مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال پانزدهم، شماره سوم (پیاپی ۵۸)، پاییز ۹۷، ص ص ۱۲۰-۱۰۷
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

رویکرد روش مونت‌کارلوی کم‌ترین مربعات برای قیمت‌گذاری اختیار فروش آمریکایی چند دارایی تحت مدل هستون-هال- وایت

الدوز صمیمی[۱]، فرشید مهردوست[۲*]

۱- دانشجوی دکتری، گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه گیلان، رشت، ایران
۲- دانشیار، گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه گیلان، رشت، ایران

رسید مقاله: ۱ بهمن ۱۳۹۵
پذیرش مقاله: ۱۷ تیر ۱۳۹۶

چکیده

در این مقاله، مساله‌ی قیمت‌گذاری اختیار معامله‌های چند دارایی آمریکایی تحت مدل هستون-هال-وایت را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. مدل مورد نظر ما در مقایسه با مدل اصلی هستون، با توجه به نرخ بهره تصادفی و تلاطم تصادفی آن، با واقعیت بازار سازگارتر است. کارایی و دقت روش پیشنهادی را با بررسی تاثیر میزان نرخ بهره و تلاطم بر قیمت اختیار فروش چند دارایی آمریکایی تحت مدل هستون-هال-وایت نشان می‌دهیم.

کلمات کلیدی: اختیار آمریکایی، چند دارایی، مدل تلاطم تصادفی، روش مونت‌کارلوی کمترین مربعات

۱ مقدمه

اختیار از نوع اروپایی دارای یک زمان اعمال است که در زمان انقضا می‌باشد. اگر اختیار در زمانی غیر از زمان انقضا سودآور باشد، باید تا زمان انقضا برای اعمال اختیار منتظر ماند. اگر دارنده‌ی اختیار در هر زمان از شروع تا پایان زمان انقضا زمان اعمال اختیار را بتواند انتخاب کند، اختیار را آمریکایی گویند. یک اختیار متوسط بین اختیار از نوع آمریکایی و اختیار از نوع اروپایی، اختیار برمودان است. در حقیقت، اختیار برمودان فقط روی مجموعه های متناهی از زمان مجاز به اعمال زودتر از موعد می باشد. به یک اختیار آمریکایی می‌توان به صورت یک اختیار اروپایی نگاه کرد، با این فرض که بازده‌ی اختیار در همه‌ی دوره های زمانی تا زمان انقضا مورد نیاز است؛ زیرا نمی‌توان گفت چه زمانی باید اختیار را اعمال کرد. فرضیه‌ی موجود در این قسمت بر این اصل استوار است، به‌دست‌آوردن بهترین زمانی که دارنده‌ی اختیار می‌تواند آن را اعمال کند، از نقطه نظر مالک اختیار، این زمان بهینه‌ترین زمان اعمال است. قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی به‌دلیل دارا نبودن یک فرم بسته مشکل‌تر از

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: fmehrdoust@guilan.ac.ir

قیمت‌گذاری اروپایی است؛ زیرا در اختیار آمریکایی زمان اعمال مشخص نیست و زمانی که قیمت به مقدار مورد نظر رسید اعمال صورت می‌پذیرد؛ ولی در اختیار اروپایی زمان اعمال اختیار از ابتدا مشخص است [۱، ۲].
مدل فیشر بلک و مایرن شولز و رابرت مرتون، گام بزرگی در قیمت گذاری اختیار بود. آن‌ها مدلی ارایه دادند که تحت عنوان مدل بلک شولز [۲، ۳] معروف شد. معادله دیفرانسیل مدل بلک شولز به صورت زیر می‌باشد:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \tag{۱}$$

که در آن μ نرخ بهره، σ واریانس و $dW(t)$ حرکت براونی می‌باشد. واریانس و نرخ بهره در این مدل ثابت فرض می شود[۱]؛ اما این مدل دارای کمبودهایی است که از آن جمله می‌توان به ثابت فرض کردن نرخ بهره و تلاطم اشاره کرد. بعدها مدل‌های بهتری ارایه شد که بعضی از نقص‌های مدل بلک شولز را پوشش داد که از آن جمله می‌توان هال وایت[۱] (۱۹۸۷)، اسکات[۲] (۱۹۸۷)، استین و استین[۳] (۱۹۹۱) و هستون[۴] (۱۹۹۳) را نام برد [۴].

برای قیمت‌گذاری اختیار معمولاً از روش‌های انتگرال‌گیری استفاده می‌شود و به طور خاص روی روش فوریه سریع متمرکز است. روش انتگرال‌گیری از روش‌های عددی برای قیمت‌گذاری اختیار است که اولین بار توسط ادوارو شوارتز در سال(۱۹۷۷) به‌کار گرفته شد. معادلات دیفرانسیل چگونگی نمو قیمت یک دارایی در طول زمان را به‌وسیله یک سری معادلات دیفرانسیل با زمان گسسته توضیح می‌دهد [۵،۶،۷،۸،۹،۱۰]. استفاده از روش‌های انتگرال‌گیری برای چند دارایی‌ها بسیار مشکل و در مواقعی که با تعداد زیادی دارایی مواجهه می‌شویم (بیش‌تر از سه دارایی) تقریباً غیر ممکن است. با توجه به ساده و کار آمد بودن روش‌های شبیه‌سازی در این مقاله از روش شبیه‌سازی کم‌ترین مربعات مونت کارلو استفاده می‌کنیم. از مهم‌ترین کاربردهای روش مونت کارلو در ریاضیات مالی، حل معادله بلک شولز در مدل‌سازی قیمت اختیار با نرخ‌های تصادفی است. حل این معادله یک مدل شبیه‌سازی شده می‌سازد که این مدل شبیه‌سازی شده برای پیش‌بینی تغییرات در قیمت سهام مورد استفاده قرار می‌گیرد. شبیه‌سازی مونت کارلو برای قیمت‌گذاری از نوع اروپایی بسیار مناسب است که در آن زمان انقضا همان زمان اعمال است؛ ولی در مورد قیمت‌گذاری از نوع آمریکایی، روش کم‌ترین مربعات مونت-کارلو مناسب‌تر از روش شبیه‌سازی مونت کارلو است. اولین بار در سال ۱۷۹۴ روش کم‌ترین مربعات توسط کارل فردریش گاوس بیان شد. کم‌ترین مربعات یک روش آماری برای حل دستگاه معادلاتی است که تعداد معادله‌های بیش از تعداد مجهول‌ها است. این روش بیش‌تر در تحلیل رگرسیون به کار می‌رود. در ریاضیات مالی بویل در سال ۱۹۷۷ برای حل اختیار اروپایی، از روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو استفاده‌کرد. در سال ۱۹۹۶ چگونگی استفاده از روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو برای حل قیمت‌گذاری اختیار آسیایی بیان شد [۱۱، ۱۲، ۱۳].

