مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال هفدهم، شماره سوم (پیاپی ۶۶)، پاییز ۹۹، ص ص ۲۲-۱
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

یک الگوریتم اولیه-دوگان برای حل مسایل بهینه‌سازی خطی چندهدفه با متغیرهای فازی

مهرداد غزنوی[1*]، اعظم عضدی[2]، مریم قرآنی[3]

۱- استادیار، دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده علوم ریاضی، گروه ریاضی کاربردی و علوم کامپیوتر، شاهرود، ایران
۲- دانشجوی دکتری، دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده علوم ریاضی، گروه ریاضی کاربردی و علوم کامپیوتر، شاهرود، ایران
۳- استادیار، دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده علوم ریاضی، گروه ریاضی کاربردی و علوم کامپیوتر، شاهرود، ایران

رسید مقاله: ۲۷ فروردین ۱۳۹۷
پذیرش مقاله: ۲۹ دی ۱۳۹۸

چکیده

روش سیمپلکس اولیه-دوگان فازی یک روش جدید و کارا برای حل مسایل برنامه‌ریزی خطی با متغیرهای فازی می‌باشد. این الگوریتم بر پایه نتایج دوگانی استوار است و همانند الگوریتم سیمپلکس دوگان، از شدنی بودن دوگان شروع و به سمت شدنی بودن اولیه حرکت می‌کند. با این تفاوت که در الگوریتم اولیه-دوگان نیاز نیست جواب شدنی دوگان پایه‌ای باشد. ما در این مقاله، الگوریتم سیمپلکس اولیه-دوگان را برای حل مسایل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه با متغیرهای فازی توسعه می‌دهیم. برای این منظور، با کمک تکنیک اسکالرسازی مجموع وزن‌دار فازی، یک مساله برنامه‌ریزی خطی تک‌هدفه فازی متناظر با مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه فازی ارایه می‌دهیم. ثابت می‌کنیم که یک جواب بهینه مساله تک‌هدفه مجموع وزن‌دار فازی با وزن‌های مثبت، یک جواب پارتو فازی برای مساله چندهدفه است. سپس با افرازبندی وزن‌های مساله مجموع وزن‌دار، الگوریتم اولیه-دوگان تک‌هدفه را به مسایل چندهدفه فازی تعمیم می‌دهیم. با کمک الگوریتم ارایه شده می‌توانیم یک مجموعه از جواب‌های بهینه پارتو فازی را پیدا کنیم. ارایه مجموعه‌ای از جواب‌های پارتو فازی، به تصمیم‌گیرنده این امکان را می‌دهد که بهترین جواب را از بین آن‌ها با توجه به معیارهای مورد نظر خود انتخاب کند. در نهایت، الگوریتم پیشنهادی را برای حل یک مساله بهینه‌سازی سه هدفه با متغیرهای فازی به‌کار می‌بریم و نتایج را با برخی از روش‌های موجود مقایسه می‌کنیم.

کلمات کلیدی: برنامه‌ریزی خطی چندهدفه فازی، سیمپلکس اولیه-دوگان، رتبه‌بندی فازی، جواب بهینه پارتو فازی.

۱ مقدمه

ایده مجموعه فازی ابتدا توسط زاده [۱] به عنوان یک معیار عدم اطمینان پیشنهاد شد. سپس تاناکا و همکاران [۲] مفهوم برنامه‌ریزی ریاضی فازی را در چارچوب تصمیم‌گیری فازی بلمن و زاده [۳] ارایه دادند. اولین فرمول‌بندی

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: ghaznavi@shahroodut.ac.ir

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.2.2]

برنامه‌ریزی خطی فازی (FLP) توسط زیمرمن [۴] پیشنهاد شد. پس از آن، نویسندگان زیادی انواع مختلف مسایل FLP را در نظر گرفتند و چندین رویکرد برای حل این مسایل پیشنهاد کردند (به مراجع [۵،۶،۷،۸،۹،۱۰،۱۱] مراجعه شود). بعضی نویسندگان از مفهوم مقایسه اعداد فازی برای حل این مسایل استفاده کردند. در واقع، ساده‌ترین روش‌ها بر پایه مفهوم مقایسه اعداد فازی با استفاده از توابع رتبه‌بندی هستند [۵،۹،۱۰،۱۱،۱۲،۱۳].

اولین بار زیمرمن [۴] یک مجموعه تصمیم‌گیری چند معیاره فازی را پیشنهاد کرد که به صورت اشتراک تمام هدف‌ها و محدودیت‌های فازی تعریف شده است. پس از آن محققان زیادی رویکردهایی برای حل مسایل خطی چندهدفه فازی ارایه دادند. به عنوان مثال، ژانگ و شی [۱۴] مساله برنامه‌ریزی خطی فازی را به شکل یک مساله بهینه‌سازی مقید با چهار تابع هدف فرموله کردند که در آن ضرایب هزینه فازی بودند. همچنین، با فرض آن‌که تصمیم‌گیرنده برای هر یک از توابع هدف یک آرمان در نظر بگیرد، جیمنز و بیلبائو [۱۵] یک روش سه مرحله‌ای برای پیدا کردن یک جواب بهینه پارتو برای مسایل خطی چندهدفه با اهداف فازی ارایه دادند. در ادامه، وو و همکاران [۱۶] با رفع برخی مشکلات روش‌های قبلی، یک روش دو مرحله‌ای برای حل این مسایل با اهداف فازی ارایه نمودند. همچنین، نوری اسکندری و غزنوی [۱۷] با معرفی یک مساله برنامه‌ریزی قطعی و ارایه یک الگوریتم، جواب‌های پارتو یک مساله برنامه‌ریزی فازی را به‌دست آوردند. کادناس و وردگی [۱۸] از توابع رتبه‌بندی مختلف برای حل یک مساله بهینه‌سازی چندهدفه فازی استفاده کردند. میش‌مست نهی و همکاران [۱۹] با حل یک مساله با پارامترهای فازی و استفاده از قضایای دوگانی، الگوریتمی برای حل مسایل خطی چندهدفه با متغیرهای فازی ارایه دادند. لیو و شی [۲۰] یک مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه با اعداد فازی ذوزنقه‌ای متقارن را با کمک یک روش سیمپلکس خاص حل کردند. همچنین، عزتی و همکاران [۲۱] یک الگوریتم سیمپلکس برای مسایل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه فازی با قاعده الفبایی ارایه دادند. در مسایل خطی چندهدفه با قاعده الفبایی، ابتدا مساله را تنها با هدفی که اولویت اول (مهم‌تر) دارد، با کمک روش سیمپلکس فازی حل می‌کنیم و جواب بهینه را مشخص می‌کنیم. در مرحله‌ی بعد تابع هدف اولویت اول را برابر جواب بهینه‌ی به‌دست آمده قرار داده و به عنوان یک محدودیت به مساله اضافه کرده و مساله را با در نظر گرفتن تابع هدف با اولویت دوم حل می‌کنیم. این رویه به همین صورت برای اولویت‌های بعدی تکرار می‌شود. حمدامین [۲۲] یک دسته خاص از مسایل بهینه‌سازی خطی چندهدفه فازی را مورد بررسی قرار داد که در آن‌ها ضرایب توابع هدف اعداد فازی مثلثی هستند و برای حل آن‌ها از یک تابع رتبه‌بندی خطی و روش سیمپلکس تک‌هدفه استفاده کرد. در سال‌های اخیر رویکردهای دیگری نیز برای حل مسایل چندهدفه فازی ارایه شده است (به مراجع [۲۳،۲۴،۲۵،۲۶] مراجعه شود).

در این مقاله، مسایل بهینه‌سازی خطی چندهدفه با متغیرهای فازی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. همچنین، فرض می‌کنیم که بردار سمت راست نیز شامل اعداد فازی ذوزنقه‌ای باشد. مسایل بهینه‌سازی چندهدفه معمولاً به‌صورت غیرمستقیم و با استفاده از تکنیک‌های معمول بهینه‌سازی تک‌هدفه حل می‌شوند. فرایند حل بدین‌صورت است که ابتدا یک مساله تک‌هدفه متناظر با مساله چندهدفه ساخته می‌شود و سپس مساله تک‌هدفه

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.2.2]

حل می‌شود. در نهایت رابطه بین جواب‌های بهینه مساله تک‌هدفه و جواب‌های کارای مساله چندهدفه بررسی می‌شود. در این مقاله، مساله اسکالرسازی مجموع وزن‌دار فازی متناظر با مساله چندهدفه فازی را معرفی می‌کنیم که با در نظر گرفتن اهمیت هر یک از توابع هدف، تصمیم‌گیرنده به آن‌ها وزن‌هایی نامنفی اختصاص می‌دهد. برخلاف روش قاعده الفبایی [۲۱]، وزن‌دهی به توابع هدف باعث می‌شود که تمام توابع هدف بر اساس اهمیت آن‌ها در مساله دیده شوند و هیچ یک نادیده گرفته نشوند. ثابت می‌کنیم که هر جواب بهینه پارتو فازی مساله چند هدفه، یک جواب بهینه فازی برای مساله تک‌هدفه مجموع وزن‌دار فازی است. در ادامه با کمک این قضیه، فرایندی برای افرازبندی وزن‌های مساله مجموع وزن‌دار ارایه می‌دهیم. با افرازبندی وزن‌ها، الگوریتم سیمپلکس اولیه-دوگان مسایل برنامه‌ریزی خطی تک‌هدفه فازی [۲۷] را برای مسایل خطی چندهدفه فازی تعمیم می‌دهیم. روش سیمپلکس اولیه-دوگان از یک جواب شدنی دوگان که لزوما پایه‌ای نیست شروع و به سمت شدنی بودن اولیه حرکت می‌کند. اما در تمام روش‌هایی که بر مبنای الگوریتم سیمپلکس هستند [۱۹،۲۱،۲۲] به یک جواب شدنی پایه‌ای فازی نیاز داریم. افرازبندی وزن‌های مساله تک‌هدفه به ما این امکان را می‌دهد که بتوانیم مجموعه‌ای از جواب‌های بهینه پارتوفازی را با کمک الگوریتم ارایه شده بیابیم و در واقع تقریبی از مرز پارتو فازی به‌دست آوریم. ارایه یک مجموعه از جواب‌های بهینه پارتو فازی به تصمیم‌گیرنده این امکان را می‌دهد که از بین آن‌ها بهترین جواب را با توجه به شاخص‌های خود انتخاب کند، درحالی که در بسیاری از روش‌های موجود برای حل مسایل چندهدفه فازی [۱۹،۲۱،۲۲]، تنها یک نقطه بهینه پارتو فازی به‌دست می‌آید و تصمیم‌گیرنده باید آن نقطه را به عنوان جواب نهایی بپذیرد. قابل ذکر است که الگوریتم ارایه شده می‌تواند برای تولید تمام نقاط بهینه پارتو فازی مسایل بهینه سازی چندهدفه ترکیبیاتی به‌کار گرفته شود.

