مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال چهاردهم، شماره چهارم (پیاپی ۵۵)، زمستان ۹۶، ص ص ۳۳-۲۱
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

ارایه مدلی برای حل مسایل برنامه‌ریزی تصادفی چندهدفه با استفاده از تابع عضویت هذلولوی

سید هادی ناصری*[1]**، سلیم باوندی**[2]
۱- دانشیار، دانشگاه مازندران، گروه ریاضی، بابلسر، ایران
۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه مازندران، گروه ریاضی، بابلسر، ایران

رسید مقاله: ۳ خرداد ۱۳۹۶
پذیرش مقاله: ۲ آبان ۱۳۹۶

چکیده

ازآنجایی که اکثر مسایل تصمیم‌گیری در دنیای واقعی، به دلیل اطلاعات ناقص و یا وجود اطلاعات زبانی درداده‌ها، شامل عدم قطعیت هستند، برنامه‌ریزی تصادفی و برنامه‌ریزی فازی به‌عنوان دو رویکرد متعارف برای مدل‌سازی چنین مسایلی مطرح‌شده است. برنامه‌ریزی تصادفی در ارتباط با مسایلی از بهینه‌سازی است که برخی یا همه پارامترهای آن به‌صورت متغیرهای تصادفی هستند. در این پژوهش یک روش برای حل مسایل برنامه‌ریزی تصادفی چندهدفه ارایه شده است که در آن پارامترهای نامشخص به‌صورت متغیرهای تصادفی نرمال درنظرگرفته شده‌اند. دراین‌مدل، فرض شده است که پارامترهای مساله توسط متخصصین حوزه مربوطه مشخص‌شده است. به دلیل عدم وجود روش‌های کافی برای حل چنین مسایلی به‌طور مستقیم، مدل مربوطه با استفاده از رویکرد محدودیت شانس به یک مساله چندهدفه قطعی تبدیل می‌شود. سپس، یک فن برنامه‌ریزی فازی برای حل مدل چندهدفه قطعی مورداستفاده قرار می‌گیرد. در این پژوهش از تابع عضویت هذلولوی استفاده‌شده است. مدل حاصل با روش‌های برنامه‌ریزی غیرخطی استاندارد حل می‌شود. سرانجام برای تشریح کارکرد روش پیشنهادی مثال عددی ارایه می‌شود.

کلمات کلیدی: برنامه‌ریزی تصادفی، برنامه‌ریزی فازی، برنامه‌ریزی محدودیت شانس، تابع عضویت هذلولوی.

۱ مقدمه

افزایش پیچیدگی‌های جامعه امروزی، مسایل جدیدی با اهداف چندگانه را به ارمغان آورده است، ازجمله مسایل اقتصادی، محیط‌زیست، فنی‌ومهندسی و غیره. ازاین‌رو به نظر می‌رسد، درنظرگرفتن اهداف بیش‌تر درروند تصمیم‌گیری، به رویکردهای چندهدفه به‌جای تک‌هدفه نیازمند است. هنگام فرموله کردن یک مساله برنامه‌ریزی چندهدفه که توصیف‌کننده و نشان‌دهنده وضعیت واقعی تصمیم‌گیری است، عدم قطعیت‌های ذاتی موجود در

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: nasseri@umz.ac.ir

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.4.6.7]

سیستم‌های پیچیده دنیای واقعی یا انسان، ازجمله تصادفی بودن پیشامدهای مربوط به سیستم‌ها یا فازی بودن قضاوت‌های انسانی، باید در توصیف توابع هدف و محدودیت‌ها و نیز نمایش پارامترهای مرتبط با مسایل فرموله شده، انعکاس داده شود. برای سروکار داشتن با چندهدفه بودن و نیز عدم قطعیت در تصمیم‌گیری، برنامه‌ریزی تصادفی چندهدفه و برنامه‌ریزی فازی چندهدفه به‌صورت جداگانه با معرفی مدل‌های مختلف بهینه‌سازی و تکنیک‌های حل متناظر توسعه داده‌شده است.

بااین‌حال، یادآوری مبهم بودن یا ذات فازی قضاوت‌های انسانی، برای توابع هدف و یا محدودیت‌های تصادفی متناظر، به این نکته مهم اشاره دارد که عدم قطعیت در مسایل تصمیم‌گیری دنیای واقعی اغلب با تلفیقی از تصادفی بودن و فازی بودن به‌جای فازی بودن یا تصادفی بودن بیان می‌شود.