شبیه‌سازی مونت‌کارلو در مواردی که فرمول تحلیلی در دست نیست، روش بسیار مناسبی است. چون زمان اعمال بهینه در قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی نامشخص است، نمی‌توانیم به راحتی یک فرم بسته برای آن ارایه

[1] - Hull-White
[2] - Scott
[3] - Stein and Stein
[4] - Heston

[DOR: 20.1001.1.22517286.2018.15.3.5.1]

دهیم؛ بنابراین، از روش‌های شبیه‌سازی برای برآورد زمان بهینه استفاده می‌شود، که یکی از این روش‌ها مونت-کارلو است. در روش مونت‌کارلو، گام‌های شبیه‌سازی شده همه در نموهای زمانی تولید شده است. آن‌ها از قیمت اولیه سهام S_0 شروع و مطابق با حرکت براونی هندسی معین به سمت زمان انقضا حرکت می‌کند؛ اما چون در قیمت گذاری از نوع اختیار آمریکایی شروع فرآیند از حرکت رو به عقب است؛ بنابراین محاسبات از زمان انقضا شروع می‌شود و رو به عقب حرکت می‌کند، تا به S_0 برسد. معمولا این روش همه‌ی قیمت‌های دارایی را در امتداد همه‌ی مسیرها ذخیره می‌کند [۱۴، ۱۵].

در اینجا از روش شبیه‌سازی کم‌ترین مربعات مونت کارلوی (LSM) استفاده می‌شود، که برای محاسبه اختیار چند دارایی از نوع آمریکایی نیاز به ذخیره همه قیمت‌های دارایی نیست و ذخیره سازی از $O(dMN)$ به $O((d+1)M+N)$ کاهش می‌یابد. ایده اصلی تولید دو نوع مسیر می‌باشد؛ اولی روش رو به جلو، برای تولید قیمت دارایی تا زمان انقضا و دیگری روش رو به عقب برای محاسبه میانگین برای مواقعی که نیاز است. هر عدد تصادفی در این روش دو بار در عوض یک بار محاسبه می‌شود و این تنها هزینه اضافی موجود است. در نتیجه هزینه‌ی محاسباتی کم‌تر از روش‌هایی است که همه‌ی نموهای قیمت‌های دارایی را ذخیره می‌کنند [۱۵،۱۶،۱۷].

چند دارایی‌ها که به عنوان یک دارایی یا سبدی از چند دارایی شناخته شده است، ترکیبی از چند دارایی (مانند پول نقد، سهام یا اوراق قرضه) است که به عنوان یک سرمایه‌گذاری باعث ایجاد یک گروه یا مجموعه‌ای از دارایی‌ها می‌شود. با افزایش تنوع در سبد کالا، خطر نوسانات نسبت به سبدی با یک دارایی کاهش می‌یابد و همچنین ممکن است بازده را افزایش دهد. نتیجه حاصل از استفاده چند دارایی، واکنش کم‌تر به تغییرات و نوسانات منفی بازار و جلوگیری از زیان است، برای مثال $S\&P500$ و داوجونز $(DJIA)$ را می‌توان نام برد. در این مقاله ما سعی کردیم که یک قیمت منصفانه برای یک سبد از چند دارایی به‌دست‌آوریم [۱۸].

در [۹] اختیار آمریکایی یک دارایی تحت مدل هستون هال وایت با روش کم‌ترین مربعات قیمت‌گذاری شد؛ ولی در این مقاله قیمت‌گذاری اختیار فروش‌آمریکایی چند دارایی تحت مدل هستون هال وایت مورد مطالعه قرار می‌گیرد. مدل هستون هال وایت مدلی برای برآورد قیمت چند دارایی درآینده و مدلی با واریانس و نرخ بهره تصادفی است و چون قیمت دارایی را با واریانس و نرخ بهره تصادفی فرض می‌کند در نتیجه انتظار می‌رود که برآورد قیمت‌های دارایی در آینده به واقعیت نزدیک‌تر باشد و در نتیجه قیمت عادلانه‌تری برای اختیار به-دست‌آوریم.

در بخش ۲، مدل هستون هال وایت را برای دو دارایی و سه دارایی بیان می‌کنیم. برای حل معادلات از گسسته سازی اویلر استفاده کردیم. قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی با استفاده از روش کم‌ترین مربعات مونت کارلو و الگوریتم سه دارایی را در بخش ۳ مورد بررسی قرار می‌دهیم. در بخش ۴، نتایج عددی برای اختیار فروش آمریکایی چند دارایی را بیان می‌کنیم و تغییرات قیمت اختیار فروش آمریکایی چند دارایی، در برابر افزایش نرخ بهره بدون ریسک، زمان انقضا، واریانس و ضریب همبستگی محاسبه و مقایسه می‌کنیم. نتیجه گیری را در بخش ۵ ارایه می‌دهیم.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2018.15.3.5.1]

۲ مدل هستون هال وایت

مدل هستون هال وایت، مدلی با واریانس تصادفی و نرخ بهره تصادفی می‌باشد، که این مدل به‌وسیله معادله دیفرانسیل زیر به‌دست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
& dS(t)=\left(r(t)-d\right)S(t)\ dt+\sqrt{V(t)}\ S(t)\ dW_1(t),\\
& dV(t)=k\left(\theta-V(t)\right)\ dt+\nu\sqrt{V(t)}\ dW_2(t),\\
& dr(t)=\lambda\left(\theta_r-r(t)\right)\ dt+\eta\ dW_3(t),\\
& S(0)=S_0,\ V(0)=V_0,\ r(0)=r_0,\\
& \langle dW_i^i, dW_j^i\rangle=\rho_{ij}dt, \qquad i,j=1,2,3.
\end{aligned}
\tag{۲}
$$

در معادله بالا k سرعت رسیدن به میانگین، θ واریانس دراز مدت، r نرخ بهره، ν تلاطم واریانس، λ سرعت تبدیل به میانگین، η پارامتر واریانس، ρ_{ij} ضریب همبستگی بین دو حرکت برآونی Wj و W_i، S_0 قیمت اولیه دارایی، V_0 واریانس اولیه و r_0 نرخ بهره اولیه می‌باشند (پارامترها عددهای مثبت هستند) [۴].

