مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال شانزدهم، شماره چهارم (پیاپی ۶۳)، زمستان ۹۸، ص ص ۱۴-۱
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

یک روش کارآمد برای انتخاب مسیر قابل اعتماد مقید در شرایط عدم قطعیت

سجاد مرادی[۱*]، غلامرضا کرمعلی[۲]
۱- دکتری تحقیق در عملیات، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، مهرآباد جنوبی، تهران، ایران
۲- استادیار دانشکده علوم پایه، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، مهرآباد جنوبی، تهران، ایران

رسید مقاله: ۱۹ فروردین ۱۳۹۸
پذیرش مقاله: ۲۱ مهر ۱۳۹۸

چکیده
در یک شبکه خطوط مواصلاتی که احتمال مسدود شدن برخی از مسیرها وجود دارد انتخاب یک مسیر قابل اعتماد، به این معنا که احتمال برقراری آن بسیار بالا باشد، یک مساله مهم و کاربردی است. اهمیت و ضرورت این مساله در شرایط بحرانی مانند حوادث طبیعی، سیل و زلزله بسیار پررنگ است. در مساله مسیر قابل اعتماد برقراری یا مسدود شدن هر یک از راه‌های مواصلاتی روی یک شبکه در شرایط بحرانی، یک پارامتر غیر قطعی است که احتمال آن تخمین زده می‌شود و بین همه مسیرهایی که دو نقطه مشخص را به هم متصل می‌کنند، مسیری که بیش‌ترین احتمال برقراری یا بقا را دارد، برگزیده می‌شود. از آن‌جا که تصمیم‌گیری درباره انتخاب مسیرها وابسته به عوامل دیگری مانند مسافت، هزینه یا مدت زمان طی مسیر نیز می‌باشد، هر کدام از این شاخص‌ها را می‌توان در قالب قیودی به مساله اضافه کرد. برای مدل‌سازی مساله ابتدا با در نظر گرفتن احتمال بقای هر کمان مسیر قابل اعتماد به این صورت تعریف می‌شود که حاصل‌ضرب احتمال بقای کمان‌های آن بیشینه و تا حد امکان به یک نزدیک باشد. سپس برای خطی‌سازی حاصل‌ضرب احتمالات از تابع لگاریتم استفاده شده و مدل مساله به فرم مدل کوتاه‌ترین مسیر مقید تبدیل می‌شود. در انتها برای حل مدل ارایه شده الگوریتمی ارایه شده است که در هر تکرار با استفاده از برش‌های منطقی، مسیرهای غیر بهینه به دست آمده، حذف و به جواب بهین نزدیک‌تر می‌شود. نتایج حاصل از پیاده‌سازی این روش روی شبکه‌های مختلف با ساختار و اندازه‌های متفاوت نشان می‌دهد که الگوریتم ارایه شده قادر است در مدت زمان کمی به مسیری دست یابد که با احتمال بالایی می‌توان انتظار داشت که در شرایط بحرانی برقرار می‌ماند و مسافت آن از حد تعیین شده بیش‌تر نیست.

کلمات کلیدی: شبکه، مسیر قابل اعتماد، مسیرمقید، برش‌های منطقی، عدم قطعیت.

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی:sajadmoradi@aut.ac.ir

۱ مقدمه

مساله انتخاب مسیر بین دو نقطه مشخص روی یک شبکه از خطوط مواصلاتی، یک مساله مهم و کاربردی است که به شکل‌های مختلف در زمینه‌هایی مانند حمل‌ونقل و کنترل پروژه به‌کار گرفته می‌شود. تصمیم‌گیری درخصوص انتخاب این مسیر وابسته به شاخص‌های مختلفی از جمله مسافت، هزینه و مدت زمان طی مسیر است که به کمک مدل‌سازی ریاضی و در نظر گرفتن یک یا چند شاخص می‌توان مسیر بهینه مساله را تعیین کرد. در یک شبکه مواصلاتی مجموعه‌ای از نقاط وجود دارد که به‌وسیله کمان‌هایی به هم متصل می‌شوند. هر کدام از این کمان‌ها هزینه یا طول مشخصی دارند و معمولا یافتن کوتاه‌ترین یا کم‌هزینه‌ترین مسیر بین دو نقطه مشخص، مورد توجه قرار می‌گیرد. اگر تنها شاخص مسافت مدنظر قرار گیرد، مساله کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه شکل خواهد گرفت که روش‌های حل بسیاری با پیچیدگی زمانی چند جمله‌ای برای آن ارایه شده است [۱]. نتایج حاصل از پیاده‌سازی نمونه‌های مختلف الگوریتم‌های موجود برای مساله کوتاه‌ترین مسیر بر روی شبکه‌های مختلف به‌وسیله چرکاسکی و همکاران [۲] و هم‌چنین ژان و نون [۳] در مطالعات جداگانه‌ای گزارش شده است. علاوه بر روش‌های ترکیباتی، برخی از محققین از روش سیمپلکس نیز برای حل این مساله استفاده کرده‌اند. برای مثال نودا و مارتین [۴] یک روش سیمپلکس اصلاح شده کارآمد با مرتبه چندجمله‌ای برای مساله کوتاه‌ترین مسیر ارایه دادند.

با در نظرگرفتن هم‌زمان شاخص‌های مختلفی مانند مسافت، هزینه یا زمان در مسیریابی، مساله کوتاه‌ترین مسیر کلاسیک به مسایل پیچیده‌تری گسترش داده می‌شود که به واقعیت نزدیک‌تر هستند. یک صورت گسترش یافته از مساله کوتاه‌ترین مسیر می‌تواند با این شرط باشد که برای هزینه یا زمان طی مسیر سقفی قرار داده شود و کوتاه‌ترین مسیری که از آن سقف تجاوز نکند انتخاب گردد. اضافه کردن این محدودیت‌های جدید به مدل ریاضی مساله کوتاه‌ترین مسیر آن را به مساله کوتاه‌ترین مسیر مقید تبدیل می‌کند و باعث می‌شود که پیچیدگی زمانی و محاسباتی مساله مقید بالا رفته و به کلاس مسایل Non-deterministic polynomial-time hard (NP-hard) تعلق گیرد [۵]. از کاربردهای این مساله می‌توان به انتخاب بهترین مسیر برای حرکت نیروها در صحنه نبرد اشاره کرد که در این زمینه می‌توان به کار مورا و همکاران [۶] اشاره کرد که با تعریف یک مساله چندهدفه به ارایه یک روش ابتکاری غیردقیق برای مساله مسیریابی نیروهای نظامی پرداختند که در آن شاخص‌های سرعت و امنیت مسیر مورد توجه قرار گرفته است. کاربرد دیگری از این مساله را می‌توان در مساله کنترل پروژه‌های عمرانی با در نظر گرفتن سقف بودجه مشاهده کرد [۷].

