

## تعیین سیاست بهینه بازپرسی در سیستم یکپارچه فروشنده-خریدار با در نظر گرفتن دریافت چندگانه

هیبت اله صادقی<sup>۱\*</sup>، هیوا فاروقی<sup>۲</sup>، روژین صیدی<sup>۳</sup>

۱- استادیار، گروه مهندسی صنایع، دانشگاه کردستان، سنندج، کردستان، ایران

۲- استاد، گروه مهندسی صنایع، دانشگاه کردستان، سنندج، کردستان، ایران

۳- کارشناسی ارشد مهندسی صنایع، دانشگاه کردستان، سنندج، کردستان، ایران

رسید مقاله: ۱۲ مرداد ۱۴۰۱

پذیرش مقاله: ۲۲ دی ۱۴۰۱

### چکیده

این مقاله به بررسی مدیریت موجودی در یک زنجیره تامین یکپارچه پرداخته است که شامل یک تولیدکننده و یک توزیع کننده است. تقاضای خرده فروش به صورت تابعی غیرافزایشی از قیمت توزیع کننده لحاظ شده است و همچنین قیمت فروش تولید کننده به صورت تابعی غیرکاهشی از قیمت توزیع کننده در نظر گرفته شده است. در مساله مورد بررسی، تولید کننده سعی می کند محصولات درخواستی را تولید و در چندین مرحله برای توزیع کننده ارسال کند. در چنین حالتی توزیع کننده و تولید کننده در نظر دارند سود نهایی و یکپارچه خود را حداکثر کنند. بر این اساس مقدار بهینه هر بار سفارش و مقدار بهینه ارسالی هر مرحله تولید کننده، قیمت فروش توزیع کننده و تولید کننده به گونه ای تعیین می شود که سود سیستم حداکثر گردد. بنابراین در این مقاله نه تنها تابع سود کل این مدل موجودی ارایه شده است، بلکه یک رویکرد ابتکاری برای تعیین جواب بهینه ارایه شده است. نهایتاً یک مثال بیان شده است و نتایج آن مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است.

**کلمات کلیدی:** دریافت گسسته، تقاضا وابسته به قیمت، کنترل موجودی، قیمت گذاری، بهینه سازی.

### ۱ مقدمه

هزینه های موجودی در شکل گیری دارایی های سازمان و همچنین تعیین سطح موجودی و تعیین سیاست های بهینه سازی سود و هزینه های سازمان نقش خیلی زیادی را ایفا می کنند، بنابراین مدیریت هزینه های لجستیک در برنامه ریزی تولید و زنجیره تامین مورد توجه اکثر سازمان ها و تولیدی ها قرار گرفته است. مطالعه بهینه سازی موجودی در اوایل قرن بیستم آغاز شد، سپس با رشد رقابت در بازار کسب و کار، اهمیت آن به تدریج افزایش

\* عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: h.sadeghi@uok.ac.ir

یافت. اولین مدل موجودی<sup>1</sup> EOQ در فوریه ۱۹۱۳ توسط هریس پیشنهاد شد [۱]. یکی از مهم‌ترین مدل‌های مدیریت موجودی سیستم‌های تولیدی، مدل موجودی تولید اقتصادی<sup>۲</sup> (EPQ) است که توسط تفت پیشنهاد شده است [۲]. در واقع مدل مقدار اقتصادی تولید (EPQ) یکی از مدل‌های کلاسیک کنترل موجودی است که به صورت گسترده در دنیا مورد استفاده قرار می‌گیرد. یکی از مهم‌ترین فرض‌های محدودکننده مدل EOQ این است که نرخ تقاضا و یا ارسال محصول به مشتری مقدار ثابت و پیوسته‌ای است با این حال، در دنیای واقعی، مواردی وجود دارد که بسیاری از آن‌ها را نمی‌توان به عنوان ارزش پیوسته فرض کرد، به عنوان مثال در صنعت اتومبیل، لوازم خانگی و قطعات الکترونیکی تعداد محصولات ارسالی گسسته است. در این راستا صادقی [۳] روشی برای تعیین سیاست بهینه سفارش دهی در سیستم تولید اقتصادی در حالتی که تقاضا به صورت گسسته، دوره‌ای و وابسته به قیمت فروش است بیان کرد و یک مدل ریاضی برای حالتی که افق برنامه‌ریزی نامحدود و کمبود مجاز نیست، توسعه دادند. نتایج مقاله آنها نشان می‌دهد که جواب بهینه مساله به شدت وابسته به هزینه نگهداری هر واحد و هزینه ثابت راه‌اندازی است. مدیریت موجودی شامل برنامه‌ریزی، هماهنگی و کنترل تمام فعالیت‌های مرتبط با گردش موجودی است. بررسی مسایل مدیریت موجودی با استفاده از روش علمی در اوایل قرن بیستم آغاز شد و وقتی در بازار کار رقابت بین شرکت‌ها اوج گرفت. اهمیت مدیریت موجودی هم به تدریج افزایش پیدا کرد. در واقع هدف اکثر مدل‌های موجودی کاهش هزینه‌ها و حداکثر کردن سود است، اما به دلیل رقابت شدیدی که در بازار وجود دارد عملی کردن این موضوع کمی دشوار است. به همین دلیل شرکت‌ها به دنبال استراتژی‌های جدید برای کاهش هزینه‌ها و رقابت بهتر در بازارهای جهانی هستند. استراتژی‌هایی مانند تولید به موقع، تولید ناب، مدیریت کیفیت و غیره هستند که در کاهش هزینه تولید موثر هستند. در سال‌های اخیر شرکت‌ها به سمت سود بیشتر تمایل پیدا کردند به همین دلیل از مدیریت موثر زنجیره تامین استفاده کردند. زنجیره تامین باید مدیریت موجودی را به گونه‌ای انجام دهد که محصولات به مقادیر مناسب، در مکان‌های مناسب، در زمان مناسب و با کیفیت مناسب، برای حداقل کردن هزینه‌های سیستم و با سطح رضایتمندی مشخص در اختیار مشتریان قرار گیرد. یکی از مهم‌ترین راه‌های کاهش هزینه‌های زنجیره تامین، کاهش هزینه‌های موجودی و لجستیک است. همچنین یکی از راه‌های کاهش هزینه‌های موجودی استفاده از سیستم "یکبار سفارش و چند دریافت" SSMD<sup>۳</sup> است. در مدل پیشنهادی ویدادانا و ووی [۴] فرض شده است که محصولات تولیدی در مقادیر کوچک و به صورت گسسته ارسال شوند و بیان کردند که با استفاده از سیاست SSMD، مدیریت موجودی بر اساس استراتژی تحویل به موقع<sup>۴</sup> (JIT) انجام می‌شود. آنها یک مدل ریاضی غیرخطی - عدد صحیح مختلط<sup>۵</sup> (MINLP) ارائه دادند و مساله بیان‌شده را بر اساس روش لاگرانژ و شاخه و کران حل کرده‌اند و نتایج مقاله آنها نشان می‌دهد که روش لاگرانژ در اکثر موارد جواب بهینه را به دست می‌آورد. همچنین استفاده از روش شاخه و کران در مسایل با سایز بزرگ، زمان حل به شدت افزایش می‌یابد و این امر باعث شده الگوریتم

