

مسائل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده فازی انعطاف‌پذیر

قربانعلی رمضان‌نیا کشتلی^{۱*}، سید هادی ناصری^۲

۱- دانشجوی دکتری ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات، دانشگاه مازندران، مازندران، ایران

۲- دانشیار، دانشگاه مازندران، گروه ریاضی، مازندران، ایران

رسید مقاله: ۱۷ اسفند ۱۳۹۶

پذیرش مقاله: ۲۵ شهریور ۱۳۹۷

چکیده

برنامه‌ریزی آرمانی خطی یکی از تکنیک‌های مهم برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه می‌باشد که برای هر هدف (آرمان) یک سطح آرزو توسط تصمیم‌گیرنده در نظر گرفته می‌شود. در برنامه‌ریزی آرمانی اگر چند سطح آرزوی گسسته، برای آرمان‌ها در نظر گرفته شود، بحث برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی مطرح می‌شود که اولین بار توسط چانگ در سال (۲۰۰۷) ارائه شد. چانگ در سال (۲۰۰۸) نوعی دیگر از برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی به نام برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده که سطح آرزوی آرمان‌های آن، یک بازه بسته می‌باشد را مطرح نمود که ممکن است ابتدای بازه یا انتهای بازه از اهمیت خاصی برخوردار باشند. اولین مقاله چندانتخابی فازی با سطح آرزوی فازی مثلثی توسط بانکیان و همکاران در سال (۲۰۱۲) ارائه شد. در این مقاله مدلهایی جدید از مسائل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده (برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده با قیود فازی انعطاف‌پذیر) را مورد بررسی قرار می‌دهیم و برای حل آن‌ها با استفاده از روش α -برش و در نظر گرفتن حداقل درجه عضویت‌های متفاوت برای آرمان‌ها یا قیدهایی فازی انعطاف‌پذیر، آن‌ها را به برنامه‌ریزی آرمانی خطی چندپارامتری قطعی تبدیل می‌کنیم. برای درک بیشتر مثال‌هایی عددی مطرح می‌کنیم و با روش‌های فوق آن‌ها را حل می‌کنیم.

کلمات کلیدی: برنامه‌ریزی چندهدفه خطی، برنامه‌ریزی آرمانی خطی چندپارامتری، برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده فازی انعطاف‌پذیر.

۱ مقدمه

در ادبیات موضوع، ملاحظه می‌شود چنانچه پاره‌ای از فعالیت‌ها منوط به بهره‌گیری مشارکتی از منابع محدود باشند مطالعه تخصیص منابع و در نتیجه تعیین حجم فعالیت‌ها مطرح می‌شود. این مسائل را می‌توان با برنامه‌ریزی ریاضی مدل‌بندی کرد. اگر در مدل ریاضی مربوطه تمام روابط ریاضی از نوع توابع خطی باشند برنامه‌ریزی

* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: Ramzannia52@yahoo.com

مربوطه را یک برنامه‌ریزی خطی گویند. مدل‌های برنامه‌ریزی خطی عمدتاً دارای چارچوبی هستند که در آن‌ها اهداف موردنظر در قالب یک هدف عمده مثلاً حداکثر کردن سود یا حداقل کردن کل هزینه‌ها خلاصه می‌شود. با توجه به محدودیت‌های موجود در برنامه‌ریزی خطی، برنامه‌ریزی خطی چندهدفه مطرح گردید که در این برنامه‌ریزی می‌توان چند هدف را مورد بررسی قرار داد [۱،۲]. یکی از این تکنیک‌های کارآمد برای حل تصمیم‌گیری چندهدفه، برنامه‌ریزی آرمانی می‌باشد. این برنامه‌ریزی اولین بار توسط چارنز و کوپر ارائه شد [۳] و توسط لی [۴]، ایگنیزو [۵]، تامیز و همکاران [۶]، رومرو [۷]، و دیگران [۸-۱۰] توسعه داده شد. در مدل برنامه‌ریزی آرمانی (GP) انحراف بین دستیابی آرمان‌ها و سطوح آرزوی آن‌ها را مینیمم می‌کنیم. در این روش، تصمیم‌گیرنده مقدار مورد انتظار هر هدف را در نظر می‌گیرد و در مورد نحوه مینیمم کردن متغیر انحراف مثبت از هدف یا متغیر انحراف منفی از هدف تصمیم‌گیری می‌کند. اغلب، در مسایل دنیای واقعی، تصمیم‌گیرنده قادر نیست برای هدفی مشخص در تخصیص آن (سطح آرزو) مقداری معین در نظر بگیرد. به خاطر چنین مسایلی چارنز و کلمبو [۱۱] روش برنامه‌ریزی آرمانی بازه‌ای را مطرح کردند که این مدل توسط جونز و تامیز [۱۲]، ویتوریا و همکاران [۱۳] و چانگ [۱۴] توسعه داده شد. در شرایطی ممکن است هدف‌ها دارای سطح آرزوی مبهم باشند که در این صورت برنامه‌ریزی آرمانی فازی مطرح می‌شود [۱۴، ۱۵]. همچنین اگر با مسایلی روبه‌رو شویم که هدف‌ها دارای چند سطح آرزوی مشخص باشند، برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی را خواهیم داشت که برای اولین بار توسط چانگ معرفی شد [۱۶]. در مدل معرفی شده چندسطح آرزوی گسسته برای آرمان‌ها در نظر گرفته می‌شود. نامبرده یک سال بعد مدل اصلاحی برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی را برای حل مسایل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی با سطوح آرزوی پیوسته ارائه نمود [۱۷]. مطالعات و تحقیق‌های ارزشمندی در حوزه نظری و کاربردی انجام گرفته است که به عنوان نمونه می‌توان به نحوه تبدیل مسایل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی به مسایل برنامه‌ریزی آرمانی صحیح [۱۸]، مدل‌بندی برنامه‌ریزی آرمانی چندبخشی [۱۹]، حل مسایل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی با استفاده از چندجمله‌ای درونیاب [۲۰]، برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی با توابع کارآمد (سودمند) [۱۹]، برنامه‌ریزی آرمانی چندضریبی در مجموعه قیود [۲۲]، اصلاح برنامه‌ریزی آرمانی چندبخشی [۲۳]، و غیره [۲۴-۲۸] اشاره کرد. اولین پژوهش مربوط به برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی فازی توسط بانکیان تبریزی و همکاران [۲۹] ارائه شد که سطح آرزوی چندگانه آرمان‌ها را اعداد فازی مثلثی در نظر گرفتند و با استفاده از روش زیمرمن [۱۵] و چانگ [۱۶] آن را حل نمودند. پژوهشی دیگر توسط گاپاتا و همکاران در بحث برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی با اعداد فازی دوزنقه‌ای ارائه گردید که با استفاده از تابع رتبه‌بندی مدل فازی به مدل قطعی تبدیل شد [۳۰].

