_x\{f(x,\xi):g_i(x,\xi)\leq ۰, i=۱,\ldots,m\}.$$

توجه داشته باشید که تغییرات متغیر غیرقطعی ξ مستقل از مقدار متغیر قطعی x است، با این حال مقدار تابع هدف $f(x,\xi)$ با تغییر مقادیر این دو متغیر؛ تغییر می‌کند. با توجه به وجود متغیر غیرقطعی در این تابع، مقدار مشخصی را نمی‌توان برای هر مقدار x محاسبه کرد، و بنابراین با روش‌های متداول نمی‌توان مقدار کمینه آن را مشخص کرد. یکی از جایگزین‌ها، استفاده از امید غیرقطعی تابع $f(x,\xi)$ در مدل است. توجه داشته باشید که امید ریاضی غیرقطعی این تابع، مستقل از متغیر غیرقطعی است و مقدار آن تنها به مقدار x وابسته است.

هم‌چنین محدودیت‌های $g_i(x,\xi)\leq ۰$ یک ناحیه شدنی خاصی را مشخص نمی‌کنند. بنابراین معقول است که به جای این محدودیت‌ها، از میزان باور این که برقراری محدودیت i-ام از عددی مانند α_i کم‌تر نباشد، استفاده کنیم که در آن α_iها عددی بین صفر و یک هستند. چنین قیدی را قید α- شانس می‌گویند. در این صورت یک مدل غیرقطعی برای مساله بهینه‌سازی غیرقطعی به صورت زیر است.

$$Min_x\{E[f(x,\xi)]:M\{g_i(x,\xi)\leq ۰\}\geq\alpha_i, i=۱,\ldots,m\}. \quad (۲)$$

لازم به یادآوری است که هر چه مقدار α_i به یک نزدیک‌تر باشد، باور به برقراری آن محدودیت بیشتر است. اگر مقدار آن را یک در نظر بگیریم آن‌گاه باور داریم که این قید در جواب نهایی این مساله برقرار است. قضیه بعد، تابع هدف غیرقطعی مساله (۲) را به یک تابع هدف قطعی تبدیل می‌کند.

قضیه ٤. (قضیه ۱-۳ [۲۱]) فرض کنید تابع $g(x,\xi_۱,\xi_۲,\ldots,\xi_n)$ نسبت به متغیرهای $\xi_۱,\xi_۲,\ldots,\xi_k$ صعودی اکید و نسبت به متغیرهای $\xi_{k+۱},\xi_{k+۲},\ldots,\xi_n$ نزولی اکید است. علاوه بر این، فرض کنید $\xi_۱,\xi_۲,\ldots,\xi_n$ متغیرهای غیرقطعی مستقل هستند که به ترتیب توزیع‌های غیرقطعی منظم $\varphi_۱,\varphi_۲,\ldots,\varphi_n$ را دارند. در این صورت

[DOR: 20.1001.1.22517286.2016.13.3.3.5]

امید ریاضی غیرقطعی تابع $f\left(x,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\right)$ برابر است با

$$E\left[f\left(x.\xi_1.\xi_2.\ldots.\xi_n\right)\right]=\int_0^1 f\left(x,\phi_1^{-1}(\alpha),\phi_2^{-1}(\alpha),\ldots,\phi_k^{-1}(\alpha),\phi_{k+1}^{-1}(1-\alpha),\ldots,\phi_n^{-1}(1-\alpha)\right)d\alpha\ .$$

قضیه بعد یک قید معادل برای $M\left\{g_i\left(x,\xi\right)\le 0\right\}\ge\alpha_i$ ارایه می‌دهد که یک ناحیه شدنی مشخص وابسته به مقدار α_i را توصیف می‌کند.

قضیه ۵. (**قضیه۲-۳** [۲۱]) فرض کنید تابع $g\left(x,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\right)$ نسبت به متغیرهای $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_k$ صعودی اکید و نسبت به متغیرهای $\xi_{k+1},\xi_{k+2},\ldots,\xi_n$ نزولی اکید است. علاوه بر این، فرض کنید $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ متغیرهای غیرقطعی مستقل هستند که به ترتیب توزیع‌های غیرقطعی منظم $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n$ را دارند. در این صورت نامساوی $M\left\{g\left(x.\xi\right)\le 0\right\}\ge\alpha$ برقرار است اگر و تنها اگر

$$g\left(x,\varphi_1^{-1}(\alpha),\ldots,\varphi_k^{-1}(\alpha),\varphi_{k+1}^{-1}(1-\alpha),\ldots,\varphi_n^{-1}(1-\alpha)\right)\le 0..$$

۳-۱ برنامه‌ریزی خطی غیر قطعی

در این بخش مساله برنامه‌ریزی خطی غیرقطعی، به عنوان حالت خاصی از بهینه‌سازی غیرقطعی، و مفاهیم مربوط به آن را تعریف می‌کنیم. ابتدا مساله برنامه‌ریزی خطی در شکل قطعی (۱) را در نظر بگیرید.

اگر پارامترهای این مساله را با متغیرهای غیرقطعی جایگزین کنیم مساله زیر تولید می‌شود.

$$Min_x\left\{\sum_{j=1}^{n}\zeta_j x_j:\sum_{j=1}^{n}\xi_{ij}x_j\le\beta_i, i=1,\ldots,m, x_j\ge 0, j=1,\ldots,n\right\}. \tag{۳}$$

که در آن ζ_j,ξ_{ij},β_i متغیرهای غیرقطعی مستقل با تابع‌های توزیع غیرقطعی منظم $\varphi_j,\phi_{ij},\psi_i$ و $j=1,\ldots,n$ و $i=1,\ldots,m$ بوده و x_j متغیرهای تصمیم‌گیری نامنفی مساله برای $j=1,\ldots,n$ هستند.

توجه داشته باشید که هر یک از پارامترهای مساله (۱) یک عدد حقیقی است و بنابراین با توجه به علامت آن، می‌توان نشان داد که تابع هدف و یا قیدهای مساله نسبت به آن متغیر صعودی یا نزولی است. به عنوان مثال، فرض کنید $c_1=4$. هرگاه به جای آن، متغیر غیرقطعی $\zeta_1=L\left(2,6\right)$ را جایگزین کنیم آن‌گاه تابع هدف مساله نسبت به این متغیر غیرقطعی صعودی خواهد بود. به طور مشابه اگر $c_1=-4$ با متغیر غیرقطعی $\zeta_2=L\left(-6,-2\right)$ جایگزین شود، آن‌گاه تابع هدف نسبت به این متغیر غیرقطعی نزولی است. البته ممکن است تابع نسبت به یک متغیر یکنوا نباشد. به عنوان مثال فرض کنید $c_1=4$ با متغیر غیرقطعی $\zeta_3=L\left(-2,6\right)$ جایگزین شود. در این صورت تابع هدف نسبت به این متغیر غیرقطعی نه صعودی اکید است و نه نزولی اکید. توسعه نظریه برنامه‌ریزی غیرخطی در چنین حالتی بسیار دشوار بوده و هنوز نظریه عدم‌قطعیت در این خصوص نتایج قابل ملاحظه‌ای ندارد. علاوه بر این، چنین حالتی در مساله‌های عملی و کاربردی به ندرت مشاهده می‌شود. بنابراین، فرض اساسی ما در این مقاله این است که چنین حالتی برای متغیرهای غیرقطعی اتفاق نمی‌افتد.

در ادامه فرض‌های زیر را در باره متغیرهای غیرقطعی در نظر می‌گیریم.

فرض ۱. تمامی متغیرهای غیرقطعی مستقل و منظم هستند.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2016.13.3.3.5]

فرض ۲ . مجموعه اندیس $J=\{1,\ldots,n\}$ به دو زیرمجموعه زیر افراز می‌شود.

$J^{+}=\{j:\}$ و ζ_j یک متغیر غیرقطعی نامنفی است $J^{-}=\{j:\}$. ζ_j یک متغیر غیرقطعی منفی است

فرض ۳ . مجموعه اندیس $I=\{1,\ldots,m\}$ به دو زیرمجموعه زیر افراز می‌شود.

$I^{+}=\{i:\}$ و β_i یک متغیر غیرقطعی نامنفی است $I^{-}=\{i:\}$. β_i یک متغیر غیرقطعی منفی است

فرض ٤ . برای هر اندیس i دو مجموعه اندیس زیر تعریف می‌شوند.

