

## استفاده از یک روش جریمه‌ای کارا برای حل مساله کم‌ترین مربعات خطی با قیود غیرخطی

فرگس بیدآبادی<sup>\*۱</sup>

۱- استادیار، دانشگاه یزد، دانشکده علوم ریاضی، یزد، ایران

رسید مقاله: ۱۶ شهریور ۱۳۹۹

پذیرش مقاله: ۲۲ اردیبهشت ۱۴۰۰

### چکیده

در این مقاله به استفاده از یک روش جریمه‌ای برای حل مسایل کم‌ترین مربعات خطی با قیود غیرخطی می‌پردازیم. در هر تکرار از روش جریمه‌ای برای حل مساله، به محاسبه ماتریس هسی تصویر شده نیاز است. با توجه به این که تابع هدف مساله کم‌ترین مربعات خطی است، ماتریس هسی تصویر شده از تابع جریمه‌ای شامل دو قسمت است که مقدار دقیق یک قسمت از آن در دست است ولی محاسبه قسمت دیگر آن هزینه‌بر است. در این مقاله پس از به دست آوردن یک رابطه سکانت ساختمند از یک روش شبه نیوتن ساختمند برای تقریب ماتریس هسی تصویر شده استفاده نموده و سپس همگرایی سراسری و مجانبی روش ارائه شده را نشان می‌دهیم. نتایج عددی به دست آمده، کارایی این روش را نشان می‌دهند.

**کلمات کلیدی:** روش جریمه‌ای دقیق، مساله کم‌ترین مربعات، بهنگام‌سازی ساختمند.

### ۱ مقدمه

فرم کلی یک مساله کم‌ترین مربعات غیرخطی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{p} \|F(x)\|_p^p \\ \text{s.t.} \quad & c_i(x) = 0, \quad i \in E = \{1, \dots, k\}, \\ & c_i(x) \geq 0, \quad i \in I = \{k+1, \dots, k+m\}, \end{aligned}$$

که در آن  $x \in \mathbb{R}^n$ ، و توابع  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  و  $c_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ،  $i = 1, \dots, k+m$ ، توابعی دو بار مشتق‌پذیر پیوسته هستند. این دسته از مسایل، کاربرد بسیار وسیعی در علوم و مهندسی دارند [۱، ۲، ۳] و بنابراین حل عددی آنها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

الگوریتم‌های کارایی برای حل مسایل کم‌ترین مربعات ارائه شده‌اند. یک دسته از روش‌های کارا که برای حل مسایل بهینه‌سازی با ساختارهای ویژه ماتریس هسی تابع هدف، ارائه شده است، روش‌های شبه نیوتن

\* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: n\_bidabadi@yazd.ac.ir

ساختمند هستند [۴] که یک کاربرد خاص از این روش‌ها در حل مسایل کم‌ترین مربعات می‌باشد. اخیراً یک روش منظم‌سازی برای حل مسایل کم‌ترین مربعات با قيود تساوی مورد استفاده قرار گرفته است [۵]. همچنین در [۶] یک روش گوس-نیوتن برای حل مساله کم‌ترین مربعات نامقید وقتی که تابع هدف به صورت مجموع دو قسمت مشتق‌پذیر و مشتق‌ناپذیر باشد، ارائه شده است.

در این پژوهش، مساله کمترین مربعات خطی با قيود غیرخطی را به صورت زیر در نظر گرفته‌ایم:

$$\begin{aligned} \min \quad & \phi(x) = \frac{1}{2} \|Gx - b\|_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & c_i(x) = 0, \quad i \in E = \{1, \dots, k\} \\ & c_i(x) \geq 0, \quad i \in I = \{k+1, \dots, k+m\}, \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن،  $b \in \mathbb{R}^l$ ،  $G \in \mathbb{R}^{l,n}$ .  
توجه کنید که مساله حل دستگاه

$$\begin{cases} Gx = b, \\ c_i(x) = 0, \quad i \in E = \{1, \dots, k\}, \end{cases}$$

که شامل معادلات خطی و غیرخطی است، را می‌توان به یک مساله بهینه‌سازی به صورت (۱) تبدیل نمود. بهبود روش‌های حل دستگاه معادلات خطی و غیرخطی نیز موضوع پژوهش‌های بسیاری بوده است که از آن جمله می‌توان به [۷] اشاره نمود.

در این پژوهش، برای بهنگام‌سازی ماتریس هسی تصویرشده در روش‌های جریمه‌ای دقیق در حل مسایل کم‌ترین مربعات خطی با قيود غیرخطی از روش‌های شبه نیوتن ساختمند بهره می‌گیریم. ابتدا یک رابطه سکانت ساختمند برای ماتریس هسی تصویرشده از تابع جریمه‌ای دقیق را برای این مساله به دست می‌آوریم و سپس از یک روش شبه نیوتن ساختمند برای تقریب این ماتریس در الگوریتم حل مساله استفاده می‌کنیم. سرانجام، نتایج عددی به دست آمده از پیاده‌سازی الگوریتم جریمه‌ای دقیق در محیط نرم‌افزاری MATLAB، در مقایسه با نتایج به دست آمده از تابع `fmincon` در نرم‌افزار MATLAB، کارایی روش ارائه‌شده را تایید می‌کند.