در این مقاله مدل‌هایی جدید از برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده با مجموعه قیود فازی انعطاف‌پذیر و برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده با آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر معرفی می‌کنیم و با استفاده از روش α -برش و در نظر گرفتن حداقل درجه عضویت متفاوت برای قیدها یا آرمان‌ها آن‌ها را به حالت قطعی تبدیل می‌کنیم و باتشکیل مدل مساله برنامه‌ریزی آرمانی خطی چندپارامتری متناظر با آن‌ها و حل آن، جواب بهینه (در صورت وجود) را به دست می‌آوریم. از کاربردهای برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده

فازی انعطاف پذیر می توان در بحث تحلیل و حساسیت مسایل برنامه ریزی آرمانی، مسایل برنامه ریزی خطی چندهدفه، حل مسایل برنامه ریزی آرمانی با سطح آرزوی فازی ذوزنقه ای و برنامه ریزی کشاورزی را نام برد. در این مقاله ابتدا دربخش ۲ به بررسی مدل هایی از برنامه ریزی آرمانی چندانتخابی می پردازیم. در بخش ۳ و ۴ به ترتیب مدل مسایل برنامه ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده با قیود فازی انعطاف پذیر و برنامه ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده با آرمان های فازی انعطاف پذیر را معرفی می کنیم و نحوه قطعی سازی و تشکیل مدل مساله برنامه ریزی آرمانی خطی چند پارامتری را ارایه می کنیم و برای بیان کارامدی و تفهیم روش های بیان شده مثال هایی عددی مطرح می کنیم و آن ها را حل می کنیم. دربخش آخر نتیجه گیری و پیشنهادات را بیان می کنیم.

۲ بررسی مدل های برنامه ریزی آرمانی چندانتخابی

شکل کلی برنامه ریزی آرمانی چندانتخابی به صورت زیر می باشد [۱۶]

$$\begin{aligned} G_k(x) &= \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} (g_{k1} \text{ or } g_{k2} \text{ or } \dots \text{ or } g_{kT}), k=1, \dots, K \\ \text{s.t. } AX &= b, A = [a_{ij}]_{mn}, b = (b_1, \dots, b_m)^t, \\ X &= (x_1, \dots, x_n)^t, x_j \geq 0, j=1, \dots, n \end{aligned} \quad (1)$$

که برای هدف i -ام چند سطح آرزوی مشخص، مانند $g_{k1}, g_{k2}, \dots, g_{kT}$ در نظر گرفته می شود و ما می خواهیم انحراف مقدارهدف و سطح آرزوی آن در هدف k -ام را مینیمم کنیم.

$$\begin{aligned} \min \sum_{k=1}^K |G_k(x) - (g_{k1} \text{ or } g_{k2} \text{ or } \dots \text{ or } g_{kT})| \\ \text{s.t. } AX &= b, A = [a_{ij}]_{mn}, b = (b_1, \dots, b_m)^t, \\ X &= (x_1, \dots, x_n)^t, x_j \geq 0, j=1, \dots, n \end{aligned} \quad (2)$$

که در آن $A = [a_{ij}]$ ، $(i=1, \dots, m)$ ، $(j=1, \dots, n)$ ، $X = (x_1, \dots, x_n)$ ، با توجه به این که برای هر هدف چند سطح آرزو وجود دارد، مدل فوق به صورت زیر تغییر می کند:

$$\begin{aligned} \min \sum_{k=1}^K w_k (d_k^- + d_k^+) \\ \text{s.t. } G_k(X) - d_k^+ + d_k^- &= \sum_{t=1}^T g_{kt} S_{kt}(B), \\ AX &= b, A = [a_{ij}]_{mn}, b = (b_1, \dots, b_m)^t, \\ d_k^-, d_k^+ &\geq 0, x_j \geq 0, k=1, \dots, K, j=1, \dots, n, B \in \{0, 1\} \end{aligned} \quad (3)$$

که B یک متغیر دودویی و $S_{kt}(B)$ بیان گر تابع ضربی از متغیرهای دودویی می باشد که مشخص می کند کدام سطح آرزو برای آرمان i -ام انتخاب شود.

۲-۱ برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده [۱۷]

در روند حل مدل اولیه برنامه‌ریزی آرمانی چند انتخابی که برای سطوح آرزوی آرمان‌های آن چندانتخاب گسسته مشخص وجود دارد، جملات ضربی از متغیرهای دودویی به وجود می‌آید که این در عمل مشکلاتی را برای تصمیم‌گیرنده به همراه خواهد داشت، لذا برای برطرف کردن این مشکل، از مدل مساله برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده استفاده می‌شود. یکی از مزایای روش فوق این است که شامل جملات ضربی از متغیرهای دودویی نیست و به آسانی با استفاده از نرم افزارهای موجود قابل حل است.

مدل کلی مساله برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده به صورت زیر می‌باشد

$$G_k(X) \geq g_{k,\min} \text{ and } \leq g_{k,\max}, \quad k = 1, \dots, K,$$

$$AX = b, \quad A = [a_{ij}]_{m \times n}, \quad b = (b_1, \dots, b_m)^t, \quad (4)$$

$$X = (x_1, \dots, x_n)^t, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m$$

در واقع سطح آرزوی این برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده بازه بسته $[g_{k,\min}, g_{k,\max}]$ می‌باشد. **تذکره ۱-** برای حل مساله (۴) نیاز هست که مشخص شود که ابتدای بازه اهمیت یا اولویت بیشتری دارد یا انتهای بازه، سپس آن را به برنامه‌ریزی آرمانی خطی تبدیل می‌کنند.

تذکره ۲- اگر بخواهیم از سطح آرزوی در نظر گرفته شده از یک آرمان، مینیمم‌ترین آن‌ها را انتخاب کنیم مدل برنامه‌ریزی آرمانی خطی اصلاح‌شده به صورت زیر خواهد بود:

$$\min \sum_{k=1}^K [w_k (d_k^- + d_k^+) + \alpha_k (e_k^- + e_k^+)]$$

$$\text{s.t.} \quad G_k(X) - d_k^+ + d_k^- = y_k, \quad k = 1, \dots, K,$$

$$y_k - e_k^+ + e_k^- = g_{k,\min}, \quad g_{k,\min} \leq y_k \leq g_{k,\max}$$

$$AX = b, \quad b = (b_1, \dots, b_m)^t, \quad A = [a_{ij}]_{m \times n} \quad (5)$$

$$X = (x_1, \dots, x_n)^t, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m$$

$$d_k^-, d_k^+ \geq 0, \quad X \geq 0, \quad k = 1, \dots, K.$$

در مدل بالا $G_k(x)$ آرمان مساله، y_k سطح آرزوی در نظر گرفته شده برای آرمان k -ام، $d_k^+, d_k^-, e_k^+, e_k^-$ متغیرهای انحراف از آرمان مساله می‌باشند

تذکره ۳- اگر بخواهیم از سطح آرزوی در نظر گرفته شده از یک آرمان، ماکزیمم‌ترین آن‌ها را انتخاب کنیم مدل برنامه‌ریزی اصلاح‌شده به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k=1}^K [w_k(d_k^- + d_k^+) + \alpha_k(e_k^- + e_k^+)] \\ \text{s.t.} \quad & G_k(X) - d_k^+ + d_k^- = y_k, \quad k = 1, \dots, K, \\ & y_k - e_k^+ + e_k^- = g_{k,\max}, \quad g_{k,\min} \leq y_k \leq g_{k,\max}, \\ & AX = b, \quad b = (b_1, \dots, b_m)^t, \quad A = [a_{ij}]_{m \times n}, \\ & X = (x_1, \dots, x_n)^t, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m, \\ & d_k^-, d_k^+ \geq 0, \quad X \geq 0, \quad k = 1, \dots, K. \end{aligned} \quad (6)$$

درمدل بالا $G_k(x)$ آرمان مساله، y_k سطح آرزوی در نظر گرفته شده برای آرمان k -ام، $d_k^+, d_k^-, e_k^+, e_k^-$ متغیرهای انحراف از آرمان مساله می‌باشند.