$J_i^{+}=\{j:\}$ و ξ_{ij} یک متغیر غیرقطعی نامنفی است $J_i^{-}=\{j:\}$. ξ_{ij} یک متغیر غیرقطعی منفی است

حال دو مدل متفاوت غیرقطعی متناظر با مساله (۳) تعریف کرده و ارتباط بین این دو مدل را بررسی می‌کنیم.

۳-۲ مدل غیرقطعی نوع اول

در مدل غیرقطعی نوع اول، به جای تابع هدف غیرقطعی که امکان کمینه‌سازی مستقیم آن وجود ندارد، امید ریاضی غیرقطعی آن را قرار می‌دهیم. این مدل حالت خاصی از شکل عمومی مساله بهینه‌سازی غیرقطعی معرفی شده توسط لیو است.

$$Min_x \left\{ E[\sum_{j=1}^{n}\xi_j x_j] : \sum_{j=1}^{n} M\left\{\xi_{ij}x_j \le \beta_i\right\} \ge \alpha_i, i=1,\ldots,m, x_j \ge 0, j=1,\ldots,n \right\}. \qquad (۴)$$

قضیه بعدی حالت خاصی از قضیه۳-۳ از [۲۱] است که در آن تابع هدف و قیدهای مساله خطی هستند و شکل معادل قطعی متناظر با مساله (۴) را بیان می‌کند.

قضیه ٦. با برقراری فرض‌های ۱ و ۳و ۴ ؛ فرض کنید تابع‌های توزیع متغیرهای غیرقطعی $\xi_{i.j}, \zeta_j$ و β_i به ترتیب عبارتند از φ_j, ϕ_{ij} و ψ_i. در این صورت مساله(۴) با مساله زیر معادل است.

$$
\begin{aligned}
& Min_x \quad \sum_{j\in J} (\int_0^1 \varphi_j^{-1}(\alpha)d\alpha) x_j \\
& s.t. \\
& \quad \sum_{j\in J_i^+} \phi_{ij}^{-1}(\alpha_i)x_j + \sum_{j\in J_i^+} \phi_{ij}^{-1}(1-\alpha_i)x_j \le \psi_i^{-1}(1-\alpha_i), \qquad \forall i \in I^+, \qquad (۵)\\
& \quad \sum_{j\in J_i^+} \phi_{ij}^{-1}(\alpha_i)x_j + \sum_{j\in J_i^+} \phi_{ij}^{-1}(1-\alpha_i)x_j \le \psi_i^{-1}(\alpha_i), \qquad \forall i \in I^-, \\
& \quad x_j \ge 0, \quad \forall j=1,\ldots,n.
\end{aligned}
$$

اثبات: بنا بر قضیه۲۹-۲ از [۲۱]

$$E\left[\xi_j\right] = \int_0^1 \varphi^{-1}(\alpha)\,d\alpha.$$

هم‌چنین تعمیمی از قضیه ۳ نشان می‌دهد که

$$E\left[\sum_{j=1}^{n}\zeta_j x_j\right] = \sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1 \varphi_j^{-1}(\alpha)\,d\alpha\right)x_j.$$

علاوه بر این، تابع $g_i(x,\xi)$ برای هر $i\in I^+$ به صورت زیر است

[DOR: 20.1001.1.22517286.2016.13.3.3.5]

$$g_i(x,\xi)=\sum_{j=1}^{n}\xi_{ij}x_{ij}-\beta_i=\sum_{j\in J_i^+}\xi_{ij}x_{ij}+\sum_{j\in J_i^-}\xi_{ij}x_{ij}-\beta_i\le 0.$$

بنابر فرض‌های قضیه و بر اساس قضیه ۵، نامساوی $M\{g_i(x.\xi)\le 0\}\ge\alpha_i$ با رابطه زیر معادل است.

$$\sum_{j\in J_i^+}\phi_{ij}^{-1}(\alpha_i)x_j+\sum_{j\in J_i^-}\phi_{ij}^{-1}(1-\alpha_i)x_j\le\psi_i^{-1}(1-\alpha_i)..$$

به طور مشابه، برای $i\in I^-$، نشان داده می‌شود که $M\{g_i(x.\xi)\le 0\}\ge\alpha_i$ با رابطه

$$\sum_{j\in J_i^+}\phi_{ij}^{-1}(\alpha_i)x_j+\sum_{j\in J_i^-}\phi_{ij}^{-1}(1-\alpha_i)x_j\le\psi_i^{-1}(\alpha_i).$$

معادل است. به این ترتیب برهان قضیه کامل می‌شود.

۳-۳ مدل غیرقطعی نوع دوم

گرچه ممکن است مدل غیرقطعی نوع اول به عنوان یک جایگزین مناسب مساله برنامه ریزی‌خطی غیرقطعی تلقی شود و در برخی موارد مناسب باشد، ولی در حالت کلی یک رویکرد خام است. در این مدل، تمام دیدگاه‌های یک متخصص درباره یک متغیر غیرقطعی، در توزیع غیرقطعی تک نقطه‌ای (توزیع غیرقطعی ثابت) خلاصه می‌شود. به عبارت دیگر، استفاده از امید ریاضی غیرقطعی یک نمایش ضعیف از عدم قطعیت موجود در داده‌ها است و عملا نمی‌توان آن را «یک دیدگاه غیرقطعی واقعی» دانست، و ممکن است تصمیم‌های اتخاذ شده با این مدل به نتایج مخاطره آمیز منجر شود. در حالی که انتظار می‌رود استفاده از عدم قطعیت ضرایب در تابع هدف به عنوان قید در مساله، ساختار بهتری برای توصیف مساله غیرقطعی اصلی تولید کند. هم چنان که در موارد مشابه در برنامه‌ریزی تصادفی، مثلا در مساله بهینه‌سازی پرتفوی مالی [۲۴] ثابت شده است که چنین رویکری هماهنگی بیشتری با واقعیت دارد [۲۵].

بر اساس آنچه بیان شد، در ادامه مدل غیرقطعی نوع دوم تعریف می‌شود. در این مدل به جای آن‌که تابع هدف با امید ریاضی غیرقطعی آن جایگزین شود، کران بالایی برای آن در نظر گرفته می‌شود (مثلا t) و کم‌ترین مقدار این کران را چنان تعیین می‌کنیم که میزان باور بر کرانداری تابع هدف به این مقدار، حداقل از یک مقدار از پیش تعیین شده α کم‌تر نباشد. این مدل به صورت زیر است.

$$Min_x\left\{t\,|\,M\left\{\sum_{j=1}^{n}\zeta_jx_j\le t\right\}\ge\alpha, M\left\{\sum_{j=1}^{n}\xi_{ij}x_j\le\beta_i\right\}\ge\alpha_i, i=1,\ldots,m, x_j\ge 0, j=1,\ldots,n\right\}. \qquad (۶)$$

قضیه بعدی شکل معادل قطعی با مدل (۶) را ارایه می‌کند.

قضیه ۷. با فرض‌های ۱-۴ مساله (۶) با مساله زیر معادل است.

$$
\begin{aligned}
&Min_x \quad t\\
&s.t.\\
&\qquad \sum_{j\in J^+}\varphi_j^{-1}(\alpha)x_j+\sum_{j\in J^-}\varphi_j^{-1}(1-\alpha)x_j\le t,\\
&\qquad \sum_{j\in J_i^+}\phi_{ij}^{-1}(\alpha_i)x_j+\sum_{j\in J_i^+}\phi_{ij}^{-1}(1-\alpha_i)x_j\le \psi_i^{-1}(1-\alpha_i), \qquad \forall i\in I^+,\\
&\qquad \sum_{j\in J_i^+}\phi_{ij}^{-1}(\alpha_i)x_j+\sum_{j\in J_i^+}\phi_{ij}^{-1}(1-\alpha_i)x_j\le \psi_i^{-1}(\alpha_i), \qquad \forall i\in I^-,\\
&\qquad x_j\ge 0, \quad j=1,\dots,n.
\end{aligned} \tag{7}
$$

اثبات. توجه کنید که تابع هدف مدل (۷)، متغیر غیرقطعی ندارد. سه سری قید در این مدل وجود دارند. قیدهای سری دوم و سوم دقیقاً قیدهای موجود در مساله (۵) هستند و بنابراین با استدلالی مشابه، هم‌ارزی آن‌ها ثابت می‌شود. اثبات هم‌ارزی قید اول نیز مشابه است و از بیان جزییات آن صرف نظر می‌شود.