۲-۱ مدل هستون هال وایت برای دو دارایی

در این بخش، مدل هستون هال وایت در حالی‌که دو دارایی تحت اختیار می‌باشد، مورد بررسی قرار می‌گیرد. معادله دیفرانسیل تصادفی، برای دو دارایی به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
& dS^i(t)=\left(r(t)-d\right)S^i(t)\ dt+\sqrt{V^i(t)}\ S^i(t)\ dW_1^i(t), \qquad i=1,2,\\
& dV^i(t)=k\left(\theta-V^i(t)\right)\ dt+\nu\sqrt{V^i(t)}\ dW_2^i(t), \qquad i=1,2,\\
& dr(t)=\lambda\left(\theta_r-r(t)\right)\ dt+\eta\ dW_3(t),\\
& S^i(0)=S_0^i,\ V^i(0)=V_0^i,\ r(0)=r_0,\\
& \langle dW_i^i, dW_j^i\rangle=\rho_{ij}dt, \qquad i,j=1,2,3.\\
& \langle dW_i^1, dW_j^2\rangle=\rho' dt.
\end{aligned}
\tag{۳}
$$

که در معادله بالا ، ρ' ضریب همبستگی بین دو دارایی تحت اختیار است. پارامترها، همان پارامترهای متعلق به یک دارایی است. از روش گسسته سازی اویلر مارویاما برای گسسته سازی [۴] قیمت دارایی استفاده می‌کنیم، تا بتوانیم یک برآورد برای قیمت دارایی در آینده به‌دست‌آوریم. فرض کنیم، S_t یک فرآیند تصادفی است که از معادله دیفرانسیل (۳) به‌دست‌آمده که در روی شبکه ای از نقاط $0=t_0<t_1<\ldots<t_N=T$ به صورت زیر باشد:

[DOR: 20.1001.1.22517286.2018.15.3.5.1]

$$
\begin{aligned}
S_{j+1}^{i} &= S_{j}^{i} + \left(r_j - d\right) S_{j}^{i}\ \Delta t + \sqrt{V_{j}^{i}}\ S_{j}^{i}\ \Delta W_{1}^{i} \\
V_{j+1}^{i} &= V_{j}^{i} + k\left(\theta - V_{j}^{i}\right)\ \Delta t + \nu \sqrt{V_{j}^{i}}\ \Delta W_{2}^{i}, \qquad i = 1,2, \\
r_{j+1} &= r_j + \lambda\left(\theta_j - r_j\right)\ \Delta t + \eta\ \Delta W_{3},
\end{aligned} \tag{۴}
$$

که در آن، $t_j = j\Delta t$ ، $\Delta W_{ik}^{j} = W_{i}^{j}\left(t_{k+1}\right) - W_{i}^{j}\left(t_{k}\right) \sim \mathrm{N}\left(0, \Delta t\right), 1 \le j \le N,$ برای هر $i = 1,2$.

بر طبق قضیه حد مرکزی داریم:

$$
\Delta W_{ik}^{j} = \mathrm{Z}_{i}^{j}\ \sqrt{\Delta t}
$$

برای ضریب همبستگی بین دو دارایی، از تجزیه چولسکی استفاده کرده‌ایم [۴]. زمانی که دو دارایی تحت اختیار می باشد به صورت زیر است :

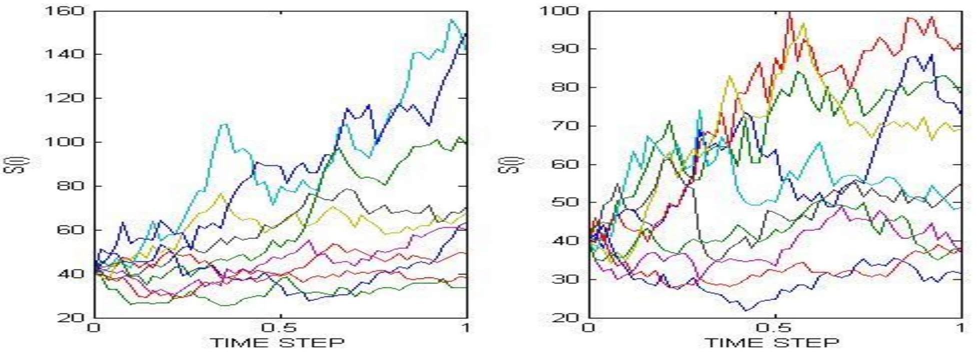
$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{1} &= \rho'\ \mathrm{Z}_{1} + \sqrt{1 - \left(\rho'\right)^{2}}\ \mathrm{Z}_{2} \\
\varepsilon_{2} &= \rho'\ \mathrm{Z}_{2} + \sqrt{1 - \left(\rho'\right)^{2}}\ \mathrm{Z}_{1}
\end{aligned} \tag{۵}
$$

معادله (۳)، به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
S_{j+1}^{i} &= S_{j}^{i} + \left(r_j - d\right) S_{j}^{i}\ \Delta t + \sqrt{\Delta t\ V_{j}^{i}}\ S_{j}^{i}\ \varepsilon_{i}, \\
V_{j+1}^{i} &= V_{j}^{i} + k\left(\theta - V_{j}^{i}\right)\ \Delta t + \nu \sqrt{\Delta t\ V_{j}^{i}}\ \Phi_{1}^{i}, \qquad i = 1,2, \\
r_{j+1} &= r_j + \lambda\left(\theta_j - r_j\right)\ \Delta t + \eta\ \sqrt{\Delta t}\ \Phi_{2}, \\
\Phi_{1}^{i} &= \rho_{1} Z_{1}^{i} + \sqrt{1 - \rho_{1}^{2}}\ Z_{2}^{i} \\
\Phi_{2} &= \rho_{2} Z_{1}^{i} + \sqrt{1 - \rho_{2}^{2}}\ Z_{3} \\
\varepsilon_{i} &= \rho'\ \mathrm{Z}_{i} + \sqrt{1 - \left(\rho'\right)^{2}}\ \mathrm{Z}_{j} \qquad i, j = 1,2, \quad i \ne j.
\end{aligned} \tag{۶}
$$

که در فرمول بالا ، ε_i با استفاده از تجزیه چولسکی به‌دست آمده است و $S_{j}^{i} = S^{i}\left(t_j\right)$ و $V_{j}^{i} = V^{i}\left(t_j\right)$ برای $t_j = j\,\Delta t$ به ازای $1 \le j \le N$ است.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2018.15.3.5.1]



شکل ۱. ماکزیمم مسیرهای شبیه‌سازی شده برای مدل هستون هال وایت. شکل سمت راست با ضریب همبستگی $\rho' = 0/5$ و شکل سمت چپ با ضریب همبستگی بین دو دارایی $\rho' = 0$.