تذکره ۴- دردیای واقعی ممکن است بعضی از آرمان‌ها به هم وابسته باشند لذا در چنین مسایلی، از برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده محدود استفاده می‌کنند که در ادامه به بررسی آن‌ها می‌پردازیم.

تذکره ۵- مدل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده محدود در حالتی که مینیمم‌ترین سطح آرزو مدنظر باشد به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k=1}^K [w_k(d_k^- + d_k^+) + \alpha_k(e_k^- + e_k^+)] \\ \text{s.t.} \quad & (G_k(X))B_k - d_k^+ + d_k^- = B_k y_k, \quad k = 1, \dots, K, \\ & y_k - e_k^+ + e_k^- = g_{k,\min}, \quad g_{k,\min} \leq y_k \leq g_{k,\max} \\ & AX = b, \quad A = [a_{ij}]_{m \times n}, \quad b = (b_1, \dots, b_m)^t, \quad X = (x_1, \dots, x_n), \quad x_j \geq 0, \\ & B_k \in \{0, 1\}, \quad d_k^-, d_k^+ \geq 0, \quad X \geq 0, \quad k = 1, \dots, K, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (7)$$

درمدل بالا $G_k(x)$ آرمان مساله، y_k سطح آرزوی در نظر گرفته شده برای آرمان k -ام، $d_k^+, d_k^-, e_k^+, e_k^-$ متغیرهای انحراف از آرمان مساله و B_k متغیر دودویی می‌باشند

تذکره ۶- مدل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده محدود در حالتی که ماکزیمم‌ترین سطح آرزو مدنظر هست به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k=1}^K [w_k(d_k^- + d_k^+) + \alpha_k(e_k^- + e_k^+)] \\ \text{s.t.} \quad & (G_k(X))B_k - d_k^+ + d_k^- = B_k y_k, \quad k = 1, \dots, K, \\ & y_k - e_k^+ + e_k^- = g_{k,\max}, \quad g_{k,\min} \leq y_k \leq g_{k,\max} \\ & AX = b, \quad A = [a_{ij}]_{m \times n}, \quad b = (b_1, \dots, b_m)^t, \\ & B_k \in \{0, 1\}, \quad d_k^-, d_k^+ \geq 0, \quad X \geq 0, \quad k = 1, \dots, K \end{aligned} \quad (8)$$

درمدل بالا $G_k(x)$ آرمان مساله، y_k سطح آرزوی در نظر گرفته شده برای آرمان k -ام، $d_k^+, d_k^-, e_k^+, e_k^-$ متغیرهای انحراف از آرمان مساله و B_k متغیر دودویی می‌باشند.

۲-۲ برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی فازی

در برخی از مسایل، ما با چند سطح آرزوی مبهم یا نامشخص برای آرمان‌ها یا متغیرها یا ضرایب مواجه می‌شویم که در این صورت برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی فازی مطرح می‌شود که می‌توان آن را به دسته‌های زیر تقسیم کرد.

یک دسته از چنین برنامه‌ریزی‌هایی، مدل‌هایی هستند که سطوح آرزوی آن‌ها فازی مثلثی می‌باشد که این دسته از مدل‌ها توسط بانکیان تبریزی و همکاران مطرح شد [۲۹].

اگر برای آرمان k -ام (G_k) ، سطوح آرزو \tilde{g}_{k1} or \tilde{g}_{k2} or ... or \tilde{g}_{kT} باشند. مدل برنامه‌ریزی آرمانی چند انتخابی فازی به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \min & \sum_{k=1}^K |G_k(x) - (\tilde{g}_{k1} \text{ or } \tilde{g}_{k2} \text{ or } \dots \text{ or } \tilde{g}_{kT})| \\ \text{s.t. } & AX = b, A = [a_{ij}]_{mn}, b = (b_1, \dots, b_m)^t, \\ & X = (x_1, \dots, x_n)^t, x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (9)$$

که مدل اخیر را می‌توان به صورت زیر نیز بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} \max f(\mu) &= \sum_{k=1}^K w_k \mu_k \\ \text{s.t. } & \mu_k \leq 1 - \sum_{t=1}^T \left(\frac{G_k(x) - \tilde{g}_{kt}}{p_{kt}^+} \right) S_{kt}(B), k = 1, \dots, K, \\ & \mu_k \leq 1 - \sum_{t=1}^T \left(\frac{\tilde{g}_{kt} - G_k(x)}{p_{kt}^-} \right) S_{kt}(B), k = 1, \dots, K, \\ & AX = b, A = [a_{ij}]_{mn}, b = (b_1, \dots, b_m), X = (x_1, \dots, x_n) \\ & \mu_k \geq 0, B \in \{0, 1\}, k = 1, \dots, K, t = 1, \dots, T. \end{aligned} \quad (10)$$

تذکره ۷- p_{kt}^-, p_{kt}^+ به ترتیب بیشترین مقدار تخطی از $G_k(x)$ از g_{kt} از سمت راست (بزرگ‌تر شدن) و سمت چپ (کوچک‌تر شدن) و $S_{kt}(B)$ تابع ضربی از متغیرهای دودویی می‌باشد.

در بعضی از مدل‌ها متغیرها و ضرایب آن‌ها در آرمان‌ها فازی می‌باشد که مدل آن به صورت زیر بیان می‌شود [۳۰].

$$\begin{aligned} \tilde{G}_k(\tilde{x}) &\stackrel{\geq}{\leq} (g_{k1} \text{ or } g_{k2} \text{ or } \dots \text{ or } g_{kT}), k = 1, \dots, K \\ \text{s.t. } & A\tilde{X} \preceq \approx \succeq b, A = [a_{ij}]_{mn}, b = (b_1, \dots, b_m) \\ & \tilde{X} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n). \end{aligned} \quad (11)$$

که برای حل آن‌ها از تابع رتبه‌بندی استفاده می‌کنیم و به صورت زیر آن را تغییر می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{k=1}^K w_k (d_k^- + d_k^+) \\
\text{s.t.} \quad & \mathfrak{R}(\tilde{G}_k(\tilde{X})) - d_k^+ + d_k^- = \sum_{t=1}^T g_{kt} S_{kt}(B), \\
& \sum_{j=1}^n a_{ij} \mathfrak{R}(\tilde{x}_j) = b_i, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, \\
& \mathfrak{R}(\tilde{x}_j) \geq 0, d_k^-, d_k^+ \geq 0, k = 1, \dots, K, j = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{۱۲}$$

۳ مسایل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده با مجموعه قیود فازی انعطاف‌پذیر

فازی انعطاف‌پذیر از بحث‌های بسیار ارزشمند در نظریه فازی می‌باشد اگر در مسایل برنامه‌ریزی ریاضی، تصمیم‌گیرنده بخواهد میزان تخطی را در منابع سمت راست قیدها در نظر بگیرد، در این صورت بحث مجموعه قیود فازی انعطاف‌پذیر مطرح می‌شود که شکل کلی مسایل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده با مجموعه قیود فازی انعطاف‌پذیر به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}
G_K(X) & \geq g_{k,\min} \text{ and } \leq g_{k,\max}, k = 1, \dots, K, \\
G_V(X) & \geq g_{v,\min} \text{ and } \leq g_{v,\max}, v = K+1, \dots, V, \\
\sum_{j=1}^n a_{l_j} x_j & \leq b_{l_1}, l_1 = 1, \dots, r, \\
\sum_{j=1}^n a_{l_j} x_j & \geq b_{l_r}, l_r = r+1, \dots, m \\
x_j & \geq 0, j = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{۱۳}$$

تذکره ۸- $G_k(X)$ ($k = 1, \dots, K$) و $G_v(X)$ ($v = K+1, \dots, V$) آرمان‌های دسته اول و دسته دوم می‌باشند و $[g_{k,\min}, g_{k,\max}]$ و $[g_{v,\min}, g_{v,\max}]$ سطح آرزوی پیوسته آن‌ها می‌باشند.