## ۲ الگوریتم جریمه‌ای دقیق

یک تابع جریمه‌ای دقیق برای حل مساله (۱) به صورت زیر است:

$$\psi(x, \mu) = \mu\phi(x) + \sum_{i=1}^k |c_i(x)| - \sum_{i=k+1}^{k+m} \min(0, c_i(x)). \quad (2)$$

که در آن  $\mu$  پارامتر جریمه است. معلوم شده است که با مینیمم‌سازی (۲)، به ازای مقادیر مثبت و به اندازه‌ی کافی کوچک  $\mu$ ، جواب مساله (۱) به دست می‌آید. بنابراین به کارگیری این تابع، برای دستیابی به یک جواب مساله، مستلزم حل دنباله‌ای از مسایل جریمه‌ای به ازای مقادیر کاهشی  $\mu$  است. باید توجه داشت که تابع مذکور در (۲)، در برخی نقاط مشتق‌ناپذیر است. به هر حال، هدف حل مساله جریمه‌ای دقیق، یعنی،

$$\min \psi(x, \mu) \quad (۳)$$

به ازای مقدارهای ثابت  $\mu$  است. از آنجا که تابع  $\psi(x, \mu)$  ناهموار است، نمی توان انتظار داشت که مساله نامقید (۳) با استفاده از روش های معمول بهینه سازی نامقید حل شود. در اینجا از روش ارایه شده توسط کولمن و کان [۹، ۸] استفاده می کنیم. در این روش، جهت های جستجو با استفاده از تابع زیر محاسبه می شوند:

$$\psi_\varepsilon(x, \mu) = \mu\phi(x) + \sum_{i \in VE(x, \varepsilon)} \text{sgn}(c_i(x))c_i(x) - \sum_{i \in VI(x, \varepsilon)} c_i(x), \quad (۴)$$

که در آن:

$$VE(x, \varepsilon) = \{i : |c_i(x)| > \varepsilon, \quad 1 \leq i \leq k\}, \quad (۵)$$

$$VI(x, \varepsilon) = \{i : c_i(x) < -\varepsilon, \quad k+1 \leq i \leq k+m\}.$$

گرادیان و هسی تابع (۴) به صورت زیر هستند:

$$\nabla \psi_\varepsilon(x, \mu) = \mu G^T(Gx - b) + \sum_{i \in VE(x, \varepsilon)} \text{sgn}(c_i(x))\nabla c_i(x) - \sum_{i \in VI(x, \varepsilon)} \nabla c_i(x), \quad (۶)$$

$$\nabla^2 \psi_\varepsilon(x, \mu) = \mu G^T G + \sum_{i \in VE(x, \varepsilon)} \text{sgn}(c_i(x))\nabla^2 c_i(x) - \sum_{i \in VI(x, \varepsilon)} \nabla^2 c_i(x).$$

در این الگوریتم، برای محاسبه جهت جستجو در برخی گام ها، از تجزیه QR برای ماتریس گرادیان های

قیود  $\varepsilon$ -موثر، یعنی،

$$A(x_k) = [\dots \nabla c_i(x_k) \dots]_{i \in \{i=1, \dots, k+m : |c_i(x_k)| < \varepsilon\}} \quad (۷)$$

استفاده می شود. در این تجزیه داریم:

$$A(x_k) = Q \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} = [Y(x_k) \quad Z(x_k)] \begin{bmatrix} R(x_k) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (۸)$$

که در آن،  $Q$  یک ماتریس متعامد نرمال،  $R$  یک ماتریس بالامثلثی و  $Z(x_k)$  ماتریسی است که،

$$A(x_k)^T Z(x_k) = 0 \quad \text{و} \quad Z(x_k)^T Z(x_k) = I$$

برای تعیین مسیر حرکت در الگوریتم، تقریبی از ماتریس هسی تصویر شده  $H_{z,k} = Z(x_k)^T H_k Z(x_k)$

به کار می رود که در آن،

$$H_k = \nabla^2 \psi_\varepsilon(x_k, \mu) - \sum_{i \in AC(x_k, \varepsilon)} \lambda_i^k \nabla^2 c_i(x_k), \quad (۹)$$

و

$$AC(x_k, \varepsilon) = \{i : |c_i(x_k)| \leq \varepsilon, \quad 1 \leq i \leq k+m\}, \quad (۱۰)$$

و  $\lambda_i^k$  ها در نزدیکی جواب، تقریب ضرایب لاگرانژ و در بقیه جاها صفر هستند. یکی از جهت های

جستجوی مورد استفاده در الگوریتم ( $h$ ) با حل دستگاه زیر حاصل می شود:

$$H_{z,k} w = -Z(x_k)^T \nabla \psi_\varepsilon(x_k, \mu), \quad (۱۱)$$

$$h = Z(x_k)w$$

در ادامه، الگوریتم استفاده شده برای حل مساله را به طور مختصر بیان می‌کنیم (برای مشاهده جزئیات [۱۰])

را ببینید):

### الگوریتم:

**گام ۰:** پارامترهای  $\tau > 0$  و  $\varepsilon > 0$  و نقطه شروع  $x_0$  داده شده‌اند. قرار دهید  $k = 0$ .

**گام ۱:** ماتریس  $Z(x_k)$  را به دست آورید و قرار دهید  $global = 1$  و  $optimal = 0$ .

**گام ۲:** اگر  $\|Z(x_k)^T \nabla \psi_\varepsilon(x_k, \mu)\| > \tau$ ، آنگاه تقریب ضرایب لاگرانژ  $(\lambda^k)$  را صفر در نظر بگیرید و جهت  $d = h$  را با حل دستگاه (۱۰) به دست آورید و به گام ۵ بروید.