این مقاله دارای ۷ بخش است. در بخش ۲ مفاهیم و تعاریف اولیه مربوط به مجموعه‌های فازی و رتبه‌بندی فازی آورده شده است. در بخش ۳ الگوریتم سیمپلکس اولیه-دوگان برای حل مسایل برنامه‌ریزی خطی تک‌هدفه فازی مرور می‌شود. در بخش ۴، تکنیک اسکالرسازی مجموع وزن‌دار فازی برای حل یک مساله خطی چندهدفه فازی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش ۵ روش سیمپلکس اولیه-دوگان برای مسایل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه فازی شرح داده شده است و در بخش ۶ با ارایه یک مثال، کارایی این الگوریتم نشان داده شده است. در نهایت، در بخش ۷ نتیجه‌گیری آورده شده است.

۲ تعاریف و مفاهیم اولیه

در این بخش برخی تعاریف اولیه که در ادامه مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرند، آورده شده است.

۲-۱ نظریه مجموعه‌های فازی

تعریف۲-۱ [۴] فرض کنید X یک مجموعه مرجع و $\tilde{A} \subseteq X$ یک مجموعه فازی باشد. در این صورت تابع عضویت یا درجه عضویت $\mu_{\tilde{A}}(x)$ به صورت $\mu_{\tilde{A}} : X \to [0,1]$ تعریف می‌شود. در واقع $\mu_{\tilde{A}}(x)$ به هر عنصر $x \in X$ عددی در بازه $[0,1]$ نسبت می‌دهد و میزان تعلق x به مجموعه فازی $\tilde{A}$ را نشان می‌دهد.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.2.2]

تعریف ۲-۲ [۴] ارتفاع مجموعه فازی $\widetilde{A}$ را با M نمایش می‌دهیم و برابر است با

$$M = \sup_{x \in X} \left(\mu_{\widetilde{A}}(x) \right).$$

اگر ارتفاع $\widetilde{A}$ برابر ۱ باشد، $\widetilde{A}$ مجموعه فازی نرمال نامیده می‌شود و در غیر این صورت زیرنرمال گفته می‌شود.

تعریف ۲-۳ [۴] مجموعه فازی $\widetilde{A}$ محدب است هرگاه داشته باشیم:

$$\mu_{\widetilde{A}}(t) \geq \min\{\mu_{\widetilde{A}}(r), \mu_{\widetilde{A}}(s)\},$$

که در آن:

$$t = \lambda r + (۱-\lambda)s, \quad \forall r, s \in X, \forall \lambda \in [۰,۱].$$

تعریف ۲-٤ [۴] مجموعه فازی $\widetilde{A}$ روی مجموعه اعداد حقیقی را عدد فازی می‌نامیم هرگاه دارای شرایط زیر باشد:

- مجموعه فازی $\widetilde{A}$ محدب باشد،
- مجموعه فازی $\widetilde{A}$ نرمال باشد،
- تابع عضویت $\widetilde{A}$ قطعه قطعه پیوسته باشد.

چون مجموعه اعداد فازی بسیار بزرگ است و حسابان آن‌ها از لحاظ محاسباتی بسیار پرهزینه است، لذا تعریف و انتخاب انواع خاصی از اعداد فازی بسیار ضروری است. در این مقاله ما از نوع خاصی از اعداد فازی به نام اعداد فازی ذوزنقه‌ای استفاده می‌کنیم و اعمال روی آن‌ها را بررسی می‌کنیم. قابل ذکر است که اگر پارامترهای فازی مساله به شکل هر تابع عمومی به غیر از خطی، ذوزنقه‌ای و مثلثی تعریف شوند، تبدیل مساله فازی به قطعی بسیار مشکل خواهد بود و ناگزیر باید از سنجش اعتبار رویدادهای فازی [۲۸] استفاده کرد.

تعریف ۲-۵ [۴] عدد فازی $\widetilde{A} = (a^L, a^U, \alpha, \beta)$ روی مجموعه اعداد حقیقی یک عدد فازی ذوزنقه‌ای نامیده می‌شود، اگر تابع عضویت آن به صورت زیر بیان شود:

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-(a^L-\alpha)}{\alpha}, & a^L - \alpha \leq x \leq a^L, \\ ۱, & a^L \leq x \leq a^U, \\ \dfrac{(a^U+\beta)-x}{\beta}, & a^U \leq x \leq a^U + \beta, \\ ۰ & o.w., \end{cases} \qquad (۱)$$

که در آن $(a^L - \alpha, a^U + \beta)$ تکیه‌گاه $\widetilde{A}$ و $[a^L, a^U]$ هسته $\widetilde{A}$ می‌باشد.

ملاحظه ۲-٦ اگر در عدد فازی ذوزنقه‌ای $\widetilde{A} = (a^L, a^U, \alpha, \beta)$ داشته باشیم $a = a^L = a^U$، عدد فازی مثلثی به دست می‌آید که به صورت $\widetilde{A} = (a, \alpha, \beta)$ نمایش داده می‌شود.

فرض کنید $\widetilde{a} = (a^L, a^U, \alpha, \beta)$ و $\widetilde{b} = (b^L, b^U, \gamma, \theta)$ دو عدد فازی ذوزنقه‌ای باشند، در این صورت حساب اعداد فازی ذوزنقه‌ای به صورت زیر تعریف می‌شود:

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.2.2]

$$x\tilde{a} = (xa^L, xa^U, x\alpha, x\beta), \qquad \forall x \in \mathbb{R}; \quad x \geq ۰,$$
$$x\tilde{a} = (xa^U, xa^L, -x\beta, -x\alpha), \quad \forall x \in \mathbb{R}; \quad x < ۰,$$
$$\tilde{a} + \tilde{b} = (a^L + b^L, a^U + b^U, \alpha + \gamma, \beta + \theta).$$

۲-۲ رتبه‌بندی فازی

فرض کنید $F(\mathbb{R})$ مجموعه تمام اعداد فازی و $R: F(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد که به هر عدد فازی یک عدد حقیقی نظیر می‌کند. اگر $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ دو عدد فازی روی $\mathbb{R}$ باشند، در این صورت تابع R را تابع رتبه‌بندی (مقایسه) فازی گویند هرگاه داشته باشیم:

$$\tilde{a} \succeq \tilde{b} \quad \Leftrightarrow \quad R(\tilde{a}) \geq R(\tilde{b}),$$
$$\tilde{a} \succ \tilde{b} \quad \Leftrightarrow \quad R(\tilde{a}) > R(\tilde{b}),$$
$$\tilde{a} \simeq \tilde{b} \quad \Leftrightarrow \quad R(\tilde{a}) = R(\tilde{b}).$$

ما در این مقاله توجه خود را به تابع رتبه‌بندی خطی معطوف می‌کنیم. در واقع R یک تابع رتبه‌بندی خطی است هرگاه:

$$R(k\tilde{a} + \tilde{b}) = kR(\tilde{a}) + R(\tilde{b}),$$

برای هر $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ متعلق به $F(\mathbb{R})$ و برای هر $k \in \mathbb{R}$.

ملاحظه ۲-۷ [۲۷] برای هر عدد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{a}$، رابطه $\tilde{a} \succeq \tilde{۰}$ درست است، اگر وجود داشته باشد $\varepsilon \geq ۰$ و $\alpha \geq ۰$ به طوری که $\tilde{a} \succeq (-\varepsilon, \varepsilon, \alpha, \alpha)$. می‌دانیم که $R(-\varepsilon, \varepsilon, \alpha, \alpha) = ۰$ (ما همیشه فرض می‌کنیم $\tilde{a} \simeq \tilde{۰}$ اگر و تنها اگر $R(\tilde{a}) = ۰$). بنابراین بدون کاستن از کلیت، فرض می‌کنیم $\tilde{۰} \simeq (۰,۰,۰,۰)$ عدد فازی ذوزنقه‌ای صفر باشد. همچنین عدد فازی ذوزنقه‌ای یک را به صورت $\tilde{۱} \simeq (۱,۱,۰,۰)$ نمایش می‌دهیم.

طبق پیشنهاد یاگر [۲۹]، تابع رتبه‌بندی خطی برای اعداد فازی ذوزنقه‌ای را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$R(\tilde{a}) = \frac{۱}{۲}\int_۰^۱ (\inf \tilde{a}_\lambda + \sup \tilde{a}_\lambda)\, d\lambda, \tag{۲}$$

که ساده شده آن برابر است با

$$R(\tilde{a}) = \frac{a^L + a^U}{۲} + \frac{۱}{۴}(\beta - \alpha). \tag{۳}$$

بنابراین برای اعدادفازی ذوزنقه‌ای $\tilde{a} = (a^L, a^U, \alpha, \beta)$ و $\tilde{b} = (b^L, b^U, \gamma, \theta)$ خواهیم داشت:

$$\tilde{a} \succeq \tilde{b} \Leftrightarrow a^L + a^U + \frac{۱}{۲}(\beta - \alpha) \geq b^L + b^U + \frac{۱}{۲}(\theta - \gamma). \tag{۴}$$

قابل ذکر است که تابع رتبه‌بندی یاگر، هر عدد فازی ذوزنقه‌ای را به یک مقدار حقیقی در بازه تکیه‌گاه آن انتقال می‌دهد. لذا، این رتبه‌بندی برای اعداد فازی ذوزنقه‌ای مناسب است. برخی از توابع رتبه‌بندی موجود در مراجع (همانند رتبه بندی ارایه شده در [۳۰]) این خاصیت را حفظ نمی‌کنند و ممکن است عدد حقیقی به‌دست آمده در بازه عدد فازی ذوزنقه‌ای نباشد.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.2.2]

ملاحظه ۲-۸ در این مقاله ما از اعداد فازی ذوزنقه‌ای و تابع رتبه‌بندی یاگر استفاده می‌کنیم. اما باید به این نکته اشاره کرد که نتایج به‌دست آمده مستقل از انتخاب تابع رتبه‌بندی خطی هستند. در واقع، ما می‌توانیم از هر تابع رتبه‌بندی خطی دیگری به جای تابع یاگر نیز استفاده کنیم، و اگرچه جواب‌های به‌دست آمده ممکن است متفاوت باشند اما نتایج برای جواب‌های جدید نیز معتبر هستند. همچنین، چون اعداد فازی مثلثی حالت خاصی از اعداد فازی ذوزنقه‌ای می‌باشند، این نتایج برای مسایل با پارامترهای فازی مثلثی نیز برقرار هستند.

۳ سیمپلکس اولیه-دوگان برای حل مسایل برنامه‌ریزی تک‌هدفه فازی

مطالب این بخش از مرجع [۲۷] گرفته شده است.

برای هر مساله برنامه‌ریزی خطی فازی به شکل

$$\begin{aligned} P:\ \min\quad & c\tilde{x} \\ s.t.\quad & A\tilde{x} \simeq \tilde{b}, \\ & \tilde{x} \succeq \tilde{0}, \end{aligned} \tag{۵}$$

یک مساله برنامه‌ریزی خطی به نام دوگان در نظر می‌گیریم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} D:\quad \max\quad & w\tilde{b} \\ s.t.\quad & wA \le c, \end{aligned} \tag{۶}$$

که در آن $w=(w_1,\dots,w_m)\in\mathbb{R}^m$ متغیرهای دوگان متناظر بامحدودیت‌های مساله اولیه می‌باشند.