تذکره ۹- در آرمان‌های دسته اول ($G_k(X)$ ($k = 1, \dots, K$)) رسیدن به کمترین مقدار سطح آرزو یا ابتدای بازه سطح آرزو ($g_{k,\min}$) اهمیت بیشتری دارد و در آرمان‌های دسته دوم ($G_v(X)$ ($v = K+1, \dots, V$)) رسیدن به بیشترین مقدار سطح آرزو یا انتهای بازه سطح آرزو ($g_{v,\max}$) اهمیت بیشتری دارد.

تذکره ۱۰- P_i ($i = 1, \dots, m$) میزان تخطی مقدار سمت راست قید i -ام می‌باشد که توسط تصمیم‌گیرنده به عنوان داده‌های مساله مشخص می‌شود و r قید اول که از نوع " \leq " می‌باشند را قیود نوع اول ($l_1 = 1, \dots, r$) و مابقی که از نوع " \geq " را قیود نوع دوم ($l_r = r+1, \dots, m$) می‌نامیم.

تذکره ۱۱- انعطاف‌پذیری در r - قید اول (\leq) باعث می‌شود که منابع سمت راست از b_{l_1} تا $b_{l_1} + p_{l_1}$ قابل افزایش باشد و در بقیه قیدها (\geq) منابع سمت راست b_{l_r} تا $b_{l_r} - p_{l_r}$ قابل کاهش خواهد بود.

تذکره ۱۲- برای حل مسایل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده با مجموعه قیود فازی انعطاف‌پذیر بالا (۱۳) نیاز است که ابتدا آن‌را به یک برنامه‌ریزی آرمانی خطی با مجموعه قیود فازی انعطاف‌پذیر تبدیل کنیم

سپس با استفاده از روش α -برش و در نظر گرفتن حداقل درجه عضویت متفاوت برای قیود فازی انعطاف‌پذیر، آن را به یک مدل برنامه‌ریزی آرمانی خطی قطعی چندپارامتری تبدیل کنیم.

۳-۱ تبدیل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده با مجموعه قیود فازی انعطاف‌پذیر به برنامه‌ریزی خطی فازی انعطاف‌پذیر

باتوجه به بخش ۲-۱ برای حل مسایل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده بالا (۱۳) نیاز هست که ابتدا آنرا به یک برنامه‌ریزی آرمانی خطی با قیود فازی انعطاف‌پذیر تبدیل کنیم. از طرفی می‌دانیم در آرمان‌های دسته اول $(G_k(X))$ ($k=1, \dots, K$) رسیدن به کمترین مقدار سطح آرزو $(g_{k,\min})$ و در آرمان‌های دسته دوم $(G_v(X))$ ($v=K+1, \dots, V$) رسیدن به بیشترین مقدار سطح آرزو یا انتهای بازه سطح آرزو $(g_{v,\max})$ اهمیت بیشتری دارد. بنابراین باتوجه به مدل (۷) و (۸) مدل برنامه‌ریزی آرمانی خطی با مجموعه قیود فازی انعطاف‌پذیر متناظر با مساله (۱۳) به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \min & \left(\sum_{k=1}^K [w_k(d_k^- + d_k^+) + \alpha_k(e_k^- + e_k^+)] + \sum_{v=K+1}^V [w_v(d_v^- + d_v^+) + \alpha_v(e_v^- + e_v^+)] \right) \\ \text{s.t} & \quad G_k(X) - d_k^+ + d_k^- = y_k, \quad g_{k,\min} \leq y_k \leq g_{k,\max} \\ & \quad y_k - e_k^+ + e_k^- = g_{k,\min}, \quad k = 1, \dots, K, \\ & \quad G_v(X) - d_v^+ + d_v^- = y_v, \quad g_{v,\min} \leq y_v \leq g_{v,\max}, \\ & \quad y_v - e_v^+ + e_v^- = g_{v,\max}, \quad v = K+1, \dots, V, \\ & \quad \sum_{j=1}^n a_{l_j} x_j \lesseqgtr^F b_{l_j}, \quad l_j = 1, \dots, r, \quad \sum_{j=1}^n a_{l_r} x_j \gtrseq^F b_{l_r}, \quad l_r = r+1, \dots, m, \\ & \quad X = (x_1, \dots, x_n), \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{14}$$

تذکره ۱۳- در مدل متغیرها به صورت زیر معرفی می‌شوند

۱- $d_k^-, d_k^+, e_k^-, e_k^+$ متغیرهای انحراف از آرمان، آرمان‌های دسته اول و $d_v^-, d_v^+, e_v^-, e_v^+$ متغیرهای انحراف از آرمان دسته دوم می‌باشد و $w_k, \alpha_k, w_v, \alpha_v$ وزن آن‌ها در تابع هدف مساله (۱۴) می‌باشد.

۲- $g_{k,\min}, g_{k,\max}$ سطح آرزوی آرمان‌های دسته اول و $g_{v,\min}, g_{v,\max}$ سطح آرزوی آرمان‌های دسته دوم می‌باشد

۳- y_k, y_v مقدار سطح آرزویی هستند که بعد از حل مساله برای آرمان‌های مساله در نظر گرفته می‌شود.

در مدل مساله (۱۴) قیود از نوع فازی انعطاف‌پذیر خواهند بود که نیاز است به حالت قطعی تبدیل شوند.

۳-۲ تابع عضویت قیود فازی انعطاف‌پذیر مساله (۱۴)

با توجه به نوع قیود فازی انعطاف‌پذیر مساله و میزان تخطی مربوط به هر قید، تابع عضویت قیدها به صورت زیر خواهد بود:

$$\mu\left(\sum_{j=1}^n a_{l_j} x_j \lesssim b_{l_j}\right) = \frac{b_{l_j} - \sum_{j=1}^n a_{l_j} x_j}{P_{l_j}} + 1, l_j = 1, \dots, r$$

$$\mu\left(\sum_{j=1}^n a_{l_j} x_j \gtrsim b_{l_j}\right) = \frac{\sum_{j=1}^n a_{l_j} x_j - b_{l_j}}{P_{l_j}} + 1, l_j = r+1, \dots, m \quad (15)$$

۳-۳ تبدیل قیود فازی انعطاف پذیر مساله (۱۴) به حالت قطعی

اگر روش α -برش را برای قطعی سازی قیود فازی انعطاف پذیر در نظر بگیریم و حداقل مقدار عضویت قیود نوع اول را α_{l_j} و قیود نوع دوم را α_{l_j} در نظر بگیریم آنگاه قیود فازی انعطاف پذیر مساله (۱۳) به صورت زیر به حالت قطعی تبدیل می شود

$$\mu\left(\sum_{j=1}^n a_{l_j} x_j \lesssim b_{l_j}\right) = \frac{b_{l_j} - \sum_{j=1}^n a_{l_j} x_j}{P_{l_j}} + 1 \geq \alpha_{l_j} \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{l_j} x_j \leq b_{l_j} + p_{l_j} (1 - \alpha_{l_j}), l_j = 1, \dots, r,$$

$$\mu\left(\sum_{j=1}^n a_{l_j} x_j \gtrsim b_{l_j}\right) = \frac{\sum_{j=1}^n a_{l_j} x_j - b_{l_j}}{P_{l_j}} + 1 \geq \alpha_{l_j} \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{l_j} x_j \leq b_{l_j} + p_{l_j} (1 - \alpha_{l_j}), l_j = r+1, \dots, m \quad (16)$$