**گام ۳:** تقریب ضرایب لاگرانژ  $(\lambda^k)$  را با مینیمم‌سازی  $\|A(x_k)\lambda - \nabla \psi_\varepsilon(x_k, \mu)\|_2$  به دست آورید. قرار دهید:

$$AC = \{i : |c_i(x_k)| \leq \varepsilon, 1 \leq i \leq k+m\},$$

اندیس  $i \in E \cap AC$  که  $\lambda_i^k \notin [-1, 1]$  یا اندیس  $i \in I \cap AC$  که  $\lambda_i^k \notin [0, 1]$  را انتخاب کنید. اگر چنین اندیسی وجود ندارد به گام ۴ بروید. در غیر این صورت جهت  $d = h$  را با حل دستگاه  $A(x_k)d = -\text{sgn}(\lambda_i^k)e_i$  که در آن،  $e_i$  ستون  $i$ ام ماتریس همانی است را به دست آورده و به گام ۵ بروید.

**گام ۴:** قرار دهید  $global = 0$  و جهت  $h_k$  را با حل دستگاه (۱۰) و جهت  $v_k$  را از حل دستگاه  $A(x_k)^T v = -c_{AC}(x_k + h_k)$  به دست آورید. قرار دهید  $d = h_k + v_k$  و به گام ۶ بروید.

**گام ۵:** طول گام  $\alpha_k$  را با استفاده از یک الگوریتم جستجوی خطی برای  $\psi_\varepsilon$  در جهت  $d$  به دست آورید.

**گام ۶:** اگر  $x_k + \alpha_k d$  نسبت به  $x_k$  کاهش کافی در مقدار  $\psi$  ایجاد می‌کند، قرار دهید  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d$  در غیر این صورت به گام ۸ بروید.

**گام ۷:** اگر  $global = 0$  آنگاه شرایط بهینگی را برای  $x_k$  بررسی کنید. اگر  $x_k$  بهینه است، آنگاه قرار دهید  $optimal = 1$  و توقف کنید، در غیر این صورت قرار دهید،  $k = k + 1$  و به گام ۱ بروید.

**گام ۸:** اگر  $global = 1$  آنگاه  $\varepsilon$  را کاهش دهید به طوری که مجموعه  $AC$  تغییر کند، در غیر این صورت  $\tau$  را کاهش دهید تا  $\|Z(x_k)^T \nabla \psi_\varepsilon(x_k, \mu)\|$  از  $\tau$  بزرگ‌تر شود.

**گام ۹:** اگر  $global = 1$  و با تغییر  $\varepsilon$  به صفر نیز، نمی‌توان  $AC$  را تغییر داد یا این که  $\varepsilon$  خیلی کوچک یا  $\tau$  خیلی کوچک است. لذا الگوریتم ناموفق بوده و توقف کنید. در غیر این صورت قرار دهید،  $k = k + 1$  و به گام ۱ بروید.

با توجه به ساختار ویژه ماتریس  $H_k$ ، می‌توان از روش‌های ساختمند برای بهنگام‌سازی ماتریس هسی تصویرشده  $H_{z,k}$  در حل مساله کم‌ترین مربعات خطی مقید به قيود غیرخطی استفاده کرد. در بخش بعدی یک رابطه سکانت ساختمند برای محاسبه ماتریس هسی تصویر شده را به دست می‌آوریم.

### ۳ رابطه سکانت

برای مساله (۱) داریم:

$$H_k = \mu G^T G + \sum_{i \in VE(x_k, \varepsilon)} \text{sgn}(c_i(x_k)) \nabla^T c_i(x_k) - \sum_{i \in VI(x_k, \varepsilon)} \nabla^T c_i(x_k) - \sum_{i \in AC(x_k, \varepsilon)} \lambda_i^k \nabla^T c_i(x_k), \quad (12)$$

و بنابراین

$$H_{z,k} = Z(x_k)^T H_k Z(x_k) = \mu Z(x_k)^T G^T G Z(x_k) + Z(x_k)^T T(x_k, \lambda^k) Z(x_k), \quad (13)$$

که در آن

$$T(x_k, \lambda^k) = Z(x_k)^T \left[ \sum_{i \in VE(x_k, \varepsilon)} \text{sgn}(c_i(x_k)) \nabla^T c_i(x_k) - \sum_{i \in VI(x_k, \varepsilon)} \nabla^T c_i(x_k) - \sum_{i \in AC(x_k, \varepsilon)} \lambda_i^k \nabla^T c_i(x_k) \right] Z(x_k). \quad (14)$$