نکته مهم دیگر، شکل معادل مساله (۷) در بهینگی است. اگر این مساله جواب شدنی بهینه داشته باشد آن‌گاه قید اول مساله در بهینگی فعال خواهد بود. بنابر این می‌توان مساله معادلی ساخت که در صورت وجود ، جواب بهینه و مقدار جواب بهینه آن‌ها با هم برابر باشند. این موضوع در قضیه بعدی بیان شده است. علیرغم بدیهی بودن، این قضیه یک نتیجه مهم را بیان می‌کند.

قضیه ۸. مساله برنامه‌ریزی خطی غیرقطعی زیر را در نظر بگیرید.

$$
\begin{aligned}
&Min_x \quad \sum_{j\in J^+}\varphi_j^{-1}(\alpha)x_j+\sum_{j\in J^-}\varphi_j^{-1}(1-\alpha)x_j\\
&s.t.\\
&\qquad \sum_{j\in J_i^+}\phi_{ij}^{-1}(\alpha_i)x_j+\sum_{j\in J_i^+}\phi_{ij}^{-1}(1-\alpha_i)x_j\le \psi_i^{-1}(1-\alpha_i), \qquad \forall i\in I^+,\\
&\qquad \sum_{j\in J_i^+}\phi_{ij}^{-1}(\alpha_i)x_j+\sum_{j\in J_i^+}\phi_{ij}^{-1}(1-\alpha_i)x_j\le \psi_i^{-1}(\alpha_i), \qquad \forall i\in I^-,\\
&\qquad x_j\ge 0, \quad j=1,\dots,n.
\end{aligned} \tag{8}
$$

مساله‌های برنامه‌ریزی خطی(۷) و (۸) (در صورت وجود) جواب‌های بهینه یکسان دارند.

یادآوری این نکته مهم است که مدل غیرقطعی نوع دوم برای مساله برنامه‌ریزی خطی با تابع هدف کمینه‌سازی طراحی شده است. در صورتی که تابع هدف مساله بیشینه‌سازی باشد، تابع هدف مساله برنامه‌ریزی خطی قطعی متفاوت خواهد بود. قضیه بعدی تابع هدف مساله برنامه‌ریزی خطی قطعی متناظر را بیان می‌کند.

قضیه ۹ . مساله برنامه‌ریزی خطی غیرقطعی زیر را در نظر بگیرید.

$$
Max_x\left\{\sum_{j=1}^{n}\zeta_j x_j : \sum_{j=1}^{n}\xi_{ij}x_j\le \beta_i, i=1,\dots,m, x_j\ge 0, j=1,\dots,n\right\}. \tag{9}
$$

مدل غیرقطعی نوع دوم متناظر با مساله (۹) عبارت است از:

$$\begin{aligned}
&Min_x \quad \sum_{j\in J^+}\varphi_j^{-1}(1-\alpha)x_j+\sum_{j\in J^-}\varphi_j^{-1}(\alpha)x_j\\
&s.t.\\
&\qquad \sum_{j\in J_i^+}\phi_{ij}^{-1}(\alpha_i)x_j+\sum_{j\in J_i^+}\phi_{ij}^{-1}(1-\alpha_i)x_j\le \psi_i^{-1}(1-\alpha_i), \qquad \forall i\in I^+,\\
&\qquad \sum_{j\in J_i^+}\phi_{ij}^{-1}(\alpha_i)x_j+\sum_{j\in J_i^+}\phi_{ij}^{-1}(1-\alpha_i)x_j\le \psi_i^{-1}(\alpha_i), \qquad \forall i\in I^-,\\
&\qquad x_j\ge 0, \quad j=1,\dots,n.
\end{aligned} \tag{10}$$

اثبات. همانند مدل (۷)، هنگام طراحی مدل غیر قطعی نوع دوم برای مساله (۹)، تابع هدف مساله به صورت بیشینه‌سازی t است در حالی که قید زیر جایگزین قید اول در مدل (۷) می‌شود.

$$M\left\{\sum_{j=1}^{n}\zeta_j x_j\ge t\right\}\ge\alpha.$$

بنابر اصل موضوعه ۲، قید بالا با نامساوی زیر معادل است

$$M\left\{\sum_{j=1}^{n}\zeta_j x_j\le t\right\}\ge 1-\alpha.$$

با برهانی مشابه قضیه‌های ۶ و ۷، حکم نتیجه می‌شود.

در ادامه، برای راحتی فرض کنید تمامی مقادیر باور با هم برابر هستند یعنی. $\alpha=\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_m$ توجه داشته باشید که برای هر مقدار $\alpha\in(0,1)$ ممکن است مساله‌های (۵) و (۷) جواب شدنی و یا جواب بهینه نداشته باشند. در ادامه، دو مفهوم جواب شدنی و جواب بهینه را در محیط غیرقطعی تعریف می‌کنیم. تعریف‌های مشابه را می‌توان برای حالت کلی مقادیر متمایز مقدار باور در هر قید نیز بیان کرد. این تعریف‌ها برای اولین بار در مساله برنامه‌ریزی خطی غیرقطعی به صورت زیر ارایه می‌شوند.

تعریف ۱. اگر مساله (۵) برای مقداری از $\alpha\in(0,1)$ جواب شدنی داشته باشد آن‌گاه گوییم مساله (۳) α-شدنی غیرقطعی نوع اول است و جواب متناظر را α-شدنی غیرقطعی نوع اول می‌نامیم. هرگاه این مساله جواب بهینه نیز داشته باشد آن جواب را α- بهینه غیرقطعی نوع اول مساله (۳) می‌نامیم. اگر این جواب، پایه نیز باشد آن را α-جواب شدنی (α-جواب بهینه) پایه غیرقطعی نوع اول می‌نامیم.

تعریف ۲. اگر مساله (۷) برای مقداری از $\alpha\in(0,1)$ جواب شدنی داشته باشد آن‌گاه گوییم مساله (۳) α-شدنی غیرقطعی نوع دوم است و جواب متناظر را α-شدنی غیرقطعی نوع دوم می‌نامیم. هرگاه این مساله جواب بهینه نیز داشته باشد آن جواب را α- بهینه غیرقطعی نوع دوم مساله (۳) می‌نامیم. اگر این جواب پایه نیز باشد آن را α-جواب شدنی (α-جواب بهینه) پایه غیرقطعی نوع دوم می‌نامیم.

توجه داشته باشید که ناحیه شدنی مساله (۷) زیرمجموعه ناحیه شدنی مساله(۸) است. در حالی که ناحیه‌های شدنی دو مساله (۵) و (۸) یکسان هستند. اگر مساله (۷) برای یک $\alpha\in(0,1)$ جواب شدنی داشته باشد آن‌گاه مساله (۵) (و در نتیجه مساله (۸)) نیز به ازای همان مقدار α، جواب شدنی دارد. قضیه بعدی این واقعیت را مطرح می‌کند.

قضیه ۱۰. مساله برنامه‌ریزی خطی غیرقطعی (۳)، α-شدنی غیرقطعی نوع دوم است اگر و فقط اگر α-شدنی

[DOR: 20.1001.1.22517286.2016.13.3.5]

غیرقطعی نوع اول باشد.

واضح است که شدنی بودن یک مساله برنامه‌ریزی خطی برای وجود جواب بهینه کافی نیست. در بخش بعدی شرط وجود جواب بهینه را از دیدگاه دوگانی غیرقطعی بررسی می‌کنیم.

٤ استفاده از نظریه دوگانی غیرقطعی برای بررسی ارتباط بین دو مدل غیرقطعی

یادآوری این نکته لازم است که متناظر با هر مساله برنامه‌ریزی خطی، مساله دوگان نیز تعریف می‌شود و با استفاده از دوگان یک مساله، وجود جواب بهینه و یا بیکرانی مساله اولیه بررسی می‌شود. در این بخش نظریه دوگانی را در محیط غیرقطعی بیان شده و ارتباط بین جواب‌های بهینه دو مدل برنامه‌ریزی خطی غیرقطعی را با استفاده از خواص دوگانی بررسی می‌کنیم.