قضیه ۳-۱ (دوگان ضعیف) [۲۷] فرض کنیم که $\tilde{x}_0 \in X$ یک جواب شدنی مساله اولیه فازی و w_0 جواب شدنی مساله دوگان فازی باشد. در این صورت

$$w_0\tilde{b}^T \preceq c\tilde{x}_0. \tag{۷}$$

قضیه ۳-۲ (دوگان قوی) [۲۷] اگر یکی از مسایل اولیه یا دوگان فازی دارای جواب بهینه باشند، آن‌گاه مساله دیگر نیز جواب بهینه دارد و مقدار بهینه دو مساله برابر خواهد بود. یعنی اگر $\tilde{x}^* \in X$ جواب بهینه مساله اولیه باشد، آن‌گاه جواب بهینه w^* برای مساله دوگان وجود دارد به طوری که

$$\tilde{b}^T w^* \simeq c\tilde{x}^*. \tag{۸}$$

قضیه ۳-۳ (مکمل زاید) [۲۷] فرض کنیم $\tilde{x}^*$ و w^*، به ترتیب، جواب‌های شدنی برای مسایل اولیه و دوگان فازی باشند. در این صورت $\tilde{x}^*$ و w^* بهینه هستند اگر و فقط اگر داشته باشیم:

$$(c-w^*A)\tilde{x}^* \simeq \tilde{0}, \tag{۹}$$

$$w^*(A\tilde{x}^*-\tilde{b}) \simeq \tilde{0}. \tag{۱۰}$$

برای حل یک مساله برنامه‌ریزی خطی تک‌هدفه فازی با الگوریتم سیمپلکس اولیه-دوگان، مسایل اولیه و دوگان تک‌هدفه فازی (۵) و (۶) را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم w یک جواب شدنی آغازین دوگان باشد، یعنی $wa_j \le c_j$ برای تمام j ها. فرض کنیم $Q=\{j \mid wa_j - c_j = 0\}$، یعنی مجموعه اندیس‌های متغیرهای اولیه که

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.2.2]

می‌تواند مثبت باشد. حال مساله محدود شده اولیه را که سعی می‌کند یک جواب شدنی برای مساله اولیه از میان متغیرهای مجموعه Q پیدا کند به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j\in Q} 0\tilde{x}_j + 1\tilde{x}_a \\ s.t. \quad & \sum_{j\in Q} a_j\,\tilde{x}_j + 1\tilde{x}_a \simeq b, \\ & \tilde{x}_a \succeq \tilde{0}, \\ & \tilde{x}_j \succeq \tilde{0}, \qquad \forall j \in Q, \end{aligned} \tag{11}$$

که درآن $\tilde{x}_a^{\,T} \simeq (\tilde{x}_{1a},\ldots,\tilde{x}_{ma}) \in (F(\mathbb{R}))^m$ بردار متغیرهای مصنوعی است و $1=(1,\ldots,1)\in R^m$. مقدار تابع هدف فازی مساله محدودشده اولیه را با $\tilde{x}_0$ نشان می‌دهیم. در بهینگی این مساله داریم $\tilde{x}_0 \simeq \tilde{0}$ یا $\tilde{x}_0 \succ \tilde{0}$. هنگامی که $\tilde{x}_0 \simeq \tilde{0}$، ما یک جواب شدنی برای مساله اولیه داریم و تمام متغیرهای مصنوعی صفر هستند. علاوه بر این، یک جواب شدنی دوگان نیز داریم و شرط مکمل زاید $\left(wa_j - c_j\right)\tilde{x}_j \simeq \tilde{0}$ برقرار است. اگر $\tilde{x}_0 \succ \tilde{0}$، مساله اولیه حاصل نشدنی است و باید یک جواب دوگان جدید بسازیم. برای ساختن چنین بردار دوگانی، دوگان مساله اولیه محدودشده اولیه را به‌صورت زیردر نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \max \quad & v\tilde{b} \\ s.t. \quad & va_j \le 0, \quad j \in Q \\ & v \le 1. \end{aligned} \tag{12}$$

فرض کنیم v^* جواب بهینه مساله فوق باشد. بردار دوگان $\overline{w}$ زیر را می‌سازیم که در آن $\theta > 0$، یعنی $\overline{w} = w + \theta v^*$. لذا:

$$\overline{w}a_j - c_j = (\overline{w} + \theta v^*)a_j - c_j = (wa_j - c_j) + \theta(v^* a_j). \tag{13}$$

توجه داریم که $wa_j - c_j = 0$ و $v^* a_j \le 0$ برای $j \in Q$. بنابراین، معادله (۱۳) نتیجه می‌دهد که $\overline{w}a_j - c_j \le 0$ برای هر $j \in Q$. اگر $j \notin Q$ و $v^* a_j \le 0$ از معادله (۱۳) و با توجه به اینکه $wa_j - c_j < 0$ داریم $\overline{w}a_j - c_j < 0$. سرانجام حالتی را که $j \notin Q$ و $v^* a_j > 0$ را در نظر می‌گیریم. چون $wa_j - c_j < 0$ برای $j \notin Q$، می‌توان $\theta > 0$ را طوری انتخاب نمود که $\overline{w}a_j - c_j \le 0$ به ازای $j \notin Q$. به‌ویژه θ را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$\theta = \frac{c_k - wa_k}{v^* a_k} = \min_j \left\{ \frac{c_j - wa_j}{v^* a_j} \,\middle|\, v^* a_j > 0 \right\} > 0. \tag{14}$$

با تعریف θ و از معادله (۱۳) می‌بینیم که $\overline{w}a_k - c_k = 0$ و به علاوه برای هر j با $v^* a_j > 0$ و با توجه به معادله (۱۳) داریم $\overline{w}a_j - c_j < 0$.

الگوریتم سیمپلکس اولیه-دوگان مساله تک‌هدفه فازی

۱) یک بردار دوگان w را طوری انتخاب می‌کنیم که به ازای تمام j ها $wa_j - c_j \le 0$.

۲) قرارمی‌دهیم $Q = \{ j \mid wa_j - c_j = ۰ \}$ و مساله محدودشده اولیه را حل می‌کنیم. اگر $\tilde{x}_{\cdot} \succ \tilde{۰}$ توقف می‌کنیم (جواب جاری بهینه است). در غیراین صورت، فرض می‌کنیم v^* یک جواب بهینه دوگان مساله محدودشده اولیه باشد.

۳) اگر $v^* a_j \leq ۰$ برای هر j، توقف می‌کنیم (مساله اولیه نشدنی و دوگان نامتناهی است). درغیراین صورت، قرار می‌دهیم:

$$\theta = \frac{-(wa_k - c_k)}{v^* a_k} = \min_j \left\{ \frac{-(wa_j - c_j)}{v^* a_j} \mid v^* a_j > ۰ \right\} \qquad (۱۵)$$

و w را با $w + \theta v^*$ جایگزین نموده و به گام (۲) می‌رویم.

٤ برنامه‌ریزی خطی چندهدفه فازی و روش مجموع وزن‌دار فازی

یک مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه فازی استاندارد با متغیرهای فازی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \min \quad & \tilde{Z} \simeq (c^۱ \tilde{x}, c^۲ \tilde{x}, \ldots, c^k \tilde{x}) \\ s.t. \quad & A\tilde{x} \simeq \tilde{b}, \\ & \tilde{x} \succeq \tilde{۰}, \end{aligned} \qquad (۱۶)$$

که در آن $c^i = (c_۱^i, c_۲^i, \ldots, c_n^i) \in \mathbb{R}^n, i = ۱,۲,\ldots,k$ ضرایب هدف می‌باشند که قطعی هستند. ناحیه شدنی در فضای تصمیم را با $\tilde{X} = \{\tilde{x} \mid A\tilde{x} \simeq \tilde{b}, \tilde{x} \succeq \tilde{۰}\}$ نشان می‌دهیم که در آن $\tilde{x} \in F(\mathbb{R})^n$ است و $b \in F(\mathbb{R})^m$ و $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ می‌باشد. تابع هدف به شکل $C^T \tilde{x}$ نیز نوشته می‌شود که $C \in \mathbb{R}^{n \times k}$ دارای ستون‌های c^i می‌باشد. فرض کنیم $\tilde{X}_j = \{\tilde{x}^* \in \tilde{X} \mid c^j \tilde{x}^* \preceq c^j \tilde{x}, \forall \tilde{x} \in \tilde{X}\}$ مجموعه جواب‌های بهینه مساله خطی با j -امین تابع هدف باشد. دراین مقاله، فرض می‌کنیم $\bigcap_{j=1}^{k} \tilde{X}_j = \varnothing$. این فرض تضمین می‌کند که هیچ جواب شدنی وجود نداشته باشد به طوری که هم‌زمان تمام توابع هدف را مینیمم کند و بنابراین، مساله ما یک مساله چند هدفه واقعی خواهد بود.

تعریف ٤-۱ یک جواب شدنی $\tilde{x}^* \in \tilde{X}$ برای مساله (۱۶) بهینه پارتو ضعیف فازی نامیده می‌شود، هرگاه هیچ $\tilde{x} \in \tilde{X}$ دیگری موجود نباشد به طوری که $c^i \tilde{x} \prec c^i \tilde{x}^*, \forall i = ۱,۲,\ldots,k$. مجموعه جواب‌های بهینه پارتو ضعیف فازی را با $\tilde{X}_{WE}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ٤-۲ [۱۹] یک جواب شدنی $\tilde{x}^* \in \tilde{X}$ برای مساله بهینه‌سازی چندهدفه فازی (۱۶) بهینه پارتو فازی نامیده می‌شود، اگر هیچ $\tilde{x} \in \tilde{X}$ دیگری نباشد به طوری که $c^i \tilde{x} \preceq c^i \tilde{x}^*, \forall i = ۱,۲,\ldots,k$ و $c^j \tilde{x} \prec c^j \tilde{x}^*$ برای حداقل یک $j \in \{۱,۲,\ldots,k\}$. مجموعه جواب‌های بهینه پارتو فازی را با $\tilde{X}_E$ نشان می‌دهیم.

مسایل بهینه‌سازی چندهدفه معمولاً به‌صورت غیرمستقیم و با استفاده از تکنیک‌های معمول بهینه‌سازی تک‌هدفه حل می‌شوند. فرایند حل بدین‌صورت است که ابتدا یک مساله تک‌هدفه متناظر با مساله چندهدفه ساخته می‌شود

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.2.2]

و سپس مساله تک‌هدفه حل می‌شود. در نهایت رابطه بین جواب‌های بهینه مساله تک‌هدفه و جواب‌های کارای مساله چندهدفه بررسی می‌شود. در این مقاله، روش اسکالرسازی مجموع وزن‌دار فازی را بررسی می‌کنیم. در این روش با نسبت دادن وزن‌های (ضرایب) نامنفی به هریک از توابع هدف، مساله چندهدفه فازی را به یک مساله تک‌هدفه تبدیل نموده و سپس مساله مجموع وزن‌دار را به عنوان یک تابع تک‌هدفه فازی مینیمم می‌کنیم. قابل ذکر است که در این روش، بسته به اهمیت هر یک از توابع هدف، تصمیم‌گیرنده به هر یک از آن‌ها یک وزن نسبت می‌دهد، اما در روش اولویت مطلق اگر تابع هدف با اولویت اول جواب بهینه فازی منحصر بفرد داشته باشد، آن‌گاه توابع هدف با اولویت های بعدی را بررسی نمی‌کنیم و در واقع آن‌ها نادیده گرفته می‌شوند.