پوگلیس و گریرو [۸] در مطالعه‌ای مروری، به بررسی روش‌ها و الگوریتم‌های دقیق ارایه شده برای حل مساله مسیریابی مقید پرداختند. در این مطالعات سه راه‌کار برای دستیابی به مسیر بهین ارایه شد که در هر یک از آن‌ها، از یک یا چند مورد از این راه‌کارها به‌صورت هم‌زمان استفاده شده است. این راه‌کارها عبارتند از: الف) کوچک‌سازی شبکه مورد نظر با حذف کمان‌هایی که با اطمینان می‌توان گفت بر روی مسیر بهینه قرار ندارند ب) استفاده از روش آزادسازی لاگرانژ که در آن قید ظرفیت با در نظر گرفتن جریمه به تابع هدف منتقل شده و مساله به مساله کوتاه‌ترین مسیر تبدیل می‌شود و در آن ضرایب تابع هدف ترکیبی از همه پارامترهای مساله است ج)

استفاده از روش‌های مختلف برای از بین بردن گپ موجود بین جواب حاصل از مدل آزادسازی شده و جواب بهین. مهم‌ترین مطالعات موجود که در مطالعه آن‌ها به آن اشاره شده است عبارتند از: مطالعات آولا و همکاران [۹] هندلر و ژانگ [۱۰]، کارلایل و همکاران [۱۱]. آولا و همکاران [۹] به گسترش‌های متفاوت از مساله کوتاه‌ترین مسیر برای مدیریت ناوگان حمل و نقل پرداختند و برای حل آن از روش شاخه و برش استفاده کردند. هندلر و ژانگ [۱۰] با استفاده از دوگان مساله، روش آزادسازی لاگرانژ و به‌کارگیری الگوریتم k-امین مسیر کوتاه، یک روش حل برای این مساله ارایه دادند. در روش آزادسازی لاگرانژ محدودیت مربوط به قید ظرفیت، با در نظر گرفتن جریمه، به تابع هدف منتقل و به مساله کوتاه‌ترین مسیر تبدیل می‌شود که در آن ضرایب تابع هدف ترکیبی از دو پارامتر در نظر گرفته شده است. کارلایل و همکاران [۱۱] نیز با استفاده از روش آزادسازی لاگرانژ و در نظر گرفتن یک مقدار جریمه اولیه، یک جواب شدنی به‌دست آورده و با استفاده از یک روش پیش پردازشی به مسیر بهینه دست یافتند. هم‌چنین لوزانو و مداگلیا [۱۲] با استفاده از روش تولید ستون یک روش حل دقیق برای این مساله ارایه و کاربرد آن را بر روی چند مساله واقعی مانند زمان‌بندی مورد بررسی قرار دادند.

در همه مطالعات اشاره شده در بالا فرض قطعیت برای همه پارامترهای مساله در نظر گرفته شده است؛ این در حالی است که مقدار پارامترهای مساله یا تعداد کمان‌های در دسترس وابسته به عوامل مختلفی هستند که با گذر زمان تغییر می‌کنند. با تغییر پارامترهای مساله مشخصات مسیرهای موجود نیز تغییر می‌کند و در این شرایط نمی‌توان به بهینگی مسیری که با فرض قطعیت داده‌ها به‌دست آمده است، اعتماد کرد. ضرورت توجه به عدم قطعیت داده‌ها در شرایط بحرانی مانند حوادث طبیعی بیش از پیش قابل دفاع می‌باشد؛ زیرا در این شرایط هزینه و مدت زمان عبور از برخی از مسیرها افزایش می‌یابد و حتی برخی از راه‌های ارتباطی مسدود می‌شوند. در چنین شرایطی استفاده از مسیرهایی که احتمال تغییر شرایط آن‌ها کم‌تر است عاقلانه‌تر به نظر می‌رسد. برای مواجهه با شرایط عدم قطعیت در مسایل واقعی دو رویکرد کلی وجود دارد که عبارتند از: برخورد واکنشی و برخورد پیش کنشی. در برخورد واکنشی مدل مساله با فرض شرایط قطعیت داده‌ها حل شده و پس از مشخص شدن مقدار واقعی پارامترها، دستیابی به جوابی که هم با داده‌های جدید تطابق داشته باشد و هم کم‌ترین تغییر را نسبت به جواب قبلی دارا باشد، مدنظر قرار می‌گیرد [۱۳]. در برخورد پیش‌کنشی سعی بر آن است که شرایط عدم قطعیت در مدل ریاضی مساله به‌صورت مستقیم وارد شود. برای این کار روش‌های مختلفی ارایه شده است که می‌توان به مدل‌های احتمالی، بازه‌ای، فازی، استوار و غیره اشاره کرد [۱۴]. برای مساله کوتاه‌ترین مسیر نیز شرایط عدم قطعیت در برخی مدل‌های پیش‌کنشی لحاظ شده است که از جمله این پژوهش‌ها می‌توان به مقالات برتسیماس و سیم [۱۵] و مونته‌مانی و گامبادرلا [۱۶] اشاره کرد که پارامترهای هزینه در تابع هدف را به‌صورت بازه‌ای در نظر گرفته و به‌طور جداگانه دو شکل استوار از مساله کوتاه‌ترین مسیر ارایه دادند. شن و همکاران [۱۷] پارامتر مدت زمان را به‌صورت متغیر تصادفی در نظر گرفتند و میانگین مدت زمان مورد انتظار طی مسیر تحت همه سناریوها را حداقل کردند. هم‌چنین با استفاده از یک روش ابتکاری بر اساس k-امین مسیر کوتاه به حل مساله پرداختند.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.4.7.2]

یک پدیده غیرقطعی که در مساله مسیریابی وجود دارد برقراری یا انسداد برخی از کمان‌های شبکه در شرایط مختلف است. اگر حتی یکی از کمان‌های یک مسیر مشخص شده به هر دلیلی مسدود شود امکان عبور جریان روی مسیر وجود نخواهد داشت. برقراری یا انسداد راه‌های ارتباطی روی شبکه، پارامتری غیرقطعی است که می‌توان احتمال آن‌را تخمین زد. به‌دست آوردن مسیری که کم‌ترین احتمال انسداد را دارد یک مسیر قابل اعتماد خواهد بود که در شرایط بحرانی می‌توان با اطمینان بالایی از آن استفاده کرد. از طرفی ممکن است مسیری کم‌ترین احتمال انسداد را داشته باشد؛ اما هزینه استفاده از آن یا مدت زمان طی مسیر در آن زیاد باشد که سبب می‌شود عملا نتوان از چنین مسیری استفاده کرد؛ بنابراین باید مسیر قابل اعتماد به‌صورت مقید انتخاب شود به‌طوری‌که هزینه یا زمان طی مسیرها از سقف مجاز تعیین شده عبور نکند. مساله کوتاه‌ترین مسیر مقید؛ حتی در حالت قطعیت داده‌ها یک مساله با پیچیدگی بالاست که حل آن نیازمند الگوریتم‌های کارآمدی است. یکی از روش‌های برخورد با مسایل برنامه‌ریزی عدد صحیح که مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است، استفاده از برش‌های منطقی است که در این زمینه می‌توان به کارهای ورستیکل و همکاران [۱۸] و چن و همکاران [۱۹] اشاره کرد. در این روش با در نظر گرفتن این‌که متغیرهای دودویی فقط دو مقدار صفر یا یک اختیار می‌کنند و نیز شرایط منطقی حاکم بر مساله مورد مطالعه، قیود جدیدی به مدل اضافه می‌شوند که بدون حذف جواب بهین مساله، یک یا چند جواب غیر بهینه از فضای مساله حذف شده و جواب بهین بسیار سریع‌تر به‌دست می‌آید. در این مقاله ابتدا به مدل‌سازی مساله قابل اعتمادترین مسیر مقید در شرایط عدم قطعیت برقراری کمان‌های شبکه می‌پردازیم و مساله را در قالب کوتاه‌ترین مسیر مقید مدل‌سازی کرده و سپس الگوریتمی برای حل این مدل ارایه می‌کنیم. در این الگوریتم با توجه به شرایط حاکم بر مساله، در هر تکرار یک قید منطقی به مساله اضافه شده و برخی از مسیرهای غیر بهینه را حذف می‌کنیم و به جواب بهین نزدیک‌تر می‌شویم.