شکل ۱، قیمت دارایی برای ماکزیمم ۳۰ مسیر شبیه سازی شده، با واریانس اولیه $V1 = 0/3$ و $V2 = 0/5$ می‌باشد. در سمت راست ضریب همبستگی بین دو دارایی $\rho' = 0/5$ و در سمت چپ ضریب همبستگی بین دو دارایی $\rho' = 0$ است. با افزایش ضریب همبستگی بین دو دارایی تحت اختیار، انتظار داشتن قیمت‌های پایین‌تر افزایش می‌یابد، وقتی که احتمال داشتن قیمت‌های پایین‌تر در آینده افزایش می‌یابد، قیمت اختیار فروش آمریکایی افزایش می‌یابد. در نتیجه، در دو دارایی‌ها افزایش ضریب همبستگی بین دو دارایی، به افزایش قیمت اختیار فروش آمریکایی می‌انجامد (در نتایج عددی می‌توان به خوبی مشاهده کرد).

۲-۲ مدل هستون هال وایت سه دارایی

در این بخش، اختیار آمریکایی فروش با مدل هستون هال وایت بررسی می‌شود، درحالی‌که سه دارایی تحت اختیار است. معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی، برای سه دارایی به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
&dS^i(t) = \left(r(t) - d\right) S^i(t)\, dt + \sqrt{V^i(t)}\, S^i(t)\, dW_1^i(t), && i = 1,2,3,\\
&dV^i(t) = k\left(\theta - V^i(t)\right) dt + \nu \sqrt{V^i(t)}\, dW_2^i(t), && i = 1,2,3,\\
&dr(t) = \lambda\left(\theta_r - r(t)\right) dt + \eta\, dW_3(t), && \\
&S^i(0) = S_0^i,\ V^i(0) = V_0^i,\ r(0) = r_0, && \\
&\langle dW_i^i, dW_j^i \rangle = \rho_{ij} dt, && i, j = 1,2,3.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

ادامه روند همانند دو دارایی می‌باشد، یعنی در ابتدا، یک برآورد برای قیمت دارایی تحت اختیار به‌دست می‌آوریم، از روش گسسته سازی اویلر ماروياما [۴، ۱۹] برای به‌دست‌آوردن یک تقریب برای قیمت دارایی، نرخ بهره و واریانس بر روی شبکه‌ای با زمان گسسته استفاده می‌کنیم و برای هر یک از مسیرهای شبیه‌سازی شده و همه گام های زمانی، یک تقریب به‌دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم که S_t فرآیندی تصادفی است که از معادله دیفرانسیل (۷) پیروی می‌کند و آن را در روی شبکه‌ای از نقاط به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$
\begin{aligned}
&S_{j+1}^{i}=S_{j}^{i}+\left(r_{j}-d\right)S_{j}^{i}\ \Delta t+\sqrt{V_{j}^{i}}\ S_{j}^{i}\ \Delta \mathrm{W}_{jk}^{i},\\
&V_{j+1}^{i}=V_{j}^{i}+k\left(\theta-V_{j}^{i}\right)\ \Delta t+\nu\sqrt{V_{j}^{i}}\ \Delta W_{1}^{i},\\
&r_{j+1}=r_{j}+\lambda\left(\theta_{j}-r_{j}\right)\ \Delta t+\eta\ \Delta W_{2}.
\end{aligned}
\tag{۸}
$$

که در آن، $\mathrm{t}_{j}=j\Delta t$ ،$\Delta W_{ik}^{j}=W_{i}^{j}\left(t_{k+1}\right)-W_{i}^{j}\left(t_{k}\right)\sim \mathrm{N}\left(0,\Delta t\right), 1\le j\le N,$ برای همه $i=1,2,3$. بر طبق قضیه حد مرکزی داریم:

$$\Delta W_{ik}^{j}=\mathrm{Z}_{i}^{j}\ \sqrt{\Delta t}$$

برای ضریب همبستگی بین سه دارایی از تجزیه چولسکی استفاده کرده‌ایم و فرمول تجزیه چولسکی زمانی که سه دارایی تحت اختیار می باشد $\left(n=3\right)$ ، به‌صورت زیر است [۳] :

$$\varepsilon_{3}=\rho_{31}^{'}Z_{1}+\frac{\rho_{23}^{'}-\rho_{21}^{'}\rho_{31}^{'}}{\sqrt{1-\left(\rho_{21}^{'}\right)^{2}}}\ Z_{2}+\sqrt{\frac{1+2\rho_{23}^{'}\rho_{21}^{'}\rho_{31}^{'}-\left(\rho_{21}^{'}\right)^{2}-\left(\rho_{31}^{'}\right)^{2}-\left(\rho_{23}^{'}\right)^{2}}{1-\left(\rho_{21}^{'}\right)^{2}}}\ \mathrm{Z}_{3}$$

پس معادله (۷) را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$
\begin{aligned}
&S_{j+1}^{i}=S_{j}^{i}+\left(r_{j}-d\right)S_{j}^{i}\ \Delta t+\sqrt{\Delta t\ V_{j}^{i}}\ S_{j}^{i}\ \varepsilon_{i},\\
&V_{j+1}^{i}=V_{j}^{i}+k\left(\theta-V_{j}^{i}\right)\ \Delta t+\nu\sqrt{\Delta t\ V_{j}^{i}}\ \Phi_{1}^{i}, \qquad i=1,2,\\
&r_{j+1}=r_{j}+\lambda\left(\theta_{j}-r_{j}\right)\ \Delta t+\eta\ \sqrt{\Delta t}\ \Phi_{2},\\
&\Phi_{1}^{i}=\rho_{1}Z_{1}^{i}+\sqrt{1-\rho_{1}^{2}}\ Z_{2}^{i},\\
&\Phi_{2}=\rho_{2}Z_{1}^{i}+\sqrt{1-\rho_{2}^{2}}\ Z_{3},\\
&\varepsilon_{i}=\rho^{'}Z_{1}^{i}+\frac{\rho^{'}-\left(\rho^{'}\right)^{2}}{\sqrt{1-\left(\rho^{'}\right)^{2}}}\ Z_{1}^{i}+\sqrt{\frac{1+2\left(\rho^{'}\right)^{3}-3\left(\rho^{'}\right)^{2}}{1-\left(\rho^{'}\right)^{2}}}\ Z_{1}^{k},\ \ \mathrm{k},i,j=1,2,3,\ \ i\neq j\neq k.
\end{aligned}
\tag{۹}
$$

در فرمول بالا ، ε_{i} با استفاده از تجزیه چولسکی به‌دست آمده و $S_{j}^{i}=S^{i}\left(t_{j}\right)$ و $V_{j}^{i}=V^{i}\left(t_{j}\right)$ برای $i=1,2,3$ و $t_{j}=j\ \Delta t$ برای $1\le j\le N$ است. برای به‌دست آوردن قیمت اختیار فروش آمریکایی چند دارایی از روش LSM، استفاده می کنیم [۱۴، ۱۵، ۱۶، ۲۰].

