مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن،سال هفدهم، شماره اول (پیاپی ۶۴)، بهار ۹۹، ص ص ۶۵-۴۹
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

تعیین کران‌های مقادیر بهینه‌ی تابع هدف مساله برنامه‌ریزی مرتبه دوم بازه‌ای با متغیرهای نامقید

مهدیه قربانی هرمزدآبادی[1]، حسن میش مست نهی[2*]، مهدی الله دادی[3]
۱- دانشجوی دکتری ریاضی کاربردی، گروه ریاضی، واحد کرمان، دانشگاه آزاد اسلامی، کرمان، ایران
۲- استاد، دانشکده ریاضی، گروه ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران
۳- دانشیار، دانشکده ریاضی، گروه ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

رسید مقاله: ۲۹ تیر ۱۳۹۶
پذیرش مقاله: ۲۸ دی ۱۳۹۸

چکیده
در اغلب مسایل کاربردی در دنیای واقعی، پارامترهای مساله نادقیق هستند. این موضوع سبب می‌شود که داده‌های مساله به صورت غیرقطعی و بازه‌ای به دست آیند. مدل‌های ریاضی بازه‌ای، شامل مسایل برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای و مسایل برنامه‌ریزی غیرخطی بازه‌ای هستند. یکی از مدل‌های غیرخطی ریاضی که بر پایه نادقیق بودن ضرایب مطرح شده است، مساله برنامه‌ریزی مرتبه دوم بازه‌ای است. این نوع مسایل که پارامترها به صورت نادقیق بیان می‌شوند کاربرد وسیعی در علوم مختلف از جمله مدیریت موجودی، علم اقتصاد، انتخاب سهام، طراحی مهندسی و مطالعه مولکولی دارند. پارامترهای بازه‌ای در این مسایل بهینه‌سازی سبب می‌شوند که مقدار تابع هدف نیز به صورت نادقیق و بازه‌ای به دست آید. این مقاله دشوارترین نوع مسایل برنامه‌ریزی مرتبه دوم بازه‌ای که شامل متغیرهای تصمیم نامقید در علامت است را بررسی کرده و روشی جدید برای تعیین کران‌های تابع هدف آن ارایه می‌دهد. در این روش با حل زیرمدل‌هایی که شامل متغیرهای نامنفی هستند، کران‌های مقادیر بهینه تابع هدف به دست می‌آید.

کلمات کلیدی: ماتریس بازه‌ای، مساله برنامه‌ریزی مرتبه دوم بازه‌ای، کران‌های تابع هدف، متغیرهای تصمیم نامقید در علامت.

۱ مقدمه
مسایل برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای که شامل تابع هدف خطی و قیدهای خطی می‌باشند، بارها مورد بررسی قرار گرفته و روش‌های مختلفی برای تعیین کران‌های تابع هدف و مجموعه جواب‌های بهینه‌ی آنها ارایه شده است [۱]. مسایل برنامه‌ریزی غیرخطی دسته‌ی بزرگی از مدل‌های ریاضی را تشکیل می‌دهند و جا دارد که بیشتر به

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی:hmnehi@hamoon.usb.ac.ir

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.1.1.7]

آن‌ها پرداخته شود [۲،۳،۴]. در این مقاله یک حالت خاص از مسایل برنامه‌ریزی غیرخطی که مساله مرتبه دوم بازه‌ای با متغیرهای تصمیم آزاد در علامت می‌باشد، بررسی می گردد [۵].

مساله برنامه‌ریزی مرتبه دوم شامل تابع هدف مرتبه دوم و قیدهای خطی است. در یک مساله برنامه‌ریزی مرتبه دوم معمولی ضرایب تابع هدف و قیدها، مقادیری قطعی و ثابت هستند. روش مضارب لاگرانژ روشی برای حل این نوع مسایل است [۲].

هرچند در اکثر مسایل روزمره و در دنیای واقعی پارامترهای مساله به درستی شناخته شده نیستند و این باعث می‌شود داده‌های مساله به صورت غیرقطعی و نادقیق باشند. از انواع این مسایل نادقیق می‌توان مسایل برنامه‌ریزی مرتبه دوم با ضرایب فازی [۶] و مسایل برنامه‌ریزی مرتبه دوم با ضرایب بازه‌ای را نام برد. یک راه دیگر برای پردازش پارامترهای نادقیق، توزیع احتمالات است. اما توزیع احتمالات نیاز به ساختار قابل پیش‌بینی از قبل و مطابق با قواعد دارد که در نمونه‌های واقعی غیرممکن است. در این مقاله ضرایب نادقیق را به صورت بازه مشخص می کنیم. بدین سبب مقدار بهینه‌ی تابع هدف موردنظر به صورت دقیق به دست نمی‌آید و در یک مساله مینیمم‌سازی با تعیین مقادیر بهترین (کران پایین) و بدترین (کران بالا)، بازه‌ای برای مقادیر بهینه تابع هدف مشخص می گردد. مسایل برنامه‌ریزی مرتبه دوم بازه‌ای که شامل پارامترهای بازه‌ای است توسط محققانی همچون لادیک [۹،۸،۷]، لی [۱۱،۱۰] و لیو و وانگ [۱۲] مورد بررسی قرار گرفته‌اند. لی و همکاران برای حل مساله IQP[1] با قیدهای نامساوی روش‌های مختلفی از جمله به کار بردن دوگان درن [۱۴،۱۳] را ارایه داده‌اند. لی و تیان [۱۵] استفاده از تکنیک برنامه‌ریزی ریاضی دوترازه جهت تعیین کران‌های تابع هدف را پیشنهاد کرده‌اند. مساله IQP با قیدهای مساوی در تعیین مقدار بدترین، یک مساله $NP-$سخت است [۱۴،۱۳]. لادیک بررسی کرد که مسایل ILP[2] وIQP با متغیرهای نامقید برای تعیین هر دو مقدار بهترین و بدترین هدف به مسایل $NP-$سخت تبدیل می‌شود [۸، ۹].

در این مقاله روشی جدید برای تعیین مقادیر بهترین و بدترین تابع هدف IQP با متغیرهای نامقید ارایه می گردد. ما در این روش با حل زیرمدل‌هایی از مساله که دارای متغیرهای نامنفی هستند، کران‌های مقادیر بهینه‌ی تابع هدف را تعیین کرده‌ایم. قبلاً مساله برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای ILP با متغیرهای نامقید توسط لادیک بررسی و روش‌هایی برای تعیین کران‌های بالا و پایین آن ارایه شده است [۸].

تعیین مجموعه جواب‌های بهینه مسایل برنامه‌ریزی مرتبه دوم بازه‌ای در مقاله‌ای توسط نویسندگان این مقاله بررسی شده است [۱۶].

مسایل برنامه‌ریزی مرتبه دوم کاربردهای فراوانی دارند. از جمله استفاده آنها در مدیریت موجودی [۱۷]، انتخاب سهام [۱۸]، طراحی مهندسی [۱۹]، علم اقتصاد [۲۰] و مطالعه مولکولی [۲۰] می‌باشد.

[1]Interval quadratic programming
[2]Interval linear programming

این مقاله شامل ۵ بخش است. در بخش ۲ پیش‌نیاز و مقدمات آمده است. بخش ۳ مساله برنامه‌ریزی مرتبه دوم بازه‌ای نامقید و روش حل این مسایل را معرفی می‌کند. بخش ۴ نتایج عددی و بالاخره بخش ۵ نتیجه‌گیری و پیشنهادهای مقاله را دربردارد.