1-Economic order quantity

2-Economic production quantity

3-Single Setup Multi Delivery

4-Just in Time

5- Mixed Integer Non-Linear Program

بیان شده در مسایل بزرگ کارایی لازم را نداشته باشد. ووی و همکاران [۵] یک مدل یکپارچه در یک زنجیره تامین دو سطحی شامل یک تامین کننده و یک خریدار با دریافت چندگانه در حالت کمبود به صورت فروش از دست رفته را ارائه دادند. هدف اصلی مقاله بر حداقل کردن هزینه‌های خریدار تاکید دارد. آنها فرض کرده‌اند که افق برنامه‌ریزی نامحدود، تقاضا پیوسته و ثابت است. پسندیده و همکاران [۶] مساله یک تامین کننده و یک خریدار را با دریافت چندگانه در حالت مجاز نبودن کمبود را مورد بررسی قرار دادند. آنها مساله را بر اساس سیستم های تولید اقتصادی مدلسازی کردند و با ارائه یک رویکرد ابتکاری سعی در تعیین جواب مساله در حالت گسسته کردند. کاردنس و همکاران [۷] نیز مساله یک تولید کننده و یک خریدار را با فرض تحویل چندگانه در حالت چند محصولی و محدودیت بودجه مورد بررسی قرار دادند. آنها فرض کرده‌اند تقاضای سالیانه برای هر محصول ثابت و مشخص است و کمبود محصولات مجاز نیست. در ادامه نوبل و همکاران [۸] همان مساله بیان شده توسط کاردنس و همکاران [۷] را با در نظر گرفتن محدودیت ظرفیت تولید با یک رویکرد متفاوت تر مورد بررسی قرار داد. آنها فرض کردند که خریدار موجودی را نگهداری نمی کند و مقدار هر بار سفارش خود را در چند مرحله تحویل می گیرد و بر اساس یک رویکرد ابتکاری جواب اولیه را به دست آورده و سپس آن را بر اساس روش الگوریتم ژنتیک هیبریدی بهبود دادند. شفیع گل و همکاران [۹] یک سیستم تولید چند محصولی تک ماشینه را با فرض تحویل گسسته و دوباره کاری بررسی کردند. آنها از روش لاگرانژ برای تعیین مقدار طول سیکل و مقدار بهینه سفارش دهی استفاده کردند. صادقی و همکاران [۱۰] یک سیستم تولیدی/مونتاژی چند مرحله‌ای را با در نظر گرفتن تقاضا گسسته و مدت زمان تدارک احتمالی مورد بررسی قرار دادند و از مفهوم برنامه‌ریز تامین اقلام برای مدل سازی مساله استفاده کرده‌اند و در نهایت از مفاهیم بهینگی استفاده کرده و جواب بهینه مساله را تعیین کردند. همچنین صادقی و همکاران [۱۱، ۱۲] مدل کنترل موجودی تامین اقلام چند سطحی با تقاضای گسسته با فرض تصادفی بودن مدت زمان تدارک را مورد بررسی قرار دادند. آنها فرض کردند تقاضا برای محصول نهایی به صورت گسسته و برابر مقدار ثابت در هر دوره است. ادگبولا و همکاران [۱۳] یک سیستم یکپارچه یک تولید کننده و یک خریدار با دریافت چندگانه و عدم قطعیت تقاضا بررسی کرده‌اند. آنها فرض کردند تقاضا دارای توزیع نرمال بوده و کمبود محصولات مجاز است. هدف مدل هماهنگی بین تولید کننده و توزیع محصول است به گونه‌ای که کل هزینه‌های زنجیره تامین به حداقل برسد. لیو و همکاران [۱۴] سیستم یک تولید کننده و یک خریدار با دریافت چندگانه را در شرایطی که محصولات با نرخ ثابتی دچار زوال می شوند و کمبود موجودی مجاز نیست را بررسی کرده‌اند. یک مدل ریاضی برای تعیین حجم هر بار ارسال و فاصله زمانی بین هر ارسال با فرض وجود موجودی اولیه ارائه شده است و بر اساس یک الگوریتم پیشنهادی جواب مساله را تعیین کردند. محمودی و صادقی [۱۵] مساله زنجیره دو سطحی با یک انبار متمرکز و چندین خرده فروش بر اساس سیاست  $(1, T)$  برای یک محصول فاسد شدنی توسعه دادند. آنها فرض کردند تقاضای خرده فروشان تصادفی بوده و از توزیع پواسون پیروی می کند. لین و هو [۱۶] سیستم موجودی یکپارچه در هنگام اعمال سیاست با هدف یافتن استراتژی‌های بهینه و قیمت گذاری و سفارش به گونه‌ای که سود حاصل حداکثر گردد را بررسی کرده‌اند. پال و همکاران [۱۷] مدل سفارش اقتصادی را در حالت چند محصولی برای