تاکنون چندین مدل درزمینه برنامه‌ریزی تصادفی و برنامه‌ریزی فازی ارایه‌شده است. کانتینی [۱] یک الگوریتم برای برنامه‌ریزی آرمانی تصادفی معرفی کرد که در آن متغیرهای تصادفی دارای توزیع نرمال با میانگین و واریانس مشخص هستند. سالیوان و فیتزسیمومز [۲] یک الگوریتم با استفاده از آرمان‌های احتمالی بر اساس مفهوم محدودیت شانس چارنز و کوپر [۳] پیشنهاد دادند که آرمان‌ها می‌توانند ازنظر احتمال رضایت بخشی سطوح انتظار بیان شوند. تیقم و همکاران [۴] و لکلرک [۵] روش‌های تعاملی را در برنامه‌ریزی تصادفی ارایه دادند. ناصری [۶] ضمن تعریف مفاهیم پایه‌ای برنامه‌ریزی خطی کلاسیک در محیط فازی همچون جواب‌های شدنی، جواب‌های پایه‌ای، جواب بهینه، جواب تباهیده، شرایط بهینگی و ... الگوریتم‌های سیمپلکس فازی برای حل مسایل برنامه‌ریزی خطی عدد فازی و مسایل برنامه‌ریزی خطی با متغیرهای فازی را ارایه کرد. زیمرمن [۷] کاربردی از برنامه‌ریزی خطی فازی را برای مسایل بیشینه بردار خطی معرفی کرد. او اظهار داشت که جواب بهینه به‌وسیله برنامه‌ریزی خطی فازی همواره کارآمد است. حنان [۸] و ناراسیمهان [۹] همچنین روش‌هایی را برای مسایل برنامه‌ریزی آرمانی که آرمان‌ها غیردقیق هستند و محیط تصمیم‌گیری فازی است، ارایه دادند. لیبرلینگ [۱۰] نشان داد که استفاده از عملگر حداقل فازی همراه با توابع عضویت خطی و نیز غیرخطی جواب‌هایی را نتیجه می‌دهد که همواره جواب توافقی مساله چندهدفه اصلی هستند. پژوهش‌های زیادی در این زمینه توسط محققان متعددی صورت گرفته است که تعداد زیادی از پژوهش‌ها و مطالعات موفق ظاهرشده‌اند [۲۱-۱۱].

دو روش عمده برای برنامه‌ریزی تصادفی تاکنون شناخته‌شده‌اند [۲۲و ۲۳]:

۱. محدودیت شانس

۲. برنامه‌ریزی دومرحله‌ای

برنامه‌ریزی محدودیت شانس (CCP) تکنیکی است که می‌تواند برای حل مسایل شامل محدودیت شانس مورداستفاده قرار گیرد؛ یعنی محدودیت‌ها دارای احتمالی محدود برای نقض شدن هستند. CCP در اصل توسط چانز و کوپر [۳] گسترش یافت و در سال‌های اخیر از جهات گوناگونی توسعه‌یافته است. تکنیک برنامه‌ریزی دومرحله‌ای توسط دانتزیک برای حل مسایل برنامه‌ریزی تصادفی پیشنهاد شد [۲۳]. این تکنیک نیز مسایل تصادفی را به مسایل قطعی تبدیل می‌کند. برخلاف برنامه‌ریزی محدودیت شانس، برنامه‌ریزی دومرحله‌ای اجازه نقض محدودیت را نمی‌دهد. در رویکرد برنامه‌ریزی تصادفی، مسایل دومرحله‌ای [۲۲] و مدل‌های برنامه‌ریزی

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.4.6.7]

محدودیت شانس [۳] در موارد متنوعی بررسی‌شده‌اند و به مسایل برنامه‌ریزی تصادفی چندهدفه [۹و۱۶] توسعه داده‌شده‌اند. در رویکرد برنامه‌ریزی فازی، انواع متنوعی از مسایل برنامه‌ریزی فازی فرموله و موردمطالعه قرارگرفته‌اند [۲، ۱۰، ۱۳]. از آنجایی چنین مسایل برنامه‌ریزی تصادفی اغلب بد تعریف هستند، این ضروری است که از تکنیک برنامه‌ریزی تصادفی و از تکنیک برنامه‌ریزی فازی نیز برای ساخت یک مدل تصمیم‌گیری استفاده شود.

بخش‌های مختلف این پژوهش به شرح زیر سازمان‌دهی شده‌اند: در بخش ۲، تعاریف و پیش‌نیازها ارایه‌شده است. تکنیک برنامه‌ریزی محدودیت شانس در بخش ۳ مطرح‌شده است. در بخش ۴ به تعریف تابع عضویت هذلولوی می‌پردازیم. روش حل مسایل برنامه‌ریزی تصادفی چندهدفه در بخش ۵ شرح داده‌شده است. برای نشان دادن کارایی مدل ارایه‌شده یک مثال عددی در بخش ۶ گنجانده‌شده است. سرانجام، برخی نتایج استخراج‌شده از این پژوهش در بخش ۷ بیان می‌شود.

۲ تعاریف و پیش‌نیازها

در این بخش، برخی از مفاهیم پایه و پیش‌نیازهای اساسی در ارتباط با نظریه مجموعه‌های فازی و نظریه احتمال بیان خواهد شد.

تعریف ۱: فرض کنید X یک مجموعه مرجع باشد. آنگاه یک زیرمجموعه فازی $\tilde{A}$ در X، مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب به‌صورت زیر است:

$$\tilde{A}=\left\{\left(x\,,\mu_{\tilde{A}}(x)\right)|\, x\in X\right\} \tag{1}$$

که در آن $\mu_{\tilde{A}}(x)$ تابع عضویت یا درجه عضویت x در مجموعه فازی $\tilde{A}$ نامیده می‌شود که مجموعه مرجع X را به $[0,1]$ می‌نگارد.