۲ پیش‌نیاز و مقدمات

روش‌های مختلفی برای بیان داده‌های نادقیق وجود دارد. یکی از این روش‌ها، بیان داده‌ها به صورت بازه می‌باشد. در این بخش ابتدا مفاهیم بازه‌ای و سپس برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای را مرور می‌کنیم.

۲-۱ حساب بازه‌ای

در این قسمت به تعاریف مربوط به اعمال جبری بازه‌ای می‌پردازیم [۲۱-۲۶].

تعریف ۱ اگر $x^-, x^+ \in \mathbb{R}$ و $x^- \le x^+$ آنگاه $x^\pm = \left[x^-, x^+\right]$ را یک عدد بازه‌ای می‌گوییم، که در آن $\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی است. اگر $x^- = x^+$ ، آنگاه $x^\pm$ یک عدد حقیقی و به عبارتی یک عدد بازه‌ای تباهیده است.

تعریف ۲ اگر $m,n \in \mathbb{N}$ آنگاه $A^\pm = \left[A^-, A^+\right] = \left\{A \in \mathbb{R}^{m\times n} : A^- \le A \le A^+\right\}$ را یک ماتریس بازه‌ای می گوییم که در آن ماتریس‌های حقیقی $A^+ = \left[a_{ij}^+\right],\ A^- = \left[a_{ij}^-\right]$ کران‌های ماتریس بازه‌ای $A^\pm$ هستند، به طوری که به ازای هر i, j، $a_{ij}^- \le a_{ij}^+$ به بیان دیگر $A^- \le A^+$.

برای هر ماتریس بازه‌ای $A^\pm$ ماتریس مرکزی A^c و ماتریس شعاعی A^Δ که ماتریس‌هایی حقیقی هستند؛ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A^\Delta = \frac{1}{2}\left(A^+ - A^-\right) \quad , \quad A^c = \frac{1}{2}\left(A^+ + A^-\right).$$

لذا ماتریس بازه‌ای $A^\pm$ را نیز می‌توان به این صورت نوشت:

$$\mathbf{A}^\pm = [\mathrm{A}^-, \mathrm{A}^+] = \left[\mathrm{A}^c - \mathrm{A}^\Delta \quad , \quad \mathrm{A}^c + \mathrm{A}^\Delta\right]$$

بردار بازه‌ای حالت خاصی از ماتریس بازه‌ای با یک ستون است. بردار بازه‌ای m بعدی $b^\pm$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{b}^\pm = [\mathrm{b}^-, \mathrm{b}^+] = \{\mathrm{b} \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}} \mid \mathrm{b}^- \le \mathrm{b} \le \mathrm{b}^+\} = \left[\mathrm{b}^c - \mathrm{b}^\Delta \quad , \quad \mathrm{b}^c + \mathrm{b}^\Delta\right]$$

که در آن $b^\Delta = \frac{1}{2}\left(b^+ - b^-\right) \quad , \quad b^c = \frac{1}{2}\left(b^+ + b^-\right)$.

تعریف ۳ فرض کنید $\{\pm 1\}^m$ مجموعه‌ای از تمام بردارهای mبعدی شامل ۱،۱- باشد و بردار $y \in \{\pm 1\}^m$ آنگاه $\{\pm 1\}^m = \left\{y \in \mathbb{R}^m : |y| = e\right\}$ که $e = (1,1,\ldots,1)^t$ است.

تعریف ٤ اگر بردار $y \in \{\pm 1\}^m$ باشد،آنگاه ماتریس قطری متناظربا y به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_y = diag\left(y_1, y_2, \ldots, y_m\right).$$

تعریف ۵ اگر $x \in \mathbb{R}^n$، آنگاه بردار علامت x عبارت است از $s = \operatorname{sgn} x \in \{\pm ۱\}^n$ و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\operatorname{sgn} x)_i = \begin{cases} ۱ & x \geq ۰ \\ -۱ & x < ۰ \end{cases}$$

که $i = ۱,۲,...,n$. همچنین بردار قدر مطلق x به صورت $|x| = D_s x$ می‌باشد.

تعریف ٦ اگر $y \in \{\pm ۱\}^m$ و $s \in \{\pm ۱\}^n$ آنگاه ماتریس حقیقی A_{ys} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A_{ys} = A^c - D_y A^\Delta D_s$$

به طور مشابه، اگر $y \in \{\pm ۱\}^m$، آنگاه بردار حقیقی b_y به صورت زیر است:

$$b_y = b^c - D_y b^\Delta$$

اعضای A_{ys} و b_y نقاط انتهایی ضرایب بازه‌ای $A^\pm$ و $b^\pm$ هستند، بنابراین $A_{ys} \in A^\pm$ و $b_y \in b^\pm$.

معادله بازه‌ای $[a^-, a^+]x = \left[b^-, b^+\right]$ را در نظر می‌گیریم. جواب این معادله لزوماً عددی حقیقی نیست.

برای مثال اگر $[۲,۳]x = [۴,۶]$ آنگاه $x \in \left[\frac{۴}{۳}, ۳\right]$.

در واقع جواب معادله بازه‌ای فوق در مجموعه زیر که یک بازه است قرارخواهد داشت.

$$\left\{k \in \mathbb{R} \middle| \alpha k = \beta, \alpha \in [a,\mathrm{b}], \beta \in [\mathrm{c},\mathrm{d}]\right\}$$

به‌طور مشابه نامعادله $[a,\mathrm{b}]x \leq [\mathrm{c},\mathrm{d}]$ نیز جوابی به صورت مجموعه زیر دارد:

$$\left\{k \in \mathbb{R} \middle| \alpha k \leq \beta, \alpha \in [a,\mathrm{b}], \beta \in [\mathrm{c},\mathrm{d}]\right\}$$

یعنی جواب یک معادله یا نامعادله بازه‌ای به جای یک عدد حقیقی یک بازه است. بنابراین متغیرهای تصمیم یک مساله بهینه‌سازی بازه‌ای لزوماً اعداد حقیقی نیستند. از این رو در چنین مساله‌ای به جای متغیرهای تصمیم حقیقی باید متغیرهای تصمیم بازه‌ای را در نظر بگیریم.

تعریف ۷ مجموعه تمام ماتریس‌های بازه‌ای $m \times n$ را با $\mathbb{IR}^{m \times n}$ و مجموعه تمام بردارهای بازه‌ای nبعدی را با $\mathbb{IR}^n$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۸ بردار $x \in \mathbb{R}^n$ جواب ضعیف دستگاه نامعادلات $A^\pm x \leq b^\pm$، $A^\pm \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ و $b^\pm \in \mathbb{IR}^m$است هرگاه $A \in A^\pm$ و $b \in b^\pm$ وجود داشته باشد به طوری که $Ax \leq b$. دستگاه نامعادلات $A^\pm x \leq b^\pm$ شدنی ضعیف است، اگر دارای جواب ضعیف نامنفی باشد.

تعریف ۹ بردار $x \in \mathbb{R}^n$جواب قوی دستگاه نامعادلات $A^\pm x \leq b^\pm$است اگر هر دستگاه $Ax \leq b$، $A \in A^\pm$ و $b \in b^\pm$ حل‌پذیر باشد. دستگاه $A^\pm x \leq b^\pm$ شدنی قوی است، هرگاه دارای جواب قوی نامنفی باشد.