یک فروشنده را بررسی کرده‌اند و فرض نموده‌اند که تقاضا به صورت یک تابع درجه دوم کاهش از قیمت فروش است. همچنین بیان کرده‌اند زمانی که درآمد فروشنده به سطح مشخصی می‌رسد از آن زمان به بعد برای مشتریان خود تخفیف قایل می‌شود. تیواری [۱۸] یک زنجیره شامل تامین‌کننده-خریده‌فروش-مشتری را در نظر گرفته‌است. آنها فرض کرده‌اند که برای تسویه هزینه خرید، خرده‌فروش از اعتبار خود نزد تامین‌کننده استفاده می‌کند و در همان زمان خرده‌فروش اعتبار تجاری جداگانه‌ای را به مشتری ارائه می‌دهد. رضای و خاکستری [۱۹] به بررسی تعیین مناسب‌ترین تامین‌کننده در زنجیره تامین سبز، با توجه به بهبود عملکرد زیست محیطی و اقتصادی خود پرداختند. آنها یک مدل ریاضی دو هدفه برای مدیریت موجودی در زنجیره تامین سبز دو سطحی با دو تامین‌کننده و یک خریدار پرداخته‌اند. راستوگی و سینگک [۲۰] سیستم موجودی برای اقلام دارویی با تقاضای وابسته به قیمت ارائه داده‌است. در این مطالعه کمبود مجاز و به صورت جزئی است و هدف اصلی از این مطالعه، تعیین سیاست بهینه سفارش‌دهی و زمان‌های سفارش‌دهی به گونه‌ای که هزینه کل سیستم حداقل شود. صادقی و همکاران [۲۱] به بررسی سیستم‌های کنترل موجودی تولید اقتصادی با دریافت گسسته و با فرض مجاز بودن کمبود پرداخته‌اند. در این مدل، با توجه به هماهنگی صورت گرفته بین تولیدکننده و توزیع‌کننده همه محصولات سفارش داده‌شده به طور هم‌زمان برای توزیع‌کننده ارسال نمی‌شود بلکه محصولات سفارش داده شده طی چند مرحله ارسال می‌شود. در نهایت کارتینک و اوتایاکومار [۲۲] یک زنجیره تامین دو سطحی را بر اساس خط مشی تحویل چندگانه راه‌اندازی (SSMD) بین یک فروشنده و یک خریدار در نظر می‌گیرد. آنها فرض کردند هنگامی که دستگاه از مرحله کنترل به مرحله خارج از کنترل تغییر می‌کند، خروجی کالای ساخته‌شده معیوب است.

مقاله حاضر، یک سیستم یکپارچه شامل یا تامین‌کننده و یک توزیع‌کننده در نظر می‌گیرد. تولیدکننده بر اساس سیستم سفارشی فعالیت می‌کند و توزیع‌کننده نیز بر اساس سیستم فشاری به فعالیت خود ادامه می‌دهد. تقاضای مشتریان به خرده‌فروش به صورت تجمیع شده در نظر گرفته شده است که میزان تغییرات آن ناچیز است ولی میزان تقاضا وابسته به قیمت فروش محصول است. در این سیستم توزیع‌کننده سفارش مورد نیاز یک سیکل خود را برای تامین‌کننده ارسال می‌کند. تامین‌کننده به منظور کاهش هزینه‌های خود و بر اساس سیاست تولید به موقع محصولات را در بازه‌های کوتاه، با مقادیر ثابت و در چند مرحله برای توزیع‌کننده ارسال می‌کند. قیمت فروش تولیدکننده وابسته به قیمت فروش توزیع‌کننده است که به صورت یک تابع افزایشی نسبت به قیمت فروش توزیع‌کننده بیان شده است. بنابراین براساس آنچه که بیان شد نوآوری مقاله را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد.

