مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال پانزدهم، شماره چهارم (پیاپی ۵۹)، زمستان ۹۷، ص ص ۱۱۹-۹۷

مدل‌بندی و حل مساله ماکزیمم پوشش p –هاب تک‌تخصیصی با پوشش تدریجی

فروغ معین مقدس[۱*]، صفیه روبین[۲]

۱- استادیار، دانشگاه بجنورد، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی، بجنورد، ایران

۲- کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی، دانشگاه بجنورد، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی، بجنورد، ایران

رسید مقاله: ۴ دی ۱۳۹۶

پذیرش مقاله: ۷ شهریور ۱۳۹۷

چکیده

مساله ماکزیمم پوشش p- هاب یکی از مسایل پرکاربرد مکان‌یابی می‌باشد. در این مساله هدف تعیین بهترین مکان برای هاب‌ها است به‌طوری‌که با در نظر گرفتن شعاع پوشش از قبل تعیین شده، تقاضای پوشش داده شده ماکزیمم شود. در مسایل کلاسیک هاب اگر فاصله جفت مبدا و مقصد از مقدار مفروض کم‌تر باشد، امکان پوشش وجود دارد و در غیر این‌صورت تقاضای بین دو نقطه پوشش داده نمی‌شود. در این مقاله مساله ماکزیمم پوشش p- هاب با امکان پوشش تدریجی مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابتدا مفهوم پوشش تدریجی و توسعه‌ای از توابع پوششی بررسی و سپس مدل ریاضی جدیدی برای مساله ارایه می‌شود. همچنین برای محاسبه کران بالای مناسب برای مساله، از روش ساده‌سازی لاگرانژین و برای حل آن از یک روش ابتکاری و الگوریتم ژنتیک استفاده شده‌است. در نهایت نتایج حاصل از به‌کارگیری این روش‌ها با نتایج حاصل از نرم افزارگمز، مقایسه می‌شود. این مقایسه نشان می‌دهد مدل ارایه شده برای پوشش تدریجی و پارامتر پوشش جدید در مقایسه با مدل و تابع پوشش موجود در ادبیات موضوع نتایج مناسب‌تری دارد. همچنین به‌کارگیری ساده‌سازی لاگرانژین، کران بالای مناسب برای مساله حاصل می‌کند. روش ابتکاری نتایج محاسباتی بهتری در زمان کم‌تر به‌دست می‌آورد و الگوریتم ژنتیک نیز خصوصا برای داده‌های با ابعاد بزرگ، با زمان محاسبات کم‌تر، پوشش بیش‌تری نسبت به حل نمونه‌ها با نرم افزارگمز ایجاد می‌کند.

کلمات کلیدی : مساله ماکزیمم پوشش p -هاب، پوشش تدریجی، الگوریتم ابتکاری، ساده‌سازی لاگرانژین، الگوریتم ژنتیک.

۱ مقدمه

هاب‌ها تسهیلات ویژه‌ای هستند که در سیستم‌های بزرگ، به عنوان مراکز جمع‌آوری، دسته‌بندی و توزیع کالا و خدمات به‌کار برده می‌شوند. هاب‌ها سه وظیفه اصلی شامل جمع‌آوری (از مبادی به هاب‌ها)، انتقال (بین هاب‌ها) و توزیع (از هاب‌ها به مقاصد) را دارند. انتقال کالا و خدمات از طریق گره‌های هاب صورت می‌گیرد. مساله مکان‌یابی هاب، به تعیین مکان هاب‌ها و تخصیص گره‌های غیرهاب به هاب‌ها می‌پردازد. دو فرضیه اصلی در مسایل مکان‌یابی هاب وجود دارد. اولا هیچ ارتباط مستقیمی میان گره‌های غیرهاب وجود ندارد و ارتباط بین هر جفت مبدا و مقصد از طریق حداقل یک هاب صورت می‌گیرد. ثانیا به منظور ترغیب متقاضیان و صرفه‌جویی بیش‌تر، از فاکتور تخفیف برای انتقال کالا بین مراکز هاب استفاده می‌شود [۱].

* عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی : f.moeen@ub.ac.ir

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.15.4.7.9]

مسایل مکان‌یابی هاب به دو دسته عمـده تـک‌تخصیصـی [۲] و چنـدتخصیصـی [۳]، تقسـیم مـی‌شـوند. در مسـایل تـک-تخصیصی، هر نقطه غیرهاب دقیقا به یک هاب تخصیص می‌یابد و در مسایل چندتخصیصی، هر گره غیرهاب می‌تواند بـه بیش از یک هاب تخصیص یابد. مسایل مکان‌یابی هاب در سیستم‌های مخابراتی، سیستم‌های خدمات پستی و حمل و نقـل کاربرد دارند [۲].

در اغلب پژوهش های صورت گرفته در خصوص مسایل مکـان‌یـابی هـاب، پوشـش بـه صـورت دودویـی [۴] در نظـر گرفته می‌شود [۳]. پوشش دودویی یا پوشش قطعی به این معنی است که تقاضای بین گره مبدا و مقصد پوشش داده مـی-شود اگر مجموع فاصله بین این دو گره کم‌تر از شعاع پوشش از پیش تعیـین شـده باشـد. در دنیـای واقعـی در نظرگـرفتن پوشش دودویی، واقعی به نظر نمی‌رسد. به عنوان مثال اگر شعاع پوشش a باشد، تقاضای نقـاط بـا فاصـله $a-\varepsilon$ پوشـش داده می‌شود ولی تقاضای نقاط با فاصله $a+\varepsilon$ پوشش داده نمی‌شود که این غیر منطقی به نظر می‌رسد. مسـایل مکـان‌یـابی هاب با پوشش تدریجی [۵] کاربردهای زیادی در دنیای واقعی دارند. با توجه به نقص موجود در مسایل با پوشش دودویـی، با تغییر در نوع پوشش می‌توان در موارد و نمونه‌های اقتصادی سود بیش‌تری به‌دست آورد [۳].

در این مقاله مساله ماکزیمم پوشش p- هاب با فرض پوشش تدریجی مورد بررسـی قـرار مـی‌گیـرد. در ایـن مسـاله هدف انتخاب مکان p مرکز هاب و تخصیص نقاط تقاضا به آن‌ها است به گونه‌ای که تقاضای پوشش داده شده از طریـق هاب‌ها ماکزیمم شود. برای هر جفت مبدا و مقصد، دو کران بالا و پایین درنظر گرفتـه مـی‌شـود. اگـر فاصـله بـین مبـدا و مقصد (از طریق گره‌های واسطه‌ای هاب) از کران بالا کم‌تر باشد، امکان انتقال جریان به‌طور ۱۰۰٪ فراهم مـی‌شـود و اگـر فاصله بیش‌تر از کران بالای تعیین شده‌باشد، پوشش صفر و چنانچه این فاصله بین کران پایین و بالا باشد، پوشـش بـه‌طـور تدریجی و توسط تابع کاهشی که معرفی می‌شود، صورت می‌گیرد.

ساختار پژوهش حاضر به این صورت است: در بخش دوم به مرور پژوهش‌های صورت گرفتـه در خصـوص مسـایل مکان‌یابی هاب و به‌کارگیری پوشش تدریجی در مسایل مکان‌یابی خـواهیم پرداخـت. در بخـش سـوم ابتـدا تـابع پوشـش تدریجی را توسعه و سپس یک مدل ریاضی جدید برای مساله ارایه می‌دهیم. در بخش چهارم برای به‌دست آوردن کـران بالای مناسب، روش ساده‌سازی لاگرانـژین را بـه‌کـار خـواهیم بـرد. در بخـش پـنجم بـرای حـل مسـاله، روش ابتکـاری و الگوریتم ژنتیک را ارایه خواهیم‌کرد. بخش‌ششم شامل مقایسه و تحلیل نتـایج محاسـباتی حاصـل از روش‌هـای ارایـه‌شـده برای دو مدل و توابع پوشش تدریجی و مقایسه آن‌ها با نتایج حاصل از به‌کارگیری نرم افـزار گمـز مـی‌باشـد و در نهایـت بخش نتیجه‌گیری و ارایه پیشنهادها خواهد آمد.

۲ مرور ادبیات

مساله مکان‌یابی هاب، اولین بار توسط اوکلی در سال ۱۹۸۶ معرفی شد [۴]. سپس کمپل در سال ۱۹۹۴به تکمیل مدل‌های مسایل مکان‌یابی هاب پرداخت[۱]. او مساله مکان‌یابی هاب را به چهار دسته مساله میانه **p**- هاب[۶]، مساله مکان‌یابی هاب بدون ظرفیت[۷]، مساله مرکز **p**- هاب[۸] و مساله **p**- هاب پوششی[۹] تقسیم‌کرد.

---

[2] Single Allocation

[3] Multiple Allocation

[4] Binary Coverage

[5] Gradual Coverage

[6] p-Hub Medain Problem

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.15.4.7.9]

کمپل برای مساله پوشش هاب دو زیر مساله شامل، مساله پوشش مجموعه‌ای (پوشش کامل) هاب[۱۰] و مساله ماکزیمم پوششیp- هاب[۱۱] معرفی کرد [۱]. کارا و تنسل در سال۲۰۰۳ مساله پوشش مجموعه‌ای هاب تک تخصیصی را مطالعه کردند و نشان دادند که این مساله از نوع مسایل *NP-hard* است [۵]. ارنست و همکاران در سال ۲۰۰۵ مدل جدیدی برای مساله پوشش مجموعه‌ای هاب تک و چندتخصیصی با استفاده از ایده شعاع پوشش ارایه کردند و مدل ارایه شده را با روش شمارشی ضمنی[۱۲] حل کردند [۶]. هاماخر و میردر سال ۲۰۰۶ انواع فرمول‌بندی برای مساله پوشش هاب معرفی و ناحیه شدنی این مسایل را آنالیز کردند [۷]. در سال ۲۰۰۷ تان وکارا یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح برای مساله پوشش هاب ارایه دادند. آن‌ها مدل خود را با نرم افزار*CPLEX* حل و آن‌را بر روی سیستم تحویل بار ترکیه (داده‌هایTR[۱۳]) شامل ۸۱ شهر مورد بررسی قراردادند [۸]. در سال ۲۰۰۸ ونگ و ونگ مدل مساله پوشش مجموعه‌ای هاب چندتخصیصی را بهبود و آن‌را با الگوریتم‌های ژنتیک[۱۴] و جستجوی پراکندگی[۱۵] حل‌کردند [۹]. کالیک و همکاران در سال ۲۰۰۹ مساله پوشش هاب تک‌تخصیصی را در شبکه ناکامل بررسی کردند. آن‌ها روش ابتکاری[۱۶] کارآمدی بر پایه جستجوی ممنوعه[۱۷] ارایه و آن‌را بر روی مجموعه داده‌های هواپیمایی امریکا (CAB)[۱۸] مورد بررسی-قرار دادند [۱۰]. گیو و ونگ در سال ۲۰۰۹، مساله ماکزیمم پوشش هاب چندتخصیصی را مدل‌بندی و با روش اتصال مجدد مسیر[۱۹] آن‌را حل‌کردند [۲]. در سال ۲۰۱۰، هوانگ و لی یک مدل جدید برای مساله ماکزیمم پوششی هاب تک-تخصیصی بدون ظرفیت معرفی‌کردند. آن‌ها برای حل مساله از دو روش ابتکاری تخصیص براساس فاصله[۲۰] و تخصیص براساس حجم[۲۱] استفاده‌کردند [۱۱]. کریمی و بشیری در سال ۲۰۱۱ یک مدل جدید برای مساله پوشش هاب، با در نظر گرفتن پوشش نوع دوم ارایه کردند و از یک روش ابتکاری برای حل نمونه‌های عددی خود بهره بردند. آن‌ها این مساله را برای مکان‌یابی هاب‌ها در یک نمونه کاربردی (حمل‌ونقل هوایی ایران) به‌کاربردند [۱۲].

ایده پوشش تدریجی برای مسایل مکان‌یابی تسهیلات، اولین بار در سال ۱۹۸۳ توسط چرچ و ربرتس ارایه شد. آن‌ها یک تابع پوشش قطعه‌ای خطی معرفی‌کردند [۱۳]. در سال ۲۰۰۲ برمن و کراس برای مساله مکان‌یابی ماکزیمم پوشش[۲۲] با پوشش تدریجی را بررسی‌کردند. آن‌ها برای پوشش تدریجی k منطقه پوشش و kشعاع پوشش تعریف کردند [۱۴]. برمن و همکاران در سال ۲۰۰۳ مساله مکان‌یابی پوشش با فرض پوشش تدریجی را مدل‌بندی کردند. آن‌ها

[7] Uncapacitated Hub Location Problem
[8] p -Hub Center Problem
[9] Hub Covering Problem
[10] Hub Set Covering Problem
[11] p-Hub Maximal Covering Problem
[12] Implicit Enumerative
[13] Turkish network
[14] Genetic Algorithm
[15] Scatter Search
[16] Heuristic Method
[17] Tabu Search
[18] Civil Aeronautics Board
[19] Path Relinking Approach
[20] Distance- Based Allocation Heuristic
[21] Valume-Based Allocation Heuristic
[22] Maximum Covering Location Problem

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.15.4.7.9]

دو شعاع یکی به عنوان کران پایین پوشش و دیگری به عنوان کران بالای پوشش در نظرگرفتند به طوری که نقاط تقاضا در فاصله کم‌تر از کران پایین، پوشش داده می‌شود و نقاط خارج از کران بالا، پوشش داده نمی‌شود. پوشش برای نقاط با فاصله بین این دو کران، به صورت تابعی کاهشی [۲۳] (متناسب با فاصله) در نظر گرفته شده است [۱۵]. در سال ۲۰۰۹ برمن و همکاران مساله مکان‌یابی پوشش با پوشش تدریجی توسعه یافته‌ای را مورد بررسی قرار دادند [۱۶]. در سال ۲۰۱۲ برمن و ونگ مساله مکان‌یابی میانه [۲۴] با پوشش تدریجی را با در نظرگرفتن اطلاعات غیرقطعی از تقاضا [۲۵] مدل‌بندی و بررسی-کردند [۱۷].