در این مقاله همواره فرض می‌کنیم $X=\mathbb{R}$.

تعریف ۲: مجموعه تمام نتایج ممکن از یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه می‌نامند و آن را با نماد Ω نمایش می‌دهند.

تعریف ۳: یک پیشامد ω، زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه است که به آزمایش یا مشاهده‌ای گفته می‌شود که نتیجه آن تا قبل از وقوع نامشخص باشد.

ترکیبی از فضای نمونه، فضای پیشامد و اندازه احتمال مجموعه‌ای را تولید می‌کند که به‌عنوان فضای احتمال شناخته‌شده است.

تعریف ٤: یک فضای احتمال با استفاده از سه‌تایی $(\Omega,\mathcal{F},P)$ تعریف می‌شود که در آن Ω یک فضای نمونه، $\mathcal{F}$ پیشامد نمونه و P احتمال رخداد است.

تعریف ۵: فرض کنید $(\Omega,\mathcal{F},P)$ یک فضای احتمال باشد. اگر $X:\Omega\to\mathbb{R}$ تابعی حقیقی مقدار با دامنه عناصر Ω باشد آنگاه X یک متغیر تصادفی نامیده می‌شود.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.4.6.7]

تعریف ٦: دو پیشامد A و B را مستقل گویند، هرگاه

$$P(AB)=P(A)P(B) \tag{۲}$$

تعریف ۷: [۲۳] اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی زیر باشد:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad x\in R,\mu\in R,\sigma>0 \tag{۳}$$

در این صورت X توزیع نرمال دارد. آن را با علامت اختصاری $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ نشان می‌دهند، که μ میانگین (پارامتر مکان) و σ انحراف معیار (پارامتر مقیاس) است.

تعریف ۸: [۲۴] توزیع نرمال $\mu=0$ و $\sigma=1$، توزیع نرمال استاندارد نامیده می‌شود و اگر Z یک متغیر تصادفی دارای توزیع $N(0,1)$ باشد، آنگاه Z را متغیر تصادفی نرمال استاندارد می‌نامند.

قضیه ۱: [۱۶] فرض کنید $Z=aX+bY$ ترکیب خطی متغیرهای تصادفی X و Y باشد که خود نیز متغیر تصادفی است. اگر میانگین و واریانس آن به ترتیب به‌صورت μ_Z و σ_Z^2 تعریف شود. آنگاه نتایج زیر صادق است:

$$\mu_Z=a\mu_X+b\mu_Y$$
$$\sigma_Z^2=a^2\sigma_X^2+b^2\sigma_Y^2$$

مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه بر خواسته از روش‌های تصمیم‌گیری در دنیای واقعی است که شخص تصمیم‌گیرنده با مجموعه‌ای از اهداف و معیارهای متضاد و متعارض روبرو است. در این‌گونه از مسایل برخلاف مسایل بهینه‌سازی تک هدفه و به خاطر وجود چند هدف متعارض به‌جای تنها یک جواب، مجموعه‌ای از جواب‌ها حاصل می‌شود.

۳ مساله برنامه‌ریزی تصادفی فازی چندهدفه

مساله برنامه‌ریزی تصادفی چندهدفه با محدودیت شانس زیر را در نظر بگیرید:

$$Max \quad Z_l=\sum_{j=1}^{n}c_{lj}^{s}x_j,\ l=1,2,\dots,k.$$
$$s.t.$$
$$\Pr\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{s}x_j\le b_i^{s}\right)\ge\beta_i,\quad i=1,2,\dots,m, \tag{۴}$$
$$x_j\ge 0,\ j=1,2,\dots,n.$$

که در آن a_{ij}^{s}، b_i^{s} و c_{lj}^{s} متغیرهای تصادفی هستند و $0\le\beta_i\le1$ توسط تصمیم‌گیرنده به نحوی مشخص می‌شود که نیازهای ایمنی و امنیتی را برآورده سازد. $\Pr\left\{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{s}x_j\le b_i^{s}\right\}\ge\beta_i$ قیدی احتمالی است و علت نام‌گذاری این است که این محدودیت، با احتمال حداقل β_i تحقق می‌پذیرد.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.4.6.7]

برای درک بهتر برنامه‌ریزی محدودیت شانس، فرض کنید برخی یا همه ضرایب تابع هدف و محدودیت‌ها متغیرهای تصادفی باشند، در این صورت با یک مساله برنامه‌ریزی خطی تصادفی روبه‌رو خواهیم بود که محدودیت‌های آن به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$A^s X \le b^s \tag{۵}$$

که در آن $X = \left(x_1,\dots,x_n\right)^T$ یک بردار ستونی n–بعدی از متغیرهای تصمیم، $A^s = \left[a_{ij}^s\right]$ یک ماتریس $m \times n$ از متغیرهای تصادفی و $b^s = \left(b_1^s,\dots,b_m^s\right)^T$ یک بردار ستونی m–بعدی از متغیرهای تصادفی هستند. از آنجایی همواره قادر به برقرار نگه‌داشتن محدودیت‌های $A^s X \le b^s$ از مساله برنامه‌ریزی تصادفی نیستیم؛ اما می‌توانیم با احتمالات داده‌شده آن را برقرار نگه‌داریم. بر همین اساس چارنز و کوپر برنامه‌ریزی محدودیت شانس را مطرح کردند. به عبارت دقیق‌تر، mمحدودیت اصلی زیر را در نظر بگیرید:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^s \le b_i^s ,\ i = 1,\dots,m \tag{۶}$$