۲ تعریف مساله و مدل‌سازی

فرض کنید مجموعه V شامل چند نقطه (گره) و A مجموعه کمان‌های متصل به گره‌ها تشکیل شبکه‌ای مانند $N=(V,A)$ می‌دهند. برای هر کمان احتمال برقراری یا بقا تخمین زده شده و پارامتری مانند مسافت با مقداری مشخص تعریف شده است. هدف پیدا کردن مسیری است که با بیش‌ترین احتمال برقراری، مبدا را به مقصد وصل کند و در عین حال مسافت آن از سقف تعیین شده λ تجاوز نکند. از اندیس‌های i و j برای نشان دادن گره‌ها استفاده می‌شود و پارامترهای مساله را که به صورت احتمال برقراری و طول کمان (i,j) تعریف شده‌اند را به ترتیب با p_{ij} و d_{ij} نشان می‌دهیم. هم‌چنین برای هر کمان (i,j) متغیر دودویی x_{ij}، مقدار ۱ اختیار می‌کند اگر کمان (i,j) روی مسیر انتخابی قرار گیرد و در غیر این‌صورت مقدار آن صفر است. محدودیت‌های حاکم بر این مساله، که باید به مدل‌سازی ریاضی آن ها بپردازیم عبارتند از: از نقطه ابتدایی مسیر $(i=1)$ یک کمان به سمت یکی از گره‌های مجاورش خارج می‌شود. یک کمان ورودی به نقطه مقصد $(i=n)$ انتخاب می‌شود. اگر i گره‌ای غیر از مبدا و مقصد باشد و یکی از کمان‌های ورودی آن روی مسیر انتخابی باشد، برای حفظ جریان باید یکی از کمان‌های خروجی آن نیز انتخاب شود. مسافت مسیر نباید از مقدار مشخص شده λ تجاوز کند.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.4.7.2]

هدف مساله یافتن مسیری است که بیش‌ترین احتمال برقراری یا زنده ماندن را دارد. با در نظر گرفتن شبکه $N=(V,A)$ و نمادهای تعریف شده، محدودیت‌های مساله به شکل زیر مدل‌سازی می‌شوند:

$$\sum_{j|(1,j)\in A} x_{1j}-\sum_{j|(j,1)\in A} x_{j1}=1 \tag{1}$$

$$\sum_{j|(j,n)\in A} x_{jn}-\sum_{j|(n,j)\in A} x_{nj}=1 \tag{2}$$

$$\sum_{i|(i,j)\in A} x_{ij}=\sum_{k|(j,k)\in A} x_{jk} \qquad \forall j\in V-\{1,n\} \tag{3}$$

$$\sum_{(i,j)\in A} d_{ij}x_{ij}\le \lambda \tag{4}$$

$$x_{ij}\in\{0,1\} \qquad \forall (i,j)\in A \tag{5}$$

فرض کنید احتمال برقراری کمان (i,j) در شرایط بحرانی برابر با $0\le p_{ij}\le 1$ است. اگر مسیری احتمال برقراری همه کمان‌هایش برابر با ۱ باشد مطمئن‌ترین مسیر خواهد بود و در این حالت حاصل‌ضرب احتمالات بقای کمان‌های این مسیر ۱ خواهد بود. بین دو مسیر مختلف از مبدا تا مقصد، مسیری که حاصل‌ضرب احتمالات بقای کمان‌های آن به ۱ نزدیک‌تر باشد قابل اطمینان‌تر خواهد بود [۲۰] و می‌گوییم مسیر P از همه مسیرهای دیگر قابل اطمینان‌تر است اگر حاصل‌ضرب احتمالات مربوط به کمان‌های آن از بقیه مسیرها بیش‌تر باشد؛ یعنی مسیری که مقدار $\mathrm{Prod}(P)=\prod_{(i,j)\in P} p_{ij}$ برای آن از همه مسیرهای دیگر بیش‌تر باشد؛ بنابراین تابع هدف مساله به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\max \prod_{(i,j)\in A} p_{ij}x_{ij} \tag{6}$$

این تابع غیرخطی با استفاده از خواص تابع لگاریتم خطی‌سازی شده و مساله به فرم کوتاه‌ترین مسیر مقید نوشته می‌شود. فرض کنید P مسیری شامل کمان‌های $(1,i_1),(i_1,i_2),\dots,(i_k,n)$ از مبدا تا مقصد باشد که احتمال برقراری این کمان‌ها به ترتیب $p_1,p_2,\dots,p_k$ باشد. ماکزیمم‌سازی حاصل‌ضرب p_i ها با ماکزیمم‌سازی لگاریتم حاصل‌ضرب p_i ها معادل است و $\log(\prod_{l=1}^{k} p_l)=\sum_{l=1}^{k}\log(p_l)$ پس ماکزیمم‌سازی $\log(\prod_{l=1}^{k} p_l)$ با مینیمم‌سازی $\sum_{l=1}^{k}-(\log(p_l))$ معادل است در نتیجه با قرار دادن تابع هدف مساله به‌صورت:

$$\min \sum_{(i,j)\in A} -(\log(p_{ij}))x_{ij} \tag{7}$$

و در نظر گرفتن محدودیت‌های (۱)-(۵) مساله مطمئن‌ترین مسیر مقید به فرم مساله کوتاه‌ترین مسیر مقید مدل‌سازی می‌شود و آن‌را با CRP نشان می‌دهیم. اگر شرط (۵) از این مساله حذف شود، با توجه به قیود (۱)-(۳)، خروجی مدل آزاد شده ($RCRP$) به‌گونه‌ای است که یک واحد جریان از مبدا خارج شده و روی یک یا چند مسیر مختلف تقسیم می‌شود. اگر P مسیری از مبدا به مقصد باشد مقدار تابع هدف متناظر با آن را هزینه طی

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.4.7.2]

مسیر در نظر می‌گیریم و با C(P) نمایش و مسافت آن‌را نیز با D(P) نشان می‌دهیم. مسیر P یک مسیر شدنی برای مساله مطمئن‌ترین مسیر مقید است اگر $D(P) = \sum_{(i,j)\in P} d_{ij} \le \lambda$.

۳ ارایه الگوریتمی برای حل مساله

در این مقاله ابتدا یک جواب شدنی برای مساله پیدا می‌کنیم، سپس با استفاده از برش‌هایی که به مدل اضافه می‌شود، مسیرهای دیده شده راحذف می‌کنیم تا به مسیرهای بهتری برسیم. بدین منظور، ابتدا مدل $RCRP$ حل می‌شود؛ اگر جواب به‌دست آمده صحیح باشد که جواب بهین به‌دست آمده است، در غیر این‌صورت مقدار تابع هدف کران پایینی برای جواب مساله CRP است و خروجی این مدل دو یا چند مسیر خواهد بود که از هر مسیر جریانی بین صفر و یک می‌گذرد. فرض کنید یک واحد جریان از مبدا خارج می‌شود و روی m مسیر $P_۱, P_۲, ..., P_m$ به مقصد می‌رسد. اگر روی مسیر P_l جریانی به اندازه $۰ < \alpha_l < ۱$ عبور کند، آنگاه:

$$D(P_l) = \sum_{(i,j)\in P_l} d_{ij} x_{ij} = \sum_{(i,j)\in P_l} \alpha_l d_{ij} \tag{۸}$$