الگوریتم ۱. تعیین قیمت دارایی تحت مدل هستون هال وایت

Algorithm ۳. HHW۳ Asset Path

۱. $Set \quad \Delta t = \dfrac{T}{N}$

۲. $Generate\ independent\ standard\ normal\ variates\ \varepsilon_i \sim N(۰,۱)\ , j = ۱,\ldots,N.$

۳. $Set \quad S^i_{j+۱} \leftarrow S^i_j + (r_j - d) S^i_j\ \Delta t + \sqrt{\Delta t\ V^i_j}\ S^i_j\ Z^i_j \qquad j = ۱,\ldots,N \quad , \quad i = ۱,\ldots,N$

۴. $Set \quad V^i_{j+۱} \leftarrow V^i_j + k(\theta - V^i_j)\ \Delta t + \nu\sqrt{\Delta t\ V^i_j}\ \Phi^i_j, \qquad j = ۱,\ldots,N \quad , \quad i = ۱,\ldots,N$

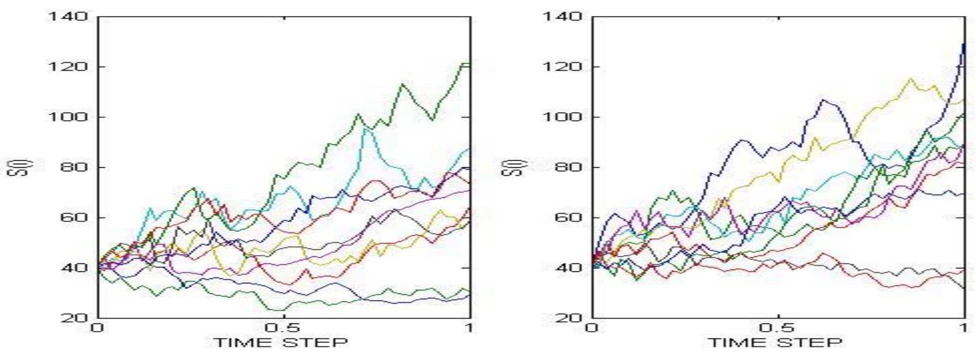
۵. $Set \quad r_{j+۱} \leftarrow r_j + \lambda(\theta_j - r_j)\ \Delta t + \eta\ \sqrt{\Delta t}\ \Phi_۲, \qquad j = ۱,\ldots,N \quad , \quad i = ۱,\ldots,N$

۶. $Set \quad \theta_{j+۱} = \dfrac{(\theta_j + \theta_{j-۱})}{۲}, \qquad j = ۱,\ldots,N$

۷. $End\ For$

۸. $Set \quad S_i \leftarrow \max\ (S^۱_j, S^۲_j, S^۳_j).$

الگوریتم ۱، برآورد قیمت دارایی در هر گام زمانی و هر مسیر برای سه دارایی را تحت مدل هستون هال وایت نشان می‌دهد.



شکل ۲ . مسیرهای شبیه‌سازی شده برای ماکزیمم سه دارایی. شکل سمت راست با ضریب همبستگی بین سه دارایی $\rho' = ۰$ و شکل سمت چپ با ضریب همبستگی بین سه دارایی $\rho' = ۰/۵$ می باشد.

شکل ۲، مسیرهای شبیه‌سازی‌شده برای ۳۰ دارایی را با نرخ بهره‌ی $r_۰ = ۰/۰۵$ و ضریب همبستگی $\rho' = ۰/۵$ و $\rho' = ۰$ را نشان می‌دهد. تغییر در ضریب همبستگی بین سه دارایی، احتمال داشتن قیمت‌های پایین‌تر و کاهش ضریب همبستگی بین سه دارایی، احتمال داشتن قیمت‌های بالاتر را افزایش می‌دهد. این تغییرات در قیمت اختیار فروش آمریکایی چند دارایی به طور مستقیم اثر می‌گذارد. در نتایج عددی می‌توان دید، که افزایش ضریب همبستگی بین سه دارایی موجب بالاتر رفتن قیمت اختیار فروش آمریکایی می‌شود.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2018.15.3.5.1]

۳ روش کمترین مربعات مونت کارلو

اگر یک دارنده‌ی اختیار، زمان اعمال اختیار را بتواند انتخاب کند، در هر زمان از شروع تا پایان زمان انقضا، آن اختیار را آمریکایی گویند.

تعریف: فرض کنید، $t \le u \le T$ و $x \ge 0$ داده شده باشد و $S(t)=x$ و با پالایه $F_u^{(t)}$، $t \le u \le T$، $\Psi_{t,T}$ را مجموعه‌ای از زمان‌های توقف برای پالایه‌ی $F_u^{(t)}$ ، $t \le u \le T$ ، $\{\tau \le u\} \in F_u^{(t)}$ برای هر $u \in [t,T]$. تصمیم برای توقف در یک زمان $u \in [t,T]$، فقط بر اساس مسیر قیمت سهام بین زمان t و u است. قیمت در زمان t در قرارداد آمریکایی با زمان انقضاء T به‌صورت زیر تعریف شده است.

$$\upsilon(t,x) = \max_{x \in \Psi_{t,T}} \widetilde{\mathrm{E}}\left[e^{-r(\tau-t)}\left(K - S(\tau)\right) \mid \mathrm{S(t)=x}\right]$$

که در آن، $S(\tau)$ قیمت دارایی در زمان τ و K قیمت توافقی اختیار است. دارنده‌ی قرارداد آمریکایی، باید منتظر باشد، تا قبل از انقضاء قیمت سهام به سطح معینی یا زیر K پایین بیاید؛ اما در حال حاضر این سطح وابسته به زمان انقضاء $T-t$ است. از سوی دیگر، زمانی که قیمت سهام به مقدار کم‌تر از K می‌رسد، باید قرارداد را اعمال کرد. وقتی قیمت سهام قیمتی بالاتر از K دارد، نباید قرارداد را اعمال کرد و اگر قیمت سهام برابر با K باشد، تفاوتی بین اعمال و اعمال نکردن قرارداد وجود ندارد. فرمولی برای قیمت اختیار فروش آمریکایی در دست نیست؛ ولی این تابع را می‌توان به صورت عددی، از تحلیل ویژگی‌های تعیین قیمت قرارداد به‌دست‌آورد. در این مقاله ما این قیمت را با استفاده از روش‌های شبیه‌سازی محاسبه می‌کنیم [۱].

یکی از روش‌های مناسب برای قیمت‌گذاری اختیار روش مونت‌کارلو است. روش مونت‌کارلو از الگوریتمی برای محاسبات بهره می‌گیرد که از نمونه‌گیری تصادفی برای محاسبه نتایج استفاده می‌کند [۲، ۱۱، ۱۷]. از طرف دیگر در روش مونت‌کارلو الگوریتم محاسبه‌گر، برای محاسبه نتایج خود بر نمونه‌گیری‌های تکرار شونده تصادفی اتکاء می‌کند؛ ولی استفاده از روش مونت‌کارلو برای قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی کمی مشکل و دارای محاسبات بسیار زیاد است. برای کم‌تر کردن تعداد محاسبات و در نتیجه بالاتر بردن دقت، روش شبیه‌سازی کم‌ترین مربعات مونت کارلو (LSM) را به کار می‌بریم. این روش توسط لانگ استف و شوارتز در سال ۲۰۰۱ ارایه شد [۱۵، ۱۶، ۱۹].