۱) ارائه یک سیستم یکپارچه تامین‌کننده و توزیع‌کننده با در نظر گرفتن سیاست SSMD و تقاضا وابسته به

قیمت

۲) در نظر گرفتن سیستم‌های کششی و فشاری در یکپارچه‌سازی

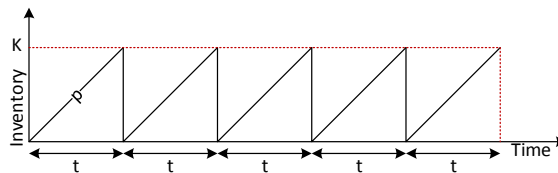
۳) استفاده از استراتژی تولید به موقع در مدل‌سازی مساله

۴) در نظر گرفتن حساسیت قیمت تامین‌کننده به قیمت توزیع‌کننده

در ادامه روند یکپارچه‌سازی تولیدکننده و توزیع‌کننده به صورت کامل تشریح شده است که در بخش دوم مدل مساله به طور کامل تشریح شده است و پارامترها و مفروضات آن بیان شده است. در بخش سوم، نحوه محاسبه سود تامین‌کننده و توزیع‌کننده و در نهایت سود کل زنجیره تامین به صورت یکپارچه بیان شده است. در بخش چهارم روش حل مساله بیان شده است و در بخش پنجم با بیان یک مثال عددی به تجزیه و تحلیل مساله و تحلیل حساسیت مدل نسبت به پارامترهای مدل پرداخته می‌شود و در نهایت نتیجه‌گیری و پیشنهادات آتی بیان شده است.

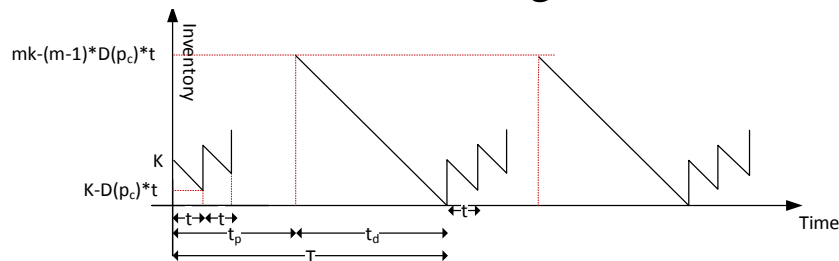
## ۲ تشریح مدل

در این مساله توزیع‌کننده، محصولات مورد نیاز خود را از تولیدکننده درخواست می‌کند و برای خرده‌فروشان ارسال می‌کند. با توجه به محدودیت ظرفیت، تولیدکننده نمی‌تواند همه محصولات سفارش داده شده به صورت هم‌زمان ارسال کند و سیاست تامین تقاضا از طرف تولیدکننده به این صورت است که مقدار تقاضای سفارش داده شده را طی  $m$  مرحله و در هر مرحله  $K$  واحد آن را تامین می‌کند. شکل ۱ روند تغییرات سطح موجودی تامین‌کننده را نشان می‌دهد. در این حالت تامین‌کننده با نرخ ثابت  $P$  شروع به تولید می‌کند و در فاصله‌های زمانی ثابت  $t$ ، میزان  $K$  واحد محصول را تولید، و با قیمت فروش هر واحد برابر با  $P_s$  برای توزیع‌کننده ارسال می‌کند. در این تحقیق فرض شده است که قیمت فروش تامین‌کننده تابعی از قیمت فروش توزیع‌کننده است. شکل ۱ سطح موجودی در دسترس برای تولیدکننده را نشان می‌دهد.