$$\sum_{l=۱}^{m} D(P_l) = \sum_{l=۱}^{m} \Big(\sum_{(i,j)\in P_l} \alpha_l d_{ij} \Big) \le \lambda \tag{۹}$$

$$\sum_{l=۱}^{m} \alpha_l = ۱ \tag{۱۰}$$

با توجه به نامعادلات (۴) و (۹) حداقل یکی از مسیرهایی که در جواب غیر صحیح به‌دست می‌آید یک مسیر شدنی و مقدار تابع هدف متناظر آن یک کران بالا برای جواب مساله CRP خواهد بود. چنین مسیری می‌تواند کاندیدای جواب بهین مساله باشد تا زمانی که جواب شدنی بهتری به‌دست آید. با اضافه کردن یک برش مناسب می‌توان جواب فعلی را از فضای شدنی $RCRP$ حذف کرد تا مسیر یا مسیرهای جدیدی حاصل شود که ممکن است یکی از آن‌ها مسیر شدنی بهتری باشد و جایگزین کاندیدای جواب بهین شود. اضافه کردن برش به مساله باید به‌گونه‌ای باشد که بدون نادیده گرفتن جواب بهین CRP، جواب فعلی را حذف کند. با اضافه کردن چنین برشی به مدل، جواب فعلی نشدنی خواهد بود و می‌توان با به‌کارگیری روش سیمپلکس دوگان و با استفاده از جدول بهینه قبلی، جواب جدیدی به‌دست آورد. برش منطقی اضافه شده باعث محدودتر شدن فضای شدنی و در نتیجه رشد مقدار تابع هدف مدل آزاد شده می‌شود. محدود کردن فضای شدنی تا زمانی ادامه می‌یابد که مقدار تابع هدف مدل آزاد شده که کران پایین جواب مساله اصلی است به کران بالای ذخیره شده برسد. در این حالت جواب بهین مساله CRP همان کران بالای ذخیره شده می‌باشد. $\{y^{*}_{i,j}\}$

اگر به مجموعه متغیرهای دودویی یک مساله، دنباله‌ای با مقادیر صفر یا یک متناظر شود یک جواب به‌دست می‌آید که ممکن است نشدنی یا غیر بهینه باشد. یک برش منطقی به این دلیل اضافه می‌شود که اگر در یک مدل دودویی جواب غیربهینه‌ای ایجاد شده بتوان آن‌را از فضای شدنی حذف کرد بدون اینکه جواب بهینه اصلی حذف شود. فرض کنید در یک مدل دودویی دنباله $\{y^{'}_{i,j}\}$ به مجموعه متغیرهای دودویی $y_{i,j}$ مساله

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.4.7.2]

متناظر شده است. شکل کلی یک برش منطقی که باعث حذف چنین دنباله‌ای از فضای شدنی می‌شود به فرم زیر است:

$$\sum_{(i,j)|y^*_{i,j}=0} y_{i,j} + \sum_{(i,j)|y^*_{i,j}=1} (1-y_{i,j}) \geq 1 \qquad (11)$$

با اضافه کردن این قید به مدل حداقل یکی از متغیرهایی که مقدار آن در دنباله $\{y^*_{i,j}\}$ صفر بوده، باید مقدار یک اختیار کند یا یکی از متغیرهایی که مقدار یک داشته، باید صفر شود؛ لذا جواب جدید غیر از دنباله $\{y^*_{i,j}\}$ خواهد بود. چنین برشی فقط یک جواب را از فضای شدنی مساله حذف می‌کند؛ اما همان‌طور که در کارهای [۱۶] و [۱۷] اشاره شده است هرچه مجموعه اندیس‌هایی که در این قید به کار رفته کوچک‌تر باشد، برش قوی‌تری حاصل می‌شود و می‌تواند تعداد جواب‌های غیر بهین بیش‌تری را حذف کند. هم‌چنین با توجه به شرایط مساله ممکن است نیازی به نوشتن هر دو جمله نامعادله (۱۱) نباشد. در مساله مسیریابی هر مسیر P از مبدا تا مقصد را می‌توان با دنباله $\{x^P_{i,j}\}$ معرفی کرد که در آن به هر کمان روی مسیر مقدار ۱ و به بقیه کمان‌ها مقدار صفر نظیر می‌شود. فرم کلی برش منطقی برای حذف چنین دنباله‌ای از فضای شدنی به شکل زیر است:

$$\sum_{(i,j)|x^P_{i,j}=0} x_{i,j} + \sum_{(i,j)|x^P_{i,j}=1} (1-x_{i,j}) \geq 1 \qquad (12)$$

اگر کمانی که روی مسیر P نیست مقدار ۱ بگیرد آن‌گاه مسیر P تولید نخواهد شد و با توجه به قیود (۱)-(۳) حتما یکی از کمان‌های مسیر P مقدار صفر می‌گیرد؛ بنابراین می‌توان جمله دوم برش (۱۲) را حذف کرد و آن‌را به شکل زیر نوشت:

$$\sum_{(i,j)|x^P_{i,j}=0} x_{i,j} \geq 1 \qquad (13)$$

با وجود این اگر بتوان مجموعه اندیس‌های این برش را کوچک‌تر کرد می‌توان برش قوی‌تری به‌دست آورد. برش‌های منطقی دو مشخصه دارند: اول اینکه جواب فعلی را حذف و دوم اینکه جواب بهین را حفظ می‌کنند. برای ایجاد برش منطقی پیشنهادی در این مقاله به نکاتی که در ادامه می‌آید باید توجه کرد.

فرض کنید با حل مدل $RCRP$ جواب غیرصحیحی به‌صورت ترکیبی از مسیرهای $P_1, P_2, ..., P_m$ به‌دست آید. حال می‌خواهیم با حذف آن‌ها به مسیرهای دیگری برسیم؛ بنابراین ابتدا مجموعه همه گره‌ها و کمان‌های روی این مسیرها را ذخیره و مشخصات همه مسیرهای فعلی شامل مسافت و مقدار تابع هدف متناظر آن‌ها را بررسی می‌کنیم و پس از به‌روزرسانی کران بالا، با اضافه کردن یک برش منطقی جواب فعلی را حذف کرده، به جواب جدیدی می‌رسیم. در جواب جدید یک یا چند کمان جدید مقدار غیر صفر می‌گیرند. با دنبال کردن کمان‌های جدید، مسیرهای جدیدی از مبدا تا مقصد به‌دست می‌آید و یا این‌که روی برخی از مسیرهای قبلی انشعاب به‌وجود می‌آید و با هر انشعابی که به‌وجود آید یک انتخاب برای تولید مسیر وجود دارد و ممکن است مسیر جدیدی به مجموعه مسیرهای قبلی اضافه شود. اگر کران بالا از کران پایین به‌دست آمده بزرگ‌تر باشد شرط توقف برقرار نشده است و باید با ایجاد برش جدیدی این روند را ادامه داد.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.4.7.2]

در تولید برش منطقی به این نکته توجه می‌کنیم که حداقل یک متغیر که قبلا صفر بوده است باید مقدار بگیرد؛ به عبارت دیگر حداقل یک کمان جدید با جریان غیرصفر باید در جواب جدید انتخاب شود. فرض کنید Q مجموعه کمان‌هایی باشند که تاکنون در جواب‌های به‌دست آمده مقدار غیرصفر داشته‌اند و O مجموعه گره‌های روی این کمان‌ها باشد، برش منطقی پیشنهادی به‌صورت زیر است:

$$\sum_{i \in O} \sum_{j|(i,j) \notin Q} x_{i,j} \geq ۱ \qquad (۱۴)$$

این برش به این معنا است که از یکی از گره‌هایی که قبلا در جواب‌های به‌دست آمده مشاهده شده‌اند باید یک کمان جدید خارج شود.