بنابراین برای تقریب ماتریس هسی تصویر شده  $H_{z,k}$  به وسیله ماتریس  $B_{z,k}$  کافی است که تقریبی برای ماتریس  $Z(x_k)^T T(x_k, \lambda^k) Z(x_k)$  به صورت  $A_{z,k}$  به دست آوریم و قرار دهیم:

$$B_{z,k} = \mu Z(x_k)^T G^T G Z(x_k) + A_{z,k}.$$

پس به دنبال روشی برای به دست آوردن  $A_{z,k}$  که تقریبی از ماتریس  $Z(x_k)^T T(x_k, \lambda^k) Z(x_k)$  است، هستیم. در نزدیکی  $x^*$ ، جواب مساله، می توان انتظار داشت که به ازای هر  $k$  داشته باشیم:

$$AC(x_k, \varepsilon) = AC(x^*, \varepsilon),$$

$$VE(x_k, \varepsilon) = VE(x^*, \varepsilon),$$

$$VI(x_k, \varepsilon) = VI(x^*, \varepsilon).$$

فرض کنید  $t = |AC(x^*, \varepsilon)|$  و  $A_{z,k} \approx Z(x_k)^T T(x_k, \lambda^k) Z(x_k)$  هدف، محاسبه  $A_{z,k+1}$  است به طوری که

$$A_{z,k+1} \approx Z(x_{k+1})^T T(x_{k+1}, \lambda^{k+1}) Z(x_{k+1}).$$

با قرار  $s_k = Z(x_{k+1})^T (x_{k+1} - x_k)$ ، داریم:  $x_{k+1} - x_k = Y(x_{k+1}) q_k + Z(x_{k+1}) s_k$ ، که  $Y(x_{k+1})$  یک ماتریس پایه برای برد  $A(x_{k+1})$  است و  $q_k = Y(x_{k+1})^T (x_{k+1} - x_k)$ . توجه داریم که اگر قیود مساله نیز خطی باشند، آنگاه به ازای هر  $k$ ، داریم  $q_k = 0$ . وقتی قیود غیر خطی هستند، در نزدیکی جواب می توان انتظار داشت که  $Y(x_{k+1}) q_k$  کوچک باشد [۱۰] و در نتیجه  $y_k$  را به عنوان تقریبی از  $Z(x_{k+1})^T T(x_{k+1}, \lambda^{k+1}) Z(x_{k+1}) s_k$  به صورت زیر به دست می آوریم:

$$Z(x_{k+1})^T T(x_{k+1}, \lambda^{k+1}) Z(x_{k+1}) s_k \approx Z(x_{k+1})^T [(E_{k+1} - E_k) \sigma_{k+1} - (I_{k+1} - I_k) e + A_k \lambda^k] := y_k, \quad (15)$$

که در آن،

$$e = [1 \dots 1]^T, \quad (16)$$

$$A_k = [\dots \nabla c_i(x_k) \dots]_{i \in AC(x_k, \varepsilon)},$$

$$E_k = [\dots \nabla c_i(x_k) \dots]_{i \in VE(x_k, \varepsilon)},$$

$$I_k = [\dots \nabla c_i(x_k) \dots]_{i \in VI(x_k, \varepsilon)},$$

$$\sigma_k = [\dots \text{sgn}(c_i(x_k)) \dots]_{i \in VE(x_k, \varepsilon)}^T.$$

اکنون،  $A_{z,k+1}$  را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که در رابطه سکانت (ساختمند) صدق کند، یعنی داشته باشیم:

$$A_{z,k+1}s_k = y_k. \quad (17)$$

با توجه به این که فرض کوچک بودن  $Y(x_{k+1})q_k$  ممکن است در همه نقاط درست نباشد ([۱۱] را ببینید)، تنها در صورتی از بهنگام‌سازی سکانت و رابطه سکانت (۱۷) برای محاسبه  $A_{z,k+1}$  استفاده می‌کنیم که  $Y(x_{k+1})q_k$  واقعاً کوچک باشد، یعنی وقتی داشته باشیم:

$$\|q_k\| < \frac{\eta}{(k+1)^{1+\nu}} \|s_k\|, \quad (18)$$

به ازای  $\nu = 0.1$ .

#### ۴ بهنگام‌سازی ساختمند ماتریس هسی تصویر شده

با توجه به مطالبی که در بخش قبلی بیان شد، ماتریس هسی تصویر شده را با استفاده از روش BFGS ساختمند به دست می‌آوریم که فرمول آن به صورت زیر است [۱۲]:

$$A_{z,k+1} = A_{z,k} + \frac{(y_k - A_{z,k}s_k)v_k^T + v_k(y_k - A_{z,k}s_k)^T}{v_k^T s_k} - \frac{(y_k - A_{z,k}s_k)^T s_k}{(v_k^T s_k)^2} v_k v_k^T, \quad (19)$$

که در آن  $y_k^s = y_k + \mu Z(x_{k+1})^T G^T G Z(x_{k+1})s_k$ ،  $v_k = y_k^s + \sqrt{\frac{s_k^T s_k}{s_k^T A_k^s s_k}} A_k^s s_k$

$$A_k^s = A_{z,k} + \mu Z(x_{k+1})^T G^T G Z(x_{k+1}).$$

می‌توان دید که  $A_{z,k+1}$  به دست آمده از رابطه (۱۹)، در رابطه سکانت (۱۷) صدق می‌کند. در بخش بعدی به بیان نتایج همگرایی سراسری و موضعی الگوریتم، با به کارگیری فرمول BFGS ساختمند برای بهنگام‌سازی ساختمند ماتریس هسی تصویر شده می‌پردازیم.