قضیه ۱ [۲۲] بردار $x \in \mathbb{R}^n$ جواب ضعیف دستگاه نامعادلات $A^\pm x \leq b^\pm$ است اگر و تنها اگر:

$$A^c x - A^\Delta |x| \leq b^+$$

اثبات. فرض کنید $A \in A^\pm$ و $b \in b^\pm$وجود داشته باشد به طوری که $Ax \leq b$ آنگاه:

$$A^c x - b^c \leq A^c x - b^c + b - Ax = \left(A^c - A\right)x + b - b^c \leq \left|\left(A^c - A\right)x + b - b^c\right| \leq A^\Delta |x| + b^\Delta$$

بنابراین $A^c x - A^\Delta |x| \le b^c + b^\Delta = b^+$.

بالعکس فرض کنید $A^c x - A^\Delta |x| \le b^+$. با فرض $s = \operatorname{sgn} x$ و $|x| = D_S x$ داریم $A^c x - A^\Delta D_S x \le b^+$ و بنابراین $(A^c - A^\Delta D_S)x \le b^+$. چون $(A^c - A^\Delta D_S) \in A^\pm$ و $b^+ \in b^\pm$ لذا قضیه ثابت می‌شود. □

تعریف ۱۰ دستگاه نامعادلات بازه‌ای $A^\pm x \le b^\pm$ شدنی ضعیف است اگر $A \in A^\pm$ و $b \in b^\pm$ وجود داشته باشد به طوری که $Ax \le b$ و x نامنفی باشد.

قضیه ۲ دستگاه نامعادلات خطی بازه‌ای $A^\pm x \le b^\pm$ شدنی ضعیف است اگر و تنها اگر دستگاه نامعادلات $A^- x \le b^+$ شدنی باشد.

اثبات: چون x نامنفی است پس $x = |x|$ و طبق قضیه ۱ داریم:

$$A^c x - A^\Delta |x| = \left(A^c - A^\Delta\right)x = A^- x \le b^+.$$

تعریف ۱۱ دستگاه نامعادلات بازه‌ای $A^\pm x \le b^\pm$ به طور قوی حل‌پذیر است اگر هر دستگاه $Ax \le b$، $A \in A^\pm$ و $b \in b^\pm$ حل‌پذیر باشد.

قضیه ۳ [۲۲] دستگاه $A^\pm x \le b^\pm$ به طور قوی حل‌پذیر است اگر و تنها اگر دستگاه $A^+ x_1 - A^- x_2 \le b^-$، $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ حل‌پذیر باشد.

قضیه ٤ [۲۲] دستگاه نامعادلات خطی بازه‌ای $x \ge 0$ و $A^\pm x \le b^\pm$ شدنی قوی است، اگر و تنها اگر دستگاه نامعادلات $x \ge 0$ و $A^+ x \le b^-$ شدنی باشد.

۲-۲ مروری بر برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای

مساله برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای که یک مساله برنامه‌ریزی خطی با ضرایب بازه‌ای است به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & {c^\pm}^T x \\ s.t. \quad & A^\pm x \le b^\pm \\ & x \ge 0 \end{aligned} \tag{1}$$

که در آن $c^\pm = \left[c^-, c^+\right] \in \mathbb{IR}^n$, $A^\pm = \left[A^-, A^+\right] \in \mathbb{IR}^{m \times n}$, $b^\pm = \left[b^-, b^+\right] \in \mathbb{IR}^m$ می‌باشند.

مساله‌ی (۱) ساده‌ترین حالت مساله برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای با قیدهای کوچک‌تر مساوی است[۲۷، ۲۸]. به علت بازه‌ای بودن ضرایب، مساله برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای شامل بی‌نهایت زیرمدل به نام مساله مشخصه به صورت (۲) است:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ s.t. \quad & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned} \tag{2}$$

که در آن $b \in b^\pm, A \in A^\pm, c \in c^\pm$ شامل مقادیری ثابت هستند.

لذا مساله مشخصه، یک مساله برنامه‌ریزی خطی (LP) معمولی است که با روش‌های متداول حل مسایل برنامه‌ریزی خطی، مانند روش سیمپلکس یا روش‌های نقطه درونی قابل حل می‌باشد [۲۸].

به علت بازه‌ای بودن ضرایب قیود، بی‌نهایت ناحیه شدنی و به علت بازه‌ای بودن ضرایب در تابع هدف، بی‌نهایت مقدار برای تابع هدف به دست می‌آید. به عبارتی برای حل یک مساله برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای، بایستی بازه‌ای شامل مقادیر تابع هدف به صورت $f^{\pm}=\left[f^{-},f^{+}\right]$ و همچنین مجموعه‌ای شامل جواب‌های بهینه‌ی مساله به دست آورد [۲۸، ۲۹].

اعداد f^{+},f^{-} کران‌های تابع هدف، کمترین و بیشترین مقدار بهینه‌ی تابع هدف هستند که در حالت مینیمم‌سازی مساله برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای به ترتیب بهترین و بدترین مقدار تابع هدف نامیده می‌شوند. روش‌های مختلفی برای تعیین کران‌های تابع هدف مساله برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای وجود دارد که معروف‌ترین و پرکاربردترین آنها روشی است که توسط تانگ شائوچنگ پیشنهاد شده است [۳۰]. این روش، روش تانگ شائوچنگ یا روش بهترین و بدترین (BWC)[1] نامیده می‌شود.

مساله برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای (۱) به صورت (۳) نیز نمایش داده می‌شود:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{j=1}^{n}\left[c_j^{-},c_j^{+}\right]x_j \\
s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n}\left[a_{ij}^{-},a_{ij}^{+}\right]x_j \le \left[b_i^{-},b_i^{+}\right], && i=1,2,\dots,m, \\
& x_j \ge 0, && j=1,2,\dots,n.
\end{aligned} \tag{۳}$$

مساله مشخصه‌ی برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای (۳) به فرم (۴) است:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, && i=1,2,\dots,m, \\
& x_j \ge 0, && j=1,2,\dots,n.
\end{aligned} \tag{۴}$$

که $c_j \in \left[c_j^{-},c_j^{+}\right]$, $a_{ij} \in \left[a_{ij}^{-},a_{ij}^{+}\right]$, $b_i \in \left[b_i^{-},b_i^{+}\right]$.

بهترین و بدترین مقادیر تابع هدف مساله (۳) با روش تانگ شائوچنگ به ترتیب از حل دو مساله (۵) و (۶) که مسایل بهترین و بدترین نامیده می‌شوند به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}
f^{-}=\min \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j^{-} x_j \\
s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{-}x_j \le b_i^{+}, && i=1,2,\dots,m, \\
& x_j \ge 0, && j=1,2,\dots,n.
\end{aligned} \tag{۵}$$

[1]The best and the worst case

$$f^+ = \min \quad \sum_{j=1}^{n} c_j^+ x_j$$
$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^+ x_j \le b_i^-, \qquad i=1,2,\ldots,m, \qquad (۶)$$
$$x_j \ge 0, \qquad j=1,2,\ldots,n.$$

مساله‌ی بهترین دارای بزرگ‌ترین ناحیه شدنی و مساله‌ی بدترین دارای کوچک‌ترین ناحیه شدنی در بین تمام نواحی شدنی مسایل مشخصه هستند.