مساله اسکالرسازی مجموع وزن‌دار فازی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=۱}^{k} \lambda_i \; c^i \tilde{x} \\ s.t. \quad & A\tilde{x} \simeq \tilde{b}, \\ & \tilde{x} \succeq \tilde{۰}, \end{aligned} \qquad (۱۷)$$

که در آن $\lambda = (\lambda_۱, \lambda_۲, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ بردار وزن‌ها می‌باشد.

دو مجموعه Λ و Λ^0 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^k \mid \lambda_i \geq ۰, \forall i = ۱,۲,\ldots,k, \sum_{i=۱}^{k} \lambda_i = ۱\}$$

$$\Lambda^{۰} = \{\lambda \in \mathbb{R}^k \mid \lambda_i > ۰, \forall i = ۱,۲,\ldots,k, \sum_{i=۱}^{k} \lambda_i = ۱\}$$

که Λ و Λ^0 را فضای پارامتری گویند.

قضیه ٤-۳ یک جواب شدنی $\tilde{x}^* \in \tilde{X}$ بهینه پارتو ضعیف فازی برای مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه فازی (۱۶) است اگر و فقط اگر $\lambda \in \Lambda$ موجود باشد، به‌طوری که $\tilde{x}^*$ یک جواب بهینه فازی برای مساله مجموع وزن‌دار فازی (۱۷) باشد.

اثبات. فرض کنیم $\tilde{x}^*$ یک جواب بهینه فازی برای مساله(۱۷) باشد. با برهان خلف، فرض می‌کنیم $\tilde{x}^*$ بهینه پارتو ضعیف فازی برای مساله (۱۶) نباشد. لذا، یک $\tilde{x}'$وجود دارد به‌طوری‌که $c^i\tilde{x}' \prec c^i\tilde{x}^*$ برای $i = ۱,۲,\ldots,k$.

با توجه به نامنفی بودن λ_i ها، خواهیم داشت

$$\lambda_i c^i \tilde{x}' \prec \lambda_i c^i \tilde{x}^*, \; \forall i = ۱,۲,\ldots,k$$

و چون $\sum_{i=۱}^{k} \lambda_i = ۱$ ، لذا حداقل یک اندیس $j \in \{۱,۲,\ldots,k\}$ وجود خواهد داشت به‌طوری‌که

$$\lambda_j c^j \tilde{x}' \prec \lambda_j c^j \tilde{x}^*.$$

درنتیجه

$$\sum_{i=۱}^{k} \lambda_i c^i \tilde{x}' \prec \sum_{i=۱}^{k} \lambda_i c^i \tilde{x}^*$$

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.2.2]

که این با بهینه بودن $\tilde{x}^*$ برای مساله (۱۷) تناقض دارد. پس $\tilde{x}^*$ جواب بهینه پارتو ضعیف فازی برای مساله (۱۶) است.

برعکس، فرض کنیم $\tilde{x}^*$ یک جواب بهینه پارتو ضعیف فازی برای مساله (۱۶) باشد. در این صورت سیستم $R(c^i\tilde{x}) < R(c^i\tilde{x}^*),\ \forall i = 1,2,\ldots,k$ هیچ جوابی نخواهد داشت. در نتیجه بنا به یک قضیه دگرین [۳۱]، نتیجه می‌گیریم بردارهای نامنفی $\lambda_i, i = 1,2,\ldots,k$ با $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i = 1$ وجود دارند به‌طوری که

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\lambda_i R\left(c^i\tilde{x}\right) - \lambda_i R\left(c^i\tilde{x}^*\right)\right) \geq 0$$

لذا

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i c_i \tilde{x}^* \preceq \sum_{i=1}^{k}\lambda_i c_i \tilde{x}$$

بنابراین، $\tilde{x}^*$ یک جواب بهینه فازی مساله (۱۷)خواهد بود. ■

قضیه ٤-٤ یک جواب شدنی $\tilde{x}^* \in \tilde{X}$ بهینه پارتو فازی برای مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه فازی (۱۶) است اگر و فقط اگر $\lambda \in \Lambda^0$ موجود باشد، به‌طوری‌که $\tilde{x}^*$ یک جواب بهینه فازی برای مساله مجموع وزن‌دار (۱۷) باشد.

اثبات. مشابه قضیه ۴-۳ می‌توان اثبات کرد. ■

فرض کنید $c^p = (c_1^p, c_2^p, \ldots, c_n^p),\ p = 1,\ldots,k$. تعریف می‌کنیم:

$$c_j(\lambda) = \sum_{p=1}^{k}\lambda_p c_j^{\,p}, \qquad j = 1,\ldots,n, \tag{۱۸}$$

$$c(\lambda) = \left(c_1(\lambda),\ldots,c_n(\lambda)\right). \tag{۱۹}$$

مساله مجموع وزن‌دار فازی (۱۷) را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم و آن را با $P(\lambda)$ نمایش می‌دهیم:

$$\begin{aligned} P(\lambda):\ \min \quad & c(\lambda)\,\tilde{x} \\ s.t. \quad & A\tilde{x} \simeq \tilde{b}, \\ & \tilde{x} \succeq \tilde{0}, \end{aligned} \tag{۲۰}$$

دوگان مساله فوق را $D(\lambda)$ می‌نامیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} D(\lambda):\ \max \quad & w\tilde{b} \\ s.t. \quad & wA \leq c(\lambda). \end{aligned} \tag{۲۱}$$

با استفاده از $P(\lambda)$ و $D(\lambda)$، قضیه مکمل زاید را به صورت زیر بیان می‌کنیم.

قضیه ٤-٥ اگر $\tilde{x}$ یک جواب شدنی مساله اولیه $P(\lambda)$ و w یک جواب شدنی مساله دوگان $D(\lambda)$ باشد، در این صورت $\tilde{x}$ و w بهینه هستند اگر و تنها اگر

$$(wA - c(\lambda))\,\tilde{x} \simeq \tilde{0}. \tag{۲۲}$$

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.2.2]

اثبات. فرض کنیم رابطه (۲۲) برقرار باشد. چون $\tilde{x}$ جواب شدنی مساله $P(\lambda)$ است پس $A\tilde{x} \simeq \tilde{b}$. با ضرب این رابطه از چپ در w داریم $wA\tilde{x} \simeq w\tilde{b}$. از این رابطه و رابطه (۲۲) داریم $c(\lambda)\tilde{x} \simeq w\tilde{b}$. با توجه به قضایای دوگانی برای مسایل تک‌هدفه فازی، $\tilde{x}$ و w به ترتیب جواب‌های بهینه مسایل $P(\lambda)$ و $D(\lambda)$ هستند.

عکس قضیه نیز به سادگی اثبات می‌شود. ■

قضیه ٤-٦ یک جواب شدنی $\tilde{x} \in \tilde{X}$ بهینه پارتو فازی برای مساله (۱۶) است اگر و تنها اگر $\lambda \in \Lambda^0$ و یک جواب شدنی دوگان w موجود باشد به طوری که $(wA - c(\lambda))\tilde{x} \simeq \tilde{0}$.

اثبات. با ترکیب قضایای ۴-۴ و ۴-۵ نتیجه به دست می‌آید.

۵ روش سیمپلکس اولیه-دوگان برای برنامه‌ریزی خطی چندهدفه فازی

بنا به قضیه ۴-۴، به ازای هر جواب بهینه پارتو فازی $\tilde{x} \in \tilde{X}$ برای مساله (۱۶)، یک پارامتر λ وجود دارد به‌طوری‌که $\tilde{x}$ یک جواب بهینه فازی برای مساله تک‌هدفه (۱۷) است. با کمک این قضیه، محققان مختلفی نشان داده‌اند که برای یک مساله برنامه ریزی چندهدفه خطی، یک افرازبندی متناهی از فضای پارامتری Λ وجود دارد به‌طوری‌که هر جواب بهینه پارتو متناظر با یک عنصر از این افرازبندی می‌شود (به مرجع [۳۲] مراجعه شود). لذا در ادامه این بخش سعی می‌کنیم با افرازبندی فضای پارامتری Λ یک دسته از جواب‌های بهینه پارتو فازی را با کمک روش سیمپلکس اولیه-دوگان فازی به‌دست آوریم.

فرض کنیم مجموعه $\overline{\Lambda} \subset \Lambda$ را داشته باشیم. همچنین، فرض کنیم $w_{\overline{\Lambda}}$ یک جواب شدنی برای مساله دوگان $D(\lambda)$ به ازای $\lambda \in \overline{\Lambda}$ باشد. به ازای هر $\lambda \in \overline{\Lambda}$، مجموعه $Q(\lambda)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Q(\lambda) = \left\{ j \mid w_{\overline{\Lambda}} a_j \simeq c_j(\lambda) \right\}, \tag{۲۳}$$

که در آن a_j، j امین ستون ماتریس A است. توجه داشته باشیم که ممکن است برای مقادیر متفاوت $\lambda \in \overline{\Lambda}$، مجموعه‌های متفاوتی برای $Q(\lambda)$ وجود داشته باشد.

برای افراز کردن وزن‌های مساله مجموع وزن‌دار تعریف زیر را می‌آوریم:

تعریف ۵-۱ مجموعه $\hat{\Lambda} \subset \Lambda$ را نسبت به $Q(\lambda)$ ماکسیمال گوییم هرگاه به ازای یک $\hat{\lambda} \in \hat{\Lambda}$ داشته باشیم:

$$\begin{aligned} Q(\hat{\lambda}) &= Q(\lambda) \quad \forall \lambda \in \hat{\Lambda}, \\ Q(\hat{\lambda}) &\neq Q(\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda \setminus \hat{\Lambda}. \end{aligned} \tag{۲۴}$$

بنابراین، برای هر مجموعه ماکسیمال $\hat{\Lambda}$ قرار می‌دهیم:

$$Q(\hat{\Lambda}) = Q(\hat{\lambda}),$$

به ازای $\hat{\lambda} \in \hat{\Lambda}$. همچنین به ازای هر $\lambda \in \hat{\Lambda}$ قرار می‌دهیم $w_{\hat{\Lambda}}(\lambda) = w_{\hat{\Lambda}}$.