که در برنامه‌ریزی محدودیت شانس به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\Pr\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^s \le b_i^s\right) \ge \beta_i ,\ i = 1,\dots,m \tag{۷}$$

که در آن $0 \le \beta_i \le 1$، احتمال‌های داده‌شده برای گستره‌ای است که در آن نقض محدودیت‌ها پذیرفته‌شده است. به β_i، سطح احتمال رضایت‌بخش نیز گفته می‌شود. همچنین عبارت (۷) محدودیت شانس نام دارد، به این معنا که i–امین محدودیت ممکن است نقض شود، اما این نقض محدودیت حداکثر $1-\beta_i$ نسبت به زمان خواهد بود.

برای به دست آوردن محدودیت‌های قطعی معادل با محدودیت‌های شانس، فرض کنید a_{ij}^s، b_i^s و c_{lj}^s متغیرهای تصادفی متغیرهای تصادفی باشند. در این صورت ۷ حالت زیر را خواهیم داشت:

۱) تنها a_{ij}^s به ازای همه‌ی i و jها تصادفی باشند.

۲) تنها b_i^sها به ازای همه‌ی مقادیر i تصادفی باشد.

۳) تنها c_{lj}^sها به ازای همه‌ی مقادیر j تصادفی باشد.

۴) a_{ij}^sو b_i^s به ازای همه‌ی i و jها تصادفی باشند.

۵) a_{ij}^s و c_{lj}^s به ازای همه‌ی i و jها تصادفی باشند.

۶) c_{lj}^sو b_i^s به ازای همه‌ی i و jها تصادفی باشند.

۷) a_{ij}^s، b_i^s و c_{lj}^s به ازای همه‌ی i و jها تصادفی باشند.

در این پژوهش، حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن a_{ij}^s، b_i^s و c_{lj}^s متغیرهای تصادفی نرمال هستند. فرض کنیم $E\left(b_i^s\right)$ و $Var\left(b_i^s\right)$ به ترتیب میانگین و واریانس b_i^s و $E\left(a_{ij}^s\right)$ میانگین متغیر تصادفی نرمال a_{ij}^s و D_i به‌عنوان i–امین ماتریس واریانس آن باشد که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_i = \begin{pmatrix} \text{var}\{a_{i1}\} & \cdots & \text{cov}\{a_{i1}, a_{in}\} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{cov}\{a_{in}, a_{i1}\} & \cdots & \text{var}\{a_{in}\} \end{pmatrix}$$

بنابراین متغیر تصادفی

$$\frac{b_i^s - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^s x_j - \left(E\left(b_i^s\right) - \sum_{j=1}^{n} E\left(a_{ij}^s\right) x_j \right)}{\sqrt{Var\left(b_i^s\right) + X^T D_i X}} \tag{8}$$

یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد $N\left(0,1\right)$ با میانگین ۰ و واریانس ۱ است. با فرض مستقل بودن متغیرهای تصادفی a_{ij}^s و b_i^s نسبت به یکدیگر، عبارت (۸) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\frac{b_i^s - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^s x_j - \left(E\left(b_i^s\right) - \sum_{j=1}^{n} E\left(a_{ij}^s\right) x_j \right)}{\sqrt{Var\left(b_i^s\right) + \sum_{j=1}^{n} Var\left(a_{ij}^s\right) x_j^2}} \tag{9}$$

اکنون برای راحتی کار، تعریف می‌کنیم:

$$h_i^s = b_i^s - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^s x_j \tag{10}$$

در این صورت h_i^s نیز دارای توزیع نرمال با میانگین و واریانس زیر است:

$$E\left(h_i^s\right) = E\left(b_i^s\right) - \sum_{j=1}^{n} E\left(a_{ij}^s\right) x_j \tag{11}$$

$$Var\left(h_i^s\right) = Var\left(b_i^s\right) + \sum_{j=1}^{n} Var\left(a_{ij}^s\right) x_j^2 \tag{12}$$

ازاین‌رو، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \Pr\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^s x_j \le b_i^s \right) &= \Pr\left(\frac{h_i^s - E\left(h_i^s\right)}{\sqrt{Var\left(h_i^s\right)}} \ge \frac{-E\left(h_i^s\right)}{\sqrt{Var\left(h_i^s\right)}} \right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{-E\left(h_i^s\right)}{\sqrt{Var\left(h_i^s\right)}} \right) \end{aligned} \tag{13}$$

که در آن Φ تابع توزیع، توزیع نرمال استاندارد $N\left(0,1\right)$ است. ازاین‌رو محدودیت شانس (۷) به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$-E\left(h_i^s\right) - \Phi^{-1}\left(1 - \beta_i\right) \sqrt{Var\left(h_i^s\right)} \le 0 \tag{14}$$

یا به‌عبارتی‌دیگر

$$\sum_{j=1}^{n} E\left(a_{ij}^{s}\right)x_{j} - \Phi^{-1}\left(1-\beta_{i}\right)\sqrt{Var\left(b_{i}^{s}\right) + \sum_{j=1}^{n} Var\left(a_{ij}\right)x_{j}^{2}} \leq E\left(b_{i}^{s}\right) \tag{۱۵}$$

که در آن Φ^{-1}، تابع معکوس Φ است.