در ابتدا باید یک قیمت برای دارایی در هر زمان و در هر گام زمانی از زمان شروع تا زمان انقضا به‌دست آوریم. در ادامه از انتها شروع به حرکت می‌کنیم و تمام مسیرهایی را که در آن‌ها اختیار سودآور می‌باشد مشخص می‌نماییم. برای مسیرهایی که اختیار در آن‌ها سود آور است از روش کم‌ترین مربعات استفاده می‌شود تا یک برآورد برای امید بازده از ادامه نگه داشتن اختیار شرطی به‌دست آید[۱۵]. از آنجایی که تنها مسیرهایی با اختیار سود آور، در رگرسیون مورد استفاده قرار می‌گیرند، پس این روش به طور قابل توجهی زمان محاسبات را

[DOR: 20.1001.1.22517286.2018.15.3.5.1]

کاهش می‌دهد. به هر حال، مانند بقیه روش‌های مونت کارلو برای محاسبه‌ی اختیار آمریکایی، در این روش هم، تمامی قیمت‌های دارایی برای محاسبه‌ی قیمت اختیار ذخیره می‌شود. (در این مقاله درجه رگرسیون دو است).

الگوریتم ۲. به‌دست آوردن قیمت اختیار فروش آمریکایی چند دارایی با استفاده از شبیه سازی LSM

Algorithm ۲ . *LSM*

Set $S_j \leftarrow HHW3\ Asset\ Path$

If $S_j < E$

Set $C(j) = (E - S_j)\ e^{-r\Delta t} \qquad j = 1,\ldots,\text{number of pathes}$

Else $C(j) = 0$

End *if*

For $j = N-1 : -1 : 1$

Set $index = find\ (E - S_i > 0)$

Set $\text{X=}\left[\text{onse}(\text{size}(\text{index}))\ \ S(\text{index})\ \ S(\text{index})^2\right]$

Set $B = (X^T X)^{\frac{1}{2}}\ X\ C(\text{index})$

Set $D = XB$

If $D \le E - S_i \qquad i = 1:\text{size}(\text{index},1)$

Set $C(\text{index}(i)) = E - S_i \qquad i = 1:\text{size}(\text{index},1)$

End *if*

Set $C = C\ e^{-r\Delta t}$

End *if*

Set $American\ option = C$

الگوریتم ۲، قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی سه دارایی با استفاده از روش مونت‌کارلوی کم‌ترین مربعات را نشان می دهد. در الگوریتم بالا درجه رگرسیون دو می‌باشد. با بالاتر رفتن درجه رگرسیون خطا افزایش می‌یابد.

٤ نتایج عددی

در این قسمت مدل هستون هال وایت و مدل هستون را با استفاده از روش کم‌ترین مربعات مونت کارلو حل و نتایج عددی به‌دست‌آمده از این دو مدل را با هم مقایسه می‌کنیم. در بخش ۴-۱، در جدول شماره ۱ نتایج عددی برای دو دارایی، با نرخ بهره متفاوت و ضریب همبستگی متفاوت محاسبه و نتایج عددی را بررسی می‌کنیم. در بخش ۴-۲، در جدول شماره ۲، قیمت اختیار فروش آمریکایی سه دارایی را محاسبه و قیمت‌ها را در زمانی که نرخ بهره بدون ریسک و ضریب همبستگی افزایش می‌یابد را بررسی و مقایسه می‌کنیم.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2018.15.3.5.1]

٤-١ نتایج عددی برای دو دارایی

در جدول ۱، قیمت یک اختیار فروش آمریکایی تحت مدل هستون هال وایت $(H.H.W)$ و هستون (H)، با نرخ بهره $r=0/01, 0/05, 0/1$ ، $\eta=0.08$ ، $\lambda=0/26$ ضریب همبستگی $\rho=0/26$ ، $k=1/58$ ، $d=0$ و با زمان‌های انقضا متفاوت، برای قیمت‌های توافقی $E=35, 40, 45$ محاسبه می‌شود. تعداد مسیر $M=10000$ و تعداد گام های زمانی $N=50$ ، این محاسبات ۱۰۰بار تکرار شد. در این جدول ضریب همبستگی بین دو دارایی، $\rho'=0$ و $\rho'=0/5$ ، واریانس $V_0^1=0/3$ و $V_0^2=0/5$ است. برای قیمت‌گذاری اختیار، از روش LSM استفاده شد.

جدول۱، تغییرات قیمت اختیار فروش آمریکایی دو دارایی با مدل هستون هال وایت $(H.H.W)$و هستون (H)، را مقایسه می‌کند. همچنین می‌توان دید، که افزایش نرخ بهره باعث کاهش قیمت اختیار فروش و افزایش ضریب همبستگی باعث افزایش قیمت اختیار فروش می‌شود.