بنا به جستجوهای صورت گرفته اولین کار تحقیقاتی در مورد مساله هاب با پوشش تدریجی توسط پیکر و کارا در سال ۲۰۱۵ می‌باشد [۳]. آن‌ها ابتدا پارامتر پوشش تدریجی را معرفی و سپس مساله ماکزیمم پوشش p- هاب تک و چند-تخصیصی را با فرض پوشش تدریجی مدل‌بندی کردند. تابع پوشش در نظرگرفته شده در این مقاله به صورت یک تابع قطعه‌ای ثابت می‌باشد. آن‌ها مدل ارایه شده را بر روی داده‌های CAB و با نرم افزار گمز حل‌کردند. سیلوا و کان‌ها در سال ۲۰۱۷ مساله مکان‌یابی هاب با پوشش دودویی، ارایه شده در مرجع [۳] را با روش جستجوی ممنوعه حل و بر روی داده‌های پست استرالیا (AP)[۲۶] ومجموعه داده های CAB اجرا کردند [۱۸]. جان کووی و همکاران در سال ۲۰۱۷، برای مساله ماکزیمم پوشش p-هاب r–تخصیصی بدون‌ظرفیت [۲۷]، یک مدل جدید ارایه و سپس با روش ابتکاری جستجوی همسایگی متغیر عمومی [۲۸] آن را حل و بر روی داده‌های AP وCAB اجرا نمودند [۱۹]. جان کووی و همکاران در سال ۲۰۱۷ مدل ریاضی دیگری برای مساله ماکزیمم پوشش p- هاب تک و چندتخصیصی با پوشش تدریجی ارایه‌کردند. تابع پوشش جزئی در این مقاله همان پوشش آمده در مقاله[۳] است و نویسندگان مساله تک‌تخصیصی را با روش جستجوی همسایگی متغیر عمومی و مساله چندتخصیصی را با روش جستجوی همسایگی متغیر پایه [۲۹] حل‌کردند. در این مقاله روش‌های حل ارایه شده بر روی داده‌هایAP ،CAB و داده‌های تصادفی مورد ارزیابی قرار گرفته است [۲۰].

در پژوهش حاضر تلاش می‌شود یک مدل جدید برای مساله ماکزیمم پوشش p- هاب با تابع پوشش تدریجی متفاوت از مقاله‌های [۳] و [۲۰] مورد ارزیابی قرارگیرد. به‌علاوه اینکه ما مدل و تابع پوشش ارایه شده را با مدل و تابع آمده در مرجع [۳] مقایسه می‌کنیم. برای این منظور پس از ارایه مدل ریاضی مساله، از ساده‌سازی لاگرانژین برای یافتن کران بالای مناسب و از یک روش ابتکاری و روش فراابتکاری ژنتیک برای یافتن جواب تقریبی مناسب برای مدل‌ها استفاده می‌شود. در هر مورد نتایج حاصل از به‌کارگیری این روش‌ها با نتایج حاصل از نرم‌افزار گمز برای دو مدل مقایسه شده‌است.

۳ معرفی توابع پوشش دودویی و تدریجی و مدل‌سازی مساله

[23] Non Increasing Function
[24] Median Location Problem
[25] Uncertain Demand
[26] Australia post
[27] Uncapacitated r-allocation p-hub maximal covering problem
[28] General variable neighborhood search
[29] Basic variable neighborhood search

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.15.4.7.9]

در این بخش ابتدا به معرفی مفهوم پوشش دودویی و تدریجی و سپس به بررسی مدل ریاضی ارایه شده در [۳] و ارایه مدل ریاضی جدید خواهیم پرداخت.

۳-۱ توابع پوشش دودویی و تدریجی

در مسایل مکان‌یابی با پوشش دودویی، پارامتری به عنوان شعاع پوشش از پیش تعیین می‌شود که در صورتی تقاضا بین جفت مبدا و مقصد پوشش داده می‌شوند که کل هزینه (یا فاصله و یا زمان) بین دو گره کم‌تر از شعاع پوشش مفروض باشد. بنابراین اگر c_{ijkm} مجموع هزینه (فاصله یا زمان) طی مسیر از گره مبدا i به گره مقصد j از طریق هاب‌های به ترتیب kو m و β_{ij} نشان دهنده شعاع پوشش از پیش تعیین شده بین گره i و j باشد، آنگاه پارامتر پوشش دودویی a_{ij}^{km} به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۱]:

$$a_{ij}^{km}=\begin{cases}1 & if \quad c_{ijkm}\le\beta_{ij}\\ 0 & otherwise\end{cases} \qquad (1)$$

یعنی اگر مجموع هزینه‌ها از β_{ij} کم‌تر شود، a_{ij}^{km} برابر ۱ و در غیر اینصورت صفر می‌شود. در این مسایل اگر هزینه انتقال مقدار ناچیزی از β_{ij} بیش‌تر شود، امکان پوشش تقاضا وجود ندارد.

اما در مسایل مکان‌یابی با پوشش تدریجی، برای سطح پوشش یک کران بالا و کران پایین تعیین می‌شود. اگر هزینه انتقال بین دو نقطه مفروض iو j از کران بالا بیش‌تر باشد، پوشش صورت نمی‌گیرد و اگر این هزینه بین کران بالا و کران پایین باشد، پوشش براساس یک تابع کاهشی متناسب با فاصله محاسبه می‌شود و اگر کم‌تر و مساوی حد پایین باشد پوشش قطعی و صددرصد خواهد بود. پارامتر b_{ij}^{km} را پارامتر پوشش تدریجی درنظر بگیرید. پیکر و کارا این پارامتر را به صورت زیر تعریف کردند [۳]:

$$b_{ij}^{km}=\begin{cases}1 & if \quad c_{ijkm}\le l_{ij}\\ f(c_{ijkm}) & if \quad l_{ij}\le c_{ijkm}\le u_{ij}\\ 0 & if \quad c_{ijkm}>u_{ij}\end{cases} \qquad \forall i,j\in N,\forall k,m\in H \qquad (2)$$

که در آن پارامترهای u_{ij} و l_{ij}به ترتیب کران بالا و پایین پوشش برای جفت مبدا و مقصد (i,j) فرض می‌شوند. f یک تابع کاهشی متناسب با c_{ijkm}و دارای برد $[0,1]$ است. پیکر و کارا در سال ۲۰۱۵ پارامتر پوشش تدریجی را بر اساس یک تابع قطعه‌ای خطی به صورت زیر معرفی کردند [۳]:

$$b_{ij}^{km}=\begin{cases}1 & if \quad c_{ijkm}\le 0/75\beta'_{ij}\\ 0/75 & if \quad 0/75\beta'_{ij}<c_{ijkm}\le 0/80\beta'_{ij}\\ 0/50 & if \quad 0/80\beta'_{ij}<c_{ijkm}\le 0/85\beta'_{ij}\\ 0/25 & if \quad 0/85\beta'_{ij}<c_{ijkm}\le 0/90\beta'_{ij}\\ 0 & if \quad c_{ijkm}>0/90\beta'_{ij}\end{cases} \qquad \forall i,j\in N,\forall k,m\in H \qquad (3)$$

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.15.4.7.9]

که در آن β'_{ij} از حل مساله مکان یابی مرکز p-هاب [۵] به‌دست می‌آید. ما علاوه بر بررسی تابع قطعه‌ای (۳)، تابع پوششی دیگری مشابه آنچه در مقاله [۱۶] آمده را برای مساله ماکزیمم پوششیp- هاب بررسی می‌کنیم. این تابع پوشش به صورت زیر می‌باشند:

$$f\ (c_{ijkm}) = \frac{u_{ij} - c_{ijkm}}{u_{ij} - l_{ij}}$$

لذا پارامتر پوشش تدریجی را با استفاده از تابع کاهشی f به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$b_{ij}^{km} = \begin{cases} ۱ & if \quad c_{ijkm} \le l_{ij} \\ \dfrac{u_{ij} - c_{ijkm}}{u_{ij} - l_{ij}} & if \quad l_{ij} \le c_{ijkm} \le u_{ij} \\ ۰ & if \quad c_{ijkm} > u_{ij} \end{cases} \qquad \forall i, j \in N, \forall k, m \in H \qquad (۴)$$

که در آن $l_{ij} = \beta_{ij} = ۰/۷۵\beta'_{ij}$ ، $u_{ij} = \beta'_{ij}$ فرض می‌شود. مشابه قبل β'_{ij} شعاع پوشش حاصل از حل مساله مکان‌یابی مرکز p-هاب است[۵]. در بخش نتایج محاسباتی نشان می‌دهیم که پارامتر پوشش تدریجی(۴) عملکرد بهتری نسبت به پارامتر پوشش تدریجی (۳) نشان می‌دهد.

۲-۳ مدل سازی مساله ماکزیمم پوششی p- هاب تک تخصیصی با پوشش تدریجی:

در این بخش ابتدا مدل ارایه شده توسط پیکر و کارا [۳] را بیان و سپس یک مدل جدید برای مساله ارایه می‌کنیم. برای این منظور پارامترها و متغیرهای زیر را به‌کار می‌بریم:

Nرا مجموعه نقاط تقاضا و $H \subseteq N$ مجموعه مراکز کاندید برای هاب شدن درنظر می‌گیریم. iو j اندیس نقاط تقاضا k و m اندیس گره‌های کاندید هاب می‌باشد. میزان تقاضای بین مبدا و مقصد i و j را با w_{ij} نمایش می‌دهیم. α، β_{ij} و d_{ik} به ترتیب بیانگر فاکتور تخفیف برای اتصالات درون هابی، شعاع پوشش و فاصله بین دو گره i و kمی‌باشد. c_{ijkm} مجموع هزینه(فاصله یا زمان) طی مسیر از گره مبدا iبه گره مقصد j از طریق هاب‌های به ترتیب k و mمی‌باشد، که c_{ijkm} از رابطه $c_{ijkm} = d_{ik} + \alpha d_{km} + d_{mj}$ محاسبه می‌شود. a_{ij}^{km} بیانگر پارامتر پوشش دودویی است که مطابق با (۱) تعریف می‌شود. z_{ij} کسری از جریان پوشش داده شده است که از گره مبدا i به گره مقصد j منتقل می‌شود. x_{kk}برابر۱ است اگر گره kهاب باشد و در غیراین‌صورت صفر تعریف می‌شود. x_{ik}برابر یک است اگر گره iبه هاب kمتصل شود و در غیر این‌صورت برابر صفر است.

مدل ریاضی ارایه شده توسط پیکر و کارا به صورت زیر است[۳]:

$$p_۱ \quad : \quad Max \sum_{i\in N}\sum_{j\in N} w_{ij} z_{ij} \qquad (۵)$$

$$s.t. \quad \sum_{k\in H} x_{kk} = p, \qquad (۶)$$

$$\sum_{k\in H} x_{ik} \le ۱, \qquad \forall i \in N, k \in H, \qquad (۷)$$

$$x_{ik} \le x_{kk}, \qquad \forall i \in N, k \in H, \qquad (۸)$$

$$z_{ij} \le \sum_{k\in H} a_{ij}^{km} x_{ik} + \lambda_{ij}(۱ - x_{jm}), \qquad \forall i, j \in N, k, m \in H, \qquad (۹)$$

$$x_{ik} \in \{۰,۱\}, \qquad \forall i \in N, k \in H, \qquad (۱۰)$$

$$z_{ij} \ge ۰, \qquad \forall i, j \in N. \qquad (۱۱)$$

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.15.4.7.9]

تابع هدف تقاضا پوشش داده شده بین هر جفت مبدا و مقصد را ماکزیمم می‌کند. قید(۶) نشان می‌دهد که باید p هاب تعیین مکان شود. قید(۷) تضمین می‌کند که هر گره حداکثر به یک هاب تخصیص می‌یابد و قید (۸) تضمین می‌کند که اگر گره i بخواهد به هاب k تخصیص داده شود، گره k باید به عنوان هاب انتخاب شده باشد. قید (۹) کسری از جریان بین جفت مبدا i و مقصد j را که با تخصیص صحیح x_{ik} و x_{jm} پوشش داده می‌شود، نشان می‌دهد که در آن λ_{ij} به صورت $\lambda_{ij}=\max_{k,m\in H} a_{ij}^{km}$ تعریف می‌شود. برای قید (۹) دو حالت وجود دارد؛ چون مساله تک تخصیصی است پس هابی مانند m' وجود دارد که گره m به آن تخصیص یابد. ۱) فرض کنیم $m=m'$ آنگاه قید(۹) به $z_{ij}\le\sum_{k\in H} a_{ij}^{km'}x_{ik}$ تبدیل می‌شود. به‌طور مشابه چون مساله تک تخصیصی است پس هاب k' وجود دارد که گره i به آن تخصیص یابد، لذا داریم $z_{ij}\le a_{ij}^{k'm'}$ ۲) اگر $m\neq m'$ باشد، آنگاه قید (۹) به $z_{ij}\le\sum_{k\in H} a_{ij}^{km}x_{ik}+\lambda_{ij}$ تبدیل می‌شود که با توجه به تعریف λ_{ij} ، این قید یک قید زاید است. در نهایت قیدهای (۱۰) و (۱۱) تعریف متغیرهای تصمیم مساله را نشان می‌دهد.