قضیه ۵ [۳۰] برای نامساوی بازه‌ای $\left[a_{ij}^-, a_{ij}^+\right] x_j \le \left[b_i^-, b_i^+\right]$ که $j=1,\ldots,n,\ i=1,\ldots,m$ قیدهای $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^- x_j \le b_i^+$ و $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^+ x_j \le b_i^-,$ به علت نامنفی بودن x_j، به ترتیب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین ناحیه شدنی را مشخص می‌کنند.

اثبات: قیدهای مساله مشخصه‌ی $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$ که $b_i \in \left[b_i^-, b_i^+\right],\ a_{ij} \in \left[a_{ij}^-, a_{ij}^+\right]$ را در نظر می‌گیریم. از آنجایی‌که $x_j \ge 0$ داریم:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^- x_j \le \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^+ x_j \le b_i^- \le b_i \le b_i^+ \qquad (۷)$$

و نتیجه به دست می‌آید. □

همچنین مساله‌ی بهترین، کمترین مقدار تابع هدف و مساله‌ی بدترین، بیشترین مقدار تابع هدف را محاسبه می‌کنند. چون $c_j^- \le c_j \le c_j^+$ ، $x_j \ge 0$ ، نتیجه می‌شود:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j^- x_j \le \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{j=1}^{n} c_j^+ x_j$$

و لذا $f^- \le f \le f^+$ می‌باشد.

یکی از حالات مساله برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای مربوط به متغیرهای نامقید در علامت است. در این صورت برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای به فرم (۸) است:

$$\min \quad c^{\pm^T} x$$
$$s.t. \quad A^{\pm} x \le b^{\pm} \qquad (۸)$$

که $c^{\pm} \in \mathbb{IR}^n,\ A^{\pm} \in \mathbb{IR}^{m\times n}\ b^{\pm} \in \mathbb{IR}^m$.

حل این مساله به راحتی مساله برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای با متغیرهای نامنفی (۱) نیست. چون بسته به اینکه x مثبت یا منفی باشد، بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین ناحیه شدنی تغییر می‌کند. همچنین دیگر $c^{-T}x$ و $c^{+T}x$ کمترین و بیشترین مقدار تابع هدف را مشخص نمی‌کنند. حل مساله برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای (۸) توسط لادیک [۹] انجام شده و تعیین کران‌های بالا و پایین تابع هدف این مساله که مسایلی $NP-$سخت هستند، ارایه شده است.

۳ مساله برنامه‌ریزی مرتبه دوم

یک مساله برنامه‌ریزی مرتبه دوم، دارای تابع هدف مرتبه دوم و قیود خطی به صورت (۹) است:

$$\begin{aligned} \min \quad & x^T Qx + c^T x \\ s.t. \quad & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned} \tag{۹}$$

که $x \in \mathbb{R}^n \quad , \quad c \in \mathbb{R}^n, \quad Q \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad , \quad A \in \mathbb{R}^{m\times n} \quad , \quad b \in \mathbb{R}^m$.

عبارت $x^T Qx$ قسمت مرتبه دوم تابع هدف را مشخص می‌کند و Q یک ماتریس متقارن و نیمه معین مثبت است [۷]. اگر $Q = 0$ باشد، مساله برنامه‌ریزی مرتبه دوم به یک مساله برنامه‌ریزی خطی تبدیل می‌شود. مساله برنامه‌ریزی مرتبه دوم را می‌توان به صورت (۱۰) نیز نوشت:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ , \qquad i = 1,2,\dots,m, \\ & x_j \ge 0, \qquad\qquad j = 1,2,\dots,n. \end{aligned} \tag{۱۰}$$

جواب مساله برنامه‌ریزی مرتبه دوم را می‌توان با استفاده از روشی به نام مضارب لاگرانژ به‌دست آورد [۲].

۳-۱ مساله برنامه‌ریزی مرتبه دوم بازه‌ای

مساله برنامه‌ریزی مرتبه دوم بازه‌ای دارای تابع هدف مرتبه دوم و قیود خطی با ضرایب ثابت یا بازه‌ای می‌باشد. یک مساله برنامه‌ریزی مرتبه دوم بازه‌ای در ساده‌ترین حالت به صورت (۱۱) تعریف می‌گردد:

$$\begin{aligned} \min \quad & x^T Q^{\pm} x + c^{\pm^T} x \\ s.t. \quad & A^{\pm} x \le b^{\pm} \\ & x \ge o \end{aligned} \tag{۱۱}$$

$b^{\pm} = \left[b^-, b^+\right] \in \mathbb{IR}^m \quad , \quad A^{\pm} = \left[A^-, A^+\right] \in \mathbb{IR}^{m\times n} \quad , \quad c^{\pm} = \left[c^-, c^+\right] \in \mathbb{IR}^n \quad , \quad Q^{\pm} = \left[Q^-, Q^+\right] \in \mathbb{IR}^{n\times n}$

ماتریس‌ها و بردارهایی بازه‌ای می‌باشند.

مساله برنامه‌ریزی مرتبه دوم بازه‌ای(۱۱) شامل یک خانواده از مسایل برنامه‌ریزی مرتبه دوم معمولی به نام مساله مشخصه است که به صورت (۱۲) نمایش داده می‌شوند:

$$\begin{aligned} \min \quad & x^T Qx + c^T x \\ s.t. \quad & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned} \tag{۱۲}$$

که $Q \in Q^{\pm} = \left[Q^-, Q^+\right] \quad , \quad c \in c^{\pm} = \left[c^-, c^+\right] \quad , \quad A \in A^{\pm} = \left[A^-, A^+\right] \quad , \quad b \in b^{\pm} = \left[b^-, b^+\right]$

و Q ماتریسی متقارن و نیمه معین مثبت است.

به طور معادل، مساله برنامه‌ریزی مرتبه دوم بازه‌ای(۱۱) را می‌توان به صورت (۱۳) نوشت:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[q_{ij}^{-},q_{ij}^{+}\right]x_i x_j+\sum_{j=1}^{n}\left[c_j^{-},c_j^{+}\right]x_j \\ s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n}\left[a_{ij}^{-},a_{ij}^{+}\right]x_j \le \left[b_i^{-},b_i^{+}\right], \qquad i=1,2,\dots,m, \\ & x_j \ge 0, \qquad j=1,2,\dots,n. \end{aligned} \tag{۱۳}$$

مساله مشخصه (۱۳) نیز به صورت (۱۴) است:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}q_{ij}x_i x_j+\sum_{j=1}^{n}c_j x_j \\ s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \le b_i, \qquad i=1,2,\dots,m, \\ & x_j \ge 0, \qquad j=1,2,\dots,n. \end{aligned} \tag{۱۴}$$

کــه در آن $q_{ij}\in q_{ij}^{\pm}=\left[q_{ij}^{-},q_{ij}^{+}\right]$ ، $c_j\in c_j^{\pm}=\left[c_j^{-},c_j^{+}\right]$ ، $a_{ij}\in a_{ij}^{\pm}=\left[a_{ij}^{-},a_{ij}^{+}\right]$ ، $b_i\in\left[b_i^{-},b_i^{+}\right]$ بــرای $j=1,\dots,n,\ i=1,\dots,m$.