به سادگی می‌توان تحقیق کرد که دوگان مساله (۵) به صورت زیر است.

$$
\begin{aligned}
&Max_{y,s} \quad \sum_{i\in I^+}\psi_i^{-1}(1-\alpha_i)y_i+\sum_{i\in I^-}\psi_i^{-1}(\alpha_i)y_i\\
&s.t.\\
&\qquad \sum_{i:j\in I^+}\phi_{ij}^{-1}(\alpha_i)y_i+\sum_{i:j\in I^-}\phi_{ij}^{-1}(1-\alpha_i)y_i+s_j=\int_0^1\varphi_j^{-1}(\alpha_i)d\alpha, \qquad \forall j\in J,\\
&\qquad x_j\ge 0, \quad j=1,\dots,n,\\
&\qquad y_i\le 0, \quad i=1,\dots,m.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

در این مساله، y_i متغیر دوگان متناظر با قید i ام مساله (۵) است. علاوه بر این، نماد $i:j\in J_i^+$ به این معنی است که عملوند جمع روی آن اندیس i است که j در مجموعه J_i^+ قرار دارد. تعبیر مشابهی نیز برای $i:j\in J_i^-$ وجود دارد. به طور مشابه می‌توان نشان داد که دوگان مساله برنامه‌ریزی خطی (۷) عبارت است از:

$$
\begin{aligned}
&Max_{y,s} \quad \sum_{i\in I^+}\psi_i^{-1}(1-\alpha_i)y_i+\sum_{i\in I^-}\psi_i^{-1}(\alpha_i)y_i\\
&s.t.\\
&\qquad \sum_{i:j\in I^+}\phi_{ij}^{-1}(\alpha_i)y_i+\sum_{i:j\in I^-}\phi_{ij}^{-1}(1-\alpha_i)y_i+\varphi_j^{-1}(\alpha_i)y_0+s_j=0, \qquad \forall j\in J^+,\\
&\qquad \sum_{i:j\in I^+}\phi_{ij}^{-1}(\alpha_i)y_i+\sum_{i:j\in I^-}\phi_{ij}^{-1}(1-\alpha_i)y_i+\varphi_j^{-1}(1-\alpha_i)y_0+s_j=0, \qquad \forall j\in J^-,\\
&\qquad -1\le y_0\le 0, s_j\ge 0 \quad j=1,\dots,n.\\
&\qquad y_i\le 0, \qquad i=1,\dots,m.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

در این مساله؛ علاوه بر متغیرهای دوگان y_i برای $i\in I$ ، متغیر دوگان y_0 متناظر با قید اول مساله (۷) تعریف شده است. به راحتی مشاهده می‌شود که $s=0, y_0=0, y=0$ یک جواب شدنی برای مساله (۱۲) است. بنابراین نتیجه زیر برای مدل غیرقطعی نوع دوم به دست می‌آید.

قضیه ۱۱. مساله برنامه‌ریزی خطی (۷) جواب بهینه دارد اگر و فقط اگر α-شدنی باشد.

قضیه‌های ۱۰ و ۱۱ به نتیجه مهم زیر منجر می‌شوند.

نتیجه ۲. مدل‌های غیرقطعی نوع اول و دوم جواب بهینه دارند اگر و فقط اگر برای α داده شده، شدنی باشند.
توجه داشته باشید که دوگان مساله (۸) به صورت زیر است.

$$\begin{aligned}
&Max_{y,s} \quad \sum_{i\in I^+}\psi_i^{-1}(1-\alpha_i)y_i+\sum_{i\in I^-}\psi_i^{-1}(\alpha_i)y_i\\
&s.t.\\
&\qquad \sum_{i:j\in I^+}\phi_{ij}^{-1}(\alpha_i)y_i+\sum_{i:j\in I^-}\phi_{ij}^{-1}(1-\alpha_i)y_i+s_j=\varphi_j^{-1}(\alpha_i), \qquad \forall j\in J^+,\\
&\qquad \sum_{i:j\in I^+}\phi_{ij}^{-1}(\alpha_i)y_i+\sum_{i:j\in I^-}\phi_{ij}^{-1}(1-\alpha_i)y_i+s_j=\varphi_j^{-1}(1-\alpha_i), \qquad \forall j\in J^-,\\
&\qquad s_j\ge 0, \quad j=1,\dots,n,\\
&\qquad y_i\le 0, \quad i=1,\dots,m.
\end{aligned} \tag{۱۳}$$

به راحتی می‌توان نشان داد که برای متغیر غیرقطعی ξ با تابع توزیع غیرقطعی معکوس (خطی یا زیگزاگ) $\varphi_j^{-1}(\alpha)$، وقتی $\alpha \le ۰/۵$ نامساوی‌های $\varphi_j^{-1}(\alpha)\le E(\xi)$ و $\varphi_j^{-1}(1-\alpha)\ge E(\xi)$ برقرار هستند. هم‌چنین برای $\alpha \ge ۰/۵$ ، داریم $\varphi_j^{-1}(\alpha)\ge E(\xi)$ و $\varphi_j^{-1}(1-\alpha)\le E(\xi)$. بنابراین، علیرغم این که ناحیه شدنی دو مساله (۵) و (۸) یکسان هستند، برای مقادیر مختلف α ارتباط مشخصی بین مقدار تابع هدف بهینه این دو مساله وجود ندارد. با این حال برای $\alpha=۰/۵$ نتیجه زیر برقرار است.

نتیجه ۳ . برای $\alpha=۰/۵$ دو مدل غیرقطعی برنامه‌ریزی خطی (در صورت وجود) جواب بهینه یکسان دارند.
خاصیت‌های دوگان ضعیف و قوی دو مدل برنامه‌ریزی خطی غیرقطعی برای هر $\alpha\in(0,1)$ به صورت زیر بیان می‌شود و اثبات آن‌ها مشابه شکل عمومی این قضیه‌ها در حالت عمومی است و از بیان برهان آن‌ها خودداری می‌کنیم.

قضیه ۱۲. (دوگانی غیرقطعی نوع اول) برای هر $\alpha\in(0,1)$، فرض کنید $x(\alpha)$ یک جواب شدنی مساله (۵) و $(y(\alpha),s(\alpha))$ یک جواب شدنی مساله (۱۱) است. در این صورت رابطه زیر برقرار است

$$\sum_{i\in I^+}\psi_i^{-1}(1-\alpha)y_i(\alpha)+\sum_{i\in I^-}\psi_i^{-1}(\alpha)y_i(\alpha)\le\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1\varphi_j^{-1}(\alpha)\,d\alpha\right)x_j(\alpha).$$

تساوی زمانی برقرار است که این دو جواب شدنی، بهینه نیز باشند.

قضیه ۱۳. (دوگانی غیرقطعی نوع دوم) برای هر $\alpha\in(0,1)$، فرض کنید $x(\alpha)$ یک جواب شدنی مساله (۷) و $(y(\alpha),s(\alpha))$ یک جواب شدنی مساله(۱۲) است. در این صورت رابطه زیر برقرار است

$$\sum_{i\in I^+}\psi_i^{-1}(1-\alpha)y_i(\alpha)+\sum_{i\in I^-}\psi_i^{-1}(\alpha)y_i(\alpha)\le\sum_{j\in J^+}\varphi_j^{-1}(\alpha)x_j(\alpha)+\sum_{j\in J^-}\varphi_j^{-1}(1-\alpha)x_j(\alpha).$$

تساوی زمانی برقرار است که این دو جواب شدنی، بهینه نیز باشند.