مساله فوق یک مساله برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط (MIP) و دارای $۲n^۲$ متغیر و $n^۴+۲n^۲+۱$ محدودیت است. برای به‌دست آوردن مساله با پوشش تدریجی کافی است در مدل به جای a_{ij}^{km} از b_{ij}^{km} استفاده کنیم. پیکر و کارا [۳] نشان دادند که مساله فوق *NP-hard* است.

در ادامه می‌خواهیم یک مدل جدید برای مساله ماکزیمم پوشش p-هاب با پوشش تدریجی ارایه کنیم. ما از مدل ارایه شده توسط برمن و همکاران در سال ۲۰۰۳ برای مساله مکان‌یابی پوشش ایده گرفته‌ایم [۱۵]. متغیرهای x_{ik}، x_{kk} و پارامترهای w_{ij}، α، d_{ik} و c_{ijkm} مشابه مدل مرجع [۳] تعریف می‌شود. علاوه بر این پارامتر پوشش d_{ij}^{km} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d_{ij}^{km}=\begin{cases} w_{ij} & if \quad c_{ijkm}\le l_{ij} \\ w_{ij}\times f(c_{ijkm}) & if \quad l_{ij}\le c_{ijkm}\le u_{ij} \\ ۰ & if \quad c_{ijkm}>u_{ij} \end{cases} \qquad \forall i,j\in N,\forall k,m\in H \tag{۱۲}$$

y_{ijkm} کسری از جریان که از گره مبدا i به گره مقصد j از طریق هاب‌های k و m منتقل می‌شود.

بنابراین مدل ریاضی مساله ماکزیمم پوششp- هاب تک تخصیصی با فرض پوشش تدریجی به صورت زیر خواهدشد:

$$p_۲ \quad : \quad Max\sum_{i\in N}\sum_{j\in N}\sum_{k\in H}\sum_{m\in H} d_{ij}^{km}y_{ijkm} \tag{۱۳}$$

$$s.t. \quad (۶),(۷),(۸),(۱۰)$$

$$\sum_{k\in H}\sum_{m\in H} y_{ijkm}\le ۱, \qquad \forall i,j\in N, \tag{۱۴}$$

$$\sum_{m\in H} y_{ijkm}\le x_{ik}, \qquad \forall i,j\in N,k\in H, \tag{۱۵}$$

$$\sum_{k\in H} y_{ijkm}\le x_{jm}, \qquad \forall i,j\in N,m\in H, \tag{۱۶}$$

$$y_{ijkm}\ge ۰, \qquad \forall i,j\in N,k,m\in H. \tag{۱۷}$$

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.15.4.7.9]

تابع هدف کل تقاضای (جریان) منتقل شده را ماکزیمم می‌کند. قیدهای (۶) تا (۸) و (۱۰) مشابه قبل تعریف می‌شود. قید (۱۴) تضمین می‌کند جریان برای هر جفت مبدا و مقصد (i, j) توسط حداکثر یک جفت هاب (k, m) صورت می‌گیرد. قید (۱۵) و (۱۶) نشان می‌دهد که جریان از گره مبدا i به گره مقصد j از طریق هاب‌های k و m جریان دارد اگر همزمان گره i به هاب k و گره j به هاب m متصل باشد. قید (۱۷) نامنفی بودن متغیر y_{ijkm} را نشان می‌دهد.

مساله فوق یک مساله برنامه ریزی عدد صحیح مختلط و دارای $n^4 + n^2$ متغیر و $2n^3 + 3n^2 + 1$ محدودیت است. این مدل در مقایسه با مدل [۳] دارای تعداد متغیرهای بیش‌تر، ولی تعداد محدودیت‌های کم‌تری است. مدل ارایه شده را می‌توان برای مساله با پوشش دودویی نیز استفاده کرد. برای این منظور کافی است پارامتر $w_{ij} \times a_{ij}^{km}$ را جایگزین پارامتر d_{ij}^{km} کنیم. در بخش نتایج محاسباتی نشان می‌دهیم که مدل جدید نسبت به مدل ارایه شده در [۳] پوشش بهتر در زمان محاسباتی کم‌تری را به‌دست می‌آورد.

٤ یافتن کران برای مساله به کمک ساده سازی لاگرانژین

روش ساده‌سازی لاگرانژین، یک روش کارآمد برای یافتن یک کران (بالا یا پایین) مناسب برای مسایل بهینه‌سازی خصوصا با ابعاد بالا است. این تکنیک با آزادسازی محدودیت‌های سخت مساله، تلاش می‌کند که به زیرمساله‌هایی ساده‌تر دست‌یابد تا بتواند جواب‌ها یا کران‌های مناسبی برای مساله در زمان اجرای قابل قبول پیدا کند. این روش تاکنون در حل مسایل گوناگون مکان‌یابی، خصوصا مسایل مکان‌یابی هاب، مورد استفاده قرارگرفته است. ایکین در سال ۱۹۹۴ برای حل مساله میانه p- هاب تک تخصیصی بدون ظرفیت از ترکیب روش شاخه‌وکران و آزادسازی لاگرانژین استفاده کرد[۲۱]. در سال ۱۹۹۶ اسمیت و همکاران، آزادسازی لاگرانژین را برای حل مساله میانه p – هاب تک تخصیصی بدون ظرفیت، استفاده‌کردند[۲۲]. لی و همکاران در سال ۱۹۹۶، مساله مکان‌یابی p- هاب تک تخصیصی ظرفیت‌دار را با آزادسازی لاگرانژین حل‌کردند[۲۴]. پیرکل و اسچیلینگ در سال ۱۹۹۸ مساله مکان‌یابی هاب تک تخصیصی بدون ظرفیت را با آزادسازی لاگرانژین حل‌کردند[۲۴]. در سال ۲۰۰۹ کانترس و همکاران، برای مساله مکان‌یابی p- هاب تک تخصیصی ظرفیت‌دار، روش آزادسازی لاگرانژین را ارایه‌کردند[۲۵]. کانترس و همکاران در سال ۲۰۱۱ برای مساله مکان‌یابی هاب تک‌تخصیصی ظرفیت‌دار از آزادسازی لاگرانژین و روش شاخه و قیمت استفاده‌کردند[۲۶].

در این بخش نحوه به‌کارگیری ساده‌سازی لاگرانژین را برای مدل p_2 بررسی خواهیم‌کرد. این کار را با آزادسازی محدودیت‌هایی که سخت محسوب می‌شوند و دستیابی به زیرمساله‌هایی کوچک‌تر، انجام می‌دهیم. برای این منظور ساده‌سازی دو محدودیت (۱۵) و (۱۶) و به کمک ضرایب لاگرانژین نامنفی u_{ijk} و v_{ijm} را بررسی می‌کنیم. مساله ساده سازی شده به صورت زیر می‌شود:

$$l\ (u,v) = \max \sum_{i\in N}\sum_{j\in N}\sum_{k\in H}\sum_{m\in H} d_{ij}^{km} y_{ijkm} + \sum_{i\in N}\sum_{j\in N}\sum_{k\in H} u_{ijk}(-\sum_{m\in H} y_{ijkm} + x_{ik}) + \sum_{i\in N}\sum_{j\in N}\sum_{m\in H} v_{ijm}(-\sum_{k\in H} y_{ijkm} + x_{jm})$$

$$s.t. \quad (۶), (۷), (۸), (۱۰), (۱۴), (۱۷).$$

برای $u_{ijk}, v_{ijm} \geq 0$ مفروض، مساله $l(u,v)$ را می‌توان به صورت ماکزیمم‌سازی دو تابع جدا از هم، یکی بر حسب تنها x و یک تابع بر حسب متغیر y، به صورت زیر نوشت:

$$l_x(u,v) = \max \sum_{i\in N}\sum_{j\in N}\sum_{k\in H} u_{ijk}x_{ik} + \sum_{i\in N}\sum_{j\in N}\sum_{m\in H} v_{ijm}x_{jm}$$
$$s.t \quad (۶),(۷),(۸),(۱۰).$$

$$l_y(u,v) = \max \sum_{i\in N}\sum_{j\in N}\sum_{k\in H}\sum_{m\in H} (d_{ij}^{km} - u_{ijk} - v_{ijm})y_{ijkm}$$
$$s.t \quad (۱۴),(۱۷).$$

تابع هدف مساله بر حسب x را ساده می‌کنیم:

$$l_x(u,v) = \max \sum_{i\in N}\sum_{j\in N}\sum_{k\in H} u_{ijk}x_{ik} + \sum_{i\in N}\sum_{j\in N}\sum_{m\in H} v_{ijm}x_{jm} = \sum_{i\in N}\sum_{k\in H}(\sum_{j\in N} u_{ijk})x_{ik} + \sum_{i\in N}\sum_{k\in H}(\sum_{j\in N} v_{jik})x_{ik}$$
$$= \sum_{i\in N}\sum_{k\in H}(\sum_{j\in N}(u_{ijk} + v_{jik}))x_{ik}$$

با تعریف α_{ik} به صورت $\alpha_{ik} = \sum_{j\in N}(u_{ijk} + v_{jik})$، زیرمساله بر حسب x به صورت زیر خواهد شد:

$$l_x(u,v) = \max \sum_{i\in N}\sum_{k\in H} \alpha_{ik}x_{ik}$$
$$s.t. \quad (۶),(۷),(۸),(۱۰).$$

برای $u_{ijk}, v_{ijm} \geq 0$ مفروض $l(u,v)$ یک کران بالا برای مساله $p_۲$ است.

نتیجه ۲: برای $u_{ijk}, v_{ijm} \geq 0$ مفروض جواب تابع لاگرانژین از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$l(u,v) = l_x(u,v) + l_y(u,v)$$

برای به‌دست آوردن بهترین کران بالا، دوگان لاگرانژ را به‌دست می‌آوریم:

$$D: \quad z_D = \min_{u,v\geq 0} l(u,v)$$

برای حل مساله D از بهینه‌سازی زیرگرادیان استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $x(u,v)$ و $y(u,v)$ جواب‌های بهینه $l(u,v)$ باشند، آنگاه زیرگرادیان برای $l(u,v)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial l}{\partial u_{ijk}} = -\sum_{m\in H} y_{ijkm} + x_{ik} \\ \dfrac{\partial l}{\partial v_{ijm}} = -\sum_{k\in H} y_{ijkm} + x_{jm} \end{cases}$$

الگوریتم ۱ روش زیرگرادیان برای مساله $p_۲$ را نشان می‌دهد. خروجی این الگوریتم یک کران بالا برای z_D است. در این الگوریتم LB یک کران پایین مساله اصلی و t بیانگر اندیس تکرار است. پارامتر θ در صورت عدم بهبود کران بالا، نصف می‌شود[۲۵].

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.15.4.7.9]

الگوریتم۱: روش زیر گرادیان برای بهبود ضرایب لاگرانژین برای مدل $p_۲$

۱) $set \quad t=۰, u_{ijk}=۰, v_{ijm}=۰, z_D=+\infty, \theta^t=۲$

۲) $if \quad t<t_{\max} \quad then\, solve \quad l_x(u^t,v^t), l_y(u^t,v^t)$

۳) $let \quad l(u^t,v^t)=l_x(u^t,v^t)+l_y(u^t,v^t)$

۴) $if \quad l(u^t,v^t)<z_D\, then \quad z_D=l(u^t,v^t)\, else \quad \theta=\frac{\theta}{۲}$

۵) $$\begin{cases}\gamma(u_{ijk}^t)=\dfrac{\partial l}{\partial u_{ijk}}=-\sum_{m\in H} y_{ijkm}+x_{ik}\\ \gamma(v_{ijm}^t)=\dfrac{\partial l}{\partial v_{ijm}}=-\sum_{k\in H} y_{ijkm}+x_{jm}\end{cases}$$

۶) $$\lambda^t=\theta^t\frac{LB-l(u^t,v^t)}{\sum_{i\in N}\sum_{j\in N}\sum_{k\in H}(\gamma(u_{ijk}^t))^۲+\sum_{i\in N}\sum_{j\in N}\sum_{m\in H}(\gamma(v_{ijm}^t))^۲}$$

۷) $$\begin{cases}u_{ijk}^{t+۱}=\max\left\{۰,u_{ijk}^t+\lambda^t\gamma(u_{ijk}^t)\right\}\\ v_{ijm}^t=\max\left\{۰,v_{ijm}^t+\lambda^t\gamma(v_{ijm}^t)\right\}\end{cases}$$

۵ حل مساله به کمک روش‌های ابتکاری و فراابتکاری

بنا به آنچه که در [۳] آمده مساله ماکزیمم پوشش *p*- هاب با پوشش تدریجی، یک مساله *NP-hard* است؛ بنابراین استفاده از روش‌های حل ابتکاری و فراابتکاری می‌تواند مفید واقع شود. در این بخش می‌خواهیم یک روش ابتکاری و یک روش فراابتکاری برای حل مدل‌های $p_۱$ و $p_۲$ ارایه دهیم.