۳-۴ تبدیل مساله برنامه ریزی آرمانی خطی با مجموعه قیود فازی انعطاف پذیر (۱۴) به یک مساله برنامه ریزی آرمانی خطی قطعی

با توجه به روابط (۱۵) و (۱۶) مدل قطعی برنامه ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده با مجموعه قیود فازی انعطاف پذیر (۱۳) به صورت زیر خواهد بود

$$\min \left(\sum_{k=1}^K [w_k (d_k^- + d_k^+) + w_k' (e_k^- + e_k^+)] + \sum_{v=K+1}^V [w_v (d_v^- + d_v^+) + w_v' (e_v^- + e_v^+)] - \sum_{i=1}^m \alpha_i \right)$$

$$\text{s.t. } G_k(X) - d_k^+ + d_k^- = y_k, g_{k,\min} \leq y_k \leq g_{k,\max}$$

$$y_k - e_k^+ + e_k^- = g_{k,\min}, \quad k = 1, \dots, K,$$

$$G_v(X) - d_v^+ + d_v^- = y_v, g_{v,\min} \leq y_v \leq g_{v,\max}$$

$$y_v - e_v^+ + e_v^- = g_{v,\max}, \quad v = K+1, \dots, V,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{l_j} x_j \leq b_{l_j} + p_{l_j} (1 - \alpha_{l_j}), \quad l_j = 1, \dots, r, \quad (17)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{l_j} x_j \geq b_{l_j} - p_{l_j} (1 - \alpha_{l_j}), \quad l_j = r+1, \dots, m,$$

$$0 \leq \alpha_{l_j} \leq 1, \quad l_j = 1, \dots, r,$$

$$0 \leq \alpha_{l_j} \leq 1, \quad l_j = r+1, \dots, m,$$

$$X = (x_1, \dots, x_n), x_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$

تذکره ۱۴- ملاحظه می شود که مدل (۱۷) یک نوع مدل برنامه ریزی آرمانی خطی چند پارامتری قطعی می باشد که متغیرهای آن به صورت زیر معرفی می شوند

۱- $d_k^-, d_k^+, e_k^-, e_k^+$ متغیرهای انحراف از آرمان دسته اول و $d_v^-, d_v^+, e_v^-, e_v^+$ متغیرهای انحراف از آرمان دسته دوم می باشد و $w_k, \alpha_k, w_v, \alpha_v$ وزن آن ها در تابع هدف مساله (۱۴) می باشد.

۲- $g_{k,\min}, g_{k,\max}$ سطح آرزوی آرمان های دسته اول و $g_{v,\min}, g_{v,\max}$ سطح آرزوی آرمان های دسته دوم می باشد

۳- y_k, y_v مقدار سطح آرزویی که بعد از حل مساله برای آرمان های مساله در نظر گرفته می شود.

۴- α_l حداقل مقدار عضویت قیود نوع اول و α_r حداقل مقدار عضویت قیود نوع دوم می باشد

۳-۵ مثال عددی

اگر در مساله برنامه ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده زیر، در هدف اول رسیدن به بیشترین مقدار سطح آرزو و در هدف دوم رسیدن به کمترین مقدار سطح آرزو مدنظر تصمیم گیرنده باشد و میزان تخطی قیود مساله از مقادیر سمت راستشان به ترتیب $p_1 = 8, p_2 = 2, p_3 = 7$ باشد جواب بهینه مساله در صورت وجود تخمین زده می شود.

$$\begin{aligned} G_1 : 3x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 100 \text{ and } \leq 120 \\ G_2 : 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\geq 90 \text{ and } \leq 100 \\ x_3 - 2x_2 + x_1 &\geq^F 15 \\ 2x_1 - x_3 &\leq^F 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq^F 25 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 &\geq 0 \end{aligned} \quad (18)$$

قدم اول: با استفاده از مدل (۱۷)، مدل قطعی مساله (۱۸) که یک مساله برنامه ریزی آرمانی خطی چندپارامتری است به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{aligned} \min Z &= d_1^+ + d_1^- + e_1^+ + e_1^- + d_2^+ + d_2^- + e_2^+ + e_2^- - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \\ \text{s.t.} \quad &3x_1 + 2x_2 + x_3 - d_1^+ + d_1^- = y_1, \\ &100 \leq y_1 \leq 120, y_1 - e_1^+ + e_1^- = 120 \\ &4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - d_2^+ + d_2^- = y_2 \\ &90 \leq y_2 \leq 100, y_2 - e_2^+ + e_2^- = 90 \\ &x_3 - 2x_2 + x_1 \geq 15 - \alpha_1(1 - \alpha_1) \\ &2x_1 - x_3 \leq 4 + \alpha_2(1 - \alpha_2) \\ &x_1 + x_2 + x_3 \leq 25 + \alpha_3(1 - \alpha_3) \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, 0 \leq \alpha_1 \leq 1, 0 \leq \alpha_2 \leq 1, 0 \leq \alpha_3 \leq 1 \\ &d_1^+ \geq 0, d_1^- \geq 0, e_1^+ \geq 0, e_1^- \geq 0, d_2^+ \geq 0, d_2^- \geq 0, e_2^+ \geq 0, e_2^- \geq 0, \end{aligned} \quad (19)$$

قدم دوم: با حل مساله با کمک نرم افزار جواب بهینه به صورت زیر خواهد بود

$$d_1^+ = 0, d_1^- = 42, e_1^+ = 0, e_1^- = 20, d_2^+ = \dots, d_2^- = \dots, e_2^+ = 0, e_2^- = 0, y_1 = 10, y_2 = 90$$

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0 / 9166667, \alpha_3 = 0, x_1 = 10 / 6667, x_2 = 5 / 666667, x_3 = 16 / 1667 \quad (20)$$

تذکره ۱۵- از جواب به دست آمده نتایج زیر به دست می آید

۱- برای آرمان اول، مقدار سطح آرزو برابر با ۱۰۰ و برای آرمان دوم، مقدار سطح آرزو برابر با ۹۰ در نظر گرفته شده است.

۲- مقدار آرمان اول برابر با ۵۸ و مقدار آرمان دوم برابر با ۹۰ به دست آمده است.

۳- هیچ گونه تخطی برای قید اول انجام نگرفته است ولی برای قید سوم تمام تخطی مجاز، در نظر گرفته شد.

۴- مسایل برنامه ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده با آرمان های فازی انعطاف پذیر

در مسایل برنامه ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح شده، آرمان ها بازه بسته خواهند بود. حال اگر بر اساس نظر تصمیم گیرنده ابتدای بازه تا اندازه ای قابل کاهش و انتهای بازه تا اندازه ای قابل افزایش باشد بحث برنامه ریزی آرمانی با آرمان های فازی انعطاف پذیر مطرح می شود که شکل کلی این نوع مسایل به صورت زیر می باشد:

$$G_k(X) \succeq^F g_{k,\min} \text{ and } \preceq^F g_{k,\max}, k = 1, \dots, K,$$

$$G_v(X) \succeq^F g_{v,\min} \text{ and } \preceq^F g_{v,\max}, v = K + 1, \dots, V, \quad (21)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq \text{or } \geq b_i, i = 1, \dots, m,$$

$$X = (x_1, \dots, x_n), x_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$

تذکره ۱۶- $G_k(X)$ ($k = 1, \dots, K$) و $G_v(X)$ ($v = K + 1, \dots, V$) آرمان های فازی انعطاف پذیر دسته اول و دسته دوم می باشند و $[g_{k,\min}, g_{k,\max}]$ و $[g_{v,\min}, g_{v,\max}]$ سطح آرزوی پیوسته فازی انعطاف پذیر آنها می باشند که با در نظر گرفتن میزان تخطی ابتدا و انتهای سطح آرزوی فازی انعطاف پذیر قابل تغییر است.