#### ۵ همگرایی

ابتدا تعاریف و فرض‌های مورد نیاز برای همگرایی سراسری را بیان می‌کنیم.

**فرض‌های همگرایی سراسری:**

- در الگوریتم جستجوی خطی،  $\alpha_k$  طوری به دست می‌آید که

$$\psi(x_k, \mu) - \psi(x_k + \alpha_k d_k, \mu) \geq \gamma_1 (d_k^T g_k)^2$$

که در آن،  $\gamma_1 > 0$  و

$$g^k = \nabla \psi(x_k, \mu) + \sum_{i \in VE(x_k, \varepsilon)} \text{sgn}(c_i(x_k)) \nabla c_i(x_k) - \sum_{i \in VI(x_k, \varepsilon)} \nabla c_i(x_k)$$

و

$$VE(x_k, \varepsilon) = \{i \in E \cap AC(x_k, \varepsilon) : |\nabla^T c_i(x_k) d_k| > 0\},$$

$$VI(x_k, \varepsilon) = \{i \in I \cap AC(x_k, \varepsilon) : \nabla^T c_i(x_k) d_k < 0\}.$$

- دنباله نقاط  $x_k$  تولید شده از الگوریتم با یک نقطه شروع دلخواه  $x_0$ ، به یک مجموعه فشرده  $D$  تعلق دارند.
- توابع  $c_i$ ،  $i \in E \cup I$ ، روی  $D$  دوبار مشتق پذیر پیوسته هستند.
- $x^*$  یک مینیمم کننده موضعی برای  $\psi(x, \mu)$  در  $D$  است که شرایط مرتبه دوم اکید را برقرار می سازد.
- گرادیان های قیود موثر در  $x^*$  مستقل خطی اند.
- اکنون، قضیه همگرایی سراسری الگوریتم را بیان می کنیم.
- **قضیه ۵-۱:** فرض کنید که  $D$  یک مجموعه فشرده است و تعداد نقاط ایستای  $\psi$  در  $D$  متناهی است.
- همه ی نقاط مرتبه اول  $\psi$  در  $D$ ، نقاط مرتبه دوم اکید برای  $\psi$  هستند.
- گرادیان های قیود  $\varepsilon$ - موثر در  $x_k$  مستقل خطی اند. به علاوه فرض کنید که برای هر زیر دنباله  $x_{k_i}$  از  $x_k$  که  $x_{k_i} \rightarrow x^*$  و  $AC(x_{k_i}, \varepsilon) = AC(x^*, \varepsilon)$ ، ثابت مثبت به اندازه کافی کوچک  $\delta$  وجود دارد به طوری که

$$\| (A_{\tau, k_i} - Z^T(x_{k_i})T(x_{k_i}, \lambda_{k_i})Z(x_{k_i}))s_{k_i} \| \leq \delta \|s_{k_i}\|.$$

در این صورت،  $x_k$  به  $x^*$  همگراست.

**اثبات:** مشابه اثبات قضیه ۴-۳ در [۱۳] است.

در ادامه فرض های مورد نیاز برای همگرایی مجانبی الگوریتم بیان شده است.

#### فرض های همگرایی مجانبی:

- (A1):  $x^*$  یک جواب موضعی برای مساله است و  $D = \{x: \|x - x^*\| \leq \varepsilon_1\}$ ، که در آن،  $\varepsilon_1 > 0$ .
- (A2): دنباله نقاط  $x_k$  از الگوریتم، با یک نقطه شروع دلخواه  $x_0$ ، تولید می شود.
- (A3): توابع  $c_i$ ،  $i \in E \cup I$ ، روی  $D$  دو بار مشتق پذیر پیوسته اند.
- (A4): توابع  $\nabla^r c_i(x)$ ،  $i \in E \cup I$  در  $x^*$  پیوسته لپشیتز هستند، یعنی به ازای هر  $i \in E \cup I$ ، ثابت  $L_i > 0$  و عدد  $p_i \in (0, 1)$  وجود دارند به طوری که برای هر  $x \in D$ ، داریم:

$$\|\nabla^r c_i(x) - \nabla^r c_i(x^*)\| \leq L_i \|x - x^*\|^{p_i}$$

به علاوه  $\lambda(x) = \arg \min \|A(x)\lambda - \nabla \psi_\varepsilon(x, \mu)\|_p$  در  $x^*$  پیوسته لپشیتز است.

- (A5):  $P(x) = \mu Z(x)^T G^T G Z(x)$  در  $x^*$  پیوسته لپشیتز است، یعنی ثابت  $L > 0$  و عدد  $p \in (0, 1)$  وجود دارند به طوری که برای هر  $x \in D$ ، داریم:

$$\|P(x) - P(x^*)\| \leq L \|x - x^*\|^p.$$

- (A6): گرادیان های قیود موثر در  $x_k$  برای هر  $k$ ، مستقل خطی اند.