اعتبار یک برش منطقی با داشتن دو مشخصه قابل اثبات است: دنباله جواب فعلی را حذف کند و هم‌چنین باعث نادیده گرفتن جواب بهین مساله نشود. با اضافه کردن قید (۱۴)، یک کمان جدید مقدار غیرصفر می‌گیرد پس جواب فعلی حتما حذف می‌شود. حال به اثبات مشخصه دوم می‌پردازیم. در تکرار اول، مدل $RCRP$ بدون برش منطقی اجرا شده و m مسیر مختلف از مبدا به مقصد مشخص می‌شود؛ اگر یکی از این مسیرها جواب بهین مساله CRP باشد مشخصات آن به‌عنوان کاندیدای جواب بهین ذخیره می‌شود؛ در غیر این‌صورت حداقل یکی از کمان‌های آن مقدار نگرفته است و عضو مجموعه Q نیست و باید در تکرارهای بعد مقدار بگیرد. اضافه کردن قید (۱۴) نیز باعث می‌شود که حداقل یک کمان که عضو مجموعه Q نیست مقدار بگیرد. اگر مسیر بهینه با هیچ کدام از m مسیر به‌دست آمده اشتراکی نداشته باشد (هیچ کمانی از مسیر بهینه عضو مجموعه Q نباشد) اولین کمان آن از گره مبدا خارج می‌شود که عضو مجموعه O می‌باشد و اگر با یکی از مسیرهای به‌دست آمده مانند مسیر P_l اشتراک داشته باشد، حداقل یک کمان غیر مشترک با آن مسیر دارد که از یکی از گره‌های مشترک مسیر بهین و مسیر P_l خارج می‌شود و آن گره مشترک هم عضو مجموعه O می‌باشد و لذا قید (۱۴) باعث نادیده گرفتن جواب بهین مساله نمی‌شود. در تکرارهای بعدی ابتدا مجموعه‌های O و Q، با اضافه کردن گره‌ها و کمان‌های جدید، به‌روزرسانی شده و سپس با اضافه کردن برش منطقی کمان‌های جدیدی مقدار غیرصفر اختیار می‌کنند. اگر با اضافه شدن کمان‌های جدید به مجموعه Q همه کمان‌های مسیر بهین عضو مجموعه Q شوند، با دنبال کردن کمان‌های جدید، مشخصات مسیر بهینه به‌عنوان کاندیدای جواب بهین ذخیره می‌شود؛ در غیر این‌صورت، با همان استدلال بالا می‌توان نتیجه گرفت که اضافه کردن قید (۱۴) باعث حذف جواب بهین مساله نمی‌شود.

حال الگوریتم پیشنهادی جدید را برای حل مساله مطمئن‌ترین مسیر مقید به شرح زیر ارایه می‌دهیم:

گام اول. مقدار کران بالا را برابر با $UB = \infty$ و قرار دهید $O = Q = \varnothing$. مدل $RCRP$ را حل کنید. اگر مدل آزاد شده نشدنی است مساله اصلی نیز نشدنی است. اگر جواب به‌دست آمده صحیح است آن‌را به‌عنوان جواب بهین معرفی کنید و توقف کنید.

گام دوم. با دنبال کردن کمان‌های جدید همه مسیرهای جدید را استخراج کرده و مقادیر $D(P)$ و $C(P)$ را برای هر یک محاسبه کنید. اگر $(D(P) \leq \lambda \, \& C(P) < UB)$ مسیر P را به عنوان کاندیدای جواب بهین

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.4.7.2]

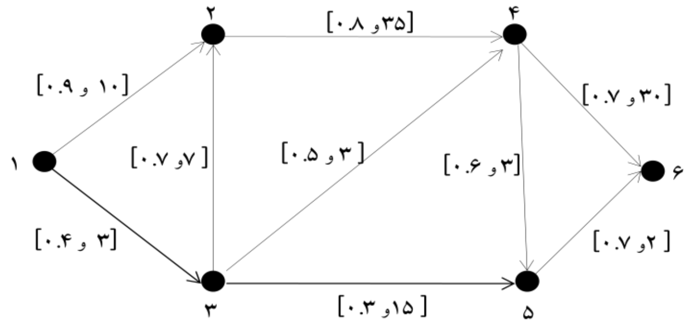
ذخیره کنید و قرار بدهید $UB = C(P)$. مجموعه‌های O و Q را به ترتیب با مجموعه‌های $O \cup \{i \in V \mid \sum_{j|(i,j)\in A} x_{ij} > ۰\}$ و $Q \cup \{(i,j) \in A \mid x_{ij} > ۰\}$ جایگزین کنید.

گام سوم. برش منطقی (۱۴) را به مدل $RCRP$ اضافه کنید و مدل جدید را با استفاده از جواب قبلی و روش سیمپلکس دوگان حل کنید. اگر مساله نشدنی است کاندیدای جواب بهین ذخیره شده را به‌عنوان جواب بهین گزارش کنید و الگوریتم را متوقف کنید. اگر جواب به‌دست آمده صحیح است آن‌را به‌عنوان جواب بهین معرفی کنید و توقف کنید. اگر $Z^*_{LP} \geq UB$ کاندیدای جواب بهین را به عنوان جواب بهین معرفی کنید و توقف کنید؛ در غیر اینصورت به گام دوم بروید.

اگر مساله CRP نشدنی باشد در همان تکرار اول مشخص می‌شود و اگر جواب داشته باشد در تکرار اول یک کران بالا و یک کران پایین برای آن به‌دست می‌آید. چون در هر تکرار حداقل یک متغیر جدید مقدار می‌گیرد، پس این الگوریتم در دور قرار نمی‌گیرد. از طرفی در هر تکرار فضای شدنی مساله محدودتر شده و لذا کران پایین به سمت بالا حرکت می‌کند تا به آن برسد و لذا این الگوریتم در تعداد متناهی تکرار به اتمام می‌رسد.

به عنوان یک مثال کوچک شبکه نمایش داده شده در شکل ۱ شامل ۶ گره و ۹ کمان است و پارامترهای احتمال برقراری و مسافت برای هر کمان به‌صورت $[p_{ij}, d_{ij}]$ نشان داده شده است. در مجموع ۷ مسیر از گره ۱ به گره ۶ وجود دارد که در شکل ۲ نمودار هزینه- مسافت آن‌ها نشان داده شده است. در این شکل مقدار $\mathrm{C}(P)$ برابر است با $\sum_{(i,j)\in P} -(\log(p_{ij}))$ و برای هر مسیر P مقدار $\prod_{(i,j)\in P} p_{ij}$ در پرانتز آمده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش هزینه مسیرها، احتمال بقای آن‌ها کاهش می‌یابد.