تذکره ۱۷- در آرمان های فازی انعطاف پذیر دسته اول ($G_k(X)$ ($k = 1, \dots, K$)) رسیدن به کمترین مقدار سطح آرزو یا ابتدای بازه سطح آرزو ($g_{k,\min}$) اهمیت بیشتری دارد و در آرمان های دسته دوم ($G_v(X)$ ($v = K + 1, \dots, V$)) رسیدن به بیشترین مقدار سطح آرزو یا انتهای بازه سطح آرزو ($g_{v,\max}$) اهمیت بیشتری دارد.

تذکره ۱۸- با توجه به این که آرمان ها مساله (۲۱) از نوع فازی انعطاف پذیر می باشند پس ابتدای بازه و انتهای بازه سطح آرزوی آرمان ها قابل انعطاف می باشند؛ بنابراین بر طبق نظر تصمیم گیرنده، $P_{k,\min}, P_{k,\max}$ به ترتیب میزان تخطی آرمان های فازی انعطاف پذیر دسته اول ($G_k(X)$ ($k = 1, \dots, K$)) از بیشترین و کمترین مقدار سطح آرزوی شان، و $P_{v,\min}, P_{v,\max}$ به ترتیب میزان تخطی آرمان های فازی انعطاف پذیر دسته دوم ($G_v(X)$ ($v = K + 1, \dots, V$)) از بیشترین و کمترین مقدار سطح آرزوی شان می باشد.

تذکره ۱۹- برای حل مسایل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده فازی انعطاف‌پذیر بالا (۲۱) نیاز است که ابتدا آن‌را به یک برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده قطعی تبدیل کنیم سپس آن را به یک مدل برنامه‌ریزی خطی قطعی چندپارامتری تبدیل کنیم.

۴-۱ تبدیل آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر برنامه‌ریزی چندانتخابی اصلاح‌شده (۲۱) به حالت قطعی

با توجه به نوع آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر مساله و میزان تخطی مربوط به هر آرمان، تابع عضویت آرمان‌ها به صورت زیر خواهد بود:

تابع عضویت آرمان‌های دسته اول:

$$\mu(G_k \succeq^F g_{k,\min}) = \frac{G_k - g_{k,\min}}{P_{k,\min}} + 1, \quad k = 1, \dots, K \quad (22)$$

$$\mu(G_k \preceq^F g_{k,\max}) = \frac{g_{k,\max} - G_k}{P_{k,\max}} + 1, \quad k = 1, \dots, K \quad (23)$$

تابع عضویت آرمان‌های دسته دوم:

$$\mu(G_v \succeq^F g_{v,\min}) = \frac{G_v - g_{v,\min}}{P_{v,\min}} + 1, \quad v = K+1, \dots, V \quad (24)$$

$$\mu(G_v \preceq^F g_{v,\max}) = \frac{g_{v,\max} - G_v}{P_{v,\max}} + 1, \quad v = K+1, \dots, V \quad (25)$$

۴-۲ تبدیل مساله برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده با مجموعه آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر به یک مساله برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده قطعی

اگر روش α -برش را برای قطعی‌سازی آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر در نظر بگیریم و حداقل مقدار عضویت آرمان‌های نوع اول را در روابط (۲۲) و (۲۳) α_k ($0 \leq \alpha_k \leq 1$) و آرمان‌های نوع دوم را در روابط (۲۴) و (۲۵) α_v ($0 \leq \alpha_v \leq 1$) در نظر بگیریم آنگاه آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر مساله (۲۱) به صورت زیر به حالت قطعی تبدیل می‌شود

حالت قطعی آرمان‌های نوع اول:

$$\mu(G_k \succeq^F g_{k,\min}) = \frac{G_k - g_{k,\min}}{P_{k,\min}} + 1 \geq \alpha_k \Rightarrow G_k \geq g_{k,\min} - P_{k,\min}(1 - \alpha_k), \quad 0 \leq \alpha_k \leq 1, \quad k = 1, \dots, K \quad (26)$$

$$\mu(G_k \preceq^F g_{k,\max}) = \frac{g_{k,\max} - G_k}{P_{k,\max}} + 1 \geq \alpha_k \Rightarrow G_k \leq g_{k,\max} + P_{k,\max}(1 - \alpha_k), \quad 0 \leq \alpha_k \leq 1, \quad k = 1, \dots, K \quad (27)$$

حالت قطعی آرمان‌های نوع دوم:

$$\mu(G_v \succeq^F g_{v,\min}) = \frac{G_v - g_{v,\min}}{P_{v,\min}} + 1 \geq \alpha_v \Rightarrow G_v \geq g_{v,\min} - P_{v,\min}(1 - \alpha_v), \quad 0 \leq \alpha_v \leq 1, \quad v = K+1, \dots, V \quad (28)$$

$$\mu(G_v \preceq^F g_{v,\max}) = \frac{g_{v,\max} - G_v}{P_{v,\max}} + 1 \geq \alpha_v \Rightarrow G_v \leq g_{v,\max} + P_{v,\max}(1 - \alpha_v), \quad 0 \leq \alpha_v \leq 1, \quad v = K+1, \dots, V \quad (29)$$

۳-۴ حالت قطعی مساله برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده با آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر

باتوجه به روابط بالا (۲۶-۲۷-۲۸-۲۹) شکل قطعی مساله (۲۱) به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{aligned} G_K(X) &\geq g_{k,\min} - P_{k,\min}(1-\alpha_k) \text{ and } \leq g_{k,\max} + P_{k,\max}(1-\alpha_k), k=1, \dots, K, \\ G_v(X) &\geq g_{v,\min} - P_{v,\min}(1-\alpha_v) \text{ and } \leq g_{v,\max} + P_{v,\max}(1-\alpha_v), v=K+1, \dots, V, \\ \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j &\leq \text{or } \geq b_i, i=1, \dots, m, \\ 0 &\leq \alpha_k \leq 1, 0 \leq \alpha_v \leq 1, X=(x_1, \dots, x_n), x_j \geq 0, j=1, \dots, n \end{aligned} \quad (30)$$

مدل (۳۰) برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده چند پارامتری قطعی می‌باشد که بازه‌های زیر سطح آرزوی آرمان‌های آن می‌باشند $[g_{k,\min} - P_{k,\min}(1-\alpha_k), g_{k,\max} + P_{k,\max}(1-\alpha_k)]$ ، $[g_{v,\min} - P_{v,\min}(1-\alpha_v), g_{v,\max} + P_{v,\max}(1-\alpha_v)]$ نکته: در آرمان‌های نوع اول $(G_k(X))$ $(k=1, \dots, K)$ رسیدن به کم‌ترین مقدار سطح آرزو $(g_{k,\min} - P_{k,\min}(1-\alpha_k))$ (ابتدای بازه) و در آرمان نوع دوم $(G_v(X))$ $(v=K+1, \dots, V)$ رسیدن به بیش‌ترین مقدار سطح آرزو $(g_{v,\max} + P_{v,\max}(1-\alpha_v))$ (انتهای بازه) اهمیت بیش‌تری دارد.