شکل ۱. سطح موجودی در دسترس تولیدکننده

توزیع‌کننده نیز سفارش صادره شده خود را در هر دوره طی  $m$  دریافت می‌کند. تقاضا توزیع‌کننده که به صورت تجمیع شده از تقاضای خرده‌فروشان است، وابسته به قیمت فروش خود بوده و از تابع  $D(p_c) = \alpha - p_c \times \beta$  پیروی می‌کند که در آن  $\alpha$  نشان‌دهنده پتانسیل بازار است و  $\beta$  حساسیت تقاضا نسبت به قیمت را نشان می‌دهد. شکل ۲ سطح موجودی در دسترس برای توزیع‌کننده را نشان می‌دهد.



شکل ۲. میزان موجودی در دسترس در توزیع‌کننده

در این مقاله، ابتدا براساس مفاهیم کنترل موجودی، تابع سود کل برای تامین‌کننده و توزیع‌کننده به صورت یکپارچه تعیین می‌شود. کل هزینه‌های موجود در این سیستم شامل هزینه نگهداری محصول برای تامین‌کننده و

توزیع کننده، هزینه خرید، هزینه ثابت سفارش دهی، هزینه آماده سازی و هزینه حمل و نقل است. هدف اصلی مدل تعیین مقدار بهینه سفارش  $Q = mK$  و مقدار بهینه قیمت فروش توزیع کننده  $p_c$  است به گونه‌ای که مقدار سود یکپارچه کل حداکثر گردد. با توجه به این که مقدار بهینه سفارش وابسته به دو مقدار  $m$  و  $K$  است؛ بنابراین متغیرهای تصمیم مساله مقدار سفارش دهی ( $Q$ )، مقدار هر بار سفارش ( $K$ ) و قیمت فروش توزیع کننده ( $p_c$ ) است که بر اساس آنها سایر متغیرهای تصمیم وابسته تعیین می‌شوند. سایر مفروضات و پارامترهای مساله به شرح زیر است.

- (۱) نرخ تقاضای توزیع کننده وابسته به قیمت فروش است.
- (۲) قیمت فروش تامین کننده تابعی از قیمت فروش توزیع کننده است.
- (۳) کمبود موجودی مجاز نیست.
- (۴) تامین کننده محصولات را بر اساس سیاست SSMD ارسال می‌کند.
- (۵) زمان بین دو دریافت متوالی ثابت و یکسان است

### پارامترهای مدل:

$D_{(p_c)}$ : نرخ تقاضای توزیع کننده وابسته به قیمت فروش	$C$ : هزینه تولید هر واحد محصول
$T$ : طول هر سیکل محصول در توزیع کننده	$p$ : نرخ تولید تامین کننده
$t_p$ : طول مدت زمان دریافت در هر سیکل محصول	<b>متغیرهای تصمیم</b>
$t_d$ : طول مدت زمان مصرف خالص هر سیکل محصول	$Q$ : مقدار هر بار سفارش محصول
$t$ : مدت زمان بین دو حمل متوالی پالت محصول	$K$ : ظرفیت پالت محصول
$A$ : هزینه ثابت سفارش دهی هر بار سفارش توزیع کننده	$P_c$ : قیمت فروش توزیع کننده
$U$ : هزینه ثابت هر بار راه اندازی تامین کننده	<b>متغیرهای تصمیم وابسته</b>
$h_c$ : هزینه نگهداری هر واحد محصول برای توزیع کننده	$P_s$ : قیمت فروش تامین کننده
$h_s$ : هزینه نگهداری هر واحد محصول برای تامین کننده	$m$ : تعداد دفعات دریافت محصول در هر سیکل
$b$ : هزینه هر بار دریافت محصول	

### ۳ مدل سازی مساله

در این بخش ابتدا هزینه های توزیع کننده را محاسبه و با کم کردن مقدار از درآمد توزیع کننده، سود خالص آن تعیین می‌شود و در ادامه همین کار برای تولید کننده انجام می‌شود و در نهایت تابع سود یکپارچه شامل یک تامین کننده و یک توزیع کننده تعیین می‌شود.