قضیه مکمل لنگی را نیز می‌توان برای هر دو مدل بیان کرد و با توجه به تشابه با شکل عمومی آن، از بیان جزییات خودداری می‌کنیم.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2016.13.3.3.5]

۵ مثال‌های توصیفی

در این بخش، نتایج تحلیلی به دست آمده در بخش‌های قبلی را با دو مثال ساده توصیف می‌کنیم. نتایج عددی به دست آمده در هر دو مدل را می‌توان با نتایج حاصل از دیدگاه‌های خوشبینانه و بدبینانه مقایسه کرد. ابتدا حالتی را در نظر بگیرید که متغیر غیرقطعی مورد نظر نامنفی است. به عنوان مثال اگر مساله مورد نظر بیشینه سازی سود حاصل از تولید چند محصول باشد و نظر متخصص بر این باشد که سود حاصل از تولید یکی از محصولات در بازار یک متغیر غیرقطعی با توزیع غیرقطعی خطی $L(۴,۸)$ است؛ در خوشبینانه‌ترین دیدگاه، ضریب متغیر مورد نظر در تابع هدف را عدد ۸ و در بدبینانه‌ترین دیدگاه عدد ۴ در نظر می‌گیریم. در حالی که امید ریاضی غیرقطعی برای این متغیر غیرقطعی مقدار ۶ را در نظر می‌گیرد (مدل غیر قطعی نوع اول). به طور مشابه، اگر نظر متخصص در مورد مقدار در دسترس یکی از منابع مربوط به نهاده‌های تولید (مقادیر سمت راست قیدها) یک متغیر غیرقطعی با توزیع غیرقطعی زیگزاگ $Z(۱,۲,۵)$ باشد، در خوشبینانه‌ترین دیدگاه مقدار منبع مورد نظر را ۵ و در بدبینانه‌ترین دیدگاه آن را ۱ در نظر می‌گیریم در حالی که امیدریاضی غیرقطعی، مقدار موجودی آن منبع را $\frac{۵}{۲}$ در نظر می‌گیرد. به طور متناظر، اگر متغیر غیرقطعی مورد نظر مربوط به میزان منبع استفاده شده در تولید یک واحد از محصول باشد (ضریب یکی از متغیرهای تصمیم در سمت راست یکی از قیدها) و به صورت متغیر غیرقطعی خطی $L(۶,۹)$ بیان شود، در خوشبینانه‌ترین دیدگاه مقدار ضریب مورد نظر را در مساله ۶ و در بدبینانه‌ترین حالت ۹ در نظر می‌گیریم.

در صورتی که متغیر غیرقطعی مورد نظر منفی باشد، مقادیر در نظر گرفته شده برای دیدگاه‌های خوشبینانه و بدبینانه دقیقا بر عکس حالت متغیر غیرقطعی مثبت خواهد بود. به عنوان مثال، اگر ضریب یکی از متغیرهای تصمیم در تابع هدف، یک متغیر غیرقطعی زیگزاگ با تابع توزیع $Z\left(-۴,-\frac{۷}{۲},-۳\right)$ باشد، در خوشبینانه‌ترین دیدگاه مقدار آن را -۴ و در بدبینانه‌ترین دیدگاه -۳ در نظر می‌گیریم، در حالی که در مدل غیرقطعی نوع اول، امیدریاضی غیرقطعی آن؛ $-\frac{۷}{۲}$ جایگزین می‌شود.

مثال ۱. مساله برنامه‌ریزی خطی غیرقطعی زیر را در نظر بگیرید.

$$
\begin{aligned}
&Min \quad \zeta_۱ x_۱ + \zeta_۲ x_۲ + \zeta_۳ x_۳ \\
&s.t. \\
&\qquad \xi_{۱۱} x_۱ + \xi_{۱۲} x_۲ + \xi_{۱۳} x_۳ \le \beta_۱, \\
&\qquad \xi_{۲۱} x_۱ + \xi_{۲۲} x_۲ + \xi_{۲۳} x_۳ \le \beta_۲, \\
&\qquad \xi_{۳۱} x_۱ + \xi_{۳۲} x_۲ + \xi_{۳۳} x_۳ \le \beta_۳, \\
&\qquad x_۱, x_۲, x_۳ \ge ۰.
\end{aligned}
\tag{۱۴}
$$

در این مساله یک بار تمامی متغیرهای غیرقطعی را خطی و یک بار نیز آن‌ها را متغیرهای غیرقطعی زیگزاگ در نظر می‌گیریم. اطلاعات متغیرهای غیرقطعی در جدول‌های ۱ و ۲ آمده است. علیرغم آن که نوع متغیرها متفاوت

[DOR: 20.1001.1.22517286.2016.13.3.3.5]

است ولی بازه نهایی از دیدگاه متخصص در هر دو نوع متغیر غیرقطعی یکسان است. به عنوان مثال، متغیر غیرقطعی خطی $\zeta_1 = L(1,5)$ با متغیر غیرقطعی زیگزاگ $\zeta_1 = Z(1,2,5)$ جایگزین شده است و به این معنی است که در متغیر غیرقطعی زیگزاگ، اطلاعات فراهم شده توسط متخصص تنها به ابتدا و انتهای بازه محدود نمی‌شود و اطلاعاتی برای داده‌های داخل بازه هم فراهم شده است. امید ریاضی متغیرهای غیرقطعی ضرایب تابع هدف نیز در جدول ۳ آمده است. نتایج مربوط به مدل‌های غیرقطعی نوع اول و دوم برای مقادیر متفاوت مقدار α در جدول‌های ۴ تا ۷ آمده است. مقدار α در تمامی مساله‌ها به طور گسسته با فاصله ۰/۱ در بازه $[0,1]$ انتخاب شده‌اند

جدول ۱. متغیرهای غیرقطعی خطی مثال ۱

$\zeta_1 = L(1,5)$	$\zeta_2 = L(-4,-3)$	$\zeta_3 = L(3,8)$
$\xi_{11} = L(5,7)$	$\xi_{12} = L(6,9)$	$\xi_{13} = L(7,8)$
$\xi_{21} = L(-20,-16)$	$\xi_{22} = L(5,8)$	$\xi_{23} = L(2,5)$
$\xi_{31} = L(4,7)$	$\xi_{32} = L(5,6)$	$\xi_{33} = L(12,14)$
$\beta_1 = L(4,6)$	$\beta_2 = L(-5,-2)$	$\beta_3 = L(0,3)$

جدول ۲. متغیرهای غیرقطعی زیگزاگ مثال ۱

$\zeta_1 = Z(1,2,5)$	$\zeta_2 = Z\left(-4,-\frac{7}{2},-3\right)$	$\zeta_3 = Z(3,5,8)$
$\xi_{11} = Z\left(5,\frac{13}{2},7\right)$	$\xi_{12} = Z(6,7,9)$	$\xi_{13} = Z\left(7,\frac{29}{4},8\right)$
$\xi_{21} = Z(-20,-19,-16)$	$\xi_{22} = Z(5,7,8)$	$\xi_{23} = Z(2,3,5)$
$\xi_{31} = Z\left(4,\frac{13}{2},7\right)$	$\xi_{32} = Z\left(5,\frac{23}{4},6\right)$	$\xi_{33} = Z\left(12,\frac{51}{4},14\right)$
$\beta_1 = Z\left(4,\frac{9}{2},6\right)$	$\beta_2 = Z(-5,-4,-2)$	$\beta_3 = Z(0,1,3)$

[DOR: 20.1001.1.22517286.2016.13.3.5]

جدول ۳. امید ریاضی غیر قطعی ضرایب تابع هدف مثال ۱.

متغیر غیرقطعی	$\zeta_۱ = L(۱,۵)$	$\zeta_۲ = L(-۴,-۳)$	$\zeta_۳ = L(۳,۸)$	$\zeta_۱ = Z(۱,۲,۵)$	$\zeta_۲ = Z\left(-۴,-\frac{۷}{۲},-۳\right)$	$\zeta_۳ = Z(۳,۵,۸)$
امید ریاضی غیرقطعی	۳	-۳/۵	۵/۵	۲/۵	-۳/۵	۵/۲۵

جدول ٤ . نتایج محاسبات برای برنامه‌ریزی خطی غیرقطعی نوع اول با متغیرهای غیرقطعی خطی در مثال ۱.

α	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۱
مقدار تابع هدف	۰/۲۲۰۰	۰/۲۸۷۵	۰/۳۴۱۹	۰/۳۸۵۲	۰/۴۱۸۹	۰/۴۴۴۳	۰/۴۶۲۷	مساله نشدنی است			
مقدار متغیرهای تصمیم	۰/۴۰۰۰	۰/۳۵۹۷	۰/۳۲۱۱	۰/۲۸۴۲	۰/۲۴۸۹	۰/۲۱۵۲	۰/۱۸۳۰				
	۰/۲۸۰۰	۰/۲۲۶۲	۰/۱۷۷۵	۰/۱۳۳۵	۰/۰۹۳۷	۰/۰۵۷۵	۰/۰۲۴۷				
	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰				

جدول ۵ . نتایج محاسبات برای برنامه‌ریزی خطی غیرقطعی نوع دوم با متغیرهای غیرقطعی خطی در مثال ۱.