برای مجموعه $Q(\hat{\Lambda})$، مساله محدودشده اولیه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.2.2]

$$
\begin{aligned}
RP(\hat{\Lambda}): \quad \min \quad & \mathbf{1}^T \tilde{y} \\
s.t. \quad & A\tilde{x} + \tilde{y} \simeq \tilde{b}, \\
& \tilde{x}_i \simeq \tilde{0}, \qquad i \notin Q(\hat{\Lambda}) \\
& \tilde{x} \succeq \tilde{0}, \\
& \tilde{y} \succeq \tilde{0},
\end{aligned} \tag{۲۵}
$$

که در این جا $\mathbf{1}$ برداری با مولفه‌های یک می‌باشد.

با توجه به الگوریتم اولیه-دوگان برای مساله تک‌هدفه فازی و با توجه به شرط مکمل زاید، اگر مقدار تابع هدف $RP(\hat{\Lambda})$ صفر باشد، در این صورت جواب بهینه $\tilde{x}^*$ به دست آمده از این مساله برای مساله $P(\lambda)$ به ازای هر $\lambda \in \hat{\Lambda}$ بهینه است و لذا بنا به قضیه ۴-۴، $\tilde{x}^*$ یک جواب بهینه پارتو فازی برای مساله (۱۶) است. در غیر این صورت دوگان مساله $RP(\hat{\Lambda})$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$
\begin{aligned}
DRP(\hat{\Lambda}): \quad \max \quad & v^T \tilde{b} \\
s.t. \quad & v^T a_j \leq 0, \qquad j \in Q(\hat{\Lambda}) \\
& v \leq 1.
\end{aligned} \tag{۲۶}
$$

فرض کنیم $\hat{v}(\hat{\Lambda})$ جواب بهینه $DRP(\hat{\Lambda})$ باشد. اگر هیچ $j \notin Q(\hat{\Lambda})$ موجود نباشد به طوری که $\hat{v}(\Lambda)^T a_j \geq 0$، در این صورت به ازای هر $\lambda \in \hat{\Lambda}$ مساله $P(\lambda)$ نشدنی است، که این نتیجه با توجه به الگوریتم اولیه-دوگان تک‌هدفه فازی و شرط مکمل زاید به دست می‌آید و در نتیجه مساله چند هدفه خطی فازی نشدنی می‌شود. در غیر این صورت، به ازای هر $\lambda \in \hat{\Lambda}$ تعریف می‌کنیم:

$$
\hat{\theta}(\lambda) = \min_j \left\{ \frac{c_j(\lambda) - (w_{\hat{\Lambda}}(\lambda))^T a_j}{\hat{v}(\hat{\Lambda})^T a_j} \;\middle|\; \hat{v}(\hat{\Lambda})^T a_j > 0 \right\}. \tag{۲۷}
$$

توجه داریم که $\hat{\theta}(\lambda)$ ممکن است به ازای مقادیر متفاوت $\lambda \in \hat{\Lambda}$ متفاوت باشد.

تعریف ۵-۲ مجموعه $\Lambda^* \subset \hat{\Lambda}$ را نسبت به $\hat{\theta}(\lambda)$ ماکسیمال می‌گوییم هرگاه، برای j ای با $\hat{v}(\hat{\Lambda})^T a_j > 0$ داشته باشیم:

$$
\hat{\theta}(\lambda) = \frac{c_j(\lambda) - (w_{\hat{\Lambda}}(\lambda))^T a_j}{\hat{v}(\hat{\Lambda})^T a_j}, \quad \forall \lambda \in \Lambda^*, \tag{۲۸}
$$

$$
\hat{\theta}(\lambda) \neq \frac{c_j(\lambda) - (w_{\hat{\Lambda}}(\lambda))^T a_j}{\hat{v}(\hat{\Lambda})^T a_j}, \quad \forall \lambda \in \hat{\Lambda} \setminus \Lambda^*. \tag{۲۹}
$$

برای $\lambda \in \Lambda^*$ قرار می‌دهیم $\hat{\theta}_{\Lambda^*}(\lambda) = \hat{\theta}(\lambda)$ و تعریف می‌کنیم:

$$
w_{\Lambda^*}(\lambda) = w_{\hat{\Lambda}}(\lambda) + \hat{\theta}_{\Lambda^*}(\lambda)\hat{v}(\hat{\Lambda}), \quad \forall \lambda \in \Lambda^*. \tag{۳۰}
$$

با این کار مجموعه $\overline{\Lambda}$ را به مجموعه‌های کوچک‌تر $\Lambda^* \subset \overline{\Lambda}$ تقسیم کردیم. برای هر کدام از این مجموعه‌ها، یک جواب شدنی دوگان $w_{\Lambda^*}(\lambda)$ که به ازای هر $\lambda \in \Lambda^*$ شدنی دوگان است را به دست آوردیم. حال می‌توان

مجموعه $\overline{\Lambda}$ را با مجموعه Λ^* جایگزین کرد و این روند را مجددا تکرار کنیم. سیمپلکس اولیه-دوگان پیشنهاد شده، نه تنها جواب‌های بهینه پارتو را پیدا می‌کند بلکه فضای وزین را نیز تجزیه می‌کند.

الگوریتم اولیه-دوگان برای حل مسایل چند هدفه خطی فازی

۱) یک جواب شدنی $w_{\overline{\Lambda}}$ برای مساله $D(\lambda)$ به ازای هر $\lambda \in \overline{\Lambda}$ پیدا می‌کنیم و با توجه به رابطه (۲۴)، افرازهای $(\hat{\Lambda}_i \,|\, i \in I_0)$ را از مجموعه $\overline{\Lambda}$ به دست می‌آوریم.

۲) به ازای هر $i \in I_0$، مجموعه $Q(\hat{\Lambda}_i)$ را با توجه به رابطه (۲۳) به دست می‌آوریم. به ازای هر $\lambda \in \hat{\Lambda}_i$ قرار می‌دهیم $w_{\hat{\Lambda}_i}(\lambda) = w_{\overline{\Lambda}}$ و $L = L \cup \{(\hat{\Lambda}_i, w_{\hat{\Lambda}_i}(\lambda))\}$.

۳) تا هنگامی که $L \neq \phi$، $(\hat{\Lambda}_i, w_{\hat{\Lambda}_i}(\lambda)) \in L$ را انتخاب می‌کنیم و مساله $RP(\hat{\Lambda})$ را حل می‌کنیم. اگر مقدار بهینه این مساله صفر بود، در این صورت به ازای هر $\lambda \in \hat{\Lambda}$ یک جواب بهینه برای مساله $P(\lambda)$ پیدا کرده‌ایم و قرار می‌دهیم:

$$L = L \setminus \{(\hat{\Lambda}, w_{\hat{\Lambda}}(\lambda))\}.$$

در غیر این صورت، مساله $DPR(\hat{\Lambda})$ را حل می‌کنیم. فرض کنیم $\hat{v}(\hat{\Lambda})$ جواب بهینه این مساله باشد. اگر $j \notin Q(\hat{\Lambda})$ وجود نداشته باشد به طوری که $\hat{v}(\hat{\Lambda})^T a_j > 0$، در این صورت $P(\lambda)$ به ازای هر $\lambda \in \hat{\Lambda}$ نشدنی است و در نتیجه مساله چند هدفه خطی فازی نشدنی می‌باشد. در غیر این صورت با توجه به روابط (۲۸) و (۲۹) افرازهای $\{\Lambda_l^* \,|\, l \in I^*\}$ از مجموعه Λ^* را به دست می‌آوریم. به ازای هر $l \in I^*$، با توجه به رابطه (۲۷)، $\hat{\theta}_{\Lambda_l^*}(\lambda)$ را محاسبه می‌کنیم و سپس با رابطه (۳۰)، $w_{\Lambda_l^*}(\lambda)$ را به دست می‌آوریم. مجموعه $Q(\Lambda_l^*)$ را به دست آورده و قرار می‌دهیم:

$$L = L \cup \{(\Lambda_l^*, w_{\Lambda_l^*}(\lambda))\},$$

در نهایت قرار می‌دهیم $L = L \setminus \{(\hat{\Lambda}, w_{\hat{\Lambda}}(\lambda)\}$.

٦ مثال عددی

در این بخش یک مثال عددی را با کمک الگوریتم ارایه شده حل می‌کنیم. برای حل مساله برنامه‌ریزی خطی تک‌هدفه فازی از الگوریتم ارایه شده توسط مهدوی امیری و ناصری [۹] استفاده می‌کنیم. برای رتبه‌بندی اعداد فازی از فرمول رتبه‌بندی یاگر [۲۹] استفاده می‌کنیم. در این مثال فرض می‌کنیم متغیرهای مساله به فرم فازی ذوزنقه‌ای هستند. همچنین بردار سمت راست را فازی ذوزنقه‌ای در نظر می‌گیریم.

مثال٦-۱ مساله برنامه‌ریزی خطی سه هدفه فازی استاندارد زیر را با کمک الگوریتم اولیه-دوگان حل می‌کنیم.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.2.2]

$$\begin{aligned} \min \quad & (-\tilde{x}_1, -\tilde{x}_2, -\tilde{x}_3) \\ s.t. \quad & \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 + \tilde{x}_4 \simeq (2,8,1,1) \\ & \tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 + \tilde{x}_5 \simeq (8,10,1,1) \\ & 3\tilde{x}_1 + 4\tilde{x}_2 + \tilde{x}_6 \simeq (10,22,1,1) \\ & \tilde{x}_i \succeq \tilde{0}, \qquad i = 1,2,\dots,6. \end{aligned} \tag{31}$$

الگوریتم را با

$$\bar{\Lambda} = \Lambda^0 = \{\lambda \in R^3 \mid 0 < \lambda_i < 1, \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1\}$$

آغاز می‌کنیم. پس از نسبت دادن ضرایب $\lambda_i, i = 1,2,3$ به توابع هدف و تبدیل مساله به یک مساله تک‌هدفه فازی، دوگان آن را به صورت زیرمی‌نویسیم:

$$\begin{aligned} D(\lambda): \max \quad & (2,8,1,1)w_1 + (8,10,1,1)w_2 + (10,22,1,1)w_3 \\ s.t. \quad & w_1 + w_2 + 3w_3 \le -\lambda_1 \\ & w_1 + 3w_2 + 4w_3 \le -\lambda_2 \\ & w_1 + w_2 \le -\lambda_3 \\ & w_i \le 0, \qquad i = 1,2,3. \end{aligned} \tag{32}$$

به وضوح $w_{\bar{\Lambda}} = (-1,0,0)$ به ازای هر $\lambda \in \Lambda^0$ یک جواب شدنی برای مساله دوگان فازی $D(\lambda)$ می‌باشد و به ازای این جواب شدنی $Q(\lambda) = \{5,6\}$. بنابراین با $L = \{\Lambda^0\}$ مساله را ادامه می‌هیم. مساله محدود شده اولیه به ازای مجموعه Λ^0 به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} RP(\Lambda^0): \quad \min \quad & \tilde{Z} \simeq 1\tilde{y}_1 + 1\tilde{y}_2 + 1\tilde{y}_3 \\ s.t. \quad & \tilde{y}_1 \simeq (2,8,1,1) \\ & \tilde{s}_2 + \tilde{y}_2 \simeq (8,10,1,1) \\ & \tilde{s}_3 + \tilde{y}_3 \simeq (10,22,1,1) \\ & \tilde{s}_2, \tilde{s}_3, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3 \succeq \tilde{0}, \end{aligned} \tag{33}$$