۵-۱ ارایه روش ابتکاری:

ما از ایده به‌کار رفته در [۱۲] برای کاهش ابعاد مساله و در نتیجه یافتن یک جواب تقریبی مناسب برای آن استفاده می‌کنیم. با به‌کارگیری این روش ابتکاری، نقاطی را که برای هاب شدن مناسب هستند مشخص می‌کنیم. به عبارت دیگر از میان نقاط کاندید برای هاب شدن، مجموعه‌ای کوچک‌تر را که شرایط بهتری دارند انتخاب می‌کنیم. پس از تعیین مجموعه کاندید جدید برای انتخاب هاب‌ها، مدل را به کمک نرم افزار گمز حل می‌کنیم. در ادامه گام‌های روش ابتکاری را توضیح می‌دهیم.

گام اول(تشکیل ماتریس *fcm*): فرض کنید d_{ij} فاصله بین دو نقطه i و j باشد، ماتریس *fcm* یک ماتریس $n\times n$است که درایه i و j ام آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.15.4.7.9]

$$fcm_{ij}=\begin{cases} ۱ & if \quad d_{ij}\le \frac{l_{ij}}{۳} \\ f\,(d_{ij}) & if \quad \frac{l_{ij}}{۳}\le d_{ij}\le \frac{u_{ij}}{۳} \\ ۰ & if \quad d_{ij}\ge \frac{u_{ij}}{۳} \end{cases}$$

که در آن تابع $f\,(d_{ij})$ برای پوشش دودویی برابر با صفر و برای پارامتر پوشش تدریجی (۳) و(۴) مطابق با فرمول $f\,(d_{ij})=\frac{u_{ij}-d_{ij}}{u_{ij}-l_{ij}}$ تعریف می‌شود u_{ij} و l_{ij} مشابه قبل به ترتیب کران بالا و پایین پوشش می‌باشد.

گام دوم (تشکیل بردار NC) : بردار NC یک بردار n تایی است که درایه iام آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$NC_i=\sum_{j=۱}^{n} fcm_{ij}$$

به عبارت دیگر درایه iام بردار NC، مجموع درایه‌های سطر iام ماتریس fcm است ($|N|=n$).

گام سوم (تشکیل بردار SNC) : درایه‌های بردار NC را به صورت نزولی مرتب و آن را در SNCذخیره می کنیم (یعنی برای $i=۱,...,n$-۱ ، $SNC_i\le SNC_{i+۱}$).

گام چهارم (تشکیل مجموعه H) : در بردار SNC، $\left[\frac{n}{۵}\right]$ از نقاط آخر را حذف می‌کنیم، نقاط باقی مانده مجموعه H را تشکیل می‌دهند.

گام پنجم: بعد از مشخص شدن مجموعه اعضای کاندید جدید، مدل را با نرم افزار گمز حل می‌کنیم. نرم افزار گمز را محدود به انتخاب هاب‌ها از مجموعه H می‌کنیم.

هدف از این روش ابتکاری، کاهش زمان محاسبات می‌باشد. در بخش ۶ نشان خواهیم داد که استفاده از روش ابتکاری باعث کاهش زمان محاسبات هر دو مدل می‌شود و با به‌کارگیری این الگوریتم ساده در اغلب موارد جواب بهینه یا جواب نزدیک به جواب بهینه را به‌دست می‌آوریم.

۵-۲ ارایه الگوریتم ژنتیک برای حل مساله

از سال ۱۹۶۰ تقلید از تکامل موجودات زنده برای استفاده در الگوریتم‌های قدرتمند برای مسایل بهینه‌سازی مورد توجه قرار گرفت. الگوریتم ژنتیک اولین بار توسط جان هالند و همکارانش در سال ۱۹۶۵ مطرح شد. سپس در سال ۱۹۷۵ مبانی ریاضی آن در کتاب سازگاری در سیستم طبیعی و مصنوعی توسط هالند منتشر شد. الگوریتم ژنتیک یک روش فراابتکاری با کارایی بالاست که برای حل مسایل با سایز بزرگ مناسب می‌باشد. این الگوریتم در حل مسایل طراحی، بهینه‌سازی توابع، بهینه‌سازی ترکیبیاتی، سیستم‌های کنترل و... کاربرد دارد [۲۷]. مراحل الگوریتم ژنتیک برای مساله مورد بحث در این پژوهش به شرح زیر است:

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.15.4.7.9]

۱) ساختن کروموزوم[30]: ساختار کروموزوم باید به نحوی باشد که شامل اطلاعات مورد نیاز و اصلی مساله باشد. مهم‌ترین ویژگی‌های مساله ماکزیمم پوششی p- هاب تک تخصیصی عبارتند از:

الف) تعداد هاب p باید تعیین شود.

ب) هر گره غیرهاب حداکثر به یک هاب تخصیص داده می‌شود.

لذا ساختار کروموزوم باید طوری باشد که ویژگی‌های فوق را داشته باشد. در ساختار کروموزوم هر بیت[31] نشان‌دهنده یک گره تقاضا می‌باشد و عدد داخل هر بیت نشان‌دهنده هابی است که گره به آن تخصیص می‌یابد. اگر عدد داخل بیت با موقعیت مکانی بیت یکسان باشد، به این معنی که آن گره به عنوان هاب انتخاب شده است. برای نمونه کروموزوم زیر را در نظر بگیرید که برای شبکه‌ای با ۷ نقطه تقاضا بیان شده است.

۲	۵	۵	۲	۵	۲	۵

چون شماره بیت ۲ و ۵ با عدد داخل بیت یکسان است پس گره ۲ و ۵ هاب هستند. همچنین نقاط غیر هاب به یکی از هاب‌ها ۲ یا ۵ تخصیص یافته‌اند. مثلا گره‌های ۱، ۳، ۵ و ۶ به هاب ۵ و گره ۲، ۴ و ۷ به هاب ۲ تخصیص یافته است.

۲) تولید جمعیت اولیه[32]: برای تولید جمعیت اولیه، به اندازه سایز جمعیت اولیه، جواب اولیه تولید می‌کنیم. برای ساختن هر جواب اولیه ابتدا به صورت تصادفی p بیت انتخاب می‌شود. این p بیت نمایش‌دهنده هاب‌های انتخاب شده است.برای پر کردن سایر بیت‌ها، نقاط باقی مانده را به صورت تصادفی به هاب‌های انتخاب شده تخصیص می‌دهیم.

۳) محاسبه تابع برازندگی[33]: پس از تولید جمعیت اولیه، تابع برازندگی را که همان مقدار تابع هدف به ازای جواب فعلی است را محاسبه می‌کنیم.

٤) انتخاب کروموزوم‌ها برای تولید فرزندان: برای تولید فرزندان جدید از میان جواب‌های موجود، والدین را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم.

۵) عملگرهای ژنتیک: برای کشف و استخراج جواب‌های بهتر از جواب‌های اولیه، از عملگرهای ژنتیک؛ یعنی عملگر ادغام[34] و عملگر جهش[35] استفاده می‌کنیم.

عملگر ادغام: در علم ژنتیک فرزندان از والدین ایجاد می‌شوند به طوری که ویژگی‌های فرزندان ترکیبی از ویژگی‌های والدین است. به این عمل در علم ژنتیک ادغام می‌گویند. در الگوریتم ژنتیک، اپراتور ادغام با استفاده از دو رشته والد، دو رشته فرزند به‌وجود می‌آورد. برای اینکار قسمتی از بیت‌های والدین در بیت‌های فرزندان کپی می‌شود. عملگر ادغام استفاده شده در الگوریتم ژنتیک ارایه شده، به شرح زیر است:

[30] Chromosome
[31] Bit
[32] Population
[33] Fitness
[34] Crossover
[35] Mutation

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.15.4.7.9]

هاب‌های مشترک بین دو والد در دو فرزند بدون تغییر می‌نویسیم. هاب‌های باقی مانده را به طور تصادفی از بین هاب‌های غیر مشترک بین دو والد انتخاب می‌کنیم. در هر فرزند پس از مشخص شدن هاب‌ها، نقاط غیرهاب را به هاب‌ها تخصیص می‌دهیم. نحوه تخصیص نقاط غیرهاب به هاب‌ها به صورت زیر می‌باشد:

الف) ابتدا راس‌هایی که به هاب‌های مشترک تخصیص داده می‌شوند را مشخص می‌کنیم. بدین منظور اجتماع راس‌های متصل به هاب‌های مشترک بین دو والد را مشخص می‌کنیم. سپس در هر فرزند به صورت تصادفی جزء صحیح نصف این راس ها را انتخاب می‌کنیم و به طور تصادفی به هاب‌های مشترک تخصیص می‌دهیم.

ب) برای تخصیص نقاط به هاب‌های غیر مشترک در هر فرزند، اجتماع راس‌های متصل به هاب‌های غیرمشترک در هر دو والد را مشخص می‌کنیم. سپس در هر فرزند به طور تصادفی $\left[\frac{۳}{۴}\right]$ این راس‌ها را به هاب‌های غیرمشترک تخصیص می‌دهیم.

ج) راس‌های باقی مانده را به صورت تصادفی به هاب‌ها تخصیص می‌دهیم.

در شکل زیر (به عنوان نمونه) نحوه ادغام را برای کروموزومی با ۷ بیت بیان می‌کنیم. دو والد ۱ و ۲ را به صورت زیردرنظر بگیرید:

۲	۲	۴	۴	۲	۴	۲	والد۱

۴	۳	۳	۴	۴	۳	۴	والد۲

هاب ۴ در هر دو والد مشترک است بنابراین در هر دو فرزند هاب‌های مشترک تغییر نمی‌کنند.

			۴				فرزند۱

			۴				فرزند۲

در هر فرزند، بقیه هاب‌ها را به طور تصادفی از مجموعه هاب‌های غیرمشترک $\{۲,۳\}$ انتخاب می‌کنیم. فرض‌کنیم برای فرزند اول به طور تصادفی هاب ۳ انتخاب شود و برای فرزند دوم هاب ۲ انتخاب شود.

		۳	۴				فرزند۱

	۲		۴				فرزند۲

بعد از مشخص شدن هاب‌ها در هر فرزند، باید نقاط غیرهاب را به هاب‌های انتخاب شده، تخصیص دهیم. ابتدا نقاطی را که به هاب‌های مشترک تخصیص داده می‌شوند مشخص می‌کنیم. برای این منظور اجتماع راس‌های غیرهاب در هر دو والد که به هاب‌های مشترک متصل بودند مشخص می‌کنیم. اجتماع نقاط غیرهاب تخصیص یافته به هاب مشترک ۴ در دو والد برابر با $\{۱,۳,۵,۶,۷\}$ است. در هر فرزند جزء صحیح نصف این راس‌ها را به طور تصادفی به هاب‌های مشترک تخصیص می‌دهیم. فرض کنیم برای فرزند اول نقاط ۱ و ۵ و برای فرزند دوم نقاط ۶ و ۳ انتخاب شوند؛ لذا این نقاط را به هاب مشترک ۴ تخصیص می‌دهیم.

۴		۳	۴	۴			فرزند۱

	۲	۴	۴		۴		فرزند۲

سپس نقاطی را که به هاب‌های غیرمشترک متصل هستند مشخص می‌کنیم. $\left[\frac{۳}{۴}\right]$ نقاط $\{۱,۲,۳,۵,۶,۷\}$را در فرزند اول به هاب غیرمشترک ۳ و در فرزند دوم به هاب ۲ تخصیص می‌دهیم. فرض‌کنیم برای فرزند اول نقاط ۲ و ۷ و برای

فرزند دوم نقاط ۱ و ۵ انتخاب شوند، لذا این نقاط را به طور تصادفی به هاب‌های غیر مشترک ۲ و۳ تخصیص می‌دهیم؛ لذا داریم:

فرزند۲

۲	۲	۴	۴	۲	۴	

فرزند۱

۴		۳	۴	۴		۳

گره‌هایی را که به هیچ هابی تخصیص نیافته‌اند را به طور تصادفی به هاب‌های موجود در هر فرزند تخصیص می‌دهیم. پس فرزندان جدید حاصل از ادغام والد ۱ و ۲ به صورت زیر به‌دست می‌آید:

فرزند۲

۲	۲	۴	۴	۲	۴	۳

فرزند۱

۴	۴	۳	۴	۴	۳	۳

عملگر جهش: در علم ژنتیک به تغییرات غیرعادی در ساختار کروموزوم که باعث ایجاد تغییر در برخی ویژگی‌های افراد می‌شود جهش می‌گویند. در الگوریتم ژنتیک، عملگر جهش نقش مهمی در رهایی از جواب‌های محلی دارد. این عملگر در کروموزوم‌های متفاوت، تغییرات تصادفی برنامه‌ریزی نشده‌ای ایجاد می‌کند و ژن‌هایی را که در جمعیت اولیه وجود نداشته‌اند، وارد جمعیت می‌کند.

برای جهش در ساختار یک کروموزوم، هابی را به صورت تصادفی حذف می‌کنیم سپس از نقاط غیرهاب، به طور تصادفی هاب جدیدی انتخاب می‌کنیم و نقاطی که به هاب قبلی تخصیص داشتند به هاب جدید تخصیص می‌دهیم.