مقادیر بهینه‌ی تابع هدف مساله برنامه‌ریزی مرتبه دوم بازه‌ای، در یک بازه قرار دارد که آن را با $f^{\pm}=\left[f^{-},f^{+}\right]$ نمایش می‌دهیم.

۳-۲ مدل برنامه‌ریزی مرتبه دوم بازه‌ای با متغیرهای نامقید

اگر مساله برنامه‌ریزی مرتبه دوم بازه‌ای شامل متغیرهای تصمیم نامقید در علامت باشد، محاسبه‌ی هر دو کران پایین و بالای تابع هدف مسایلی NP−سخت خواهند بود و به دشواری تعیین می‌شوند. لادیک روشی برای حل مسایل برنامه‌ریزی مرتبه دوم بازه‌ای در فرم کلی که شامل قیدهای مساوی و نامساوی و متغیرهای تصمیم نامنفی و متغیرهای تصمیم نامقید در علامت است، ارایه داده است. او در مقاله‌اش برای تعیین کران بالای هدف از دوگان لاگرانژ استفاده کرده است [۹]. در این مقاله روشی جدید را برای تعیین کران‌های تابع هدف مساله برنامه‌ریزی مرتبه دوم بازه‌ای با قیدهای نامساوی که فقط شامل متغیرهای نامقید است ارایه می‌دهیم. تفاوت روش ما در این است که با استفاده از حل زیرمدل‌هایی که متغیرهای تصمیم آن‌ها نامنفی هستند؛ سعی در تعیین کران‌های مقدار بهینه تابع هدف داریم. همچنین تلاشمان بر این است که در صورت امکان با حل زیرمساله‌های کمتری به خواسته‌مان برسیم.

مساله برنامه‌ریزی مرتبه دوم بازه‌ای نامقید (۱۵) را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & x^T Q^{\pm} x + c^{\pm^T} x \\ s.t. \quad & A^{\pm} x \le b^{\pm} \end{aligned} \tag{۱۵}$$

$$b^{\pm} = \left[b^-, b^+\right] \in \mathbb{IR}^m \quad , \quad A^{\pm} = \left[A^-, A^+\right] \in \mathbb{IR}^{m\times n} \quad , \quad c^{\pm} = \left[c^-, c^+\right] \in \mathbb{IR}^n \quad , \quad Q^{\pm} = \left[Q^-, Q^+\right] \in \mathbb{IR}^{n\times n}$$

هستند. مساله مشخصه‌ی برنامه‌ریزی مرتبه دوم بازه‌ای (۱۵) به صورت (۱۶) است:

$$\begin{aligned} \min \quad & x^T Q x + c^T x \\ s.t. \quad & Ax \le b \end{aligned} \tag{۱۶}$$

که $b \in b^{\pm}, A \in A^{\pm}, c \in c^{\pm}, Q \in Q^{\pm}$ بوده و Q ماتریسی متقارن و نیمه معین مثبت است.

۳-۳ روش حل IQP نامقید

حل مساله‌ی نامقید (۱۵) به راحتی حل مساله‌ی با متغیرهای نامنفی (۱۱) نیست. چون بسته به این که x مثبت یا منفی باشد، بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین ناحیه شدنی تغییر می‌کند و دیگر نمی‌توان از مسایل بهترین و بدترین برای تعیین کران‌های تابع هدف استفاده نمود.

تعریف ۱۲ یک فضای n بعدی شامل ۲^n زیرفضا است که به هریک از آنها یک اورتانت[1] گفته می‌شود.

تعریف ۱۳ یک مجموعه همبند[2] است هرگاه بین هر دو نقطه‌ی متمایز دلخواه در این مجموعه، مسیری وجود داشته باشد.

مسایل برنامه‌ریزی مرتبه دوم بازه‌ای که متغیرهای تصمیم آن‌ها نامنفی هستند، ناحیه شدنی‌شان در یک اورتانت ($\frac{۱}{۲^n}$ فضای n بعدی) قرار دارد و به علت خطی بودن قیدها، ناحیه شدنی محدب دارند. در صورتی که مسایل برنامه‌ریزی مرتبه دوم بازه‌ای نامقید، ممکن است دارای ناحیه شدنی در چندین اورتانت باشند وحتی ممکن است ناحیه شدنی در اورتانت‌های مجاور به هم متصل نباشد. این کار محاسبه‌ی کران‌های تابع هدف را بسیار سخت می‌کند. از این رو برای تعیین کران‌های تابع هدف، زیرمدل‌های مربوط به هر اورتانت را تشکیل می‌دهیم. این زیرمدل‌ها متغیرهای نامنفی دارند. در فضای n بعدی، تعداد این زیرمدل‌ها ۲^n است و n تعداد متغیرهای تصمیم نامقید در علامت است. این موضوع سبب می‌شود که در صورت زیاد بودن n حل مساله بسیار دشوار یا به عبارتی $NP-$سخت شود.

برای این منظور، مجموعه جواب مساله (۱۵) که اجتماعی از جواب‌های مسایل مشخصه‌ی (۱۶) است را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists A \in A^{\pm}, \exists b \in b^{\pm}, Ax \le b \right\}$$

[1] orthant
[2] connected

طبق قضیه ۲، می‌توان مجموعه F را به صورت (۱۷) توصیف نمود:

$$F=\left\{x\in\mathbb{R}^n : A^c x - A^\Delta |x| \le b^+\right\}. \qquad (۱۷)$$

۳-۳-۱ محاسبه بدترین مقدار بهینه‌ی تابع هدف

کران بالای f^+ با حل یک مساله مشخصه به دست نمی‌آید. فرض کنید تعداد متغیرهای نامقید x در مساله IQP برابر n باشد، در این صورت بایستی تعدادی مساله مشخصه را در نظر بگیریم که در آنها $s\in\{\pm۱\}^n$، اورتانت متناظر با $D_s x\ge ۰$ را مشخص می‌کند و لذا ۲^n مساله مشخصه متناظر با هر کدام از اورتانت‌ها حاصل می‌گردد که در هر کدام از آنها متغیر تصمیم نامنفی است. اگر f_s^+ مقدار بهینه‌ی مساله مشخصه‌ی (۱۸) باشد:

$$\begin{aligned} \min \quad & x^T\left(Q^c+Q^\Delta D_s\right)x+\left(C^c+D_s C^\Delta\right)^T x \\ s.t. \quad & \left(A^c+A^\Delta D_s\right)x\le b^- \\ & D_s x\ge ۰ \end{aligned} \qquad (۱۸)$$