تا اینجا حالتی را بررسی کردیم که در آن ضرایب محدودیت‌ها، متغیر تصادفی بودند. برای حالتی که ضرایب هدف نیز متغیر تصادفی هستند، چندین روش توسط چارنز و کوپر [۳] ارایه‌شده است که یکی از آن‌ها روش بیشینه یا کمینه مقدار امید ریاضی است که به روش میانگین معروف است. در حالت‌هایی که برخی یا همه ضرایب تابع هدف در مساله برنامه‌ریزی خطی تصادفی متغیرهای تصادفی هستند، با استفاده از روش میانگین، تابع هدف به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$E\left(C^{s}X\right) = E\left[\sum_{j=1}^{n} c_{j}^{s}x_{j}\right] = \sum_{j=1}^{n} E\left[c_{j}^{s}\right]x_{j} \tag{۱۶}$$

که در آن $C^{s} = \left(c_{1}^{s},...,c_{1}^{s}\right)$ متغیرهای تصادفی و $E\left(.\right)$ نشان‌دهنده میانگین آن است. در نتیجه تابع هدف مساله برنامه‌ریزی تصادفی (۴) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$Max\ Z_{l}^{E} = E\left[\sum_{j=1}^{n} c_{lj}^{s}x_{j}\right] = \sum_{j=1}^{n} E\left[c_{lj}^{s}\right]x_{j} \tag{۱۷}$$

درنتیجه مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه با محدودیت شانس (۴) برای مدل میانگین به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} &Max \quad Z_{l}^{E} = E\left[\sum_{j=1}^{n} c_{lj}^{s}x_{j}\right] = \sum_{j=1}^{n} E\left[c_{lj}^{s}\right]x_{j} \\ &s.t. \\ &\qquad \sum_{j=1}^{n} E\left(a_{ij}^{s}\right)x_{j} - \Phi^{-1}\left(1-\beta_{i}\right)\sqrt{Var\left(b_{i}^{s}\right) + \sum_{j=1}^{n} Var\left(a_{ij}\right)x_{j}^{2}} \leq E\left(b_{i}^{s}\right) \\ &\qquad x_{j} \geq 0,\ j = 1,...,n. \end{aligned} \tag{۱۸}$$

در تمام این حالت‌ها مساله برنامه‌ریزی محدودیت شانس به یک مساله برنامه‌ریزی قطعی تبدیل‌شده و بدیهی است که با روش‌های کلاسیک قابل حل است.

٤ تابع عضویت هذلولوی

تابع عضویت به‌عنوان یک ویژگی جانشین در اولویت‌بندی، برای تعیین نتیجه موردنظر هر یک از هدف‌ها در چارچوب برنامه‌ریزی چندهدفه عمل می‌کند. در این بخش، تابع عضویت هذلولوی را برای حل مسایل برنامه‌ریزی خطی و غیرخطی ارایه می‌کنیم.

تابع عضویت هذلولوی [۱۶] برای یک مساله بیشینه‌سازی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{Z_{l}}(x) = \frac{\left(\tan h((Z_{l}(x) - g_{l})\alpha_{l} + 1\right)}{2} \tag{۱۹}$$

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.4.6.7]

که U_l و L_l به ترتیب کران بالا و پایین $Z_l(x)$ هستند و $g_l = \frac{U_l + L_l}{۲}$، $\alpha_l > ۰$ یک ثابت است که برابر است با $\alpha_l = \frac{۶}{U_l - L_l}$. همچنین فرض شده است که L_l با U_l برابر نیست.

۵ روش حل

در این بخش، یک الگوریتم برای حل برنامه‌ریزی تصادفی چندهدفه با استفاده از رویکرد برنامه‌ریزی فازی ارایه می‌کنیم.

گام نخست: ابتدا مساله برنامه‌ریزی تصادفی داده‌شده را با استفاده از تکنیک برنامه‌ریزی محدودیت شانس و مدل میانگین به یک مساله برنامه‌ریزی قطعی معادل تبدیل کنید.

گام دوم: مساله قطعی به‌دست‌آمده از گام نخست را هر بار تنها برای یک هدف و نادیده گرفتن مابقی هدف‌ها حل کنید.

گام سوم: با استفاده از جواب‌های به‌دست‌آمده در گام ۲، مقدار متناظر همه توابع هدف در هر حل را بیابید.

گام چهارم: از گام ۳، کران بالا و پایین (L_l و U_l، $l = ۱,...,k$) را برای هر یک از توابع هدف به دست آوردید.