جدول ۱. قیمت اختیار فروش آمریکایی دو دارایی با نرخ بهره و ضریب همبستگی متفاوت

ρ	T	E	r(۰)=۰/۰۱		r(۰)=۰/۰۵		r(۰)=۰/۱	
			H.H.W	H	H.H.W	H	H.H.W	H
		۳۵	۰/۱۲۷۷	۰/۱۳۰۴	۰/۱۲۳۴	۰/۱۲۲۶	۰/۱۱۶۶	۰/۱۱۴۴
	۱/۱۲	۴۰	۱/۰۸۷۵	۱/۰۹۲۴	۱/۰۶۷۱	۱/۰۶۶۴	۱/۰۳۷۸	۱/۰۳۴۴
		۴۵	۴/۵۶۱۲	۴/۵۶۳۳	۴/۵۴۹۷	۴/۵۴۹۰	۴/۵۳۵۳	۴/۵۳۳۳
		۳۵	۰/۶۶۹۳	۰/۶۹۹۷	۰/۶۳۴۶	۰/۶۴۱۷	۰/۵۷۹۵	۰/۵۷۴۷
۰	۴/۱۲	۴۰	۲/۰۲۳۶	۲/۰۹۳۰	۱/۹۶۲۵	۱/۹۷۳۷	۱/۸۴۷۷	۱/۸۴۴۷
		۴۵	۴/۷۶۳۸	۴/۸۱۹۰	۴/۶۹۴۹	۴/۷۰۴۴	۴/۵۹۴۸	۴/۵۹۶۵
		۳۵	۰/۹۱۶۷	۱/۰۵۹۵	۰/۸۶۸۰	۰/۹۴۷۸	۰/۷۹۶۸	۰/۸۲۱۴
	۷/۱۲	۴۰	۲/۳۴۶۰	۲/۵۹۱۲	۲/۲۵۸۷	۲/۳۹۸۸	۲/۱۱۷۰	۲/۱۸۱۹
		۴۵	۴/۹۳۱۶	۵/۲۰۲۸	۴/۸۳۳۵	۴/۹۸۶۱	۴/۷۰۰۴	۴/۷۶۳۷
		۳۵	۰/۴۸۲۲	۰/۴۸۵۳	۰/۴۶۷۵	۰/۴۶۶۶	۰/۴۴۶۶	۰/۴۴۶۰
	۱/۱۲	۴۰	۲/۰۲۸۰	۲/۰۲۹۹	۱/۹۸۷۸	۱/۹۸۴۶	۱/۹۳۳۸	۱/۹۳۳۵
		۴۵	۵/۱۷۳۷	۵/۱۸۴۰	۵/۱۳۲۰	۵/۱۳۴۲	۵/۰۸۵۲	۵/۰۷۷۰
		۳۵	۱/۶۸۱۸	۱/۷۳۷۶	۱/۶۰۶۴	۱/۶۲۱۲	۱/۱۴۷۱	۱/۴۹۶۴
۰/۵	۴/۱۲	۴۰	۳/۶۱۴۹	۳/۷۲۰۹	۳/۵۱۶۹	۳/۵۴۵۱	۳/۳۴۳۸	۳/۳۴۶۳
		۴۵	۶/۴۸۵۸	۶/۶۱۰۰	۶/۳۵۰۰	۶/۳۹۳۲	۶/۱۳۰۲	۶/۱۵۶۱
		۳۵	۲/۱۴۱۳	۲/۰۵۱۴	۲/۲۰۳۹	۲/۲۰۳۹	۱/۹۰۵۷	۱/۹۷۳۰
	۷/۱۲	۴۰	۴/۱۵۱۶	۲/۴۰۳۸	۴/۲۱۴۷	۴/۲۱۴۷	۳/۷۸۸۳	۳/۸۸۹۲
		۴۵	۶/۹۳۸۱	۷/۳۷۸۲	۶/۷۶۳۷	۷/۰۲۲۸	۶/۵۰۷۸	۶/۶۵۸۷

[DOR: 20.1001.1.22517286.2018.15.3.5.1]

۲-٤ نتایج عددی برای سه دارایی

در جدول ۲، قیمت‌گذاری اختیار فروش آمریکایی برای سه دارایی، با استفاده از پارامترهای قسمت قبل آورده شده است. در این جدول ضریب همبستگی بین دو دارایی، $\rho' = ۰$، $\rho' = ۰/۵$، واریانس $V_{۰}^{۱} = ۰/۳$، $V_{۰}^{۲} = ۰/۵$ و $V_{۰}^{۳} = ۰/۲$ می‌باشد. برای به‌دست آوردن قیمت اختیار از روش LSM استفاده می‌کنیم.

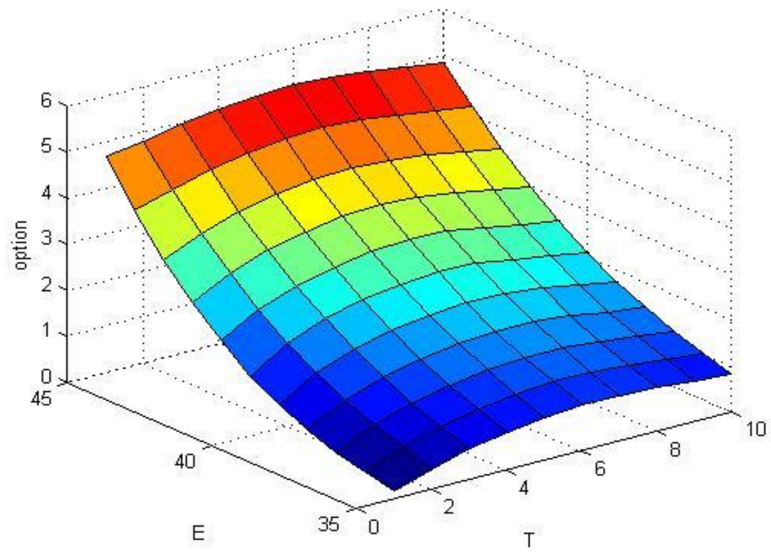
جدول ۲، نشان می‌دهد که افزایش نرخ بهره کاهش قیمت اختیار فروش چند دارایی از نوع آمریکایی را در پی دارد و بر عکس، با افزایش قیمت توافقی، قیمت اختیار فروش آمریکایی افزایش می یابد. نتایج عددی بیانگر این است که واکنش قیمت اختیار فروش آمریکایی در برابر پارامترها با هم یکسان می‌باشد و با افزایش تعداد دارایی واکنش نسبت به پارامترهای قیمت توافقی، زمان، ضریب همبستگی، نرخ بهره بدون ریسک و واریانس تغییر نمی‌کند.

در ادامه، شکل ۳ تصویری سه بعدی از تغییرات قیمت اختیار فروش سه دارایی از نوع آمریکایی تحت مدل هستون-هال-وایت را نشان می‌دهد تا تاثیر افزایش زمان انقضا و تاثیر افزایش قیمت توافقی را بر قیمت اختیار سه دارایی ارایه دهد.