با توجه به اینکه $D_s x\ge ۰$ است، این زیرمدل یک مساله برنامه‌ریزی مرتبه دوم معمولی با متغیرهای نامنفی است و به سادگی قابل حل می‌باشد. ناحیه شدنی مساله (۱۸) هم کوچک‌ترین ناحیه ممکن و مناسب برای یافتن بدترین مقدار تابع هدف است. تعیین f^+ با حل ۲^n مساله برنامه‌ریزی مرتبه دوم معمولی با متغیرهای نامنفی (۱۸) به صورت (۱۹) انجام می‌شود:

$$f^+=\min_{s\in\{\pm۱\}^n} f_s^+ \qquad (۱۹)$$

۳-۳-۲ محاسبه بهترین مقدار بهینه‌ی تابع هدف

مشابه محاسبه f^+، محاسبه بهترین مقدار تابع هدف یعنی f^- هم یک مساله $NP-$سخت است. علاوه بر این نمی‌توان کران پایین را به صورت دقیق به دست آورد [۹]. برای محاسبه دقیق f^-، بایستی مجموعه شدنی F در (۱۷) ناحیه‌ای محدب باشد. در صورتی که مجموعه F به یک اورتانت محدود شود محدب است. اشتراک مجموعه F با اورتانت متناظر با $s\in\{\pm۱\}^n$ به صورت (۲۰) است:

$$\left(A^c-A^\Delta D_s\right)x\le b^+ \quad , \quad D_s x\ge ۰ \qquad (۲۰)$$

این ناحیه در اورتانت s واقع است و لذا محدب می‌باشد. f^- می‌تواند با حل ۲^n مساله مشخصه (مساله برنامه‌ریزی مرتبه دوم معمولی) با متغیرهای نامنفی و با ناحیه شدنی (۲۰) تعیین شود. در هر زیرمساله، ناحیه (۲۰) بزرگ‌ترین ناحیه شدنی ممکن را مشخص می‌کند. فرض کنید f_s^- مقدار بهینه‌ی تابع هدف مساله مشخصه‌ی (۲۱) باشد که متغیرهایش نامنفی هستند:

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.1.1.7]

$$\begin{aligned} \min \quad & x^T\left(Q^c - Q^\Delta D_s\right)x + \left(C^c - D_s C^\Delta\right)^T x \\ s.t. \quad & \left(A^c - A^\Delta D_s\right)x \le b^+ \\ & D_s x \ge 0 \end{aligned} \qquad (۲۱)$$

مانند محاسبه بدترین مقدار هدف، 2^n زیرمدل (۲۱) حل می‌شود تا با مینیمم گرفتن از مقدار بهینه‌ی هدف آنها بتوان f^- را به دست آورد:

$$f^- = \min_{s\in\{\pm 1\}^n} f_s^- \qquad (۲۲)$$

اگر مجموعه F ناحیه‌ای همبند باشد آنگاه محاسبه‌ی f^- با حل زیرمساله‌های کمتری امکان‌پذیر است [۱۴]. همبندی مجموعه، یعنی بین هر دو نقطه متمایز دلخواه در این مجموعه مسیری وجود داشته باشد. این فرض باعث می‌شود ناحیه شدنی از نواحی جدا از هم تشکیل نشود. اگر F همبند نباشد، نواحی شدنی در اورتانت‌های مجاور ممکن است متصل نباشند و احتمال دارد، محاسبه‌ی f^- با روش فوق با شکست مواجه شود. به این منظور گزاره‌های زیر را اثبات می‌کنیم.

گزاره ۱ اگر $b^\pm \ge 0$ آنگاه F همبند است.

اثبات: بردار بازه‌ای $b^\pm \ge 0$ است هرگاه $b^- \ge 0$ باشد. این شرط نتیجه می‌دهد که $0 \in F$ و در هر اورتانت، مجموعه F از طریق مبدأ همبند می‌شود. □

گزاره ۲ اگر دستگاه نامعادلات خطی

$$A^+x^1 - A^-x^2 \le b \qquad , \qquad x^1, x^2 \ge 0 \qquad (۲۳)$$

که $x = x^1 - x^2$ شدنی باشد، آنگاه F همبند است.

اثبات: اگر x^1 و x^2 دستگاه (۲۳) را حل کنند، آنگاه $x^o = x^1 - x^2$ جوابی از $Ax \le b$ به ازای هر $A \in A^\pm$ است (عکس این مطلب هم برقرار است). بنابراین هر دو نقطه در F از طریق x^o متصل می‌شوند و باعث همبندی ناحیه می‌گردد. □

به شرط همبند بودن مجموعه‌ی F، می‌توان با حل زیرمدل‌های کمتری f^- را محاسبه کرد. ابتدا مساله مشخصه‌ی (۱۶) را با ضرایب دلخواه در نظر می‌گیریم. مثلا (۱۶) را به ازای $A = A^c \quad , \quad Q = Q^c \quad , \quad c = c^c \quad , \quad b = b^+$ حل می‌کنیم [۹]. اگر x^o جواب این زیرمدل با مقدار بهینه‌ی f^- باشد، قرار دهیم $s = \operatorname{sgn} x^o$ و مقدار بهینه‌ی هدف را برای مساله مشخصه‌ی نامقید (۲۴) با مجموعه جواب محدود شده به اورتانت s محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \min \quad & x^T\left(Q^c - Q^\Delta D_s\right)x + \left(c^c - D_s c^\Delta\right)^T x \\ s.t. \quad & \left(A^c - A^\Delta D_s\right)x \le b^+ \\ & D_s x \ge 0 \end{aligned} \qquad (۲۴)$$

که f_s^- مقدار بهینه تابع هدف (۲۴) و x_s جواب بهینه‌ی این زیرمساله است.

حال با استفاده از رابطه‌ی $f^{-}=\min\left\{f^{-}, f_s^{-}\right\}$ سعی در کاهش کران پایین هدف داریم. سپس با در نظر گرفتن $s=\operatorname{sgn} x^{o}$ به سمت بهبود دادن f^{-} پیش می‌رویم. فرایند را تکرار می‌کنیم تا دیگر هیچ کاهشی رخ ندهد و امکان اصلاح f^{-} وجود نداشته باشد.

لازم به ذکر است که معمولاً اولین زیرمساله برای محاسبه‌ی f_s^{-} کم‌ترین مقدار f^{-} را نتیجه می‌دهد و نیازی به تکرار فرایند نیست. به عبارت دیگر معمولاً x^{o} و اولین x_s به دست آمده هم علامت هستند و چون s تغییری نمی‌کند f^{-} نیز کمتر نمی‌شود.

٤ نتایج عددی

در این بخش دو مدل برنامه‌ریزی مرتبه دوم بازه‌ای نامقید در علامت را با استفاده از نرم افزار *Maple* حل می‌کنیم.

مثال ۱ مساله IQP نامقید زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{ll}\min & [2,3]x_1^2 - x_1x_2 + [2,4]x_2^2 - [3,4]x_1 + [5,6]x_2 \\ s.t. & [3,4]x_1 - x_2 \le [7,8] \\ & -[1,2]x_1 + [10,12]x_2 \le [3,5]\end{array}$$

با توجه به روابط (۱۸) و (۱۹) ابتدا بدترین مقدار هدف را به دست می‌آوریم. چون مساله دارای دو متغیر نامقید در علامت است، برای این منظور باید چهار (2^2) مساله مشخصه حل شود.

اولین زیرمدل با $s=(1,1)$ عبارت است از:

$$\begin{array}{ll}\min & 3x_1^2 - x_1x_2 + 4x_2^2 - 3x_1 + 6x_2 \\ s.t. & 4x_1 - x_2 \le 7 \\ & -x_1 + 12x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0\end{array}$$

با حل این زیرمدل، مقدار بهینه‌ی $f_s^{+}=-0/75$ و جواب بهینه‌ی $(x_1,x_2)=(0/5,0)$ به دست می‌آید. به طور مشابه برای سه مساله مشخصه‌ی دیگر نتیجه بدین صورت است: در نواحی $s=(1,-1) \quad , \quad s=(-1,1) \quad , \quad s=(-1,-1)$ به ترتیب

$$f_s^{+}=0 \quad , \quad f_s^{+}=-2/0426 \quad , \quad f_s^{+}=-1/56$$

به دست می‌آیند. مقدار f^{+} از (۱۹) به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$f^{*+}=\min_{s\in\{\pm 1\}^2} f_s^{+}=-2/0426$$

بهترین مقدار تابع هدف نیز با حل چهار زیرمدل محاسبه می‌شود. با استفاده از (۲۱) اگر $s=(1,1)$، زیرمدلی که برای تعیین کران پایین هدف ایجاد می‌شود به صورت زیر است:

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.1.1.7]

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_1 + 5x_2 \\ s.t. & 3x_1 - x_2 \le 8 \\ & -2x_1 + 10x_2 \le 5 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{array}$$

مقداربهینه‌ی هدف این زیرمدل $f_s^- = -2$ در نقطه $(x_1, x_2) = (1, 0)$ است.