گام پنجم: با استفاده از کران بالا و پایین (همان‌طور که در بخش ۳ بحث شد) یک مساله برنامه‌ریزی خطی یا غیرخطی فازی متناظر را می‌یابیم که به‌صورت زیر بحث می‌شود:

فرض کنید مساله برنامه‌ریزی تصادفی از نوع بیشینه‌سازی باشد:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad Z_l(x) = (C_l^s)^T X, \quad l = ۱,...,k \\
&s.t. \\
&\qquad A^s X \le b^s, \\
&\qquad X \ge ۰
\end{aligned}
\tag{۲۰}
$$

با استفاده از عملگر max - min بلمن و زاده، مساله (۲۰) به مساله زیر تبدیل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad \lambda \\
&s.t. \\
&\qquad \lambda \le \mu_{Z_l}(x), \; l = ۱,...,k \\
&\qquad A^s X \le b^s, \\
&\qquad X \ge ۰, \quad \lambda \ge ۰.
\end{aligned}
\tag{۲۱}
$$

در مساله بالا، $\lambda \le \mu_{Z_l}(X)$ یک تابع غیرخطی است؛ بنابراین این مساله، یک مساله برنامه‌ریزی غیرخطی است. لبرلینگ [۱۰] نشان داد که این‌گونه خطی بودن به‌وسیله معرفی تابع عضویت هذلولوی غیرخطی می‌تواند به یک مساله برنامه‌ریزی خطی متعارف تبدیل شود که این مساله معادل است با:

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.4.6.7]

$$
\begin{aligned}
&Max \quad \lambda \\
&s.t. \\
&\qquad \lambda - \frac{۱}{۲}\tanh\left[\left(Z_l(x) - g_l\right)\alpha_l\right] \le \frac{۱}{۲}, \\
&\qquad AX \le b, \\
&\qquad X \ge ۰, \quad \lambda \ge ۰.
\end{aligned} \tag{۲۲}
$$

این مساله معادل است با:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad \lambda \\
&s.t. \\
&\qquad \left(Z_l(x) - g_l\right)\alpha_l \le \tanh^{-۱}(۲\lambda - ۱), \\
&\qquad AX \le b, \\
&\qquad X \ge ۰, \quad \lambda \ge ۰.
\end{aligned} \tag{۲۳}
$$

اکنون با تعریف $x_{n+۱} = tanh^{-۱}(۲\lambda - ۱)$ خواهیم داشت:

$$
x_{n+۱} = \frac{\tanh(x_{n+۱}) + ۱}{۲}
$$

از آنجایی $\tanh(x)$ یک تابع اکیداً یکنواخت نسبت به x است، بیشینه‌سازی λ معادل با بیشینه‌سازی $x_{n+۱}$ است؛ بنابراین مساله (۲۳) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad x_{n+۱} \\
&s.t. \\
&\qquad \alpha_l Z_l(x) - x_{n+۱} \ge \alpha_l g_l, \\
&\qquad AX \le b, \\
&\qquad X \ge ۰, \quad \lambda \ge ۰.
\end{aligned} \tag{۲۴}
$$

$\left(x^*_{n+۱}, x^*\right)$ یک جواب بهینه برای مساله (۲۴) است، سپس پاسخ بهینه مساله اصلی می‌تواند با جایگذاری در معادله زیر به دست آید:

$$
\left(\lambda^*, x^*\right) = \left(\frac{\tanh\left(x^*_{n+۱}\right) + ۱}{۲}, x^*\right)
$$

٦ مثال عددی

مساله برنامه‌ریزی خطی تصادفی چندهدفه‌ای را در نظر بگیرید که در آن تمامی ضرایب مربوط به تابع هدف و محدودیت‌ها به‌طور هم‌زمان متغیر تصادفی نرمال باشند:

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.4.6.7]

$$
\begin{aligned}
& Max \quad z^{(1)} = c_{11}^{s} x_{1} + c_{12}^{s} x_{2} + c_{13}^{s} x_{3} \\
& Max \quad z^{(2)} = c_{21}^{s} x_{1} + c_{22}^{s} x_{2} + c_{23}^{s} x_{3} \\
& Max \quad z^{(3)} = c_{31}^{s} x_{1} + c_{32}^{s} x_{2} + c_{33}^{s} x_{3} \\
& s.t. \\
& \qquad \Pr(a_{11}^{s} x_{1} + a_{12}^{s} x_{2} + a_{13}^{s} x_{3} \le b_{1}^{s}) \ge 0/95 \\
& \qquad \Pr(a_{21}^{s} x_{1} + a_{22}^{s} x_{2} + a_{23}^{s} x_{3} \le b_{2}^{s}) \ge 0/10 \\
& \qquad x_{j} \ge 0, \quad j = 1,2,3,
\end{aligned} \tag{25}
$$

که در آن $a_{ij}, j = 1,2,3$ و $b_i, i = 1,2$ متغیرهای تصادفی نرمال مستقل هستند که مقادیر میانگین و واریانس در جدول ۱ داده‌شده است. همچنین $c_{lj}, l = 1,2,3$ متغیرهای تصادفی نرمال با میانگین زیر هستند.

$$
\begin{aligned}
& E\left(c_{11}^{s}\right) = 5, \; E\left(c_{12}^{s}\right) = 6, \; E\left(c_{13}^{s}\right) = 3, \\
& E\left(c_{21}^{s}\right) = 7, \; E\left(c_{22}^{s}\right) = 2, \; E\left(c_{23}^{s}\right) = 4, \\
& E\left(c_{11}^{s}\right) = 2, \; E\left(c_{12}^{s}\right) = 3, \; E\left(c_{13}^{s}\right) = 8.
\end{aligned}
$$