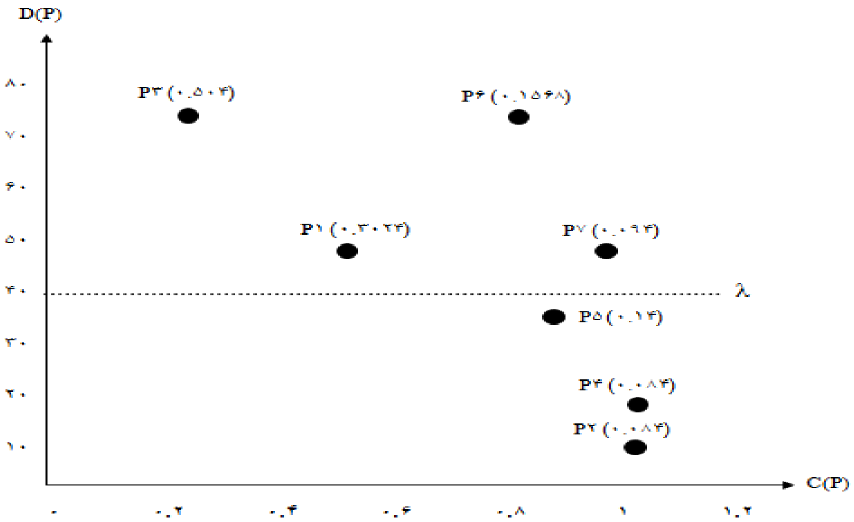
با در نظر گرفتن $\lambda = ۴۰$ و پیاده‌سازی الگوریتم، در مرحله اول دو مسیر $P1$:1-2-4-5-6 و $P2$:1-3-4-5-6 به دست می‌آید که به‌ترتیب ۰/۷۴۳۶ و ۰/۲۵۶۴ واحد جریان روی آن‌ها تقسیم شده است. چون $D(P۲) = ۱۱ \leq \lambda$ پس مسیر $P2$ شدنی است و به‌عنوان کاندیدای جواب بهین و کران بالا به‌صورت $UB = C(P۲) = ۱/۰۷۵۶$ ذخیره می‌شود. گره‌ها و کمان‌های مشاهده شده به‌ترتیب در مجموعه‌های O و Q ذخیره می‌شوند($O = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $Q = \{(۱,۲),(۱,۳),(۲,۴),(۳,۴),(۴,۵),(۵,۶)\}$) و قید (۱۴) به صورت $x_{۳۲} + x_{۳۵} + x_{۴۶} \geq ۱$ به مدل $RCRP$ اضافه می‌شود.



شکل ۱. شبکه‌ای با دو پارامتر احتمال برقراری و طول هر کمان

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.4.7.2]

در تکرار دوم، سه مسیر ۶-۴-۲-۱: $P۳$ و ۶-۵-۳-۱: $P۴$ و ۶-۴-۳-۱: $P۵$ به‌دست می‌آید که در بین آن‌ها مسیر $P5$ شدنی است و چون $C(P۵)=۰/۸۵۳۸<UB$ به‌عنوان کاندیدای جواب بهین ذخیره شده و کران بالا به‌صورت $UB=C(P۵)=۰/۸۵۳۸$ به‌روزرسانی می‌شود. مقدار تابع هدف برابر است با $Z^*_{LP}=۰/۷۹۲۶۵$ و کم‌تر از کران بالاست، پس شرط توقف برقرار نیست. گره‌ها و کمان‌های جدید به‌ترتیب به مجموعه‌های O و Q افزوده ($O=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $Q=\{(۱,۲),(۱,۳),(۲,۴),(۳,۴),(۳,۵),(۴,۵),(۴,۶),(۵,۶)\}$) و قید (۱۴) به صورت $x_{۳۲}\geq ۱$ به مدل $RCRP$ اضافه می‌شود. در تکرار سوم، مساله نشدنی است و لذا کاندیدای جواب بهین ذخیره شده؛ یعنی $P5$، به‌عنوان جواب بهین معرفی می‌شود.



شکل۲. نمودار هزینه – مسافت مسیرهای روی شبکه شکل ۱

٤ پیاده‌سازی الگوریتم

برای بررسی عملکرد الگوریتم ارایه شده، آن را بر روی تعدادی شبکه با اندازه‌های متفاوت و با نمونه داده‌های مختلف که به‌صورت تصادفی تولید می‌شوند پیاده‌سازی می‌کنیم. در هر شبکه فرض می‌کنیم که هر گره با هشت گره دیگر و در جهت‌های اصلی و فرعی جغرافیایی مرتبط است. برای هر شبکه مقدار هر کدام از پارامترهای احتمال برقراری و مسافت به‌صورت تصادفی و یکنواخت تعیین می‌شود. ابتدا تعداد تکرار و مدت زمان اجرای الگوریتم بر روی شبکه‌های مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد. هم‌چنین برای ارزیابی تاثیر تغییر سقف قید ظرفیت روی کیفیت جواب‌های به‌دست آمده الگوریتم پیشنهادی را با مقادیر مختلف λ روی یکی از نمونه‌ها پیاده‌سازی می‌کنیم. همه محاسبات بر روی سیستمی با مشخصات پردازشگر Intel 2-GHz، 2-GB RAM و solver CPLEX 12.4. و با استفاده از نسخه ۳.۱۲ نرم افزار AIMMS پیاده‌سازی می‌شود.

فرض کنید تعداد n گره به‌صورت چند سطر و ستون چیده شده‌اند و از هر گره در جهت‌های اصلی و فرعی جغرافیایی به هشت گره مجاور دیگر کمان وجود دارد. ابتدا بر روی یک مورد شبکه معرفی شده جزییات اجرای الگوریتم توضیح داده می‌شود و سپس با در نظر گرفتن شبکه‌هایی با اندازه‌های مختلف و تولید چند نمونه داده به‌صورت تصادفی، الگوریتم پیشنهادی را برای هر نمونه پیاده‌سازی کرده و میانگین تعداد تکرارها و مدت زمان

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.4.7.2]