۴-۴ تبدیل مساله برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده قطعی (۳۰) به برنامه‌ریزی آرمانی خطی چندپارامتری

با توجه به ساختار برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده (مدل‌های (۵) و (۶))، مساله (۳۰) به صورت زیر به برنامه‌ریزی آرمانی خطی چندپارامتری قطعی تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \min Z &= \sum_{k=1}^K (w_k^+ d_k^+ + w_k^- d_k^- + w_k'^+ e_k^+ + w_k'^- e_k^-) + \sum_{v=K+1}^V (w_v^+ d_v^+ + w_v^- d_v^- + w_v'^+ e_v^+ + w_v'^- e_v^-) \\ G_K(X) - d_k^+ + d_k^- &= y_k, k=1, \dots, K, \\ y_k - e_k^+ + e_k^- &= g_{k,\min} - P_{k,\min}(1-\alpha_k) \\ g_{k,\min} - P_{k,\min}(1-\alpha_k) &\leq y_k \leq g_{k,\max} + P_{k,\max}(1-\alpha_k), \\ G_v(X) - d_v^+ + d_v^- &= y_v, v=K+1, \dots, V, \\ y_v - e_v^+ + e_v^- &= g_{v,\max} + P_{v,\max}(1-\alpha_v), \\ g_{v,\min} - P_{v,\min}(1-\alpha_v) &\leq y_v \leq g_{v,\max} + P_{v,\max}(1-\alpha_v), \\ \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j &\leq \text{or } \geq b_i, i=1, \dots, m, \\ 0 &\leq \alpha_k \leq 1, 0 \leq \alpha_v \leq 1, X=(x_1, \dots, x_n), x_j \geq 0, j=1, \dots, n \end{aligned} \quad (31)$$

ملاحظه می‌شود که مدل (۳۱) برنامه‌ریزی آرمانی خطی چندپارامتری قطعی می‌باشد که در واقع مدل قطعی برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده با آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر (۲۱) می‌باشد و به آسانی با کمک نرم‌افزار قابل حل می‌باشد.

تذکره ۲۰- ملاحظه می‌شود که مدل (۳۱) یک نوع مدل برنامه‌ریزی آرمانی خطی چندپارامتری قطعی می‌باشد که متغیرهای آن به صورت زیر معرفی می‌شوند

۱- $d_k^-, d_k^+, e_k^-, e_k^+$ متغیرهای انحراف از آرمان دسته اول و $d_v^-, d_v^+, e_v^-, e_v^+$ متغیرهای انحراف از آرمان دسته دوم می‌باشد و $w_k^+, w_k^-, w_k'^+, w_k'^-, w_v^+, w_v^-, w_v'^+, w_v'^-$ وزن آن‌ها در تابع هدف مساله (۳۱) می‌باشد.

۲- سطح آرزوی آرمان‌های دسته اول و $g_{k,\min}, g_{k,\max}$ سطح آرزوی آرمان‌های دسته دوم می‌باشد

۳- y_k, y_v مقدار سطح آرزویی هستند که بعد از حل مساله برای آرمان‌های مساله در نظر گرفته می‌شود.

۴- α_k حداقل مقدار عضویت آرمان نوع اول و α_v حداقل مقدار عضویت آرمان نوع دوم می‌باشد

۴-۵ مثال عددی

در مساله برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده زیر، میزان تخطی اولین آرمان فازی انعطاف‌پذیر، از بیش‌ترین و کم‌ترین سطح آرزو به ترتیب ۴۰ و ۲۰ است ($P_{1,\max} = 40, P_{1,\min} = 20$) و میزان تخطی دومین آرمان فازی انعطاف‌پذیر، از بیش‌ترین و کم‌ترین سطح آرزو به ترتیب ۳۰ و ۱۴ است ($P_{2,\max} = 30, P_{2,\min} = 14$) و با توجه به نظر تصمیم‌گیرنده در آرمان اول رسیدن به بیش‌ترین سطح آرزو (۸۰) و در آرمان فازی انعطاف‌پذیر دوم رسیدن به کم‌ترین مقدار سطح آرزو (۶۰-) هدف مساله است. جواب بهینه مساله به صورت زیر تخمین زده می‌شود:

$$\begin{aligned} G_1 : x_1 + 2x_2 &\succeq^F 22 \text{ and } \preceq^F 80, \\ G_2 : x_2 - x_1 &\succeq^F -60 \text{ and } \preceq^F -22, \\ -5x_1 + 2x_2 &\leq 7 \\ -x_1 + 3x_2 &\leq 30 \\ x_1 + x_2 &\leq 90 \\ 5x_1 - x_2 &\leq 390 \\ -4x_1 + 79x_2 &\geq 79 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0, \end{aligned} \quad (32)$$

برای به‌دست آوردن جواب بهینه مساله ابتدا با استفاده از مدل مساله (۳۱)، مدل قطعی مساله (۳۲) را به‌دست می‌آوریم که به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \min Z &= d_1^+ + d_1^- + e_1^+ + e_1^- + d_7^+ + d_7^- + e_7^+ + e_7^- \\ x_1 + 2x_7 - d_1^+ + d_1^- &= y_1, \\ y_1 - e_1^+ + e_1^- &= 80 + 40(1 - \alpha_1), \\ 22 - 20(1 - \alpha_1) &\leq y_1 \leq 80 + 40(1 - \alpha_1), \\ x_7 - x_1 - d_7^+ + d_7^- &= y_7, \\ y_7 - e_7^+ + e_7^- &= -60 - 14(1 - \alpha_7), \\ -60 - 14(1 - \alpha_7) &\leq y_7 \leq -22 + 30(1 - \alpha_7), \\ -5x_1 + 2x_7 &\leq 7 \\ -x_1 + 3x_7 &\leq 30 \\ x_1 + x_7 &\leq 90 \\ 5x_1 - x_7 &\leq 390 \\ -4x_1 + 79x_7 &\geq 79 \\ x_1 \geq 0, x_7 \geq 0, d_1^+ \geq 0, d_1^- \geq 0, e_1^+ \geq 0, e_1^- \geq 0, d_7^+ \geq 0, d_7^- \geq 0, e_7^+ \geq 0, e_7^- \geq 0, & \quad (33) \\ 0 \leq \alpha_1 \leq 1, 0 \leq \alpha_7 \leq 1, & \end{aligned}$$

باحل مساله بالا با کمک نرم افزار جواب بهینه به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{aligned} d_1^+ = 0, d_1^- = 0, e_1^+ = 0, e_1^- = 0, d_7^+ = 0, d_7^- = 14, e_7^+ = 70/26667, e_7^- = 0, x_1 = 36, x_7 = 22, y_1 = 80, \alpha_1 = 1 \\ y_7 = 0, \alpha_7 = 0/26667, G_1 = 80, G_7 = -14 \end{aligned}$$

تذکر ۲۱- از جواب به دست آمده نتایج زیر حاصل می شود:

۱- برای آرمان اول، مقدار سطح آرزو برابر با ۸۰ و برای آرمان دوم، مقدار سطح آرزو برابر با ۰ در نظر گرفته شده است.

۲- مقدار آرمان اول برابر با ۸۰ و مقدار آرمان دوم برابر با ۱۴- به دست آمده است.

۳- هیچ گونه تخطی برای آرمان اول انجام نگرفته است ولی برای آرمان دوم، تخطی انجام گرفته است.