۴	۴	۳	۴	۴	۳	۳

ادغام →

۴	۴	۵	۴	۴	۵	۵

به عنوان نمونه در زیر نحوه جهش برای کروموزومی با ۷ بیت را بیان می‌کنیم. در این کروموزوم به صورت تصادفی هاب ۳ را حذف می‌کنیم و گره غیرهاب ۵ را به عنوان هاب جدید انتخاب می‌کنیم سپس نقاط تخصیص یافته به هاب ۳ را به هاب ۵ تخصیص می‌دهیم.

جایگزینی کروموزم‌های شایسته: تابع برازندگی کروموزوم‌ها را محاسبه می‌کنیم و کروموزوم‌های شایسته را جایگزین کروموزوم های قبلی می‌کنیم.

توقف الگوریتم: با توجه به شرط توقف انتخاب شده، اگر شرط توقف برقرار باشد متوقف می‌شویم و درغیراین صورت الگوریتم ادامه پیدا می‌کند. مادر این الگوریتم، شرط توقف را تعداد تکرارهای الگوریتم درنظر گرفته‌ایم.

نکته‌ای که لازم است در انتهای این بخش تذکر داده شود این است که در کلیه مراحل الگوریتم ژنتیک (تولید جمعیت و عملگرهای آن)، کروموزوم‌های ساخته شده از لحاظ شدنی بودن بررسی می‌شوند و در صورت نشدنی‌بودن (برقرار نبودن هریک از محدودیت‌های مساله)، کروموزوم ایجاد شده حذف می‌شود.

٦ نتایج محاسبات

در این بخش نتایج حاصل از حل مدل p_1 و مدل p_2 با نرم افزار گمز،کران های حاصل از به‌کارگیری ساده‌سازی لاگرانژین برای مدل p_2، روش ابتکاری و الگوریتم ژنتیک برای هر دو مدل را ارایه می‌کنیم. در هر مورد نتایج حاصل از پوشش دودویی و پوشش تدریجی جداگانه محاسبه و تحلیل می‌شود. حل مدل‌ها و کلیه محاسبات روش ساده‌سازی لاگرانژین با نرم‌افزار GAMS 24.1.3، یافتن مجموعه مراکز کاندید با روش ابتکاری و الگوریتم ژنتیک با نرم‌افزار

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.15.4.7.9]

$Matlab$ ۲۰۱۰، و در سیستمی با پردازنده ۴۲۰۰ و حافظه ۸ گیگابایت انجام شده است. ساده‌سازی لاگرانژین و روش ابتکاری را بر روی داده‌های CAB و الگوریتم ژنتیک را بر روی داده‌های CAB و AP([۲۸]) بررسی می کنیم. در مورد نمونه AP داده‌های ۴۰ و ۵۰ نقطه ای مورد بررسی قرار گرفته است.

ابتدا در بخش ۶-۱ نتایج روش ساده‌سازی لاگرانژین برای مدل $p_۲$ بیان می شود. سپس در بخش ۶-۲ نتایج روش ابتکاری بررسی می‌شود. در نهایت در بخش ۶-۳ نتایج حاصل از الگوریتم ژنتیک مطرح می‌شود.

٦-١ نتایج محاسبات روش ساده سازی لاگرانژین

در این بخش نتایج حاصل ازحل مدل های $p_۱$ و $p_۲$ را با نرم افزار گمز و نتایج حاصل از اجرای روش ساده‌سازی لاگرانژین برای مدل $p_۲$ را با پارامتر پوشش دودویی (۱) و پوشش‌های تدریجی (۳) و (۴) مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای تعیین پارامتر β' ، از حل مساله مرکزp- هاب استفاده شده است[۳]. تعداد تکرارهای روش ساده‌سازی لاگرانژین ۱۰تکرار می‌باشد. در جدول ۱ برای مقادیر متفاوت α و p، نتایج حاصل از حل مدل‌ها با نرم افزار گمز و بهترین کران بالا به‌دست آمده از ساده‌سازی لاگرانژین نمایش داده شده است. ستون‌های پوشش و کران لاگرانژین، به ترتیب نمایش‌دهنده جواب به‌دست آمده از حل مساله اصلی با گمز و کران بالای به‌دست آمده از ساده‌سازی لاگرانژین است. ستون زمان، نمایش‌دهنده زمان اجرا براساس ثانیه می‌باشد.

از مقایسه نتایج حاصل ازحل مدل های $p_۱$ و $p_۲$ با نرم افزار گمز، نتایج زیر حاصل می‌شود:

- هر دو مدل از نظر میزان پوشش یکسان هستند و هاب‌ها و تخصیص‌های یکسان دارند.
- با پوشش دودویی، مدل $p_۱$ دارای زمان محاسبات کم‌تری نسبت به مدل $p_۲$ است.
- در هر دو مدل پارامتر پوشش دودویی (۱)، پوشش کم‌تری نسبت به پارامتر پوشش تدریجی (۳) و (۴) ایجاد می کند.
- در هر دو مدل پارامتر پوشش تدریجی (۴)، بیش‌ترین پوشش را نسبت به پوشش‌های (۱) و (۳) ایجاد می کند.
- در هر دو مدل با p ثابت و با افزایش α، میزان پوشش کاهش می‌یابد.
- در اغلب موارد با پارامتر پوشش تدریجی زمان محاسبات مدل $p_۲$ کم‌تر از مدل $p_۱$ است.

در خصوص به‌کارگیری ساده‌سازی لاگرانژین برای $p_۲$، نتایج محاسباتی نشان می‌دهد که:

- کران بالای به‌دست آمده از روش ساده‌سازی لاگرانژین نزدیک جواب بهینه مساله است و البته کران به‌دست آمده برای مساله با پوشش تدریجی بهتر از کران به‌دست آمده برای مساله با پوشش دودویی است.
- کران بالای به‌دست آمده برای مساله با پارامتر پوشش (۴) مناسب‌تر از کران حاصل برای مساله با پارامتر (۳) است.
- با مقدار ثابت p و انجام تعداد تکرار یکسان، با افزایش α، در اغلب موارد کران بالای مناسب‌تری به‌دست می‌آید.

٦-٢ نتایج محاسبات روش ابتکاری

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.15.4.7.9]

ابتدا روش ابتکاری را در نرم‌افزار Matlab ۲۰۱۰ کدنویسی می‌کنیم. مجموعه بهینه برای انتخاب هاب‌ها، برابر با $H = N - \{۸,۱۴,۱۹,۲۲,۲۳\}$ به‌دست می‌آید. سپس هر دو مدل را با نرم افزار GAMS ۲۴.۱.۳ با شرط انتخاب هاب‌ها از مجموعهH، حل می‌کنیم. به طور مشابه برای تعیین پارامتر β'، از حل مساله مرکز p- هاب استفاده شده است[۵]. برای پوشش دودویی، پارامتر پوشش را مطابق (۱) و با $\beta_{ij} = ۰/۷۵\beta'_{ij}$ و برای پوشش تدریجی، تابع پوشش را مطابق (۳) و (۴) تعریف می‌کنیم.

در جدول ۲ نتایج حاصل از اجرای هر دو مدل با پارامترهای پوشش (۱)، (۳) و (۴) با روش ابتکاری و در جدول ۳ میانگین پوشش و زمان محاسبات روش ابتکاری برای هر دو مدل آمده است. در تمام جداول α بیانگر فاکتور تخفیف و p نشان دهنده تعداد هاب‌هاست. در ستون پوشش، مقدار تابع هدف بهینه، در ستون زمان، زمان اجرا برنامه بر اساس ثانیه، بیان شده است. در ستون gap درصد اختلاف پوشش حاصل از روش ابتکاری و نرم افزار گمز بیان شده است. به‌طور مشابه برای زمان اجرا نیز gap حاصل را به‌دست می‌آوریم. این مقادیر را به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$gap_{\text{پوشش}} = \frac{Z_{GAMS} - Z_{Algorithm}}{Z_{GAMS}} \times ۱۰۰ \qquad gap_{\text{زمان}} = \frac{CPU_{GAMS} - CPU_{Algorithm}}{CPU_{GAMS}} \times ۱۰۰$$

مقایسه نتایج حاصل از حل مدل‌های $p_۱$ و $p_۲$ با روش ابتکاری، نتایج زیر حاصل می‌شود:

۱) روش ابتکاری در هر دو مدل، در اغلب موارد جواب بهینه یا نزدیک به بهینه به‌دست می‌آورد.

۲) متوسط پوشش با روش ابتکاری، برای هر دو مدل یکسان است. در نتیجه gap پوشش هر دو مدل یکسان است.

۳) به‌طور متوسط پوشش حاصل از به‌کارگیری تابع پوشش تدریجی (۴) بیش‌تر از پوشش تدریجی (۳) است.

۴) به‌طور میانگین بیش‌ترین gap برای پوشش ۰/۰۶ و حداقل درصد میانگین کاهش زمان محاسبات، ۸۰ درصد است.

۵) روش ابتکاری در هر دو مدل، باعث کاهش زمان محاسبات می‌شود.

۶) زمان محاسبات روش ابتکاری با پوشش تدریجی، برای مدل $p_۲$ کم‌تر از مدل $p_۱$ است.

۷) درصد کاهش زمان محاسبات با روش ابتکاری، برای مدل $p_۱$ بیش‌تر از مدل $p_۲$ می‌باشد.

۳-٦ نتایج محاسبات الگوریتم ژنتیک

در این بخش نتایج حاصل از حل مدل‌ها با الگوریتم ژنتیک، برای مقادیر متفاوت α و p ارایه شده است. برای الگوریتم ژنتیک تعداد جمعیت اولیه را ۱۰۰، نرخ ادغام و نرخ جهش را ۰/۲۵ تعریف می‌کنیم. به این معنی که در هر تکرار از الگوریتم حداکثر ۲۵ درصد جمعیت اولیه، پس از انجام عملگرهای ادغام و جهش تغییر خواهدکرد. در حین انجام این عملگرها اگر فرزند دارای تابع برازندگی بهتری نسبت به والد باشد، با آن جایگزین می‌شود و در غیراین‌صورت والد در جمعیت باقی می‌ماند. در تمامی جداول این بخش ستون α ، p و gap مشابه بخش ۶-۲ می‌باشد. ستون‌های پوشش به ترتیب نمایش دهنده جواب به‌دست آمده از حل مدل $p_۱$ و مدل $p_۲$ با نرم افزار گمز و الگوریتم ژنتیک است. ستون زمان، نمایش دهنده زمان اجرا براساس ثانیه می‌باشد.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.15.4.7.9]

٦-۳-۱ نتایج الگوریتم ژنتیک بر روی داده‌های *CAB*

جدول ۴ نتایج حاصل از به‌کارگیری الگوریتم ژنتیک برای مساله ماکزیمم پوشش p- هاب با پوشش دودویی و تدریجی بر روی داده‌های CAB را نشان می‌دهد. تعداد تکرارهای الگوریتم ژنتیک را ۱۰۰ در نظر گرفته‌ایم. برای پوشش دودویی، پارامتر پوشش را مطابق (۱) و با $\beta_{ij} = ۰/۷۵\beta'_{ij}$ تعریف می‌کنیم. با توجه به اینکه تقریبا در تمامی موارد جواب بهینه حاصل از مساله با پوشش تدریجی (۴) بهتر از جواب‌های حاصل از حل مساله با پوشش تدریجی (۳) است، ما محاسبات را تنها برای مساله با پوشش تدریجی (۴) آورده‌ایم.

نتایج محاسبات الگوریتم ژنتیک نشان می‌دهد که gap پوشش الگوریتم ژنتیک برای پارامتر پوشش تدریجی (۴) کم‌تر از پارامتر پوشش دودویی (۱) است. به‌طور خاص میانگین درصد gap پوشش در مساله با پوشش دودویی ۱۲٪ و در مساله با پوشش تدریجی ۹٪ است. این در حالی است که میانگین زمان حل نمونه‌ها با ژنتیک کاهش چشمگیری نسبت به زمان اجرای گمز دارد. در ادامه نشان می‌دهیم که الگوریتم ژنتیک پیشنهادی برای نمونه‌های با ابعاد بالاتر (هم از لحاظ درصد پوشش و هم زمان اجرا) عملکرد مناسب‌تری نسبت به حل مدل ها با نرم افزار گمز نشان می‌دهد.