α	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۱
مقدار تابع هدف	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۹۹	۰/۱۸۴۶	۰/۳۲۸۷	۰/۴۴۴۳	۰/۵۳۳۴	مساله نشدنی است			
مقدار متغیرهای تصمیم	۰/۳۷۲۲	۰/۳۵۱۴	۰/۳۲۱۱	۰/۲۸۴۲	۰/۲۴۸۹	۰/۲۱۵۲	۰/۱۸۳۰				
	۰/۱۶۸۱	۰/۱۸۱۱	۰/۱۷۷۵	۰/۱۳۳۵	۰/۰۹۳۷	۰/۰۵۷۵	۰/۰۲۴۷				
	۰/۰۰۶۵	۰/۰۰۲۹	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰				

جدول ٦. نتایج محاسبات برای برنامه‌ریزی خطی غیرقطعی نوع اول با متغیرهای غیرقطعی زیگزاگ در مثال ۱.

α	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۱
مقدار تابع هدف	۰/۲۸۶۴	۰/۳۹۵۸	۰/۴۸۷۰	۰/۵۵۵۲	مساله نشدنی است						
مقدار متغیرهای تصمیم	۰/۳۱۸۲	۰/۲۹۱۸	۰/۲۶۶۰	۰/۲۴۱۱							
	۰/۱۴۵۵	۰/۰۹۴۶	۰/۰۵۰۹	۰/۰۱۳۶							
	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰							

جدول ۷. نتایج محاسبات برای برنامه‌ریزی خطی غیرقطعی نوع دوم با متغیرهای غیرقطعی زیگزاگ در مثال ۱.

α	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۱
مقدار تابع هدف	۰/۳۷۲۷	۰/۴۴۸۳	۰/۴۹۸۳3	۰/۵۲۸۴	مساله نشدنی است						
مقدار متغیرهای تصمیم	۰/۳۱۸۲	۰/۲۹۱۸	۰/۲۶۶۰	۰/۲۴۱۱							
	۰/۱۴۵۵	۰/۰۹۴۶	۰/۰۵۰۹	۰/۰۱۳۶							
	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰							

مساله‌ها با استفاده از نرم‌افزار MATLAB و دستور Linprog حل شده است. از جدول‌های ۴و ۵ ملاحظه می‌شود که جواب‌های بهینه هر دو مدل غیرقطعی برای متغیر غیرقطعی خطی و $\alpha = ۰/۲,\ldots,۰/۶$ یکسان هستند، در حالی که تنها برای $\alpha = ۰/۵$ مقدار تابع هدف یکسان دارند. این شهود در نتیجه ۳ نیز بیان شده است. علاوه بر آن، در حالی که جواب‌های بهینه هر دو مدل، وقتی متغیرهای غیرقطعی زیگزاگ هستند، یکسان هستند؛ متفاوت بودن مقادیر تابع هدف به وضوح مشاهده می‌شود. همچنین افزایش اطلاعات ارایه شده توسط متخصص، که با

[DOR: 20.1001.1.22517286.2016.13.3.3.5]

جایگزینی متغیرهای غیرقطعی خطی با متغیرهای غیرقطعی زیگزاگ بیان شده است، تاثیر عکس در شدنی بودن مدل‌ها برای $\alpha = ۰/۴, ۰/۵, ۰/۶$ دارد.

هم‌چنان که از نتایج به دست آمده مشاهده می‌شود، برای مقادیر کوچک α این مساله در هر دو نوع غیرقطعی اول و دوم، شدنی است در حالی که برای مقادیر بزرگتر α هر دو مدل نشدنی هستند. این واقعیت به این معنی است که باور برقراری قیدها برای مقادیر کوچک α به جواب شدنی منجر می‌شود. توجیه ریاضی این مساله به این صورت است که با افزایش مقدار α، ناحیه شدنی کوچکتر و کوچکتر می‌شود، و بنابرین شدنی بودن مساله برای مقادیر بزرگتر α تضمین نمی‌شود. صعودی بودن مقدار تابع هدف بر حسب α در هر دو مدل نیز با این واقعیت تطابق دارد.

مساله مورد نظر در خوشبینانه‌ترین دیدگاه به صورت زیر است.

$$\begin{aligned}
&Min \quad x_۱ - ۳x_۲ + ۳x_۳ \\
&s.t. \\
&\qquad ۵x_۱ + ۶x_۲ + ۷x_۳ \le ۶, \\
&\qquad -۱۶x_۱ + ۵x_۲ + ۲x_۳ \le -۵, \\
&\qquad ۴x_۱ + ۵x_۲ + ۱۲x_۳ \le ۳, \\
&\qquad x_۱, x_۲, x_۳ \ge ۰.
\end{aligned} \tag{۱۵}$$

در بدبینانه‌ترین حالت نیز مساله زیر را خواهیم داشت.

$$\begin{aligned}
&Min \quad ۵x_۱ - ۴x_۲ + ۸x_۳ \\
&s.t. \\
&\qquad ۷x_۱ + ۹x_۲ + ۸x_۳ \le ۴, \\
&\qquad -۲۰x_۱ + ۸x_۲ + ۵x_۳ \le -۲, \\
&\qquad ۷x_۱ + ۶x_۲ + ۱۴x_۳ \le ۱, \\
&\qquad x_۱, x_۲, x_۳ \ge ۰.
\end{aligned} \tag{۱۶}$$

نتایج مدل‌های غیرقطعی برای $\alpha = ۰/۳$ با نتایج حاصل از دیدگاه‌های خوشبینانه و بدبینانه در جدول ۸ مقایسه شده‌اند.

جدول ۸. مقایسه نتایج حاصل از مدل‌های قطعی با دیدگاه‌های خوشبینانه و بدبینانه در مثال ۱.

دیدگاه	غیرقطعی نوع اول با متغیرهای غیرقطعی خطی	غیرقطعی نوع دوم با متغیرهای غیرقطعی خطی	غیرقطعی نوع اول با متغیرهای غیرقطعی زیگزاگ	غیرقطعی نوع دوم با متغیرهای غیرقطعی زیگزاگ	مدل خوشبینانه	مدل بدبینانه
مقدار تابع هدف	۰/۳۸۵۲	۰/۱۸۴۶	۰/۵۵۵۲	۰/۵۲۸۴	۰/۴۴-	مساله نشدنی است

هم‌چنان که در این جدول مشاهده می‌شود، مساله در دیدگاه بدبینانه نشدنی است و جواب شدنی وقتی تولید می‌شود که مقدار $\beta_۳$ حداقل یک باشد. در این صورت مقدار تابع هدف $۰/۵$ است. علاوه بر این، نتایج حاصل از مدل غیرقطعی نوع دوم در هر دو حالت متغیر غیرقطعی خطی و زیگزاگ به حالت خوشبینانه نزدیک‌تر است.

هم‌چنین مدل‌های غیرقطعی با متغیرهای غیرقطعی خطی نسبت به مدل‌های غیرقطعی با متغیرهای غیرقطعی زیگزاگ نتایج خوشبینانه‌تری را تولید می‌کنند.

در عمل ممکن است نمونه‌های وجود داشته باشند که برای تمامی مقادیر $\alpha\in(0,1)$ شدنی باشند. مثال بعدی نشان می‌دهد که مساله طراحی شده برای تمامی مقادیر α جواب شدنی نوع اول و دوم را دارد و بنا بر این برای هر سطح اطمینان، جواب بهینه برای مساله وجود دارد.