که $\tilde{y}_i$ها متغیرهای مصنوعی هستند. با حل این مساله تک‌هدفه با متغیرهای فازی به روش سیمپلکس فازی [9]، مقدار بهینه فازی حاصل برابر است با $\tilde{z} \simeq (-12,22,5,5)$ که با کمک فرمول رتبه‌بندی یاگر داریم $R(\tilde{z}) = 5$. جدول‌های سیمپلکس آغازین و پایانی این مساله فازی، به‌ترتیب، در جدول‌های ۱ و ۲ آورده شده است.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.2.2]

جدول ۱. جدول آغازین برای مساله (۳۳)

	$\tilde{y}_1$	$\tilde{y}_2$	$\tilde{y}_3$	$\tilde{s}_2$	$\tilde{s}_3$	$R.H.S$	$R(R.H.S)$
$\tilde{z}$	−۱	−۱	−۱	۰	۰	$\tilde{0}$	۰
$\tilde{y}_1$	۱	۰	۰	۰	۰	(۲,۸,۱,۱)	۵
$\tilde{y}_2$	۰	۱	۰	۱	۰	(۸,۱۰,۱,۱)	۹
$\tilde{y}_3$	۰	۰	۱	۰	۱	(۱۰,۲۲,۱,۱)	۱۶

جدول ۲. جدول پایانی برای مساله (۳۳)

	$\tilde{y}_1$	$\tilde{y}_2$	$\tilde{y}_3$	$\tilde{s}_2$	$\tilde{s}_3$	$R.H.S$	$R(R.H.S)$
$\tilde{z}$	۰	−۱	−۱	۰	۰	(−۱۲,۲۲,۵,۵)	۵
y_1	۱	۰	۰	۰	۰	(۲,۸,۱,۱)	۵
s_2	۰	۱	۰	۱	۰	(۸,۱۰,۱,۱)	۹
s_3	۰	۰	۱	۰	۱	(۱۰,۲۲,۱,۱)	۱۶

بنابراین مساله به ازای این جواب دوگان $(w_{\overline{\Lambda}})$، نشدنی است. حال دوگان مساله $RP(\Lambda^0)$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$
\begin{aligned}
DRP(\Lambda^\circ):\quad & \max \quad (2,8,1,1,)v_1 + (8,10,1,1)v_2 + (10,22,1,1)v_3 \\
s.t. \quad & v_1 \le 1 \\
& v_2 \le 0 \\
& v_2 \le 1 \\
& v_3 \le 1 \\
& v_3 \le 0
\end{aligned}
\tag{۳۴}
$$

بنا به شرایط مکمل زاید، جواب بهینه حاصل از این مساله $\hat{v}(\Lambda^\circ) = (1,0,0)$ می‌باشد. بنابراین

$$\hat{v}(\Lambda^\circ)^T a_j = 1 > 0, \qquad \forall j = 1,2,3,4.$$

پس طبق رابطه (۲۷) داریم:

$$\hat{\theta}(\lambda) = \min\{-\lambda_1 - \left((-1,0,0)\left[1,1,3\right]^T\right), -\lambda_2 - \left((-1,0,0)\left[1,3,4\right]^T\right), -\lambda_3 - \left((-1,0,0)\left[1,1,0\right]^T\right)\}$$

که برابر است با

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.2.2]

$$\hat{\theta}(\lambda)=\min\{-\lambda_1+1,-\lambda_2+1,-\lambda_3+1\}.$$

با محاسبه مینیمم این سه تابع، مجموعه Λ^0 به سه زیرمجموعه Λ^1 و Λ^2 و Λ^3 تقسیم می‌شود. برای پیدا کردن مجموعه Λ^1، تابع $-\lambda_1+1$ را کوچک‌تر از دو تابع دیگر مجموعه Λ^0 قرار داده و رابطه بین λ_iها را پیدا می‌کنیم. تمام Λ^iها را به همین شکل پیدا می‌کنیم. لذا داریم:

$$\begin{aligned}\Lambda^1&=\{\lambda\in\Lambda^0 \mid \lambda_1>\lambda_2,\lambda_1>\lambda_3\},\\ \Lambda^2&=\{\lambda\in\Lambda^0 \mid \lambda_2>\lambda_1,\lambda_2>\lambda_3\},\\ \Lambda^3&=\{\lambda\in\Lambda^0 \mid \lambda_3>\lambda_1,\lambda_3>\lambda_2\}.\end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}(\lambda)&=-\lambda_1+1, \quad \forall\lambda\in\Lambda^1,\\ \hat{\theta}(\lambda)&=-\lambda_2+1, \quad \forall\lambda\in\Lambda^2,\\ \hat{\theta}(\lambda)&=-\lambda_3+1, \quad \forall\lambda\in\Lambda^3.\end{aligned}$$

بنابراین در این مرحله داریم:

$$L=\{\Lambda^1,\Lambda^2,\Lambda^3\}.$$

حال هر یک از افرازهای فوق را جداگانه بررسی می‌کنیم.

(Λ^1): در این مرحله می‌توانیم یک جواب جدید برای مساله دوگان با استفاده از رابطه (۳۰) تعیین کنیم:

$$\begin{aligned}w_{\Lambda^1}&=w_{\Lambda^0}+\hat{\theta}_{\Lambda^1}(\lambda)\hat{v}(\Lambda^0)\\ &=(-1,0,0)+(-\lambda_1+1)(1,0,0)\\ &=(-1,0,0)+(-\lambda_1+1,0,0).\\ &=(-\lambda_1,0,0)\end{aligned}$$

به ازای این جواب دوگان $Q(\lambda)=\{1,5,6\}$ می‌باشد. بنابراین، مساله اولیه محدودشده به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}RP\left(\Lambda^1\right):\quad \min\ & \tilde{Z}\simeq 1\tilde{y}_1+1\tilde{y}_2+1\tilde{y}_3\\ s.t.\quad & \tilde{x}_1+\tilde{y}_1\simeq(2,8,1,1)\\ & \tilde{x}_1+\tilde{s}_2+\tilde{y}_2\simeq(8,10,1,1)\\ & \tilde{x}_1+\tilde{s}_3+\tilde{y}_3\simeq(10,22,1,1)\\ & \tilde{x}_1,\ \tilde{s}_2,\tilde{s}_3,\tilde{y}_1,\tilde{y}_2,\tilde{y}_3\succeq\tilde{0}.\end{aligned} \qquad (۳۵)$$

جواب بهینه فازی این مساله به‌صورت $\tilde{x}_1\simeq(2,8,1,1)$ و $\tilde{s}_1\simeq(0,8,2,2)$ و $\tilde{s}_2\simeq(2,20,2,2)$ و $\tilde{y}_1=\tilde{y}_2=\tilde{y}_3\simeq\tilde{0}$ می‌باشند. مقدار تابع هدف فازی این مساله برابر $\tilde{z}\simeq(-32,32,6,6)$ با $R(\tilde{z})=0$ می‌باشد. یعنی این مساله دارای مقدار بهینه صفر است. بنابراین، بنا به قضیه ۴-۴، یکی از جواب‌های بهینه پارتو فازی به صورت

$$\tilde{x}_{\Lambda^1}\simeq\left((2,8,1,1),\tilde{0},\tilde{0},\tilde{0},(0,8,2,2),(2,20,2,2)\right).$$

می‌باشد. مجموعه Λ^1 را می‌توان از L حذف کرد و داریم $L=\{\Lambda^2,\Lambda^3\}$.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.2.2]

(Λ^2): به ازای این مجموعه، داریم $w_{\Lambda^2} = (-\lambda_2, 0, 0)$ و $Q(\lambda) = \{2,5,6\}$. جواب بهینه مساله محدودشده اولیه به ازای $\lambda \in \Lambda^2$ برابر است با $\tilde{y}_1 \simeq \left(\frac{-4}{3}, \frac{16}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ و $\tilde{x}_2 \simeq \left(\frac{8}{3}, \frac{10}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ و $\tilde{s}_3 \simeq \left(\frac{-10}{3}, \frac{34}{3}, \frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$ و $\tilde{\ } \simeq \tilde{y}_3 \simeq \tilde{y}_2 \simeq \tilde{s}_2$ همچنین، مقدار بهینه برابر $(8, 8, \frac{64}{3}, \frac{-54}{3})$ است که طبق تابع رتبه‌بندی یاگر، مقدار حقیقی متناظر آن برابر ۲ می‌باشد.

بعد از حل دوگان مساله اولیه محدودشده، جواب بهینه $\hat{v}(\Lambda^2) = (1, \frac{-1}{3}, 0)$ به دست می‌آید. بنابراین

$$\hat{v}(\Lambda^2)^T a_j = \begin{cases} \frac{2}{3} & j = 1 \\ \frac{2}{3} & j = 3 \\ 1 & j = 4. \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$\hat{\theta}(\lambda) = \min\left\{\frac{3}{2}(\lambda_2 - \lambda_1), \frac{3}{2}(\lambda_2 - \lambda_3), \lambda_2\right\}.$$

با محاسبه مینیمم سه تابع بالا، مجموعه Λ^2 به سه زیرمجموعه Λ^4 و Λ^5 و Λ^6 به صورت زیر تقسیم می‌شود:

$$\Lambda^4 = \{\lambda \in \Lambda^2 \mid \lambda_2 > 1 - 2\lambda_1, 3\lambda_1 > \lambda_2\},$$
$$\Lambda^5 = \{\lambda \in \Lambda^2 \mid \lambda_2 < 1 - 2\lambda_1, \lambda_2 < \frac{3}{4}(1 - \lambda_1)\},$$
$$\Lambda^6 = \{\lambda \in \Lambda^2 \mid \lambda_2 > 3\lambda_1, \lambda_2 > \frac{3}{4}(1 - \lambda_1)\}.$$

بنابراین:

$$\hat{\theta}(\lambda) = \frac{3}{2}(\lambda_2 - \lambda_1), \forall \lambda \in \Lambda^4,$$
$$\hat{\theta}(\lambda) = \frac{3}{2}(\lambda_2 - \lambda_3), \forall \lambda \in \Lambda^5,$$
$$\hat{\theta}(\lambda) = \lambda_2, \quad \forall \lambda \in \Lambda^6.$$

در نتیجه، $L = \{\Lambda^3, \Lambda^4, \Lambda^5, \Lambda^6\}$.