جدول ۱. نتایج حاصل از حل مدل های p_1 و p_2 با نرم افزار گمز و ساده سازی لاگرانژین برای مدل p_2

		پوشش(۱)					پوشش(۳)					پوشش (٤)				
		حل باگمز			ساده سازی لاگرانژ برای p_2		حل باگمز			ساده سازی لاگرانژ برای p_2		حل باگمز			ساده سازی لاگرانژ برای p_2	
α	p	پوشش p_1 و p_2	زمان p_1	زمان p_2	کران p_2	زمان p_2	پوشش p_1 و p_2	زمان p_1	زمان p_2	کران p_2	زمان p_2	پوشش p_1 و p_2	زمان p_1	زمان p_2	کران p_2	زمان p_2
۰.۲	۲	۷۹۱۳۴۰۰	۴۴	۱۷۲	۸۷۳۴۱۵۴	۱۹۱	۸۲۱۴۳۸۴	٦٤	۱۱۸	۸۶۶۹۹۴۰	۱۳۶	۸۳۴۲۸۵۰	۵۳	۱۳۶	۸۶۳۵۳۲۵	۱۶۰
	۳	۸۱۹۵۵۵۰	۶۱	۵۳۶	۸۶۶۱۷۱۹	۵۷۰	۸۳۴۸۵۳۶	۹۴	۳۰۲	۸۶۴۶۸۴۷	۳۳۶	۸۴۱۱۴۶۹	۹۵	۳۵۱	۸۶۳۴۵۴۶	۳۸۱
	۴	۸۱۷۰۱۷۲	۳۹	۱۹۵	۸۶۹۳۷۵۲	۲۱۸	۸۲۸۹۷۰۴	۱۱۰	۲۳	۸۶۳۹۴۱۳	۲۶۴	۸۳۴۵۹۲۲	۲۰۲	۲۷۱	۸۶۴۱۴۲۷	۲۹۸
	۵	۷۸۸۹۴۲۸	۵۶	۱۴۱	۸۷۲۲۸۷۱	۱۶۱	۸۱۰۹۱۵۴	۸۴	۱۰۹	۸۷۱۲۶۱۴	۱۱۷	۸۲۴۱۸۶۵	۲۲۵	۹۳	۸۷۷۴۷۸۵	۱۱۶
۰.۴	۲	۸۰۲۸۶۲۴	۳۴	۱۵۴	۸۶۱۷۵۳۸	۱۷۵	۸۸۲۴۰۹۹	۶۱	۱۵۷	۸۵۸۸۵۷۱	۱۳۲	۸۳۳۳۶۸۶	۵۷	۱۵۰	۸۵۹۱۰۲۶	۱۷۸
	۳	۸۱۴۶۸۶۰	۳۲	۲۰۶	۸۶۲۷۵۳۶	۲۳۰	۸۲۶۰۳۰۲	۸۵	۱۹۵	۸۶۱۶۷۰۹	۱۸۲	۸۳۱۱۴۰۸	۱۵۰	۲۲۹	۸۶۱۴۲۳۰	۲۶۷
	۴	۸۰۶۱۱۶۲	۳۲	۱۹۹	۸۷۵۸۳۴۰	۲۲۰	۸۲۴۰۴۸۲	۸۳	۱۲۴	۸۶۲۷۵۷۷	۲۲۹	۸۲۹۴۲۶۰	۹۸	۱۸۸	۸۶۱۱۱۲۶	۲۴۹
	۵	۷۶۱۷۳۰۸	۳۱	۱۰۸	۸۶۶۲۲۸۹	۱۲۶	۷۹۷۶۵۴۱	۶۲۴	۵۳	۸۶۵۱۶۰۴	۱۴۹	۸۱۳۱۱۹۵	۱۶۹	۷۰	۸۶۲۰۸۲۹	۱۰۶
۰.۶	۲	۷۶۸۷۱۶۸	۳۳	۱۰۴	۸۵۱۵۹۵۰	۱۲۳	۷۹۸۲۲۴۳	۹۶	۱۰۸	۸۵۵۶۰۷۷	۷۴	۸۱۹۵۹۵۱	۱۰۱	۱۳۱	۸۵۵۴۷۱۴	۱۶۵
	۳	۷۸۴۸۹۸۶	۲۵	۱۰۴	۸۴۰۹۵۳۹	۱۲۲	۸۰۲۹۲۳۶	۲۷	۱۶۰	۸۵۹۹۲۱۵	۱۳۳	۸۱۷۶۱۶۱	۱۵۹	۱۴۹	۸۵۷۶۰۵۰	۱۷۱
	۴	۷۸۱۵۴۶۴	۱۶	۱۴۴	۸۵۴۱۹۰۵	۱۶۲	۸۰۸۰۹۲۳	۴۵۲	۷۷	۸۵۷۷۱۱۲	۱۵۹	۸۱۸۶۲۲۸	۲۰۲	۱۲۷	۸۶۱۱۳۸۲	۱۴۹
	۵	۷۵۴۷۹۳۴	۱۴	۱۳۹	۸۳۲۷۵۰۱	۱۵۸	۷۹۴۲۲۴۸	۳۵	۸۷	۸۴۶۵۷۲۵	۸۸	۸۱۴۱۰۹۷	۱۶۶	۲۵	۸۶۱۱۳۸۲	۱۴۹
۰.۸	۲	۷۶۸۷۱۶۸	۱۱	۲۹	۸۱۴۴۴۹۵	۴۷	۷۸۴۱۹۷۰	۱۳۸	۵۴	۸۳۰۲۴۹۲	۹۵	۸۰۹۲۰۰۹	۸۲	۳۶	۸۳۹۱۱۲۱	۵۸
	۳	۷۸۴۸۹۸۶	۱۱	۱۲۹	۷۹۱۴۵۷۷	۱۴۸	۷۷۵۹۲۳۵	۲۰۹	۱۵۵	۸۲۳۴۳۹۳	۶۹	۸۰۱۰۲۹۰	۲۷۹	۹۲	۸۳۷۷۷۳۹	۱۱۵
	۴	۷۸۱۵۴۶۴	۱۱	۲۴۶	۷۸۹۱۱۵۷	۲۶۳	۷۷۶۰۵۰۳	۴۲۰	۱۸۵	۸۲۳۹۶۱۸	۱۵۶	۸۰۰۱۳۵۸	۷۴۶	۱۳۰	۸۳۶۲۵۳۹	۱۵۱
	۵	۷۵۴۷۹۳۴	۹	۱۸۰	۷۷۶۹۹۹۴	۲۰۱	۷۶۲۵۶۰۶	۱۰۰۱	۱۸۹	۸۰۴۵۴۱۹	۱۸۶	۷۸۶۶۴۶۴	۶۰۰	۷۹	۸۲۲۹۹۴۸	۱۰۲

جدول ۲: نتایج حاصل از به‌کارگیری روش ابتکاری با پوشش‌های دودویی و تدریجی و مقایسه آن با نتایج حاصل از حل مدل‌ها با گمز

		پوشش (۱)							پوشش (۳)							پوشش (٤)						
		گمز			ابتکاری				گمز			ابتکاری				گمز			ابتکاری			
α	p	پوشش P_1 و P_2	زمان P_1	زمان P_2	پوشش P_1 و P_2	زمان P_1	زمان P_2	Gap %	پوشش P_1 و P_2	زمان P_1	زمان P_2	پوشش P_1 و P_2	زمان P_1	زمان P_2	Gap %	پوشش P_1 و P_2	زمان P_1	زمان P_2	پوشش P_1 و P_2	زمان P_1	زمان P_2	Gap %
۰/۲	۲	۷۹۱۳۴۰۰	۴۴	۱۷۲	۷۹۱۳۴۰۰	۱۶	۴۲	۰/۰	۸۲۱۴۳۸۴	۶۴	۱۱۸	۸۲۱۴۳۸۴	۲۹	۳۴	۰/۰	۸۳۴۲۸۵۰	۵۳	۱۳۶	۸۳۳۷۸۳۷	۴۲	۲۵	۰/۱
	۳	۸۱۹۵۵۵۰	۶۱	۵۳۶	۸۱۹۵۵۵۰	۹	۱۶۳	۰/۰	۸۳۴۸۵۳۶	۹۴	۳۰۲	۸۳۲۲۳۷۶	۱۶	۹۰	۰/۳	۸۴۱۱۴۶۹	۹۵	۳۵۱	۸۳۹۱۶۱۶	۴۹	۵۴	۰/۲
	۴	۸۱۷۰۱۷۲	۳۹	۱۹۵	۸۱۷۰۱۷۲	۳	۳۴	۰/۰	۸۲۸۹۷۰۴	۱۱۰	۳۳	۸۲۸۹۷۰۴	۶	۱۳	۰/۰	۸۳۴۵۹۲۲	۲۰۲	۲۷۱	۸۳۴۵۹۲۲	۱۳	۱۱	۰/۰
	۵	۷۸۸۹۴۲۸	۵۶	۱۴۱	۷۸۸۹۴۲۸	۴	۱۷	۰/۰	۸۱۰۹۱۵۴	۸۴	۱۰۹	۸۰۸۵۳۷۳	۱۵	۷	۰/۳	۸۳۴۱۸۶۵	۲۳۵	۹۳	۸۱۶۲۰۹۵	۹۹	۱۱	۱/۰
۰/۴	۲	۸۰۲۸۶۳۴	۳۴	۱۵۴	۸۰۲۸۶۳۴	۶	۱۵	۰/۰	۸۸۳۴۰۹۹	۶۱	۱۵۷	۸۸۳۴۰۹۹	۳۵	۲۰	۰/۰	۸۳۳۳۶۸۶	۵۷	۱۵۰	۸۳۳۳۶۸۶	۳۰	۲۱	۰/۰
	۳	۸۱۴۴۸۶۰	۳۲	۲۰۶	۸۱۴۴۸۶۰	۲	۱۳	۰/۰	۸۱۶۰۳۰۲	۸۵	۱۹۵	۸۱۶۰۳۰۲	۱۴	۱۱	۰/۰	۸۳۱۱۴۰۸	۱۵۰	۲۲۹	۸۳۱۱۴۰۸	۲۸	۱۶	۰/۰
	۴	۸۰۶۱۱۶۲	۳۲	۱۹۹	۸۰۴۸۹۶۴	۱	۸	۰/۲	۸۲۴۰۴۸۲	۸۳	۱۲۴	۸۲۳۷۴۲۲	۱۲	۸	۰/۰	۸۲۹۴۲۶۰	۹۸	۱۸۸	۸۲۹۴۲۶۰	۱۰	۱۰	۰/۰
	۵	۷۶۱۷۳۰۸	۳۱	۱۰۸	۷۴۸۰۶۹۰	۴	۴۳	۱/۸	۷۹۱۶۵۴۱	۶۳۴	۵۳	۷۸۲۱۸۴۴	۱۶	۱۱	۱/۹	۸۱۳۱۱۹۵	۱۶۹	۷۰	۷۹۸۰۰۸۴	۱۷	۱۷	۱/۹
۰/۶	۲	۷۶۸۷۱۶۸	۳۳	۱۰۴	۷۶۸۷۱۶۸	۱۱	۱۸	۰/۰	۷۹۸۲۲۴۳	۹۶	۱۰۸	۷۹۸۲۲۴۳	۷۰	۲۸	۰/۰	۸۱۹۵۹۵۱	۱۰۱	۱۳۱	۸۱۹۵۹۵۱	۴۰	۲۱	۰/۰
	۳	۷۸۴۸۹۸۶	۲۵	۱۰۴	۷۸۴۸۹۸۶	۱	۱۲	۰/۰	۸۰۲۹۳۳۶	۲۷	۱۶۰	۸۰۲۹۳۳۶	۳۴	۵۹	۰/۰	۸۱۷۶۱۶۱	۱۵۹	۱۴۹	۸۱۷۶۱۶۱	۴۲	۳۳	۰/۰
	۴	۷۸۱۵۴۶۴	۱۶	۱۴۴	۷۸۱۵۴۶۴	۱	۷	۰/۰	۸۰۸۰۹۳۳	۴۵۲	۷۷	۸۰۳۶۷۴۱	۱۳	۹	۰/۵	۸۱۸۶۲۲۸	۲۰۲	۱۲۷	۸۱۳۹۳۸۷	۱۹	۱۱	۰/۶
	۵	۷۵۴۷۹۳۴	۱۴	۱۳۹	۷۵۴۷۹۳۴	۲	۲۱	۰/۰	۷۹۴۲۲۴۸	۳۵	۸۷	۷۷۸۲۱۲۹	۲۲	۲۵	۲/۰	۸۱۴۱۰۹۷	۱۶۶	۲۵	۷۹۷۴۲۱۰	۱۵	۱۱	۲/۰
۰/۸	۲	۷۴۹۷۴۴۰	۱۱	۲۹	۷۳۳۵۷۷۸	۹	۳۷	۲/۲	۷۸۴۱۹۷۰	۱۳۸	۵۴	۷۷۹۶۹۱۷	۲۲	۱۶	۰/۶	۸۰۹۲۰۰۹	۸۲	۳۶	۸۰۰۹۷۱۹	۵۲	۲۰	۱/۰
	۳	۷۴۵۹۴۵۶	۱۱	۱۲۹	۷۴۵۹۴۵۶	۲	۱۴	۰/۰	۷۷۵۹۲۳۵	۲۰۹	۱۵۵	۷۷۵۹۲۳۵	۱۷	۲۰	۰/۰	۸۰۱۰۲۹۰	۲۷۹	۹۲	۸۰۱۰۲۹۰	۸۰	۴۳	۰/۰
	۴	۷۴۵۵۶۲۰	۱۱	۲۴۶	۷۳۳۱۹۰۴	۷	۱۰۴	۱/۷	۷۷۶۰۵۰۳	۴۲۰	۱۸۵	۷۷۰۰۲۸۷	۳۴	۵۸	۰/۸	۸۰۰۱۳۵۸	۷۴۴	۱۳۰	۷۹۰۶۱۳۹	۳۴	۱۴	۱/۲
	۵	۷۳۶۴۲۶۴	۹	۱۸۰	۷۲۹۲۸۰۴	۲	۱۲	۱/۰	۷۶۲۵۶۰۶	۱۰۰۱	۱۸۹	۷۵۳۴۲۰۴	۳۴	۱۲	۱/۲	۷۸۶۶۴۶۴	۶۴	۷۹	۷۷۲۹۳۶۱	۳۳	۲۲	۱/۷