جدول۲. قیمت اختیار فروش آمریکایی ، سه دارایی با نرخ بهره و ضریب همبستگی متفاوت

ρ	T	E	r(۰)=۰/۰۱		r(۰)=۰/۰۵		r(۰)=۰/۱	
			H.H.W	H	H.H.W	H	H.H.W	H
۰	۱/۱۲	۳۵	۰/۰۱۴۷	۰/۰۵۴۵	۰/۰۱۳۹	۰/۰۵۰۲	۰/۰۱۲۸	۰/۰۴۵۸
		۴۰	۰/۴۶۷۷	۰/۶۲۸۴	۰/۴۵۷۷	۰/۶۰۷۸	۰/۴۴۶۴	۰/۵۸۹۵
		۴۵	۴/۲۴۴۴	۴/۳۲۳۵	۴/۲۴۰۲	۴/۳۲۳۹	۴/۲۳۱۹	۴/۳۳۵۲
	۴/۱۲	۳۰	۰/۱۴۲۸	۰/۴۰۷۵	۰/۱۳۳۵	۰/۳۶۱۵	۰/۱۲۰۸	۰/۳۱۴۷
		۴۰	۰/۸۸۳۹	۱/۴۶۱۵	۰/۸۵۱۵	۱/۳۵۵۹	۰/۸۰۲۱	۱/۲۸۷۵
		۴۵	۳/۷۶۶۵	۴/۲۴۴۴	۳/۷۴۰۵	۴/۱۶۵۸	۳/۶۹۹۳	۴/۱۰۵۴
	۷/۱۲	۳۵	۰/۱۹۲۴	۰/۶۶۳۳	۰/۱۸۱۸	۰/۵۷۰۱	۰/۱۶۱۷	۰/۴۷۴۷
		۴۰	۰/۹۳۲۸	۱/۸۱۸۰	۰/۸۹۲۴	۱/۶۷۵۷	۰/۸۴۰۰	۱/۴۹۱۹
		۴۵	۳/۵۲۸۴	۴/۳۳۸۷	۳/۴۸۴۴	۴/۰۸۳۷	۳/۴۲۷۴	۳/۹۹۳۷
۰/۵	۱/۱۲	۳۵	۰/۲۰۴۴	۰/۲۲۸۷	۰/۱۹۹۶	۰/۲۱۵۳	۰/۱۸۶۹	۰/۲۰۱۸
		۴۰	۱/۲۶۹۲	۱/۲۸۳۵	۱/۲۸۸۷	۱/۲۴۲۷	۱/۲۳۶۴	۱/۱۷۸۹
		۴۵	۴/۷۱۲۴	۴/۷۸۳۶	۴/۷۰۰۲	۴/۷۶۰۶	۴/۶۷۸۴	۴/۷۵۰۳
	۴/۱۲	۳۵	۰/۸۵۹۲	۱/۰۴۷۱	۰/۵۲۴۲	۰/۹۶۰۶	۰/۷۷۴۳	۱/۱۸۴۵
		۴۰	۲/۳۹۴۵	۲/۷۹۸۱	۲/۳۲۶۰	۲/۶۲۹۱	۲/۲۲۹۶	۲/۴۴۳۷
		۴۵	۵/۱۶۱۹	۵/۶۷۷۱	۵/۰۹۵۴	۵/۴۹۵۲	۴/۹۹۰۷	۵/۲۹۴۵
	۷/۱۲	۳۵	۱/۰۴۰۳	۱/۵۲۷۱	۰/۹۹۹۴	۱/۳۶۲۰	۰/۹۲۹۸	۱/۱۸۴۵
		۴۰	۲/۵۵۹۴	۳/۴۱۰۷	۲/۴۸۶۵	۳/۱۴۲۹	۲/۳۶۵۳	۲/۸۴۴۸
		۴۵	۵/۲۴۵۴	۶/۲۳۰۴	۵/۱۵۵۷	۵/۹۱۱۸	۵/۰۳۳۳	۵/۵۹۶۲

[DOR: 20.1001.1.22517286.2018.15.3.5.1]



شکل ۲ . تغییرات قیمت اختیار فروش سه دارایی از نوع آمریکایی تحت مدل هستون-هال-وایت

۵ بحث و نتیجه گیری

در این مقاله، قیمت اختیار فروش آمریکایی برای چند دارایی تحت مدل هستون هال وایت را با استفاده از روش LSM مورد بررسی قرار داده‌ایم. از مدل هستون هال وایت که دارای واریانس تصادفی و نرخ بهره تصادفی است، استفاده کردیم و نتایج عددی را با مدل هستون مقایسه نمودیم. نتایج عددی نشان می‌دهد که افزاش نرخ بهره منجر به کاهش قیمت اختیار فروش آمریکایی برای چند دارایی‌ها می‌شود. افزایش واریانس و افزایش زمان انقضا، قیمت اختیار فروش آمریکایی برای چند دارایی‌ها را افزایش می‌دهد و این نتایج به تعداد دارایی بستگی ندارد.

منابع

[۲۰] حسین خنجر پناه و دیگران، (۱۳۵۹). رویکرد بهینه سازی سبد سهام بورس اوراق بهادار با محدودیت های منعطف. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن. ۱۳(۴)، ۳۹-۵۴.

[1] Steven E. Shreve, (2000). Stochastic Calculus for Finance, Springer finance series.

[2] Higham, D. J., (2004). An introduction to financial option valuation.

[3] Robert A. van de Geijn,(2011). Notes on Cholesky Factorization. The University of Texas at Austin Austin.

[4] Kienitz, J., Wetteran, D., (2012). Financial modelling, Springer.

[5] Matsuda, K., (2004). Introduction to Option Pricing with Fourier Transform: Option Pricing with Exponential Lévy Models. The Graduate Center, The City University of New York._ 365 Fifth Avenue, *New York*, *NY* 10016-4309.

[6] White, R., (2013). Option Pricing with Fourier Methods.

[7] Tchamga, N. F. K., (2009). Fourier Transform Methods in Option Pricing. University of Stellenbosch, South Africa.

[8] Brennan. M. Schwartz, E., (1978). Finite Difference Methods and Jump Processes Arising in the Pricing of Contingent Claims: A Synthesis. Journal of Financial and Quantitative Analysis. 13, 461-474.

[9] Samimi, O., Mardani, Z., Sharafpour, S., Mehrdoust, F., (2016). LSM Algorithm for Pricing American Option Under Heston–Hull–White's Stochastic Volatility Model. Computational Economics. 50(2), 173-187.
[10] Schwartz, E., (1977). The Valuation of Warrants: Implementing a New Approach. Journal of Financial Economics. 4, 79-93**.**
[11] Broadie, M., Glasserman, P., (1997). Pricing American-style securities using simulation, J. Econom. Dynam. Control 21 (8) 1323–1352.
[12] Glasserman, P., (2004). Monte Carlo Methods in Financial Engineering. Springer-Verlag.
[13] Boyle, P., (1997). Options: a monte carlo approach. Journal of Financial Economics. 4(3), 323-338.
[14] Black, F. and M. Scholes (1973), The Pricing of Options and Corporate Liabilities, Journal of Political Economy, 81, 637-659.
[15] Chan, R.H., Wong, C.Y., Yeung, K.-M., (2006). Pricing multi-asset American-style options by memory reduction Monte Carlo methods, Appl. Math. Comput. 179(2), 535–544.
[16] Longstaff, F.A., Schwartz, E.S., (2001). Valuing American options by simulation: a simple least-squares approach, Rev. Financ. Stud. 14 (1) 113–147.
[17] Tilley,] J.A., (1993). Valuing American options in a path simulation model, Trans. Soc. Actuar. 45 (83) 104.
[19] Brigo, D., Mercurio, F., (2006). Interest rate models, theory and practice, Springer, Heidelberg.
[20] Kavacs, B., (2012). American option pricing with LSM algorithm and analytic bias correction. Eotvos Lorand University, Faculty of Science.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2018.15.3.5.1]