تذکر ۲۲- اگر در مساله (۳۳) تابع هدف رابه صورت زیر تغییر دهیم

$$\begin{aligned} \min Z &= -d_1^+ + d_1^- - e_1^- + e_1^+ + d_7^+ - d_7^- + e_7^+ - e_7^- \\ \text{جواب بهینه مساله (۳۳) به صورت زیر تغییر می کند} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1^+ = 78, d_1^- = 0, e_1^+ = 0, e_1^- = 58, d_7^+ = 0, d_7^- = 70, e_7^+ = 70/26667, e_7^- = 0, x_1 = 80, x_7 = 10, y_1 = 22, \alpha_1 = 1 \\ \alpha_7 = 0/26667, y_7 = 0, G_1 = 100, G_7 = -70. \end{aligned}$$

ملاحظه می شود که در تذکر ۲۲ با تغییر ضرایب (وزن های) متغیرهای انحراف مثبت و منفی مساله (۳۳) در تابع هدف، مقدار بهینه هر یک از آرمان های مساله بهتر شده است.

۵ نتیجه‌گیری و پیشنهاد

از آنجایی که ممکن است در مسایل برنامه‌ریزی چندهدفه خطی با اهدافی روبه‌رو شویم که برای هر یک از آن‌ها چند سطح آرزو (مقدار مورد انتظار) در نظر گرفته می‌شود، لذا بحث برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی مورد توجه قرار می‌گیرد. و اگر سطح آرزوی آرمان‌ها بازه بسته باشد بحث برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده مطرح می‌شود. گاهی اوقات، در دنیای واقعی با مسایلی روبه‌رو هستیم که اهداف آن‌ها یا مجموعه قیود آن‌ها از نوع فازی انعطاف‌پذیر می‌باشد. در این مقاله، دو مدل جدید از برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده فازی انعطاف‌پذیر تحت عنوان‌های برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده با مجموعه قیود فازی انعطاف‌پذیر و برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده با آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر ارائه نموده‌ایم و با در نظر گرفتن حداقل درجه عضویت و میزان تخطی برای قیدهای فازی انعطاف‌پذیر و آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر، یک مدل برنامه‌ریزی آرمانی خطی چندپارامتری برای آن‌ها به دست آوردیم. از ویژگی‌های مدل به دست آمده این است که شامل متغیرهای دودویی نمی‌باشد. برای نشان دادن کارآمدی مدل‌ها و روش‌های پیشنهادشده برای برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده فازی انعطاف‌پذیر، دو مثال عددی ارائه شده است.

قابل ذکر است برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده با مجموعه قیود فازی انعطاف‌پذیر و برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده با مجموعه آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر ابزارهای توانمندی برای تحلیل حساسیت در بحث برنامه‌ریزی آرمانی خواهند بود.

منابع

- [1] ناصری، س. ه. و باوندی، س. ا.، ارائه مدلی برای حل مسایل برنامه‌ریزی تصادفی چند هدفه با استفاده از تابع عضویت هذلولوی، مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال چهارم، شماره چهارم (پیاپی ۵۵) زمستان ۹۶، صص ۳۳-۲۱.
- [2] شعبانی، آ.، توکل‌ی مقدم، ر. و حاجی آقایی کشتلی، م.، حل مساله حمل و نقل با هزینه ثابت تحت شرایط فازی با استفاده از الگوریتم فرا ابتکاری به همراه یک روش جدید نمایش جواب، مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال پانزدهم، شماره چهارم (پیاپی ۵۸) زمستان ۹۷، صص ۳۵-۱۵.
- [3] Charnes, A., Cooper, w.w., (1959), constraint programming, *Management science* 6, 73-79.
- [4] Lee, S.M., (1972), *Goal programming for Decision Analysis*, Auerback, Philadelphia, Auerbach.
- [5] Ignizio, J.P., (1984), Linear programming in single-and multiple –objective systems, *journal of policy Analysis and Management* 3(3), 477-489.
- [6] Tamiz, M., Jones, D., Romero, C., (1998), Goal programming for Decision making: an overview of the current state –of- the- art. *European journal of operation research* 111,567-581.
- [7] Romero, C., (2001), Extended lexicographic goal programming: a unifying approach, *omega* 29,63-71.
- [8] Li, H-L., (1996), An efficient method for solving linear goal programming problem, *Journal of optimization Theory and application*, 90,465-469.
- [9] change C-T., (2004), On the mixed binary goal programming problems, *Applied mathematics and computation*, 159,759-768.
- [10] Pal, BB., Motiram, BN., Maulik, U., (2003), A goal programming procedure for fuzzy multi-objective linear fractional programming problem, *Fuzzy set and system* 139,395-405.
- [11] charnge, A., Colombo, B., (1972) Optimal stabilization policy: linear goal-interval programming models, *socio-Eco plan science*, 6,431-435.
- [12] Jones, DF., Tamiz., (1995), Expanding the flexibility of goal programming via preference modeling technique, *omega* 23,41-48.

- [13] Vitoria no, B., Romero, C., (1999), Extended interval goal programming, journal of operation society,50,1280-1283.
- [14] change C-T., (2005), Mixed Binary interval goal programming, journal of operation society,50,1280-1283.
- [15] Zimmerman, HJ., Fuzzy programming and linear programming with several objective function, Fuzzy set and system,1,45-55.
- [16]. Chang, C.-T., (2007). Multi -choice goal programming. Omega. The International Journal of Management Science, 35: 389-396.
- [17]. Chang, C.-T. (2008). Revised multi-choice goal programming. Applied Mathematical Modelling, 32: 2587-2595.
- [18] Biswal, M.P., Acharya, S., (2009), Transformation of multi-choice linear programming problem, Applied Mathematical and computation, 210,182-188.
- [19] Liao, C.N., (2009), Formulating the multi-segment goal programming, Computer Industrial Engineering, 56,138-141.
- [20] Biswal, M.P., Acharya, S., (2011), Solving Multi-choice linear programming problems by interpolating polynomials, Mathematical computer Modelling,54,1405-1412.
- [21] Chang, C-T., (2011), Multi-choice goal programming with utility functions, European journal of operational Research 215,439-445.
- [22] Chang, T.C., Chen, M.-H., Zhuang, Y.Z., (2012), Multi-coefficient goal programming, Computer Industrial Engineering, 62,616-623.
- [23] Chang, T.C., Chen, M.-H., Zhuang, Y.Z., (2012), Revised multi-segment goal programming: present age goal programming, Computer Industrial Engineering, 63,1235-1242.
- [24] Ustun, ozden., (2012), Multi -choice goal programming formulation based on the conic secularization Applied Mathematical Modelling, 36,974-988.
- [25] Mahapatra, R.D., Roy, K.S., Biswal, P.M., (2013), Multi-choice stochastic transportation problem involving extreme value distribution, Applied Mathematical Modelling,37,2230-2240.
- [26] Panda, A., Das, B.C., (2014), Multi-choice linear programming for matrix gams, Applied Mathematical Modelling, 237,411-418.
- [27] Patro, K., Acharya, M.M., Biswal, M.P., Acharya, S., (2015), Computation a Multi -choice goal programming, Applied Mathematical and computation, 271,489-501.
- [28] Chang, T.C., (2015), Multi-choice goal programming modelling Applied Mathematical and computation, 271,489-501.
- [29] Tabrizi, B.B., Shahanaghi, K. and Jabalameli, M.S. (2012). Fuzzy multi-choice goal programming. Applied Mathematical Modelling, 36, 1415-1420.
- [30] Neha Gupta, Abdul Bari (2014). Multi-Choice Goal Programming with Trapezoidal Fuzzy Numbers. International Journal of Operations Research Vol. 11, No. 3, 082-090.