جدول ۱. مقادیر میانگین و واریانس a_{ij}^{s} و b_i^{s}

	a_{11}^{s}	a_{12}^{s}	a_{13}^{s}	a_{21}^{s}	a_{22}^{s}	a_{23}^{s}	b_{1}^{s}	b_{2}^{s}
میانگین	۱	۳	۹	۵	۱	۶	۸	۷
واریانس	۲۵	۱۶	۴	۹	۴	۱	۱۶	۹

با جایگذاری مقادیر امید ریاضی مطرح‌شده برای ضرایب تابع هدف و مقادیر جدول ۱ در مساله (۲۶) داریم:

$$
\begin{aligned}
& Max \quad z^{(1)} = 5x_{1} + 6x_{2} + 3x_{3} \\
& Max \quad z^{(2)} = 7x_{1} + 2x_{2} + 4x_{3} \\
& Max \quad z^{(3)} = 2x_{1} + 3x_{2} + 8x_{3} \\
& s.t. \\
& \qquad x_{1} + 3x_{2} + 9x_{3} - \Phi^{-1}\left(1 - 0/95\right)\sqrt{16 + 25x_{1}^{2} + 16x_{2}^{2} + 4x_{3}^{2}} \le 8, \\
& \qquad 5x_{1} + x_{2} + 6x_{3} - \Phi^{-1}\left(1 - 0/10\right)\sqrt{9 + 9x_{1}^{2} + 4x_{2}^{2} + x_{3}^{2}} \le 7, \\
& \qquad x_{j} \ge 0, \quad j = 1,2,3,
\end{aligned} \tag{26}
$$

بعد از حل مساله فوق با نرم افزار *Lingo*، جواب‌های ایده آل حاصل می‌شود که در جدول ۲ ارایه‌شده است.

جدول ۲. جواب‌های ایده آل و مقادیر توابع هدف مساله برنامه‌ریزی (۲۶)

	x_1	x_2	x_3	مقدار تابع هدف
جواب مساله با تابع هدف $z^{(1)}$	۰/۲۷۲۰۷۳۴	۰/۲۱۳۵۷۹	۰/۰۰۰۰۰۰	۲/۶۳۶۸۴۱
جواب مساله با تابع هدف $z^{(2)}$	۰/۴۵۰۰۹۰۲	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۳/۱۵۰۶۳۱
جواب مساله با تابع هدف $z^{(3)}$	۰/۱۲۷۹۳۳۷	۰/۶۸۱۳۰۸	۰/۱۰۸۸۲۴	۰/۳۳۰۸۵۱

از گام‌های ۳ تا ۵، مقدار هریک از توابع هدف را به ازای جواب به‌دست‌آمده در جدول ۲ محاسبه می‌کنیم، درنتیجه با در نظر گرفتن تابع عضویت هذلولوی و مساله (۲۴) خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad x_4\\
&s.t.\\
&\quad 5x_1+6x_2+3x_3-0/4028412x_4 \ge 3/845636,\\
&\quad 7x_1+2x_2+4x_3-0/1376510x_4 \ge 2/7376514,\\
&\quad 2x_1+3x_2+8x_3-0/0717784x_4 \ge 1/1155157,\\
&\quad x_1+3x_2+9x_3-\Phi^{-1}(1-0/95)\sqrt{16+25x_1^2+16x_2^2+4x_3^2} \le 8,\\
&\quad 5x_1+x_2+6x_3-\Phi^{-1}(1-0/10)\sqrt{9+9x_1^2+4x_2^2+x_3^2} \le 7,\\
&\quad x_j \ge 0, \quad j=1,2,3,
\end{aligned}
\tag{27}
$$

جواب مساله به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$
x_1=0/3518778,\ x_2=0/1372534,\ x_3=0
$$
$$
x_4=1/262727,\ \lambda=0/9259070
$$

مقدار توابع هدف مساله به ازای جواب اخیر به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$
Z_1=2/5829094,\ Z_2=2/7376514,\ Z_3=1/1155158
$$

۷ نتیجه‌گیری

مطالعه و بررسی مسایل برنامه‌ریزی خطی در محیطی غیرقطعی این امکان را برای ما فراهم می‌کند تا پارامترهای مساله توسط متخصصان حوزه مربوطه به‌صورت یک متغیر غیرقطعی بر طبق نظریه عدم قطعیت تعیین شوند. در این مقاله برای حل مساله برنامه‌ریزی خطی تصادفی چندهدفه، ابتدا مساله با استفاده از تکنیک محدودیت شانس و مدل میانگین به فرم قطعی تبدیل‌شده است، سپس با استفاده از ایده برنامه‌ریزی فازی و تابع عضویت هذلولوی، جوابی توافقی حاصل شد. به‌جای برنامه‌ریزی محدودیت شانس، برنامه‌ریزی دومرحله‌ای نیز می‌تواند اعمال شود. برنامه‌ریزی دومرحله‌ای اجازه نقض محدودیت را نمی‌دهد. در برنامه‌ریزی دومرحله‌ای مقدار ابتدایی برای b_i برای هر i، حدود مورد انتظار b_i در نظر گرفته می‌شود. همچنین یک مساله برنامه‌ریزی تصادفی چندهدفه، در حالتی که پارامترها، متغیرهای تصادفی غیر نرمال باشند نیز قابل‌حل است، بعلاوه از مدل‌هایی مانند مدل واریانس،

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.4.6.7]

مدل بیشینه احتمال و مدل فرکتیل نیز می‌توان به‌جای مدل میانگین استفاده کرد که در پژوهش‌های آتی می‌تواند موردبررسی قرار گیرد.