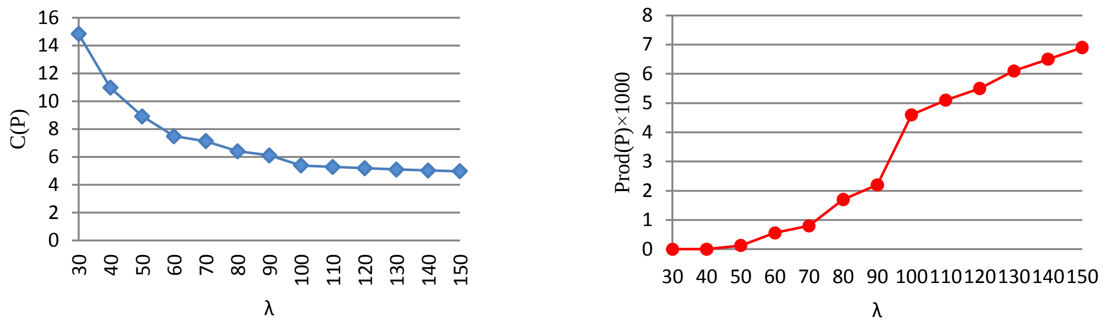
رسیدن به جواب بهین مساله مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابتدا یک شبکه مشبک ۲۰×۲۰ با ۴۰۰ گره در نظر گرفته شده و مقدار پارامترهای احتمال برقراری کمان‌ها و طول هر کمان به‌صورت تصادفی به‌ترتیب از بازه‌های[۰,۱] و [۰,۱۰] با توزیع یکنواخت تولید و استخراج می‌شود. سقف قید ظرفیت برابر با $\lambda = ۸۰$ قرار داده شده و الگوریتم پیاده‌سازی می‌شود. نتایج حاصل از به‌کارگیری الگوریتم پیشنهادی، در جدول ۱ آمده است. در ستون دوم این جدول مقدار تابع هدف مدل خطی حاصل از اضافه کردن برش منطقی به *RCRP*، آمده است که کران پایین جواب بهین مدل *CRP* است. در ستون سوم کم‌ترین مقدار $C(P)$ در بین مسیرهای شدنی به‌دست آمده، به‌عنوان کران بالای جواب بهین نشان داده شده است. همان‌طور که در این جدول نشان داده شده است، در تکرار اول مدل *RCRP* حل شده که جواب آن به‌صورت غیرصحیح و مقدار تابع هدف به‌دست آمده برابر است با ۶/۳۱ که این مقدار کران پایین جواب بهین مدل *CRP* می‌باشد. در تکرار اول دو مسیر مجزا مشخص شده که یکی از آن‌ها یک مسیر شدنی با مسافت ۷۶ واحد و هزینه ۶/۶ واحد می‌باشد، این مسیر به عنوان کاندیدای جواب بهین و هزینه آن به عنوان کران بالای جواب بهین ذخیره می‌شود. مجموعه گره‌ها و کمان‌های دیده شده در این تکرار به ترتیب دارای ۲۹ و ۳۰ عضو است. در تکرار دوم برش منطقی (۱۴) به مدل *RCRP* اضافه می‌شود. در این تکرار نیز جواب به‌صورت غیرصحیح است و دو مسیر جدید را معرفی می‌کند که یکی از آن‌ها یک مسیر شدنی با مسافت ۷۸ واحد و هزینه ۶/۴ واحد می‌باشد، چون هزینه این مسیر شدنی از کران بالای موجود کم‌تر است پس کران بالا به‌صورت $UB = ۶/۴$ تغییر می‌کند. تعداد گره‌ها و کمان‌های جدید دیده شده در این تکرار به ترتیب ۳ و ۴ است و با اضافه کردن آن‌ها مجموعه‌های O و Q و براساس آن‌ها برش (۱۴) به‌روز می‌شود. در تکرار سوم تا پنجم هزینه مسیرهای شدنی به‌دست آمده بیش‌تر از کران بالاست و جایگزین کاندیدای جواب بهین نمی‌شوند؛ اما مقدار تابع هدف افزایش می‌یابد تا اینکه در تکرار ششم مقدار آن از کران بالای ذخیره شده بیش‌تر و الگوریتم متوقف می‌شود. مسیر بهین به‌دست آمده مسیری است با مسافت ۷۸ واحد و مقدار تابع هدف ۶/۴ که معادل است با مقدار $\Pr od(P^*) = \prod_{(i,j)\in P^*} p_{ij} = ۰/۰۰۱۷$. تمام فرآیند اجرای الگوریتم در مدت زمان ۰/۰۴ ثانیه به انجام می‌رسد. همان‌طور که در ستون‌های ۲ تا ۴ جدول ۱ مشاهده می‌شود، در هر تکرار مقدار گپ بین کران بالا و پایین کم‌تر می‌شود؛ زیرا از طرفی در هر تکرار فضای شدنی مدل آزاد شده محدودتر می‌شود و مقدار تابع هدف افزایش می‌یابد و از طرف دیگر در برخی از تکرارها جواب شدنی بهتری به‌دست می‌آید و کران بالا کوچک‌تر می‌شود. نکته دیگر این است که تعداد محدودیت‌ها و متغیرها در هر تکرار بدون تغییر می‌ماند؛ آن‌چه که باعث کوچک‌تر شدن فضای جواب شدنی می‌شود تغییر مجموعه اندیس‌های برش منطقی اضافه شده است (در هر تکرار اندازه مجموعه Q بزرگ‌تر می‌شود و امکان انتخاب کمان جدید محدودتر می‌شود). در این شبکه بیش‌ترین احتمال بقا برابر است با $\prod_{(i,j)\in P} p_{ij} = ۰/۰۰۶۹$ و برای مسیری است که با حذف قید ظرفیت به‌دست می‌آید. هزینه این مسیر ۴/۹۷ واحد و مسافت آن ۱۵۰ واحد است که به ازای $\lambda = ۸۰$ برای مساله *CRP* یک مسیر نشدنی است. اگر سقف مجاز برای مسافت مسیر بهینه را برابر با $\lambda = ۱۵۰$ قرار دهیم مطمئن‌ترین مسیر به دست می‌آید و هر چه سقف مجاز مسافت را کاهش دهیم مقدار تابع هدف مساله *CRP*

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.4.7.2]

افزایش و به‌طور معادل احتمال بقای مسیر به‌دست آمده کاهش می‌یابد. در شکل ۳ روند افزایش احتمال بقای مسیر بهین مساله CRP با افزایش مقدار λ و کاهش مقدار تابع هدف برای شبکه بالا نشان داده شده است.

جدول ۱. نتایج حاصل از اجرای الگوریتم پیشنهادی بر روی یک شبکه مشبک با ۴۰۰ گره

تکرار	کران پایین	کران بالا	گپ (٪)	تعداد متغیرها	تعداد قیود	$\|O\|$	$\|Q\|$
۱	۶/۳۱	۶/۶	۴/۵	۲۹۶۴	۴۰۱	۲۹	۳۰
۲	۶/۳۲	۶/۴	۱/۲	۲۹۶۴	۴۰۲	۳۲	۳۴
۳	۶/۳۵	۶/۴	۰/۷	۲۹۶۴	۴۰۲	۳۵	۳۸
۴	۶/۳۸	۶/۴	۰/۳	۲۹۶۴	۴۰۲	۳۷	۴۱
۵	۶/۳۹	۶/۴	۰/۱	۲۹۶۴	۴۰۲	۴۰	۴۵
۶	۶/۴۶	۶/۴	–	۲۹۶۴	۴۰۲	–	–



(a) (b)

شکل۳. تاثیر تغییر سقف ظرفیت بر روی هزینه (a) و احتمال بقای (b) مسیرهای به‌دست آمده روی یک نمونه شبکه

در ادامه شبکه‌هایی با ۴۰۰، ۹۰۰،۱۶۰۰، ۲۵۰۰ و ۳۶۰۰ گره در نظر گرفته و آن‌ها را به‌ترتیب با GN1-GN5 نمایش و برای هر کدام ۱۰۰ نمونه داده تصادفی تولید می‌کنیم و به‌صورت جداگانه الگوریتم برای هر کدام پیاده‌سازی می‌شود. نتایج به‌دست آمده شامل میانگین تعداد تکرارها، میانگین و ماکزیمم مدت زمان اجرا، برای هر مورد در جدول ۲ گزارش شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با بزرگ‌تر شدن اندازه شبکه هر چند میانگین تعداد تکرارها و مدت زمان حل رشد می‌کنند؛ اما این افزایش نسبت به بزرگ‌تر شدن اندازه شبکه‌ها مقدار قابل توجهی نیست.