مثال ۲. یک مدل برنامه‌ریزی تولید تعدادی محصول را در نظر بگیرید. تابع هدف این مساله سود حاصل از تولید محصولات را نشان می‌دهد، سمت راست قیدها نشان دهنده مقادیر منابع موجود مورد استفاده در طرح تولید است و ضرایب متغیرهای تصمیم در سمت چپ قیدها بیانگر میزان مقادیر استفاده شده از هر منبع برای تولید هر واحد از محصول هستند.

$$\begin{aligned}
&Max \quad \zeta_1 x_1+\zeta_2 x_2+\zeta_3 x_3\\
&s.t.\\
&\qquad \xi_{11}x_1+\xi_{12}x_2+\xi_{13}x_3\le\beta_1,\\
&\qquad \xi_{21}x_1+\xi_{22}x_2+\xi_{23}x_3\le\beta_2,\\
&\qquad \xi_{31}x_1+\xi_{32}x_2+\xi_{33}x_3\le\beta_3,\\
&\qquad x_1,x_2,x_3\ge 0.
\end{aligned} \tag{۱۷}$$

لازم به یادآوری است که با توجه به طبیعت مساله، تمامی متغیرهای غیرقطعی این مثال نامنفی هستند. ابتدا تمامی پارامترهای این مساله را متغیرهای غیرقطعی خطی در نظر می‌گیریم که داده‌های آن‌ها در جدول ۹ بیان شده است. جدول ۱۰ نیز متغیرهای غیرقطعی مساله که همه آن‌ها زیگزاگ هستند را نشان می‌دهد. نتایج حاصل از حل این مساله برای متغیرهای غیرقطعی خطی در جدول‌های ۱۱ و ۱۲ خلاصه شده‌اند. هم‌چنین نتایح حل مساله با هر دو مدل غیرقطعی با متغیرهای زیگزاگ در جدول‌های ۱۳ و ۱۴مشاهده می‌شوند.

جدول ۹. متغیرهای غیرقطعی خطی مثال ۲

$\zeta_1=L(1,5)$	$\zeta_2=L(-4,-3)$	$\zeta_3=L(3,8)$
$\xi_{11}=L(5,7)$	$\xi_{12}=L(6,9)$	$\xi_{13}=L(7,8)$
$\xi_{21}=L(16,20)$	$\xi_{22}=L(5,8)$	$\xi_{23}=L(2,5)$
$\xi_{31}=L(4,7)$	$\xi_{32}=L(5,6)$	$\xi_{33}=L(12,14)$
$\beta_1=L(4,6)$	$\beta_2=L(2,5)$	$\beta_3=L(0,3)$

[DOR: 20.1001.1.22517286.2016.13.3.5]

جدول ۱۰. متغیرهای غیرقطعی زیگزاگ مثال ۲

$$\zeta_{۱} = Z\left(۱,۲,۵\right) \qquad \zeta_{۲} = Z\left(۳,\frac{۷}{۲},۴\right) \qquad \zeta_{۳} = Z\left(۳,۵,۸\right)$$

$$\xi_{۱۱} = Z\left(۵,\frac{۱۳}{۲},۷\right) \qquad \xi_{۱۲} = Z\left(۶,۷,۹\right) \qquad \xi_{۱۳} = Z\left(۷,\frac{۲۹}{۴},۸\right)$$

$$\xi_{۲۱} = Z\left(۱۶,۱۹,۲۰\right) \qquad \xi_{۲۲} = Z\left(۵,۷,۸\right) \qquad \xi_{۲۳} = Z\left(۲,۳,۵\right)$$

$$\xi_{۳۱} = Z\left(۴,\frac{۱۳}{۲},۷\right) \qquad \xi_{۳۲} = Z\left(۵,\frac{۲۳}{۴},۶\right) \qquad \xi_{۳۳} = Z\left(۱۲,\frac{۵۱}{۴},۱۴\right)$$

$$\beta_{۱} = Z\left(۴,\frac{۹}{۲},۶\right) \qquad \beta_{۲} = Z\left(۲,۴,۵\right) \qquad \beta_{۳} = Z\left(۰,۱,۳\right)$$

جدول ۱۱. نتایج محاسبات برای برنامه‌ریزی خطی غیرقطعی نوع اول با متغیرهای غیرقطعی خطی در مثال ۲.

α	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۱
مقدار تابع هدف	۲/۱۳۳۳	۱/۹۲۸۹	۱/۷۵۰۰	۱/۵۸۴۹	۱/۴۲۵۹	۱/۲۷۲۷	۱/۱۲۵۰	۰/۹۸۲۵	۰/۸۴۴۸	۰/۷۱۱۹	۰/۵۸۳۳
مقدار	۰/۱۶۶۷	۰/۱۵۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
متغیرهای	۰/۴۶۶۷	۰/۴۲۲۵	۰/۵۰۰۰	۰/۴۵۲۸	۰/۴۰۷۴	۰/۳۶۳۶	۰/۳۲۱۴	۰/۲۸۰۷	۰/۲۴۱۴	۰/۲۰۳۴	۰/۱۶۶۷
تصمیم	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰

جدول ۱۲. نتایج محاسبات برای برنامه‌ریزی خطی غیرقطعی نوع دوم با متغیرهای غیرقطعی خطی در مثال ۲.

α	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۱
مقدار تابع هدف	۲/۷۰۰۰	۲/۳۳۸۰	۲/۰۱۳۲	۱/۷۲۱۶	۱/۴۶۶۷	۱/۲۷۲۷	۱/۰۹۲۹	۰/۹۲۶۳	۰/۷۲۲۴	۰/۶۳۰۵	۰/۵۰۰۰
مقدار	۰/۱۶۶۷	۰/۱۵۰۰	۰/۱۳۵۱	۰/۱۲۱۶	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
متغیرهای	۰/۴۶۶۷	۰/۴۲۲۵	۰/۳۸۰۵	۰/۳۴۰۴	۰/۴۰۷۴	۰/۳۶۳۶	۰/۳۲۱۴	۰/۲۸۰۷	۰/۲۴۱۴	۰/۲۰۳۴	۰/۱۶۶۷
تصمیم	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰

جدول ۱۳. نتایج محاسبات برای برنامه‌ریزی خطی غیرقطعی نوع اول با متغیرهای غیرقطعی زیگزاگ در مثال ۲.

α		۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۱
مقدار تابع هدف	۲/۸۰۰۰	۲/۵۱۴۶	۲/۲۴۵۳	۱/۹۹۰۸	۱/۷۵۰۰	۱/۵۲۱۷	۱/۴۴۸۳	۱/۳۷۶۱	۱/۳۰۵۱	۱/۲۳۵۳	۱/۱۶۶۷
	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
مقدار متغیرهای تصمیم	۰/۸۰۰۰	۰/۷۱۸۴	۰/۶۴۱۵	۰/۵۶۸۸	۰/۵۰۰۰	۰/۴۳۴۸	۰/۴۱۳۸	۰/۳۹۳۲	۰/۳۷۲۹	۰/۳۵۲۹	۰/۳۳۳۳
	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰

جدول ۱۴. نتایج محاسبات برای برنامه‌ریزی خطی غیرقطعی نوع دوم با متغیرهای غیرقطعی زیگزاگ در مثال ۲.

α	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۱
مقدار تابع هدف	۳/۵۰۰۰	۲/۹۴۵۶	۲/۴۶۴۹	۲/۱۰۴۶	۱/۸۰۰۰	۱/۵۲۱۷	۱/۴۰۶۹	۱/۲۹۷۴	۱/۱۹۳۲	۱/۰۹۴۱	۱/۰۰۰۰
مقدار	۰/۱۶۶۷	۰/۱۴۴۸	۰/۱۲۶۱	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
متغیرهای	۰/۶۶۶۷	۰/۵۹۱۹	۰/۵۲۲۵	۰/۵۶۸۸	۰/۵۰۰۰	۰/۴۳۴۸	۰/۴۱۳۸	۰/۳۹۳۲	۰/۳۷۲۹	۰/۳۵۲۹	۰/۳۳۳۳
تصمیم	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰

هم‌چنان که مشاهده می‌شود، هر دو مدل غیرقطعی متناظر این مساله برای تمامی مقادیر α در بازه $[0,1]$ شدنی بوده و بنا بر این جواب بهینه دارند. علاوه بر این، متغیرهای پایه برای مقادیر مختلف α متفاوت هستند. به عنوان مثال، در مساله برنامه‌ریزی خطی غیرقطعی نوع دوم با متغیرهای زیگزاگ (جدول ۱۴)، متغیرهای x_1 و x_2 برای مقادیر $\alpha = 0, 0/1, 0/2$ مثبت هستند، در حالی که برای مقادیر $\alpha \geq 0/3$ تنها متغیر تصمیم x_2 مثبت است. مشابه همین وضعیت در جدول‌های دیگر نیز مشاهده می‌شود.