جدول ۳. میانگین نتایج حاصل از نرم افزار گمز و روش ابتکاری برای مدل p_1 و p_2

متوسط زمان			متوسط پوشش				
$Gap_{\text{زمان}}$	روش ابتکاری	نرم افزار گمز	$Gap_{\text{پوشش}}$	روش ابتکاری	نرم افزار گمز	پارامتر پوشش	نوع مدل
۸۲	۵	۲۸/۶۸	۰/۴	۷۷۶۲۰۷۴	۷۷۹۳۶۷۷	(۱)	مدل p_1
۹۲	۲۳/۸۷	۳۰۷/۰۶	۰/۵	۸۰۰۵۸۸۶	۸۰۴۴۰۷۳	(۳)	
۸۵	۳۱/۴۳	۲۱۱/۵	۰/۶	۸۱۳۷۳۶۳	۸۱۹۲۶۴۳	(۴)	
۸۰	۳۵/۰۰	۱۷۴/۰	۰/۴	۷۷۶۲۰۷۴	۷۷۹۳۶۷۷	(۱)	مدل p_2
۸۲	۲۵/۶۸	۱۴۴/۱۵	۰/۵	۸۰۰۵۸۸۶	۸۰۴۴۰۷۳	(۳)	
۸۵	۲۰/۶۲	۱۴۱/۱۵	۰/۶	۸۱۳۷۳۶۳	۸۱۹۲۶۴۳	(۴)	

جدول ۴. نتایج حاصل از الگوریتم ژنتیک با پارامتر پوشش دودویی (۱) و پوشش تدریجی (۴) برای داده‌های CAB

پارامتر پوشش (۴)						پارامتر پوشش(۱)							
الگوریتم ژنتیک			نرم افزار گمز			الگوریتم ژنتیک			نرم افزار گمز				
Gap پوشش	زمان p_1 و p_2	پوشش p_1 و p_2	زمان p_2	زمان p_1	پوشش p_1 و p_2	Gap پوشش	زمان p_1 و p_2	پوشش p_1 و p_2	زمان p_2	زمان p_1	پوشش p_1 و p_2	p	α
۱۷	۲۰	۶۹۳۱۰۰۱	۱۳۶	۵۳	۸۳۴۲۸۵۰	۱۷	۲۱	۶۵۷۸۸۳۴	۱۷۲	۴۴	۷۹۱۳۴۰۰	۲	۰/۲
۹	۲۰	۷۶۴۸۰۳۵	۳۵۱	۹۵	۸۴۱۱۴۶۹	۱۹	۲۰	۶۶۱۶۹۴۲	۵۳۶	۶۱	۸۱۹۵۵۵۰	۳	
۱۰	۲۰	۷۴۷۴۸۹۷	۲۷۱	۲۰۲	۸۳۴۵۹۹۲	۱۷	۱۹	۶۷۵۰۱۶۸	۱۹۵	۳۹	۸۱۷۰۱۷۲	۴	
۱۳	۲۰	۷۱۳۷۷۴۷	۹۳	۲۲۵	۸۲۴۱۸۶۵	۱۷	۲۰	۶۵۳۱۲۷۴	۱۴۱	۵۶	۷۸۸۹۴۲۸	۵	
۱۰	۲۲	۷۴۷۲۶۹۱	۱۵۰	۵۷	۸۳۳۳۶۸۶	۱۴	۲۰	۶۸۸۹۶۸۰	۱۵۴	۳۴	۸۰۲۸۶۲۴	۲	۰/۴
۱۳	۲۲	۷۲۶۵۹۱۷	۲۲۹	۱۵۰	۸۳۱۱۴۰۸	۱۷	۲۰	۶۷۹۰۹۹۶	۲۰۶	۳۲	۸۱۴۶۸۶۰	۳	
۱۱	۲۰	۷۳۶۲۳۴۸	۱۸۸	۹۸	۸۲۹۴۲۶۰	۱۶	۱۹	۶۸۰۲۰۲۲	۱۹۹	۳۲	۸۰۶۱۱۶۲	۴	
۱۴	۲۰	۶۹۸۶۲۹۴	۷۰	۱۶۹	۸۱۳۱۱۹۵	۹	۱۹	۶۹۲۳۰۳۲	۱۰۸	۳۱	۷۶۱۷۳۰۸	۵	
۹	۲۷	۷۴۲۵۳۲۲	۱۳۱	۱۰۱	۸۱۹۵۹۵۱	۱۱	۱۹	۶۸۶۳۷۵۲	۱۰۴	۳۳	۷۶۸۷۱۶۸	۲	۰/۶
۶	۲۵	۷۶۵۱۹۹۹	۱۴۹	۱۵۹	۸۱۷۶۱۶۱	۱۲	۲۰	۶۸۷۸۳۳۶	۱۰۴	۲۵	۷۸۴۸۹۸۶	۳	
۷	۲۵	۷۶۰۲۵۴۱	۱۲۷	۲۰۲	۸۱۸۶۲۲۸	۱۰	۱۹	۷۰۲۵۰۸۲	۱۴۴	۱۶	۷۸۱۵۴۶۴	۴	
۹	۲۴	۷۳۹۶۲۳۳	۲۵	۱۶۶	۸۱۴۱۰۹۷	۹	۱۹	۶۸۴۲۸۰۲	۱۳۹	۱۴	۷۵۴۷۹۳۴	۵	
۶	۲۵	۷۵۹۹۶۸۲	۳۶	۸۲	۸۰۹۲۰۰۹	۹	۲۰	۶۸۴۲۸۰۲	۲۹	۱۱	۷۴۹۷۴۴۰	۲	۰/۸
۷	۲۸	۷۸۳۳۸۹۵	۹۲	۲۷۹	۸۰۱۰۲۹۰	۵	۲۱	۷۰۹۸۴۱۶	۱۲۹	۱۱	۷۴۵۹۴۵۶	۳	
۲	۲۰	۷۷۶۳۴۸۸	۱۳۰	۷۴۶	۸۰۰۱۳۵۸	۵	۲۱	۷۰۷۹۱۸۲	۲۴۶	۱۱	۷۴۵۵۶۲۰	۴	
۳	۲۱	۷۶۱۲۲۵۷	۷۹	۶۰۰	۷۸۶۶۴۶۴	۲	۲۰	۷۲۶۲۹۴۶	۱۸۰	۹	۷۳۶۴۲۶۴	۵	
۹	۲۲	۷۴۴۷۷۷۱	۱۴۱	۲۱۲	۸۱۹۲۶۴۳	۱۲	۱۹/۸	۶۸۶۱۹۱۶	۱۷۴	۲۸/۷	۷۷۹۳۶۷۷	میانگین	

٦-٣-٢ نتایج الگوریتم ژنتیک بر روی داده‌های AP

بنا به جستجوهای صورت گرفته تنها مقاله‌ای که برای داده های AP، پارامتر پوشش را به‌کار برده است مقاله گیو و ونگ در سال ۲۰۰۹ [۲] است. در این مقاله پارامتر پوشش تنها برای $\alpha = ۰/۰۶$ تعریف و به‌کار برده شده است. ما برای پوشش

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.15.4.7.9]

دودویی و تدریجی و برای مقادیر متفاوت α، از این مقاله ایده گرفته‌ایم. برای این منظور پارامتر پوشش دودویی را برای داده‌های AP به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a_{ij}^{km}=\begin{cases}1 & if \quad c_{ijkm}\le \beta_{ij}\\ 0 & otherwise\end{cases} \tag{18}$$

که c_{ijkm} هزینه جابه‌جایی بین دو گره i و j از طریق هاب‌های k و m است و β_{ij} برای مقادیر مختلف α به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\beta_{ij}=\begin{cases}c_{ij} & \alpha=0/2\\ 1/1c_{ij} & \alpha=0/4\\ 1/2c_{ij} & \alpha=0/6\\ 1/3c_{ij} & \alpha=0/8\end{cases} \tag{19}$$

برای مساله با پوشش تدریجی پارامتر پوشش را مطابق با (۴) تعریف می‌کنیم. در این حالت $l_{ij}=0/75u_{ij}$ و مقادیر u_{ij} وابسته به مقدار α را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$u_{ij}=\begin{cases}1/33c_{ij} & \alpha=0/2\\ 1/46c_{ij} & \alpha=0/4\\ 1/60c_{ij} & \alpha=0/6\\ 1/73c_{ij} & \alpha=0/8\end{cases} \tag{20}$$

جدول‌های ۵ و ۶ نتایج حاصل از به‌کارگیری الگوریتم ژنتیک برای داده‌های ۴۰ و ۵۰ نقطه‌ای AP با پوشش دودویی و تدریجی و جدول ۷ متوسط پوشش و زمان اجرای الگوریتم ژنتیک را نشان می‌دهد. تعداد تکرارهای الگوریتم ژنتیک برای پوشش دودویی را ۵۰ و برای پوشش تدریجی ۱۰۰ در نظر گرفته‌ایم. از مقایسه نتایج به‌دست آمده از الگوریتم ژنتیک و نرم افزار گمز برای داده‌های AP نتایج زیر حاصل می‌شود:

۱) در حل مدل p_1 با پوشش دودویی به کمک نرم افزار گمز، gap پوشش مثبت می‌باشد. به این معنی که نرم افزار گمز توانسته جواب شدنی با مقدار تابع هدف بهتری را پیدا کند، البته حل این مدل با گمز به نسبت حل آن با الگوریتم ژنتیک دارای زمان اجرای بسیار بالاتری می‌باشد.

۲) در حل مدل p_1 با پوشش تدریجی و به کمک نرم افزار گمز، gap پوشش منفی می‌باشد به این معنی که الگوریتم ژنتیک در مقایسه با نرم افزار گمز جواب بهتری به ما داده است. توجه دارید که این شکاف بسیار زیاد و مشابه مدل با پوشش دودویی با تفاوت زمانی بسیار چشمگیری می‌باشد. به عبارت دیگر الگوریتم ژنتیک در زمان اجرای بسیار کم‌تر نسبت به نرم افزار گمز، جواب بسیار مناسب‌تری به‌دست آورده است.

۳) در حل مدل p_2، نرم افزار گمز تنها قادر بوده نمونه ۴۰ نقطه‌ای را حل کند. در این حالت نیز مشابه مدل p_2 با پوشش دودویی gap پوشش مثبت و برای مساله با پوشش تدریجی gap پوشش منفی می‌باشد. در حالتی که نرم افزارگمز قادر به حل مدل نشده است، ژنتیک در زمان قابل قبولی، جواب‌های خوبی را پیدا کرده است.

۴) در مقایسه دو مدل p_1 و p_2 با پوشش دودویی و با نرم افزار گمز (در مواردی که جواب حاصل شده است)، مدل p_1 پوشش بهتری نسبت به مدل p_2 داشته است؛ اما برای مساله با پوشش تدریجی، مدل p_2 نتایج بهتری نسبت به مدل p_1 به‌دست آورده است.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.15.4.7.9]

بنابراین در مجموع می‌توان نتیجه گرفت که الگوریتم ژنتیک پیشنهادی در مقایسه با نرم افزار گمز برای هر دو مدل (خصوصا برای مساله با پوشش تدریجی و ابعاد بزرگ) توانسته جواب‌های بهتری را به‌دست می‌آورد.

جدول۵. نتایج حاصل از به‌کارگیری الگوریتم ژنتیک برای داده‌های ۴۰ نقطه‌ای AP

		پارامتر پوشش دودویی (۱۸)								پارامتر پوشش تدریجی (۴) وکران (۲۰)							
		پوشش			زمان			Gap پوشش		پوشش			زمان			Gap پوشش	
α	p	p_1	p_2	ژنتیک	p_1	p_2	ژنتیک	p_1	p_2	p_1	p_2	ژنتیک	p_1	p_2	ژنتیک	p_1	p_2
۰/۲	۳	۲۱۷۰	۲۲۰۴	۱۹۰۵	۱۰۰۴	۳۵۴	۳۴	۱۲	۱۴	۶۰۱	۲۶۵۳	۲۲۴۰	۱۰۰۷	۴۸۶	۳۴	−۲۷۲	۱۶
	۴	۲۵۲۴	۲۵۳۳	۱۹۹۹	۱۰۰۲	۴۳۱	۳۴	۲۱	۲۱	۱۷۹	۲۸۷۷	۲۲۹۵	۱۰۰۴	۶۷۲	۳۴	−۱۱۸۰	۲۰
	۵	۲۶۷۸	۲۷۲۲	۲۱۲۱	۱۰۰۳	۵۶۸	۳۴	۲۱	۲۲	۳۸۸	۳۰۰۶	۲۳۲۴	۱۰۰۵	۸۹۹	۴۳	−۵۰۰	۲۳
۰/۴	۳	۲۳۵۰	۲۳۵۰	۲۰۲۲	۶۸۹	۴۰۳	۳۴	۱۴	۱۴	۸۳	۲۷۱۱	۲۳۵۲	۱۰۰۶	۳۰۸	۴۱	−۲۷۰۰	۱۳
	۴	۲۵۶۰	۲۵۶۰	۲۳۰۵	۱۰۰۲	۷۵۵	۳۴	۱۰	۱۰	۷۱۴	۲۹۰۴	۲۴۴۹	۱۰۰۳	۴۰۹	۴۱	−۲۴۰	۱۶
	۵	۲۶۶۳	۲۷۴۱	۲۲۵۲	۱۰۰۲	۸۹۹	۳۴	۱۵	۱۸	۱۲۲	۳۰۳۳	۲۵۴۱	۱۰۰۴	۸۵۸	۴۱	−۱۹۸۳	۱۶
۰/۶	۳	۲۳۸۱	۲۳۸۱	۲۲۶۵	۴۹۳	۱۰۳۱	۳۴	۵	۵	۱۰۲	۲۶۹۶	۲۴۶۸	۱۰۰۳	۱۰۲۵	۴۱	−۲۳۲۰	۸
	۴	۲۵۸۱	۲۴۶۷	۲۴۰۶	۷۵۹	۱۰۳۷	۳۴	۷	۳	۷۳۴	۲۹۱۷	۲۴۴۹	۱۰۰۵	۱۰۱۳	۴۱	−۲۳۳	۱۶
	۵	۲۷۴۸	۲۷۴۸	۲۵۲۸	۹۲۵	۱۰۳۲	۳۴	۸	۸	۲۷۰۴	۳۰۵۳	۲۶۳۲	۱۰۰۵	۱۰۲۵	۴۱	۲	۱۴
۰/۸	۳	۲۴۲۰	۲۴۲۰	۲۳۶۰	۲۷۰	۹۵۰	۳۴	۳	۳	۲۵۱۱	۲۷۷۵	۲۴۷۶	۱۰۰۳	۶۳۵	۳۴	۱	۱۱
	۴	۲۵۸۸	۲۵۵۵	۲۳۷۲	۴۳۷	۱۰۲۶	۳۴	۸	۷	۲۶۶۱	۲۹۱۶	۲۷۲۲	۱۰۰۴	۶۹۰	۳۴	−۲	۷
	۵	۲۷۳۳	۲۵۶۰	۲۴۷۷	۴۵۲	۱۰۲۸	۳۴	۹	۳	۲۶۸۱	۳۰۵۱	۲۶۰۷	۱۰۰۵	۳۰۵	۳۴	−۱۵	۳