جدول ۲. نتایج حاصل از اجرای الگوریتم پیشنهادی بر روی شبکه‌هایی با اندازه‌های مختلف

شبکه	$\|V\|$	$\|A\|$	میانگین تعداد تکرار	میانگین مدت زمان اجرا (ثانیه)	بیش‌ترین زمان اجرا (ثانیه)
GN1	۴۰۰	۲۹۶۴	۷	۰/۰۴	۰/۰۹
GN2	۹۰۰	۶۸۴۴	۹	۰/۰۹	۰/۱
GN3	۱۶۰۰	۱۲۳۲۴	۱۴	۰/۲۱	۰/۴
GN4	۲۵۰۰	۱۹۴۰۴	۲۸	۰/۶۲	۱/۱
GN5	۳۶۰۰	۲۸۰۸۴	۳۹	۰/۸۹	۱/۴

۵ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله با فرض اینکه احتمال مسدود شدن برخی از کمان‌های شبکه در شرایط بحرانی وجود دارد مساله یافتن مطمئن‌ترین مسیر مطرح شد که در آن برای هر کمان یک احتمال بقا تخمین‌زده می‌شود و مسیری که حاصل‌ضرب احتمال بقای کمان‌هایش از بقیه مسیرها بیش‌تر باشد به‌عنوان مسیر بهین معرفی می‌شود. با استفاده از خواص تابع لگاریتم حاصل‌ضرب احتمالات به‌صورت یک تابع خطی معادل‌سازی و مساله مطمئن‌ترین مسیر در قالب مساله کوتاه‌ترین مسیر مدل‌سازی شد. از آن‌جا برای هر مسیر می‌توان پارامترهای دیگری مانند مسافت و مدت زمان در نظر گرفت و ممکن است مطمئن‌ترین مسیر به‌دست آمده به خاطر مسافت یا زمان زیاد عملا قابل استفاده نباشد، با اضافه کردن قید ظرفیت به مساله آن را به مساله مطمئن‌ترین مسیر مقید گسترش داده و به شرایط واقعی نزدیک‌تر کردیم. مساله گسترش داده شده مساله پیچیده‌ای است و برای حل نیازمند الگوریتم کارآمدی است. برای حل آن در این مقاله یک الگوریتم حل تکراری بر اساس مدل آزادشده و اضافه کردن برش‌های منطقی ارایه شده است. این الگوریتم بر روی شبکه‌های مختلف و با استفاده از داده‌های تصادفی و در اندازه‌های متفاوت پیاده‌سازی شد. نتایج حاصل از پیاده‌سازی الگوریتم بر روی نمونه‌های مختلف نشان داد که این الگوریتم قادر است در مدت زمان مناسبی به جواب بهینه مساله دست یابد. نکته مثبت چنین روشی در این است که برای پیاده‌سازی آن از روش‌های حل مدل‌های خطی موجود کمک گرفته می‌شود و با گذشت زمان و به‌روزرسانی نرم‌افزارهای حل مسایل بهینه‌سازی و ارتقای روش‌های حل مدل‌های خطی، کارآمدی این روش نیز بیش‌تر می‌شود. نکته دیگر این است که در هر تکرار فقط یک قید برای برش منطقی به مدل *RCSP* اضافه می‌شود و اندازه مدل تغییری نمی‌کند. این قید جدید جواب بهین تکرار قبلی را نشدنی می‌سازد؛ اما با استفاده از الگوریتم سیمپلکس دوگان به‌راحتی به جواب بهین جدید می‌رسد و همان‌طور که در پیاده‌سازی‌های مختلف نشان داده شد با افزایش اندازه شبکه‌ها تغییر محسوسی در زمان اجرای الگوریتم رخ نمی‌دهد. نکته دیگری که مورد بررسی قرار گرفت این بود که با کاهش سقف قید ظرفیت احتمال بقای مسیر به‌دست آمده کاهش می‌یابد.

در مطالعات مشابه آینده پیشنهاد می‌شود شرط عدم قطعیت در این مساله به محدودیت‌های مساله منتقل شده و مورد بررسی قرار گیرد و از رویکرد مدل‌های استوار برای آن استفاده کرد. هم‌چنین می‌توان بر روی گسترش‌های دیگر مساله و ارایه برش‌های قوی‌تری کار کرد.

منابع

[۷] صفری، س.، زعفرانیه، م.، ابارشی، م.و ابراهیم لعل، ا.، (۱۳۹۸). روش دوگان لاگرانژی برای مساله کوتاه ترین مسیر بـا در نظر گرفتن طرح های عمرانی همراه با محدودیت بودجه. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۶(۲)، ۵۷-۳۹.

[۱۳] تقی نژاد، ن.، ناصری، ه.، س، م.، (۱۳۹۱) برنامه ریزی خط لوله چند فرآورده ای در شرایط عدم قطعیت تقاضای روزانه مشتری ها. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۹(۱)، ۲۱-۳۱.

[1] Ahuja, B. K., Muganti, T. L., Orlin, J. B,. (1993). Network flows Theory, algorithm, and applications. New Jersey, United States of America: Prentice Hall.

[2] Cherkassky, B. V., Goldberg, A. V., Radzik, T,. (1996). Shortest paths algorithms: theory and experimental evaluation. Mathematical programming, 73, 129-174.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.4.7.2]

[3] Zhan, F. B., Noon, C. E., Dessouky, M., (1998). Shortest path algorithms on real road networks. Transportation Science, 32, 65–73.

[4] Noda, A. S., Martin, C. G., Dessouky, M., (2010). Shortest path simplex algorithm with a multiple pivot rule: A comparative study. Asia-Pacific Journal of Operational Research, 27(6), 677–691.

[5] Garey, M. R., Johnson, D. s., (1979). Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. New York: W.H. Freeman.

[6] Mora, A. M., Merelo, J. J., Millan, C., Torrecillas, J., Laredo, J. L. J., (2009). CHAC. A MOACO Algorithm for Computation of Bi-Criteria Military Unit Path in the Battlefield. International Journal of Intelligent Systems, 24(7), 818–843.

[8] Pugliese, L. D. P., Guerriero, F., (2013). A survey of resource constrained shortest path problems: Exact solution approaches. Networs, 62(3), 183-200.

[9] Avela, P., Boccia, M., Sforza, A., (2004). Resource constrained shortest path problems in path planning for fleet management. Journal of Mathematical Modelling and Algorithms, 3, 1-17.

[10] Handler, G. Y., Zang, I., Doerner, K.F., (1980). A dual algorithm for the constrained shortest path. Networks, 10, 293-310.

[11] Carlyle, W. M., Royset, J. O., Wood, R. K., (2008). Lagrangian relaxation and enumeration for solving constrained shortest-path problems. Wiley Periodicals, Inc. NETWORKS, 52(4), 256-270.

[12] Lozano, L., Medaglia, A. L., (2013). Robust scheduling for multi-product pipelines under demand uncertainty. Computers & Operations Research, 40(1), 378-384.

[14] Moradi, S., MirHassani, S. A., (2016). On an exact method for the constrained shortest path problem. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 87(9-12), 2541-2549.

[15] Bertsimas, D., Sim, M., (2003). Robust discrete optimization and network flows. Journal of Math. Program, 98, 49–71.

[16] Montemanni, R., Gambardella, L. M., (2004). An exact algorithm for the robust shortest path. Computers & Operations Research, 31(10), 1667-1680.

[17] Shen, L., Shao, h., Zhang, L., Zhao, J., (2017). Improving The Global optimal algorithm of reliable path finding problem based on backtracking method Mathematical Problems in Engineering, 2017, 1-10.

[18] Verstichel, J., Kinable, J. Causmaecker, P. D., Vanden Berghe, g., (2015). A Combinatorial Benders' decomposition for the lock scheduling problem. Computers & Operations Research, 54, 117–128.

[19] Chen, J. H., Lee, D. H., Cao, J. X., (2012). A combinatorial benders' cuts algorithm for the quayside operation problem at container terminals. Transportation Research Part E, 48, 266–275.

[20] Bundschuh, M., Klabjan, D., Thurston, D. L., (2003). Modeling robust and reliable supply chains. Working paper university of Illinois, Urbana-Champaign, 1-32.