سپاسگزاری

نویسندگان مقاله مراتب سپاس و قدردانی خود را از داوران محترم مقاله که با ارایه نقطه نظرات سازنده خویش کمک شایانی را در جهت بهبود کیفیت مقاله نمودند اعلام می‌دارند.

منابع

[۶] ناصری، س. ه.، (۱۳۸۶). روش‌های سیمپلکس فازی برای حل مسایل برنامه‌ریزی خطی فازی. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۴(۱۳)، ۷۶–۶۷.

[1] Contini, B., (1978). A Stochastic Approach to Goal Programming, Oper.Res, 16, 576-586.
[2] Sullivan, R.S., Fitzsimmoms, J.A., (1978). A goal programming model for readiness and optimal deployment of resources, Socio-Economic Planning ScL, 12, 215-220.
[3] Charnes, A., Cooper, W., (1959). Chance constrained programming, Management Sc, 6, 73-79.
[4] Teghem, J. Jr., Dufrance, D., Thauvoye, M., Strange, P., (1986). An interactive method for multi-objective linear programming under uncertainty, Eur. J. Oper. Res, 26, 65-82.
[5] Leclercq, J. P., (1982). Stochastic programming: an interactive multicriteria approach, Eur. J. Oper. Res, 10(1), 33-41.
[7] Zimmermann, H.-J., (1978). Fuzzy programming and linear programming with several objective functions, Fuzzy Sets and Sytems, 1 (1978) 45-55.
[8] Hanan, E. L., (1981). On fuzzy goal programming, Decision Sci, 12, 522-531.
[9] Narasimhan, R., (1980). Goal programming in a fuzzy environment, Decision Sci, 11,325-336.
[10] Leberling, H., (1981). On finding compromise solution in multicriteria problems using the min-operator, Fuzzy Sets and Systems 6, 105-118.
[11] Kacprzyk, J., Orlovski, S. A., (1987). Optimization Models Using Fuzzy Sets and Possibility Theory, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.
[12] Katagiri, H., Hasuike, T., Ishii, Nishizaki, H., I., (2008). "Interactive multiobjective programming under random fuzzy environments, Proceedings of the 11th Czech-Japan Seminar on Data Analysis and Decision Making under Uncertainty, Sendai, 33–38.
[13] Luhandjula, M. K., (1987), Multiple objective programming problems with possibilistic coefficients, Fuzzy Sets and Systems, 21, 135–145.
[14] Sakawa, M., Kato, K., (2008). Interactive fuzzy multi-objective stochastic linear program-ming, Fuzzy Multi-Criteria Decision Making - Theory and Applications with Recent Developments-. Kahraman (ed.), Springer, 375–408.
[15] Sakawa, M., Yano, H., Yumine, T., (1987). An interactive fuzzy satisficing method for multiobjective linear-programming problems and its application, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics SMC-17, 654–661.
[16] Hulsurkar, S., Biswal, M. P., Sinha, S. B., (1997). Fuzzy programming approach to Multi-objective Stochastic linear programming Problems , Fuzzy Sets and Systems (North-Holland), 88, 173-181.
[17] Sakawa, M., (2000), Large Scale Interactive Fuzzy Multiobjective Programming, Physica-Verlag, Heidelberg.
[18] Stancu-Minasian, I. M., Wets, M. J., (1976). A research bibliography in stochastic program- ming 1955-1975, Oper. Res. 24, 1078-1119.
[19] Slowinski, R., Teghem, J., (1990). Stochastic Versus Fuzzy Approaches to Multio bjective Mathematical Programming under Uncertainty, Kluwer AcademicPublishers, Dordrecht /Boston/ London.
[20] Verdegay, J. L., Delgado, M., (1989). The Interface between Artificial Intelligence and Operations Research in Fuzzy Environment, Verlag TUV Rheinland, Koln.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.4.6.7]

[21] Yano, H., Sakawa, M., (2014). Interactive fuzzy programming for multiobjective fuzzy random linear programming problems through possibility-based probability maximization, Operational Research: An International Journal 14, 51–69.
[22] Goicoechea, A., Hansen, D. R., Duckstein, L., (1982). Multiobjective decision analysis with Engineering andBusiness Applications, Wiley, New York.
[23] Kambo, N. S., (1984). Mathematical Programming Technique (Affiliated East-West Press Pvt. Ltd.)
[24] Leon-Garcia, A., (2008). Probability, Statistics and Random Processes for Electrical Engineering. Upper Saddle River, NJ: Pearson.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.4.6.7]