- (A7): ثابت های مثبت  $b_1$  و  $b_2$  وجود دارند به طوری که برای هر  $w \neq 0$  با بعد مناسب، داریم:

$$b_1 \|w\|^r \leq w^T B^* w \leq b_2 \|w\|^r,$$

که در آن،  $B^*$  ماتریس هسی تصویر شده در  $x^*$  است.

اکنون به بیان قضایای همگرایی مجانبی الگوریتم می پردازیم.

**قضیه ۵-۲:** فرض کنید نامساوی (۱۸) و فرض‌های (A4) تا (A7) برقرارند. در این صورت  $\varepsilon_r > 0$  وجود دارد که اگر  $\|x_k - x^*\| \leq \varepsilon_r$  و  $\|x_{k+1} - x^*\| \leq \varepsilon_r$ ، آنگاه ثابت  $C_1 \geq 1$  وجود دارد که

$$\|y_k - A_{z_c}^* s_k\| \leq \gamma_k \|s_k\|,$$

که در آن

$$\omega_k \leq \gamma_k \leq C_1(1+\eta)\omega_k + \eta \frac{\|Z^* B^* Y^*\|}{(1+k)^{1+\nu}}, \quad (20)$$

$$A_z^* = Z(x^*)^T T(x^*, \lambda^*) Z(x^*) \text{ و } \omega_k = \max(\|x_k - x^*\|, \|x_{k+1} - x^*\|)$$

**اثبات:** برای سادگی نمایش علامت خط روی یک متغیر، نشان‌دهنده این است که مقدار آن در نقطه  $x_{k+1}$  محاسبه می‌شود و عدم نمایش علامت خط روی متغیر نشان‌دهنده این است که مقدار آن در نقطه  $x_k$  محاسبه می‌شود. با استفاده از فرض (A4) و قضیه تیلور داریم:

$$(\bar{E} - E)\bar{\sigma} = \sum_{i \in VE(\bar{x}, \cdot)} \text{sgn}(c_i(\bar{x})) \nabla^T c_i(\bar{x})(\bar{x} - x) + U_1(\bar{x} - x),$$

$$(\bar{I} - I)e = \sum_{i \in VI(\bar{x}, \cdot)} \nabla^T c_i(\bar{x})(\bar{x} - x) + U_r(\bar{x} - x),$$

$$(\bar{A} - A)\bar{\lambda} = \sum_{i \in AC(\bar{x}, \cdot)} \bar{\lambda}_i \nabla^T c_i(x_k)(\bar{x} - x) + U_r(\bar{x} - x),$$

$$(\bar{A} - A)(\bar{\lambda} - \lambda) = U_r(\bar{x} - x),$$

که  $\|U_i\| = O\|\bar{x} - x\|$  برای  $i = 1, \dots, 4$ . از این که  $\bar{Z}^T \bar{A} = 0$  و از تعریف  $y$  داریم:

$$y = \bar{Z}^T [(\bar{E} - E)\bar{\sigma} - (\bar{I} - I)e + A\lambda]$$

$$= \bar{Z}^T [(\bar{E} - E)\bar{\sigma} - (\bar{I} - I)e + A\bar{\lambda} + (\bar{A} - A)(\bar{\lambda} - \lambda)]$$

$$= \bar{Z}^T T(\bar{x}, \bar{\lambda})(\bar{x} - x) + \bar{Z}^T U(\bar{x} - x),$$

که  $\|U\| = O\|\bar{x} - x\|$ . از آنجایی که  $\bar{x} - x = \bar{Y}q + \bar{Z}s$  نتیجه می‌گیریم:

$$y = \bar{Z}^T T(\bar{x}, \bar{\lambda})(\bar{Y}q + \bar{Z}s) + \bar{Z}^T U(\bar{Y}q + \bar{Z}s),$$

که نتیجه می‌دهد که:

$$y - A_z^* s = (\bar{Z}^T T(\bar{x}, \bar{\lambda})\bar{Z} - A_z^* + \bar{Z}^T U\bar{Z})s + (\bar{Z}^T T(\bar{x}, \bar{\lambda})\bar{Y} + \bar{Z}U\bar{Y})q.$$

ادامه اثبات، مشابه اثبات لم ۴-۱۳ در [۱۴] است.

**قضیه ۵-۳:** فرض کنید نامساوی (۱۸) و فرض‌های (A4) تا (A7) برقرارند و  $A_{z,k+1}$  با استفاده از رابطه (۱۹)

محاسبه می‌شود. در این صورت ثابت مثبت  $\alpha_1$  و مجموعه  $\bar{D} \subseteq D$  وجود دارند به طوری که

$$\|A_{z,k+1} - A_z^*\|_{B^*} \leq \|A_{z,k} - A_z^*\|_{B^*} + \alpha_1 \gamma_k, \quad (21)$$

برای هر  $x_k, x_{k+1} \in \bar{D}$  که  $\|\cdot\|_{B^*} = \|B^{*-1}(\cdot)B^{*-1}\|_F$

**اثبات:** مشابه اثبات قضیه ۶-۴ در [۱۵] است.

**قضیه ۵-۴:** فرض کنید که فرض‌های (A1) تا (A7) برقرارند و  $K > 0$  موجود است به طوری که برای  $k > K$  نامساوی (۱۸) برقرار می‌شود و برای  $k > K$ ،  $B_{z,k}$ ها در الگوریتم با استفاده از فرمول BFGS ساختمانند به دست می‌آیند. در این صورت داریم:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|(A_{z,k} - A_z^*)s_k\|}{\|x_{k+1} - x_k\|} = 0. \quad (22)$$