(Λ^3): حال به ازای مجموعه Λ^3 یک جواب جدید برای مساله دوگان با استفاده از رابطه (۳۰) تعیین می‌کنیم. یعنی داریم:

$$w_{\Lambda^3} = w_{\Lambda^0} + \hat{\theta}_{\Lambda^2}(\lambda)\hat{v}(\Lambda^0) = (-\lambda_3, 0, 0).$$

به ازای این جواب دوگان داریم $Q(\lambda) = \{3,5,6\}$. مساله محدودشده اولیه $PR(\Lambda^3)$ دارای مقدار بهینه صفر است و جواب بهینه فازی متناظر با آن برابر است با $\tilde{\ } \simeq \tilde{y}_3 \simeq \tilde{y}_2 \simeq \tilde{y}_1$، $\tilde{x}_3 \simeq (2, 8, 1, 1)$، $\tilde{s}_2 \simeq (0, 8, 2, 2)$ و $\tilde{s}_3 \simeq (10, 22, 1, 1)$. بنابراین یک جواب بهینه پارتو فازی دیگر برای مساله برنامه‌ریزی چند هدفه فازی برابر است با

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.2.2]

$$\tilde{x}_{\Lambda^{۳}} \simeq \left(\tilde{۰}, \tilde{۰}, (۲,۸,۱,۱), \tilde{۰}, (۰,۸,۲,۲), (۱۰,۲۲,۱,۱)\right).$$

بنابراین $\Lambda^{۳}$ از L حذف می‌شود و داریم $L = \{\Lambda^{۴}, \Lambda^{۵}, \Lambda^{۶}\}$.

$(\Lambda^{۴})$: مساله اولیه محدودشده $RP(\Lambda^{۴})$ به صورت زیر است و داریم $Q(\lambda) = \{۱,۲,۶\}$.

$$\begin{aligned} RP\left(\Lambda^{۴}\right): \quad & \min \ \tilde{Z} \simeq ۱\tilde{y}_{۱} + ۱\tilde{y}_{۲} + ۱\tilde{y}_{۳} \\ s.t. \quad & \tilde{x}_{۱} + \tilde{x}_{۲} + \tilde{y}_{۱} \simeq (۲,۸,۱,۱) \\ & \tilde{x}_{۱} + ۳\tilde{x}_{۲} + \tilde{y}_{۲} \simeq (۸,۱۰,۱,۱) \\ & ۳\tilde{x}_{۱} + ۴\tilde{x}_{۲} + \tilde{s}_{۳} + \tilde{y}_{۳} \simeq (۱۰,۲۲,۱,۱) \\ & \tilde{x}_{۱}, \tilde{x}_{۲}, \tilde{s}_{۳}, \tilde{y}_{۱}, \tilde{y}_{۲}, \tilde{y}_{۳} \succeq \tilde{۰}. \end{aligned} \tag{۳۶}$$

این مساله دارای مقدار بهینه فازی $\tilde{z} \simeq \left(\frac{-۳۳۸}{۱۵}, \frac{۳۵۰}{۱۵}, \frac{۱۳۴}{۱۵}, \frac{۱۳۴}{۱۵}\right)$ با $R(\tilde{z}) = \frac{۲}{۵}$ می‌باشد و جواب بهینه حاصل از $DRP(\Lambda^{۴})$ برابر است با $\hat{v}(\Lambda^{۴}) = (۱, \frac{۱}{۵}, \frac{-۲}{۵})$.

پس از محاسبه $\hat{\theta}(\lambda)$ خواهیم داشت:

$$\hat{\theta}(\lambda) = \min\left\{\frac{۵}{۶}(\lambda_{۱} - \lambda_{۲}), \frac{۱}{۲}(۳\lambda_{۱} - \lambda_{۲}), \frac{۵}{۲}(\lambda_{۲} - \lambda_{۱})\right\}.$$

پس از محاسبه مینیمم این سه تابع مجموعه $\Lambda^{۴}$ به سه زیرمجموعه $\Lambda^{۷}$ و $\Lambda^{۸}$ و $\Lambda^{۹}$ تقسیم می‌شود که در آن:

$$\begin{aligned} \Lambda^{۷} &= \{\lambda \in \Lambda^{۴} \mid \lambda_{۲} < \frac{۱}{۸}(۵ - \lambda_{۱}), \lambda_{۲} > \frac{۱}{۲}(۵\lambda_{۱} - ۱)\}, \\ \Lambda^{۸} &= \{\lambda \in \Lambda^{۴} \mid \lambda_{۲} > \frac{۱}{۸}(۵ - \lambda_{۱})\}, \\ \Lambda^{۹} &= \{\lambda \in \Lambda^{۴} \mid \lambda_{۲} < \frac{۱}{۲}(۵\lambda_{۱} - ۱)\}. \end{aligned}$$

لذا

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(\lambda) &= \frac{۵}{۶}(\lambda_{۱} - \lambda_{۲}), \quad \forall \lambda \in \Lambda^{۷}, \\ \hat{\theta}(\lambda) &= \frac{۱}{۲}(۳\lambda_{۱} - \lambda_{۲}), \quad \forall \lambda \in \Lambda^{۸}, \\ \hat{\theta}(\lambda) &= \frac{۵}{۲}(\lambda_{۲} - \lambda_{۱}), \quad \forall \lambda \in \Lambda^{۹}. \end{aligned}$$

بنابراین $L = \{\Lambda^{۵}, \Lambda^{۶}, \Lambda^{۷}, \Lambda^{۸}, \Lambda^{۹}\}$.

$(\Lambda^{۵})$: برای مجموعه $\Lambda^{۵}$ مقدار بهینه $RP(\Lambda^{۵})$ برابر صفر می‌باشد و یک جواب بهینه پارتو فازی دیگر برابر است با

$$\tilde{x}_{\Lambda^{۵}} \simeq \left(\tilde{۰}, (۰,۴,۱,۱), (-۲,۸,۲,۲), \tilde{۰}, \tilde{۰}, (-۶,۲۲,۴,۴)\right).$$

بنابراین $\Lambda^{۵}$ را از L حذف می‌کنیم و داریم $L = \{\Lambda^{۶}, \Lambda^{۷}, \Lambda^{۸}, \lambda^{۹}\}$.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.2.2]

$(\Lambda^{۶})$: برای مجموعه $\Lambda^{۶}$ مقدار بهینه $RP(\Lambda^{۶})$ برابر صفر می‌باشد و یک جواب بهینه پارتو فازی دیگر برابر است با

$$\tilde{x}_{\Lambda^{۶}} \simeq \left(\tilde{۰},\left(\frac{۸}{۳},\frac{۱۰}{۳},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳}\right),\tilde{۰},\left(\frac{-۴}{۳},\frac{۱۶}{۳},\frac{۴}{۳},\frac{۴}{۳}\right),\tilde{۰},\left(\frac{-۱۰}{۳},\frac{۳۴}{۳},\frac{۷}{۳},\frac{۷}{۳}\right)\right).$$

بنابراین $\Lambda^{۶}$ را از L حذف می‌کنیم و داریم $L=\{\Lambda^{۷},\Lambda^{۸},\Lambda^{۹}\}$.

$(\Lambda^{۷})$: برای مجموعه $\Lambda^{۷}$ مقدار بهینه $RP(\Lambda^{۷})$ برابر صفر می‌باشد، لذا یک جواب بهینه پارتو فازی دیگر برابر است با

$$\tilde{x}_{\Lambda^{۷}} \simeq \left(\left(\frac{-۵۰۶}{۴۵},\frac{۲۶۶}{۴۵},\frac{۱۳۱}{۴۵},\frac{۱۳۱}{۴۵}\right),\left(\frac{۴}{۱۳۵},\frac{۵۸۴}{۱۳۵},\frac{۱۲۵}{۱۳۵},\frac{۱۲۵}{۱۳۵}\right),\left(\frac{-۸۸}{۱۸},\frac{۱۰۰}{۱۸},\frac{۳۴}{۱۸},\frac{۳۴}{۱۸}\right),\tilde{۰},\tilde{۰},\tilde{۰}\right).$$

بنابراین $\Lambda^{۷}$ را از L حذف می‌کنیم و داریم $L=\{\Lambda^{۸},\Lambda^{۹}\}$.

$(\Lambda^{۸})$: برای مجموعه $\Lambda^{۸}$ مقدار بهینه $RP(\Lambda^{۸})$ برابر صفر می‌باشد و در نتیجه یک جواب بهینه پارتو فازی دیگر برابر است با

$$\tilde{x}_{\Lambda^{۸}} \simeq \left(\left(\frac{-۱۰}{۵},\frac{۳۴}{۵},\frac{۷}{۵},\frac{۷}{۵}\right),\left(\frac{۲}{۵},\frac{۲۰}{۵},\frac{۴}{۵},\frac{۴}{۵}\right),\tilde{۰},\left(\frac{-۸۸}{۱۵},\frac{۱۰۰}{۱۵},\frac{۳۴}{۱۵},\frac{۳۴}{۱۵}\right),\tilde{۰},\tilde{۰}\right).$$

بنابراین $\Lambda^{۸}$ را از L حذف می‌کنیم و داریم $L=\{\Lambda^{۹}\}$.

$(\Lambda^{۹})$: برای مجموعه $\Lambda^{۹}$ مقدار بهینه $RP(\Lambda^{۹})$ برابر صفر می‌باشد و یک جواب بهینه پارتو فازی دیگر برابر است با

$$\tilde{x}_{\Lambda^{۹}} \simeq \left(\left(\frac{-۳۸۲}{۱۵},\frac{۵۰۲}{۱۵},\frac{۱۵۷}{۱۵},\frac{۱۵۷}{۱۵}\right),\left(\frac{-۲۹۴}{۱۵},\frac{۳۲۴}{۱۵},\frac{۱۱۴}{۱۵},\frac{۱۱۴}{۱۵}\right),\tilde{۰},\tilde{۰},\left(\frac{-۸۸}{۳},\frac{۱۰۰}{۳},\frac{۳۴}{۳},\frac{۳۴}{۳}\right),\tilde{۰}\right).$$

بنابراین $\Lambda^{۹}$ را از L حذف می‌کنیم و داریم $L=\{\phi\}$ و الگوریتم خاتمه می‌یابد.

همان‌گونه که مشاهده می‌شود با حل این مساله به کمک الگوریتم اولیه-دوگان پیشنهاد شده توانستیم ۷ نقطه بهینه پارتو فازی به‌دست آوریم. لذا مجموعه بهینه پارتو فازی برای مساله سه هدفه فازی (۳۱) به صورت زیر می‌باشد:

$$\tilde{X}_E=\{\tilde{x}_{\Lambda^{۱}},\tilde{x}_{\Lambda^{۳}},\tilde{x}_{\Lambda^{۵}},\tilde{x}_{\Lambda^{۶}},\tilde{x}_{\Lambda^{۷}},\tilde{x}_{\Lambda^{۸}},\tilde{x}_{\Lambda^{۹}}\}.$$

مقایسه روش پیشنهادی با برخی روش‌های موجود

اکنون مساله سه هدفه فازی(۳۱) را با استفاده از الگوریتم سیمپلکس با قاعده الفبایی ارایه شده در [۲۱] حل می‌کنیم. فرایند حل به این صورت است که ابتدا یکی از توابع هدف که اولویت بالاتری نسبت به سایر توابع هدف دارد را انتخاب می‌کنیم و مساله را تنها با در نظر گرفتن آن تابع هدف و محدودیت‌ها حل می‌کنیم. فرض می‌کنیم تابع هدف اول نسبت به توابع هدف دیگر اولویت بیشتری دارد و تابع هدف دوم اولویت بیشتری نسبت به تابع هدف سوم دارد. بعد از حل مساله اول، تابع هدف اول را همراه با جواب به‌دست آمده به عنوان یک

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.2.2]

محدودیت به مساله اضافه نموده و مساله را با تابع هدف دوم حل می‌کنیم. همین روند را برای توابع هدف دیگر ادامه می‌دهیم تا در نهایت به یک جواب بهینه پارتو فازی دست یابیم.