با حل زیرمدل‌های مربوط به اورتانت‌های $s = (1, -1)$, $s = (-1, 1)$, $s = (1, 1)$ به‌ترتیب مقادیر بهینه‌ی $f_s^- = -5/333$, $f_s^- = 0$, $f_s^- = -4/5$ وجواب‌های بهینه

$$(x_1, x_2) = (0/667, -1/333) \quad , \quad (x_1, x_2) = (0, 0) \quad , \quad (x_1, x_2) = (1, 0)$$

به دست می‌آیند. لذا از (22) به دست می‌آوریم: $f^{*-} = \min\limits_{s \in \{\pm 1\}^2} f_s^- = -5/333$

روش دیگر برای محاسبه f^- با توجه به اینکه $b^\pm \ge 0$ و طبق گزاره‌ی 2، مجموعه‌ی F همبند می‌باشد، آن است که ابتدا زیرمدل نامقید (16) را برای $Q = Q^c, c = c^c, b = b^+, A = A^c$ تشکیل دهیم.

$$\begin{array}{ll} \min & 2/5x_1^2 - x_1x_2 + 3x_2^2 - 3/5x_1 + 5/5x_2 \\ s.t. & 3/5x_1 - x_2 \le 8 \\ & -1/5x_1 + 11x_2 \le 5 \end{array}$$

با حل این زیرمساله، $f^- = -3/211$ با $x^o = (0/5345, -0/8276)$ به دست می‌آید و لذا $s = \operatorname{sgn} x^o = (1, -1)$ است. حال زیرمدل نامقید (24) را به ازای $s = (1, -1)$ می‌نویسیم:

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_1 + 6x_2 \\ s.t. & 3x_1 - x_2 \le 8 \\ & -2x_1 + 12x_2 \le 5 \end{array}$$

برای زیرمساله فوق $f_s^- = -5/333$ و $x_s = (0/667, -1/333)$ است. واضح است که $s = (1, -1)$ باقی می‌ماند و تغییری در s ایجاد نشده، بنابراین مقدار f^- قابلیت بهبود ندارد و به دست می‌آوریم:

$$f^{*+} = \min\{f^-, f_s^-\} = -5/333$$

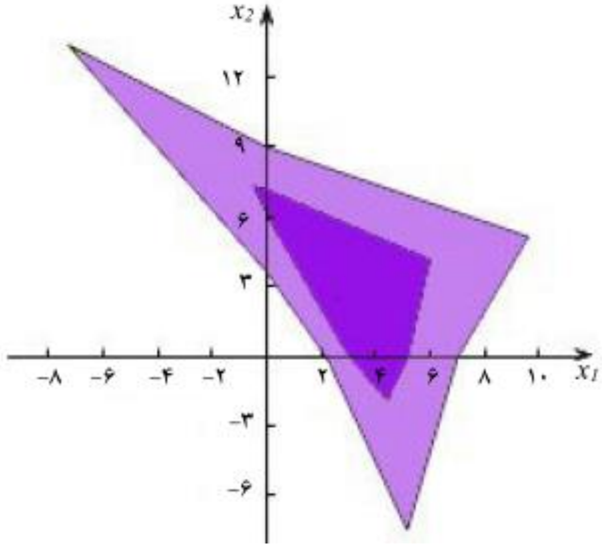
بدین ترتیب با محاسبات کمتر، همان کران پایین روش قبل به دست می‌آید. بنابراین بازه‌ی مقدار بهینه‌ی تابع هدف $[-5/333, -2/0456]$ است.

مثال 2 کران‌های تابع هدف IQP نامقید زیر را به دست آورید:

$$\begin{array}{ll} \min & [1,4]x_1^2 + [2,7]x_1x_2 - 2x_2^2 + [2,3]x_1 + [6,8]x_2 \\ s.t. & -[4,5]x_1 - [2,3]x_2 \le -[11,12] \\ & [4,5]x_1 - [1,2]x_2 \le [26,28] \\ & [2,3]x_1 + [5,6]x_2 \le [43,45] \end{array}$$

در این مثال شرط $b^\pm \ge 0$ برقرار نیست. لذا برای بررسی همبند بودن، مجموعه جواب F را رسم می‌کنیم. شکل 1 اجتماع و اشتراک مجموعه‌های شدنی را نشان می‌دهد. واضح است که مجموعه جواب F همبند است.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.1.1.7]



شکل ۱. (مثال ۲) مجموعه شدنی F ناحیه روشن، اشتراک همه مجموعه‌های شدنی تیره

با توجه به شکل ۱، مجموعه جواب F در سه اورتانت (به جز ربع سوم) رسم شده است پس بایستی بررسی در این سه اورتانت انجام شود و f^+ تعیین گردد.

طبق رابطه (۱۸) مقدار f_s^+ در سه اورتانت $s=(-۱,۱), s=(۱,-۱), s=(۱,۱)$ به ترتیب $-۵۶/۹۹۱, ۴۵, ۴۵$ به دست می‌آید و از رابطه (۱۹) مقدار f^+ محاسبه می‌شود.

$$f^{*+} = \min_{s\in\{\pm۱\}^۲} f_s^+ = -۵۶/۹۹۱$$

در این مثال با توجه به اینکه ناحیه‌ی جواب در یک اورتانت قرار نمی‌گیرد، ممکن است محدب نباشد. بنابراین احتمال دارد که f^- به صورت نادقیق به دست آید. برای محاسبه f^- با توجه به همبندی مجموعه جواب F ابتدا زیرمدل را در مقادیر مرکزی $A=A^c, Q=Q^c, c=c^c, b=b^-$ تشکیل می‌دهیم. با حل این زیرمدل به دست می‌آوریم:

$$x^o = (۴/۸۰۶, -۴/۲۵) \quad , \quad f^- = -۸۸/۰۳۴.$$

x^o در اورتانت متناظر با $s=\operatorname{sgn} x^o = (۱,-۱)$ قرار دارد. بنابراین زیرمدل نامقید (۲۴) را برای $s=(۱,-۱)$ تشکیل می‌دهیم و با حل این زیرمدل $x_s = (۵/۱۵۴, -۷/۳۸۵),\ f_s^- = -۳۹۷/۶۸۶$ به‌دست می‌آید. چون $s=(۱,-۱)$ باقی می‌ماند پس امکان اصلاح f^- وجود ندارد و نتیجه می‌گیریم:

$$f^{*-} = \min\left\{ f^-, f_s^- \right\} = -۳۹۷/۶۸۶$$

لذا بازه‌ی بهینه‌ی تابع هدف $[-۳۹۷/۶۸۶, -۵۶/۹۹۱]$ به دست می‌آید.