**اثبات:** مشابه اثبات قضیه ۷-۴ در [۱۵] است.

**قضیه ۵-۵:** فرض کنید که فرض‌های (A1) تا (A7) برقرارند، دنباله  $\{x_k\}$  با الگوریتم تولید می‌شود، به این صورت که وقتی نامساوی (۱۸) برقرار است،  $B_{z,k}$  از فرمول BFGS ساختمانند به دست می‌آید و در غیر این صورت،  $B_{z,k} = B_{z,k-1}$ . در این صورت، ثابت‌های مثبت  $\varepsilon$  و  $\delta$  وجود دارند به طوری که اگر  $\|x_0 - x^*\| \leq \varepsilon$  و  $\|A_{z,0} - A_z^*\|_W \leq \delta$ ، آنگاه دنباله  $\{x_k\}$  با نرخ زبرخطی دوگامی به طور مجانبی به  $x^*$  همگراست، یعنی

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|} = \rho.$$

**اثبات:** با استفاده از روابط (۲۱) و (۲۲)، حکم از قضیه ۴-۴ در [۱۵] به دست می‌آید.

## ۶ نتایج عددی

الگوریتم را برای حل مساله بهینه‌سازی به صورت (۱) آزمون کردیم، که در آنها  $G \in \mathbb{R}^{l \times n}$  و  $b \in \mathbb{R}^l$  ماتریس و بردار تصادفی در  $[-5, 5]$  هستند که با استفاده از دستور rand در نرم افزار MATLAB تولید شده‌اند. همچنین، معادلات غیرخطی به صورت زیر هستند:

$$c_i(x) = (3 - 2x_{i+1})x_{i+1} - x_i - 2x_{i+2} + 1 = 0, \quad i = 1, \dots, n-2,$$

که در [۱۶] آمده‌اند. برای مقایسه الگوریتم با روش‌های دیگر، نتایج به دست آمده از اجرای تابع fmincon در MATLAB برای این ۱۶ مساله تصادفی را به دست آوردیم. نقطه شروع هر دو الگوریتم بردار صفر در نظر گرفته شده است. نتایج حاصل از اجرای دو الگوریتم در جدول ۱ آمده است. در این جدول  $l$  و  $n$  نشان‌دهنده ابعاد مساله هستند.

با توجه به جدول ۱ واضح است که روش ارایه‌شده برای رسیدن به یک جواب با دقت مناسب به تعداد ارزیابی بسیار کمتری از توابع قیود مساله نیاز دارد که این امر کارایی روش پیشنهادی را نشان می‌دهد.

**جدول ۱.** نتایج عددی حاصل از اجرای الگوریتم‌ها بر روی مسایل آزمون

ابعاد مساله		خطای شدنی بودن جواب		مقدار نهایی تابع هدف		تعداد ارزیابی توابع قیود	
$l$	$n$	fmincon	الگوریتم ارایه‌شده	fmincon	الگوریتم ارایه‌شده	fmincon	الگوریتم ارایه‌شده
۳	۵	۲/۸۸E-۱۰	۱/۸۷E-۰۳	۱/۷۵E+۰۱	۱/۷۵E+۰۱	۱۶۵۶	۲۴
۳	۵	۲/۲۶E-۰۷	۱/۶۸E-۱۰	۲/۱۰۸۵۶۲	۲/۱۱۰۱۲۷	۳۳	۳۷
۳	۵	۳/۱۱E-۰۹	۱/۹۲E-۰۸	۰/۱۵۴۴۸۴	۰/۱۵۴۴۸۴	۲۰۳	۲۵

۸	۱۰	۸/۴۳E-۰۸	۱/۶۴E-۰۹	۵۰/۲۲۵۲۱	۴۸/۹۶۵۵۴	۱۰۸۲	۴۲
۸	۱۰	۷/۳۱E-۰۸	۰/۱۰۹۰۸	۱/۰۹E+۰۲	۱/۱۴E+۰۲	۲۶۰۲	۳۴
۸	۱۰	۲/۲۹E-۰۸	۶/۵۱E-۰۵	۵۸/۴۵۵۷	۵۸/۴۸۷۰۵	۳۴۱۷	۲۵
۱۸	۲۰	۸/۴۶E+۰۰	۰/۰۰۸۸۰۶	۶/۱۷E+۰۲	۵/۵۲E+۰۲	۲۱۳۹	۳۰
۱۸	۲۰	۸/۸۴E-۱۱	۸/۳۷E-۰۹	۷/۶۲E+۰۲	۶/۱۷E+۰۲	۱۲۴۹	۵۷۸
۱۸	۲۰	۱/۵۰E-۰۹	۹/۷۵E-۰۴	۴/۳۷E+۰۲	۴/۳۷E+۰۲	۲۲۰۹	۴۹
۲۸	۳۰	۶/۵۶E-۱۱	۴/۱۱E-۱۲	۱/۳۹E+۰۳	۱/۵۳E+۰۳	۲۶۷۸	۵۷
۲۸	۳۰	۷/۹۳E-۱۱	۴/۲۱E-۱۵	۹/۹۲E+۰۲	۱/۳۰E+۰۳	۱۲۵۵	۳۶
۲۸	۳۰	۱/۳۶E-۱۲	۴/۹۷E-۱۳	۱/۱۱E+۰۳	۹/۹۷E+۰۲	۳۳۸۶	۳۰
۳۸	۴۰	۲/۰۸E-۱۴	۱/۷۳E-۰۸	۲/۶۲E+۰۳	۲/۲۲E+۰۳	۵۲۱	۴۴
۳۸	۴۰	۶/۶۸E-۱۳	۳/۴۷E-۱۲	۱/۵۲E+۰۳	۱/۹۴E+۰۳	۳۰۵	۶۰
۴۸	۵۰	۱/۹۰E-۱۴	۱/۹۱E-۱۲	۴/۴۸E+۰۳	۴/۹۲۲۴E+۰۳	۳۴۸۹	۲۳۲
۴۸	۵۰	۱/۵۰E-۱۱	۴/۷۳E-۱۱	۴/۸۴E+۰۳	۵/۰۷E+۰۳	۱۶۴۲	۴۳