جدول ٦. نتایج حاصل از به‌کارگیری الگوریتم ژنتیک برای داده های ۵۰ نقطه ای AP

		پارامتر پوشش دودویی (۱۸)								پارامتر پوشش تدریجی (۴) وکران (۲۰)							
		پوشش			زمان			gap پوشش		پوشش			زمان			gap پوشش	
α	p	p_1	p_2	ژنتیک	p_1	p_2	ژنتیک	p_1	p_2	p_1	p_2	ژنتیک	p_1	p_2	ژنتیک	p_1	p_2
۰/۲	۳	۷۴	–	۱۹۱۲	۱۰۰۶	–	۵۲	−۲۴۸۳	–	۵۸۷	–	۲۱۰۵	۱۰۰۷	–	۵۲	−۲۵۸	–
	۴	۲۳۳۸	–	۱۸۳۹	۱۰۰۴	–	۵۲	۲۱	–	۸۶	–	۲۲۱۹	۱۰۰۸	–	۵۲	−۲۴۸۰	–
	۵	۲۴۹۰	–	۱۹۵۴	۱۰۰۴	–	۵۲	۲۲	–	۹۰	–	۲۳۱۸	۱۰۱۰	–	۵۲	−۲۴۸۰	–
۰/۴	۳	۲۱۰۴	–	۲۰۸۴	۱۰۰۵	–	۵۲	۰/۹	–	۲۱۰۴	–	۲۳۲۶	۱۰۰۷	–	۶۳	−۱۱	–
	۴	۲۳۷۰	–	۲۱۳۳	۱۰۰۳	–	۵۲	۱۰	–	۱۰۹	–	۲۲۶۷	۱۰۰۸	–	۶۳	−۱۹۸۰	–
	۵	۲۶۰۸	–	۲۱۲۷	۱۰۰۴	–	۵۲	۱۸	–	۱۱۳	–	۲۲۷۷	۱۰۱۰	–	۶۳	−۱۹۱۰	–
۰/۶	۳	۲۳۴۱	–	۲۱۵۸	۱۰۰۴	–	۵۲	۸	–	۱۰۱	–	۲۳۱۸	۱۰۰۵	–	۶۴	−۲۲۶۰	–
	۴	۲۵۸۱	–	۲۳۴۵	۱۰۰۴	–	۵۲	۹	–	۵۹۰	–	۲۴۸۰	۱۰۱۶	–	۶۱	−۳۲۰	–
	۵	۲۷۰۰	–	۲۲۰۵	۱۰۰۴	–	۵۲	۱۸	–	۸۷	–	۲۴۵۷	۱۰۱۱	–	۵۳	−۲۷۲۴	–
۰/۸	۳	۲۳۶۵	–	۲۱۷۲	۱۰۰۵	–	۵۲	۸	–	۲۰۹	–	۲۴۶۶	۱۰۰۴	–	۵۲	−۱۰۸۰	–
	۴	۲۴۴۰	–	۲۴۲۹	۱۰۰۴	–	۵۲	۰/۴	–	۴۱۳۶	–	۲۵۷۳	۱۰۱۰	–	۵۲	۳۸	–
	۵	۲۶۵۹	–	۲۴۳۷	۱۰۰۴	–	۵۲	۸	–	۲۱۹	–	۲۵۲۵	۱۰۱۰	–	۵۲	−۱۰۵۰	–

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.15.4.7.9]

جدول ۷. میانگین پوشش و زمان محاسبات الگوریتم ژنتیک و نرم افزار گمز برای مدل p_1 و p_2 برای داده‌های AP

میانگین زمان اجرا			Gap پوشش		میانگین پوشش				
الگوریتم ژنتیک	حل مدل p_2 با گمز	حل مدل p_1 با گمز	مدل p_2	مدل p_1	الگوریتم ژنتیک	حل مدل p_2 با گمز	حل مدل p_1 با گمز	پارامتر پوشش	داده‌های AP
۳۴	۷۹۲/۸	۷۵۳/۱	۱۱	۱۱	۲۲۵۱	۲۵۲۰	۲۵۳۳	(۱۸)	۴۰ نقطه‌ای
۳۷/۵	۶۹۳/۷	۱۰۰۵	۱۵	−۱۹۰۲	۲۴۶۱	۲۸۸۲	۱۲۳	(۲۰) و (۴)	
۵۲	–	۱۰۰۴	–	۵	۲۱۴۹	–	۲۲۵۵	(۱۸)	۵۰ نقطه‌ای
۵۶/۵	–	۱۰۰۸	–	−۲۳۷	۲۳۶۶	–	۷۰۲	(۲۰) و (۴)	

۷ نتیجه‌گیری و پیشنهادهای آینده

در این مقاله یک مدل جدید برای مساله ماکزیمم پوشش p- هاب تک تخصیصی با پوشش تدریجی ارایه کردیم. سپس تابع پوشش تدریجی را توسعه و عملکرد مدل جدید با تابع پوشش تدریجی جدید را با مدل موجود در ادبیات موضوع مقایسه کردیم. روش ساده‌سازی لاگرانژین را برای یافتن کران مناسب برای مدل پیشنهادی و سپس یک روش ابتکاری و روش فراابتکاری ژنتیک را برای حل نمونه‌های عددی موجود به‌کار بردیم.

نتایج محاسبات نشان داد که در حل مدل جدید ارایه شده در این مقاله و مقایسه آن با مدل موجود در ادبیات، مراکز هاب با تخصیص‌های یکسان و همین‌طور پوشش یکسانی ایجاد می‌کند. در هر دو مدل پوشش تدریجی، پوشش بیش‌تری نسبت به پوشش دودویی و پارامتر پوشش جدید پوشش بیش‌تری در مقایسه با پارامتر پوشش تدریجی موجود را ایجاد می‌کند. هر چند مدل ماکزیمم پوشش p- هاب برای پوشش دودویی ارایه شده در[۳] زمان محاسبات کم‌تری نسبت به مدل ارایه شده در این مقاله دارد؛ اما در مورد مساله با پوشش تدریجی مدل جدید کارایی بالاتری دارد. نتایج روش لاگرانژین نشان داد که در به‌کارگیری این روش برای مساله با پوشش تدریجی کران بالای مناسب‌تری نسبت به پوشش دودویی به‌دست می‌آید. روش ابتکاری در اکثر موارد جواب بهینه و یا جواب نزدیک به جواب بهینه را به‌دست می‌آورد. علاوه بر آن روش ابتکاری زمان محاسبات را بسیار کاهش می‌دهد و الگوریتم ژنتیک برای داده‌هایی با ابعاد بالا، با زمان محاسبات کم‌تری، پوشش بیش‌تری ایجاد می‌کند.

مراجع

[۲۷] مومنی، منصور.،(۱۳۹۲). مباحث نوین تحقیق در عملیات.چاپ گنج شایگان.چاپ پنجم.

[1] Campbell, J.F., (1994). Integer programming formulations of discrete hub location problems. European Journal of Operational Research, 72(2), 387-405.

[2] QU, B., Weng, K., (2009). Path relinking approach for multiple allocation hub maximal covering problem. Computers and Mathematics with Application, 57, 1890-1894.

[3] Peker, M., Kara, B.Y., (2015). The P-Hub maximal covering problem and extensions for gradual decay functions. Omega, 54, 158-172.

[4] Okelly, M.E., (1986). The location of interacting hub facilities. Transportation Science, 20(2), 92-106.

[5] Kara, B.Y., Tansel, B.C., (2003). The single-assignment hub covering problem: Models and linearizations. Journal of the Operational Research Society, 54(1), 59-64.

[6] Ernst, A., Jiang, H., Krishnamoorthy, M., Baatar, D., (2005). Reformulations and computational results for uncapacitated single and multiple allocation hub covering problem. Unpublished Report. Cambridge Judge Business School Working Papers, Australia.

[7] Hamacher, H.W., Meyer, T., (2006). Hub cover and hub center problems, Working paper, Germany.

[8] Tan, P.Z., Kara, B. Y., (2007). A hub covering model for cargo delivery systems. Networks, 49(1), 29-36.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.15.4.7.9]

[9] Weng, K., Weng, Y., (2008). Evolutionary algorithms for multiple allocation hub set covering problem. International conference on networking. sensing and control sanya, 28-39.
[10] Calik, H., Alumur, S.A., Kara, B.Y.,Karasan, O.E., (2009). A tabu-search based heuristic for the covering problem over incomplete hub network. Computers & Operations Research, 36(12), 3088-3096.
[11] Hwang, Y. H., Lee, H.Y., (2012). Uncapacitated single allocation p-hub maximal covering problem. Computers & Industrial Engineering, 63, 382-389.
[12] Karimi. H., Bashiri, M., (2011). Hub covering location problems with different coverage types. Scientia Iranica. 18(6), 1571-1578.
[13] Church, R. L., Roberts, K. L., (1983). Generalized coverage models and public facility location. In Papers of the Regional Science Association, 117-135.
[14] Berman, O., Krass, D., (2002). The generalized maximal covering location problem. Computers & Operations Research, 29(6), 563-581.
[15] Berman, O., Krass, D., Drezner, Z., (2003). The gradual covering decay location problem on a network, European Journal of Operational Research, 151, 474-480.
[16] Berman. O., Kalcsics, J., Krass, D., Nickel, S., (2009). The Ordered Gradual Covering Location Problem on a Network. Discrete Applied Mathematics, 157, 3689-3707.
[17] Berman, O., Wang, J., (2011). The minmax regret gradual covering location problem on a network with incomplete information of demand weights. European Journal of Operational Research, 208(3), 233-238.
[18] Silva, M.R., Cunha, C.B., (2017). A tabu search heuristic for the uncapacitated single allocation p-hub maximal covering problem. European Journal of Operational Research, 262(3), 954-965.
[19] Jankovi, O., Stanimirovi, Z., (2017). A general variable neighborhood search for solving the uncapacitated r-allocation p-hub maximal covering problem. Electronic Notes in Discrete Mathematics, 58, 23–30.
[20] Jankovi, O., Miškovi, S., Stanimirovi, Z., Todosijevi, R., (2017). Novel formulations and VNS-based heuristics for single and multiple allocation p-hub maximal covering problems. Annals of Operations Research. DOI 10.1007/s10479-017-2508-1.
[21] Aykin, T., (1994). Lagrangian relaxation based approaches to capacitated hub-and-spoke network design problem. European Journal of Operational Research, 79(3), 501-523.
[22] Smith, K., Krishnamoorthy, M., Palaniswami, M., (1996). Neural versus traditional approaches to the location of interacting hub facilities. Location Science, 4 (3), 155–171.
[23] Lee, Y., Lim, B., Park, J., (1996). A hub location problem in designing digital data service networks: Lagrangian relaxation approach. Location Science, 4, 183–194.
[24] Pirkul, H., Schilling, D. A., (1998). An efficient procedure for designing single allocation hub and spoke systems. Management Science, 44(12), 235–242.
[25] Contreras, I., Diaz, J.A., Fernandez, E., (2009). Lagrangian relaxation for the capacitated hub location problem with single assignment. OR Spectrum, 31(3), 483–505.
[26] Contreras, I., Diaz, J.A., Fernandez, E., (2011). Branch and price for large-scale capacitated hub location problems with single assignment. INFORMS Journal on Computing, 23(1), 41–55.
[28] Ernst, A.T., Krishnamoorthy, M., (1996). Efficient algorithms for the uncapacitated single allocation p-hub median problem. Location Science, 4(3), 139–154.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.15.4.7.9]