مساله‌های متناظر با دیدگاه خوشبینانه و بدبینانه به ترتیب عبارتند از:

$$
\begin{aligned}
& Max \quad 5x_1 + 5x_2 + 8x_3 \\
& s.t. \\
& \qquad 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq 6, \\
& \qquad 16x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 5, \\
& \qquad 4x_1 + 5x_2 + 12x_3 \leq 2, \\
& \qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

$$
\begin{aligned}
& Max \quad 1x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\
& s.t. \\
& \qquad 7x_1 + 9x_2 + 8x_3 \leq 4, \\
& \qquad 20x_1 + 8x_2 + 5x_3 \leq 2, \\
& \qquad 7x_1 + 6x_2 + 14x_3 \leq 1, \\
& \qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

جواب بهینه مساله (۱۸) همان جواب بهینه ارایه شده در جدول ۱۱ برای مقدار $\alpha = 0$ با مقدار تابع هدف ۳/۱۶۶۷ و جواب بهینه مساله (۱۹) همان جواب بهینه ارایه شده در جدول ۱۱ برای $\alpha = 1$ و با همان مقدار تابع هدف است. توجه کنید که نتیجه حاصل از مدل غیرقطعی نوع اول برای مقادیر کوچک‌تر α به مقدار تابع هدف بهینه در دیدگاه بدبینانه نزدیک‌تر است و برای مقادیر بزرگ‌تر α به مقدار تابع هدف بهینه دیدگاه خوشبینانه نزدیک‌تر است. در مدل غیرقطعی نوع دوم، این هماهنگی وضعیت بیشتر مشهود است. با توجه به این که مساله ارایه شده در مثال ۱ برای مقادیر بزرگ‌تر α نشدنی هستند، چنین مقایسه‌ای در آن مساله معنی‌دار نیست.

نزولی بودن مقدار تابع هدف در هر چهار جدول ۱۱-۱۳ به وضوح مشاهده می‌شود که با انقباض ناحیه شدنی با افزایش مقدار α توجیه‌پذیر است. علاوه بر این، افزایش اطلاعات ارایه شده توسط متخصص در مورد متغیرهای غیرقطعی (جایگزینی متغیرهای غیرقطعی خطی با متغیرهای غیرقطعی زیگزاگ) به افزایش مقدار تابع هدف بهینه (سود غیرقطعی مورد انتظار طرح تولید) در هر دو مدل غیرقطعی منجر می‌شود. همین وضعیت در مثال ۱ نیز مشاهده می‌شود. البته این خصوصیت در حالت کلی نه یک مزیت محسوب می‌شود و نه ایرادی را بیان می‌کند.

٦ جمع‌بندی

در این مقاله مساله برنامه‌ریزی خطی در محیط غیرقطعی مطالعه شده است. منظور از محیط غیرقطعی این است که پارامترهای مساله توسط متخصص به صورت یک متغیر غیرقطعی بر طبق نظریه عدم قطعیت فراهم شده است. دو مدل برنامه‌ریزی خطی غیرقطعی ارایه شده و برخی از ارتباط‌های بین دو مدل بررسی شده است. نتایج به دست آمده در دو مثال ساده به تصویر کشیده شده است. تغییرات مقدار باور α در این مثال به شکل گسسته در نظر گرفته شده است. بررسی رفتار مدل‌ها برای حالتی که تغییرات α پیوسته باشد یک مسیر تحقیق جذاب است. هرچند متغیرهای غیرقطعی در مثال‌های مساله به طور یکنواخت از یک نوع (فقط خطی یا فقط زیگزاگ) در نظر گرفته شده‌اند و مقدار درجه باور برای قیدهای مختلف یکسان فرض شده‌اند، ولی کلیت مساله حفظ شده و می‌توان نتایج را برای حالتی که متغیرهای غیرقطعی مخلوط بوده یا از نوع دیگر مانند متغیر غیرقطعی نرمال و لگاریتمی–نرمال هستند[۲۱] ؛ و یا مقدار درجه باور برای قیدها متفاوت باشند، تعمیم داد. تعمیم این دو مدل برای مساله‌های برنامه‌ریزی خطی صحیح و مخلوط و هم چنین برای مساله‌های درجه دو محدب نیز می‌تواند از مسیرهای تحقیقاتی دیگر باشد.

سپاسگزاری

بدین وسیله از داوران محترم که در غنای این مقاله و رفع ایرادات آن راهنمایی‌های مفیدی ارایه کردند، تشکر و قدردانی می‌نماییم.

منابع

[۵] ناصری، س. ه.، (۱۳۹۰). روش های سیمپلکس فازی برای حل مسایل برنامه‌ریزی خطی فازی. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۳ (۴)،۶۷-۷۶.

[1] Ghaffari-Hadigheh, A., Terlaky, T., (2006). Sensitivity analysis in linear optimization: Invariant support set intervals. European Journal of Operational Research,169(3),1158-1175.

[2] Ghaffari-Hadigheh, A., Mehanfar, N., (2015). Matrix Perturbation and Optimal Partition Invariancy in Linear Optimization. Asia-Pacific Journal of Operational Research, 32(3), 1-17.

[3] Roos., C., Terlaky, T., Vial, J. P., (2005). Interior point algorithms for linear optimization. Springer Science.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2016.13.3.5]

[4] Tanaka, H., Asai, K., (1984). Fuzzy linear programming problems with fuzzy numbers. Fuzzy Sets and Systems, 13(1), 1-10.

[6] Ben-Tal, A., Nemirovski, A., (2000). Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data. Mathematical programming, 88(3), 411-424.

[7] Huang, G. H., Cao, M. F., (2011). Analysis of Solution Methods for Interval Linear Programming. Journal of Environmental Informatics,17(2).

[8] Birge, J. R., Louveaux, F., (2011). Introduction to stochastic programming. Springer Science & Business Media.

[9] Dalkey, N., Olaf, H., (1963). An experimental application of the Delphi method to the use of experts. Management science, 9(3), 458-467.

[10] Sigarreta, J. M., Ruesga, P., Rodriguez, M., (2007). On mathematical foundations of the plausibility Theory. International Mathematical Forum, 2(27).

[11] Dempster, A. P., (1967). Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. The annals of mathematical statistics,. 38(2), 325-339.

[12] Shafer, G., (1967). A mathematical theory of evidence. Princeton: Princeton university press.

[13] Liu, B., (2007). Uncertainty theory. Berlin Heidelberg: Springer.

[14] Liu, B., (2010). Ed. Uncertainty Theory: A branch of mathematics for modeling human uncertainty.

[15] Liu, B., (2013). Toward uncertain finance theory. Journal of Uncertainty Analysis and Application, 1(1). 1-15.

[16] Zhu, Y., (2010). Uncertain optimal control with application to a portfolio selection model. Cybernetics and Systems: An International Journal, 41(7), 535-547.

[17] Liu, B., (2010). Uncertain risk analysis and uncertain reliability analysis. Journal of Uncertain Systems, 4(3), 163-170.

[18] Gao, Y., (2011). Shortest path problem with uncertain arc lengths. Computers & Mathematics with Applications, 62(6), 2591-2600.

[19] Chen, L., Peng, J., Zhang, B., Li, Sh., (2014). Uncertain programming model for uncertain minimum weight vertex covering. Journal of Intelligent Manufacturing. 1-8.

[20] Han, S., Zixiong, P., Shunqin, W., (2014). The maximum flow problem of uncertain network. Information Sciences, 265, 167-175.

[21] Liu, B., (2015). Uncertainty theory, 24. Berlin: Springer.

[22] Liu, B., (2009). Some research problems in uncertainty theory. Journal of Uncertain Systems, 3 (1), 3-10.

[23] Liu, B., Liu, B., (2002). Theory and practice of uncertain programming. Heidelberg: Physica-verlag.

[24] Markowitz, H., (1968). Portfolio selection: efficient diversification of investments. Yale university press.

[25] Elton, E., Gruber, M., Brown, S., Goetzmann, W., (2009). Modern portfolio theory and investment analysis. John Wiley & Sons.