با بهینه کردن تابع هدف اول مساله (۳۱) نسبت به محدودیت‌ها به جواب بهینه زیر می‌رسیم:

$$(\tilde{x}_۱, \tilde{x}_۲, \tilde{x}_۳) \simeq ((۲, ۸, ۱, ۱), \tilde{۰}, \tilde{۰}).$$

حال اگر تابع هدف اول را همراه با مقدار به‌دست آمده در محدودیت‌ها قرار دهیم و مساله را با تابع هدف دوم حل کنیم، جواب بهینه فازی به‌دست آمده برابر با همان مقدار قبلی است. با قرار دادن دو تابع اول و دوم در محدودیت‌ها و حل مساله با تابع هدف سوم نیز مقدار بهینه تغییر نمی‌کند. لذا جواب بهینه پارتو فازی برای این مساله برابر $(\tilde{x}_۱, \tilde{x}_۲, \tilde{x}_۳) \simeq ((۲, ۸, ۱, ۱), \tilde{۰}, \tilde{۰})$است. در واقع، همان‌گونه که دیده می‌شود در حل این مساله با کمک الگوریتم سیمپلکس با قاعده الفبایی، توابع هدف دوم و سوم نادیده گرفته می‌شوند. در حالی که در روش پیشنهاد شده بسته به اهمیت هر یک از توابع هدف به آن‌ها وزن‌هایی نسبت داده می‌شود. به علاوه، با حل مساله (۳۱) با کمک روش ارایه شده در [۲۱]، تنها یک جواب بهینه پارتو فازی به‌دست می‌آوریم، در حالی که به کمک روش سیمپلکس اولیه-دوگان فازی ما توانستیم ۷ نقطه بهینه پارتو فازی مختلف به‌دست آوریم.

حال مساله سه هدفه فازی (۳۱) را با الگوریتم سیمپلکس فازی ارایه شده در [۱۹] حل می‌کنیم. در این الگوریتم ابتدا با تخصیص ضرایب نامنفی به هر یک از توابع هدف فازی آن را به مساله تک‌هدفه با متغیرهای فازی تبدیل می‌کنیم. سپس، دوگان مساله تک‌هدفه با متغیرهای فازی را به‌دست می‌آوریم که یک مساله تک هدفه با پارامترهای فازی است. با حل مساله تک‌هدفه با پارامترهای فازی و استفاده از قضایای دوگانی می‌توانیم یک جواب بهینه پارتو فازی برای مساله تک‌هدفه با متغیرهای فازی به‌دست آوریم. با نسبت دادن وزن‌های یکسانی به توابع هدف و حل مساله دوگان فازی جواب بهینه پارتو فازی زیر به‌دست می‌آید:

$$(\tilde{x}_۱, \tilde{x}_۲, \tilde{x}_۳) \simeq ((۲, ۸, ۱, ۱), \tilde{۰}, \tilde{۰}).$$

قابل ذکر است که در الگوریتم ارایه شده در [۱۹]، برای حل مساله دوگان فازی با روش سیمپلکس حتماً باید یک جواب شدنی پایه‌ای داشته باشیم. اما در الگوریتم سیمپلکس اولیه-دوگان نیازی نیست جواب شدنی دوگان، پایه‌ای باشد. همچنین، در این الگوریتم، با هر بار حل مساله تک‌هدفه با پارامترهای فازی می‌توان تنها به یک جواب بهینه پارتو فازی دست یافت، درحالی‌که، در الگوریتم اولیه-دوگان، با افراز فضای وزن‌ها، می‌توان به مجموعه‌ای از جواب‌های بهینه پارتو فازی دست یافت.

۷ نتیجه‌گیری

در این مقاله، مسایل بهینه‌سازی چندهدفه با متغیرهای فازی مورد مطالعه قرارگرفت. برای حل این مسایل، با تعمیم تکنیک اسکالرسازی مجموع وزن‌دار به مسایل فازی، مساله چندهدفه را به یک مساله تک‌هدفه فازی تبدیل کردیم. نشان دادیم که هر جواب بهینه پارتو مساله چندهدفه فازی یک جواب بهینه فازی برای مساله مجموع وزن‌دار فازی است و بالعکس. با کمک این نتایج، روشی برای افرازبندی وزن‌های مساله تک هدفه فازی ارایه دادیم. با افرازبندی وزن‌ها، یک الگوریتم اولیه-دوگان برای حل مسایل چندهدفه فازی پیشنهاد دادیم. این روش

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.2.2]

با مسایل واقعی چندهدفه سازگاری زیادی دارد، چون بر خلاف بسیاری از روش‌های موجود، یک مجموعه از جواب‌های بهینه پارتو فازی را به تصمیم گیرنده ارایه می‌دهد. روش موجود را می‌توان برای حل بسیاری از مسایل بهینه‌سازی ترکیبیاتی چندهدفه فازی مانند مسایل جریان در شبکه با کمترین هزینه، مساله کوتاه‌ترین مسیر، مساله تخصیص و غیره نیز به کار برد.

منابع

[1] Zadeh, L.A., (1965). Fuzzy Sets. Information and Control, 8, 338-353.

[2] Tanaka, H., Okuda T., Asai, K., (1974). On fuzzy mathematical programming. The Journal of Cybernetics, 3, 37–46.

[3] Bellman, R. E., Zadeh, L.A., (1970). Decision making in a fuzzy environment. Management Science, 17, 141–164.

[4] Zimmermann, H.J., (1991). Fuzzy Set Theory and Its Applications, 2nd ed., Dordercht: Kluwer Academic Publishers.

[5] Ghaznavi, M., Soleimani, F., Hoseinpoor, N., (2016). Parametric analysis in fuzzy number linear programming problems. International Journal of Fuzzy Systems, 18 (3), 463–477.

[6] Ebrahimnejad, A., (2019). An effective computational attempt for solving fully fuzzy linear programming using MOLP problem, Journal of Industrial and Production Engineering. 36(2), 59-69.

[7] Arana-Jiménez, M., Sánchez-Gil, C., (2019). On generating the set of nondominated solutions of a linear programming problem with parameterized fuzzy numbers. Journal of Global Optimization, In press, 1-26.

[8] Nasseri, S. H., Ebrahimnejad, A., Cao, B. Y., (2019). Fuzzy Linear Programming: Solution Techniques and Applications: Springer Nature, Switzerland.

[9] Mahdavi-Amiri N, Nasseri S.H, (2009). Fuzzy primal simplex algorithms for solving fuzzy linear programming problems. Iranian Journal of Operational Research, 1(2), 68-84.

[10] Mahdavi-Amiri, N., Nasseri, S.H., (2007). Duality results and a dual simplex method for linear programming problems with trapezoidal fuzzy variables. Fuzzy Sets and Systems, 158, 1961–1978.

[11] Ebrahimnejad, A., Verdegay, J. A., (2018). Fuzzy Sets-Based Methods and Techniques for Modern Analytics: Springer, Switzerland.

[12] Gu, Q., Xuan, Z., (2017). A new approach for ranking fuzzy numbers based on possibility theory. Journal of Computational and Applied Mathematics, 309(1), 674-682.

[13] Maleki, H.R., Tata, M., Mashinchi, M., (2000). Linear programming with fuzzy variables. Fuzzy Sets and Systems, 109, 21-33.

[14] Zhong, Y., Shi, Y., (2003). Duality in fuzzy multi-criteria and multi-constraint level linear programming: a parametric approach. Fuzzy Sets and Systems, 132, 335–346.

[15] Jimenez, M., Bilbao, A., (2009). Pareto-optimal solutions in fuzzy multi-objective linear programming. Fuzzy Sets and Systems, 160, 2714–2721.

[16] Wu. Y. K., Liu, C. C., Lur, Y. Y, (2015). Pareto optimal solution for multiobjective linear programming problemswith fuzzy goals. Fuzzy Optim. Decis. Mak., 14, 43–55.

[17] Noori-Skandari, M.H., Ghaznavi, M., (2018). An efficient algorithm for solving fuzzy linear programming problems. Neural Processing Letters, 48(3), 1563-1582.

[18] Cadenas,M., Verdegay, J.L., (2000). Using ranking functions in multiobjective fuzzy linear programming. Fuzzy Set and system, 111, 47-53.

[19] Mishmast Nehi, H., Maleki, H.R., Mashinchi, M., (2002). Multiobjective linear programming with fuzzy variable. Far East Journal of Mathematical Sciences, 5(2), 155-172.

[20] Liu, Q.M., Shi, F, G., (2015). Stratified simplex method for solving fuzzy multi-objective linear programming problem. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 29, 2357–2364.

[21] Ezzati, R., Khorram, E., Enayati, R., (2014). A particular simplex algorithm to solve fuzzy lexicographic multi-objective linear programming problems and their sensitivity analysis on the priority of the fuzzy objective functions. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 26(5), 2333-2358.

[22] Hamadameen, A.O., (2017). A novel technique for solving multiobjective fuzzy linear programming problems. ARO-The Scientific Journal of Koya University, 5(1), 1-8.

[23] Wang, C., Wang, J., (2016). A multi-criteria decision-making method based on triangular intuitionistic fuzzy preference information. Intelligent Automation & Soft Computing , 22(3), 473-482.
[24] Bharati, S.K., Abhishekh & Singh, S.R., (2018). A computational algorithm for the solution of fully fuzzy multi-objective linear programming problem. Int. J. Dynam. Control, 6(3), 1384-1391.
[25] Bharati, S.K., Singh, S.R., (2019). Solution of multiobjective linear programming problems in interval-valued intuitionistic fuzzy environment. Soft Computing, 23(1), 77-84.
[26] Dong, J., Wan, S., (2019).A new method for solving fuzzy multi-objective linear programming problems. Iranian Journal of Fuzzy Systems, 16(3), 145-159.
[27] Ebrahimnejad, A., Nasseri, S.H., Hosseinzadeh Lotfi, F., (2010). A primal-dual method for linear programming problems with fuzzy variables. European J. Industrial Engineering, 4 (2), 189-209.
[28] Gupta, P., Mittal, G., Mehlawat, M. K., (2013). Multiobjective expected value model for portfolio selection in fuzzy environment. Optimization Letters, 7, 1765-1791.
[29] Yager, R.R., (1981). A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval. Information Sciences, 24, 143–161.
[30] Mahdavi-Amiri, N., Nasseri, S.H., (2006). Duality in fuzzy number linear programming by use of a certain linear ranking function. Applied Mathematics and Computation, 180, 206–216.
[31] Mangasarian, O., (1969). Nonlinear Programming: McGraw Hill, New York.
[32] Benson, H. P., Sun, E., (2000). Outcome space partition of the weight set in multiobjective linear programming. J. Optim. Theory Appl., 105, 17–36.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.2.2]