۵ نتیجه‌گیری و پیشنهادها

مساله‌ی برنامه‌ریزی مرتبه دوم بازه‌ای به علت غیرقطعی بودن ضرایب، مقدار بهینه‌ی تابع هدف را نادقیق و به صورت بازه‌ی $f^\pm = [f^-, f^+]$ نتیجه می‌دهد. اگر مساله دارای قیدهای نامساوی و متغیرهای نامنفی باشد آنگاه

به راحتی توسط مدل‌های برنامه‌ریزی مرتبه دوم معمولی می‌توان کران‌های هدف را به دست آورد. اما اگر مساله دارای قیدهای مساوی و متغیرهای نامنفی باشد تعیین کران پایین به سادگی با حل یک زیرمدل امکان‌پذیر است در صورتی که تعیین کران بالا مساله‌ای $NP-$سخت می‌شود. نامقید بودن متغیرهای تصمیم مساله برنامه‌ریزی مرتبه دوم بازه‌ای دشوارترین حالت را ایجاد می‌کند و باعث $NP-$سخت شدن تعیین بهترین و بدترین مقدار بهینه‌ی تابع هدف می‌شود.

در این مقاله با روشی جدید نشان دادیم که با حل 2^n زیرمدل که n تعداد متغیرهای تصمیم نامقید در علامت مساله است، f^+ و f^- به دست می‌آیند. همچنین f^- معمولاً نادقیق است و برای محاسبه دقیق f^- بایستی مجموعه جواب F ناحیه‌ای محدب باشد و این در صورتی است که مجموعه F به یک اورتانت محدود شود. علاوه بر این در صورت همبند بودن ناحیه شدنی، تعیین f^- با حل زیر مدل‌های کمتری امکان‌پذیر است.

نظر به اینکه کران‌های مقادیر بهینه‌ی تابع هدف در مسایل برنامه‌ریزی مرتبه دوم بازه‌ای مورد بررسی قرار گرفته است، بررسی و تعیین مجموعه جواب بهینه‌ی این نوع مسایل برای تحقیق‌های بعدی پیشنهاد می‌شود [۱۶].

منابع

[۱] الله دادی، مهدی.، میش مست نهی، حسن.، (۱۳۹۶). ناحیه جواب جدید برای حل مدل برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۴(۲)،۱۲۱-۱۱۱.

[۲] رائو، اس. اس.، (۱۳۷۳). بهینه‌سازی (تئوری و کاربرد)، ترجمه سید محمدمهدی شهیدی پور، جلد دوم، ۱۶۱، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد.

[۳] اسمعیلی، حمید.، مهدوی امیری، نظام‌الدین.، (۱۳۹۰). برنامه‌ریزی غیرخطی، انتشارات دانشگاه بوعلی سینا.

[۴] لوئنبرگ، دیوید،جی.، (۱۳۷۹). برنامه‌ریزی خطی و غیرخطی، ترجمه نظام‌الدین مهدوی امیری، محمدحسین پورکاظمی، مؤسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف.

[۵] قربانی هرمزدآبادی، مهدیه.، میش مست نهی، حسن.، الله دادی، مهدی.، (۱۳۹۶). تعیین کران‌های تابع هدف مساله برنامه‌ریزی مرتبه دوم بازه‌ای با متغیرهای نامقید. دهمین کنفرانس بین‌المللی انجمن تحقیق در عملیات ایران، بابلسر.

[۶] ناصری، سید هادی.، طالشیان جلودار، فاطمه.، نقی‌نژاد، نعمت‌الله.، خلیلی، فرزانه.، (۱۳۹۱). مساله برنامه‌ریزی درجه دوم با ضرایب فازی: یک روش حل مبتنی بر اصل گسترش. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۹ (۴)، ۲۵-۹.

[7] Hladik, M., (2011). Optimal value bounds in nonlinear programming with interval data. Top 19.1, 93-106.

[8] Hladik, M., (2014). On approximation of the best case optimal value in interval linear programming. Optimization Letters, 8, 1985-1997.

[9] Hladik, M., (2017). Interval convex quadratic programming problems in a general form. Central European Journal of Operation Research, 25(3), 725-737.

[10] Li, W., Xia, M., Li, H., (2016). Some results on the upper bound of optimal values in interval convex quadratic programming. Journal of Computational and Applied Mathematics, 302, 38-49.

[11] Li, W., (2009). An improving procedure of the numerical solution method for interval quadratic programming. In: Intelligent Computation Technology and Automation, 2009. ICICTA'09. Second International Conference on. IEEE, 165-168.

[12] Liu, S.T., Wang, R.T., (2007).A numerical solution method to interval quadratic programming. Applied Mathematics and Computation, 189, 1274 -1281.

[13] Li, W., Jin, J., Xia, M., Li, H., Luo, Q., (2017). Some properties of the lower bound of optimal values in interval convex quadratic programming. Optimization Letters, 11(7), 1443-1458.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.1.1.7]

[14] Li, W., Xia, M., Li, H., (2015). New method for computing the upper bound of optimal value in interval quadratic program. Journal of Computational and Applied Mathematics, 288, 70-80.
[15] Li, W., Tian, X., (2008). Numerical solution method for general interval quadratic programming. Journal of Computational and Applied Mathematics, 202 (2), 589-595.
[16] Ghorbani Hormazdabadi, M., Mishmast Nehi, H., Allahdadi, M., (2019). Optimal solution set in interval quadratic programming problem. Journal of Mathematical Extension,Accepted.
[17] Abdel-Malek, L.L., Areeractch, N., (2007). A quadratic programming approach to the multi-product news vender problem with side constraints. European Journal of Operation Research, 176, 855-861.
[18] Dwyer, T., Koren, Y., Marriot, K.,(2006). Drawing directed graph using quadratic programming. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 12, 536-548.
[19] Petercen, J.A.M., Bodson, M., (2006). Constrained quadratic programming techniques for control allocation. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 14, 91-98.
[20] Zhong, W. G., Nie, Z. K., (2005). On admissible efficient portfolio selection policy. Journal of Computational and Applied Mathematics, 169, 608-623.
[21] Alefeld, G., Herzberger, J., (1983). Introduction to interval computations. Academic Press, New York.
[22] Hansen, E.R., (1992). Bounding the solution of interval linear equation. SIAM Journal on Numerical Analysis, 29 (5), 1493-1503.
[23] Hansen, E.R.,(1992). Global optimization using interval analysis. Vol. 165, Marcel Dekker, Inc., New York.
[24] Moore, R. E., (1966). Interval Analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA.
[25] Rohn, J., Kreslova, J., (1994).Linear interval in equations. Linear Multilinear Algebra, 38, 79-82.
[26] Huang, G.H., Moore, R.D., (1993). Grey linear programming its solving approach and its application. International Journal of Systems Science, 24, 159-172.
[27] Inuiguchi, M., Sakawa, M., (1995). Minimax regret solution to linear programming problems with an interval objective function. European Journal of Operational Research, 86, 526-536.
[28] Allahdadi, M., Mishmast Nehi, H., (2013). The optimal solution set of the interval linear programming problems. Optimization Letters, 7, 1893-1911.
[29] Mishmast Nehi, H., Allahdadi, M., (2011). Solving linear equations system with interval parameters. International Journal of Applied Mathematics, 24, 885-899.
[30] Shaocheng, T., (1994).Interval number and fuzzy number linear programming. Fuzzy Sets and Systems, 66, 301-306.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.1.1.7]