## ۷ نتیجه‌گیری

در این مقاله به ارایه یک روش جریمه‌ای دقیق برای حل مسایل کم‌ترین مربعات خطی با قيود غیرخطی پرداختیم. با توجه به ساختار خاص تابع هدف مساله، ابتدا یک رابطه سکانت ساختمند برای ماتریس هسی تصویرشده در مساله جریمه‌ای به دست آوردیم. سپس از یک روش شبه نیوتن ساختمند برای تقریب ماتریس هسی تصویرشده استفاده نموده و قضایای همگرایی سراسری و مجانبی روش ارایه‌شده را بیان نمودیم. کارایی روش ارایه‌شده را نیز با نتایج عددی به دست آمده از الگوریتم و نتایج حاصل از اجرای تابع `fmincon` در `MATLAB`، مقایسه نمودیم.

## منابع

- [1] Nievergelt, Y., (2000). A tutorial history of least squares with applications to astronomy and geodesy. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 121, 37-72.
- [2] Vandecappelle, M., Vervliet, N., Lathauwer, L. D., (2020). A Second-Order Method for Fitting the Canonical Polyadic Decomposition With Non-Least-Squares Cost. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 68, 4454-4465.
- [3] Wei, B., Xie, N., (2021). Parameter estimation for grey system models: A nonlinear least squares perspective. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 95, 105653.
- [4] Dennis, J. E., Martinez, H. J., Tapia R. A., (1989). Convergence theory for the structured BFGS secant method with an application to nonlinear least squares. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 61, 161-178.
- [5] Orban, D., Siqueira, A.S., (2020). A regularization method for constrained nonlinear least squares. *Computational Optimization and Applications*, 76, 961-989.
- [6] Shakhno, S.M., (2020). Gauss-Newton-Kurchatov Method for the Solution of Nonlinear Least-Squares Problems. *Journal of Mathematical Sciences*, 247, 58-72.
- [7] Arzani, F., Peyghami, M. R., (2016). A Filtered Nonmonotone Approach for Solving Nonlinear Systems of Equations. *Journal of Operational Research and Its Applications*, 13(2), 85-99.

- [8] Coleman, T. F., Conn, A. R., (1982). Nonlinear programming via an exact penalty function: Asymptotic analysis. *Mathematical Programming*, 24, 123–136.
- [9] Coleman, T. F., Conn, A. R., (1982). Nonlinear programming via an exact penalty function: Global analysis. *Mathematical Programming*, 24, 137–161.
- [10] Mahdavi-Amiri, N., Bartels, R. H., (1989). Constrained nonlinear least squares: An exact penalty approach with projected structured quasi-Newton updates. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 15(3), 220–242.
- [11] Nocedal, J., Overton, M. L., (1985). Projected Hessian updating algorithms for nonlinearly constrained optimization. *SIAM J. Numerical Analysis*, 22(5), 821–850.
- [12] Bidabadi, N., Mahdavi-Amiri, N., (2012). A two-step superlinearly convergent projected structured BFGS method for constrained nonlinear least squares. *Optimization*, 62(6) (2013), 797-815.
- [13] Mahdavi-Amiri, N., Ansari, M. R., (2013). Superlinearly convergent exact penalty projected structured Hessian updating schemes for constrained nonlinear least squares: global analysis, *Optimization*, 62(6), 675-691.
- [14] Mahdavi-Amiri, N., Ansari, M. R., (2012). Superlinearly convergent exact penalty projected structured Hessian updating schemes for constrained nonlinear least squares: asymptotic analysis. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 38(3), 767-786.
- [15] Bidabadi, N., Mahdavi-Amiri, N., (2014). Superlinearly Convergent Exact Penalty Methods with Projected Structured Secant Updates for Constrained Nonlinear Least Squares, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 62(1), 154-190.
- [16] Karmitsa, N., (2007). Test problems for large-scale nonsmooth minimization. Reports of the Department of Mathematical Information Technology. Series B, Scientific computing 4, University of Jyvaskyl.