## ۳-۱ بررسی سیستم توزیع کننده

در این بخش ابتدا کل هزینه‌های توزیع کننده محاسبه می‌شود سپس بر اساس میزان فروش سالیانه آن درآمد سالیانه محاسبه شده و بر اساس آنها سود نهایی تعیین می‌شود. کل هزینه‌های سیستم توزیع کننده شامل هزینه نگهداری، هزینه خرید مواد محصول، هزینه ثابت سفارش دهی و هزینه حمل برای دریافت‌های متوالی است که در ادامه مقدار هر کدام از آنها محاسبه می‌شود.

## ۳-۱-۱ هزینه نگهداری توزیع کننده

برای محاسبه هزینه نگهداری توزیع کننده، لازم است ابتدا میزان موجودی سیستم را و بر اساس آن مقدار هزینه نگهداری را محاسبه کرد. میزان موجودی در سیستم‌های برنامه‌ریزی تولید و کنترل موجودی برابر با مساحت قسمت موجودی نمودار موجودی-زمان است بر این اساس سطح موجودی در شکل ۲ به چندین ناحیه تقسیم‌بندی شده است تا بر اساس آنها امکان محاسبه موجودی فراهم شود. روند محاسبه میزان موجودی در زیر شرح داده شده است.

مساحت ناحیه اول ( $S_1$ ) بر اساس مساحت ذوزنقه محاسبه شده است و مقدار مطابق رابطه (۱) است.

$$S_1 = \left( \frac{K + (K - D(p_c) \times t)}{2} \times t \right) = \left( \frac{2 \times K - D(p_c) \times t}{2} \right) \times t \quad (1)$$

مساحت ناحیه دوم ( $S_2$ ) نیز بر اساس مساحت ذوزنقه محاسبه شده است و مقدار مطابق رابطه (۲) است.

$$S_2 = \left( \frac{(K - D(p_c) \times t + K) + (2 \times K - 2 \times D(p_c) \times t)}{2} \right) t = \left( \frac{4 \times K - 2 \times D(p_c) \times t}{2} \right) \times t \quad (2)$$

بر این اساس مساحت ناحیه  $j$  ام ( $S_j$ ) بر اساس رابطه (۳) تعیین می‌شود.

$$S_j = \left( \frac{2 \times j \times K - (2 \times j - 1) \times D(p_c) \times t}{2} \right) \times t, \quad j = 1, \dots, m-1 \quad (3)$$

مساحت ناحیه  $m$  ام ( $S_m$ ) بر اساس مساحت مثلث محاسبه شده است مقدار آن مطابق رابطه (۴) است.

$$S_m = \frac{1}{2} \times (Q - (m-1) \times D(p_c) \times t) \times \left( \frac{Q}{D(p_c)} - (m-1) \times t \right) \quad (4)$$

کل موجودی نگهداری شده توسط توزیع کننده در طول یک سیکل برابر با مساحت کل سطح موجودی است. بنابراین اگر کل موجودی در هر سیکل را با  $I$  نشان دهیم مقدار آن به صورت زیر قابل محاسبه است

$$I = \sum_{j=1}^{m-1} S_j + S_m = (m-1) \times \frac{D(p_c) \times t^2}{2} + (K \times t - D(p_c) \times t^2) \times m \times \frac{m-1}{2} + \frac{1}{2} \times (Q - (m-1) \times D(p_c) \times t) \times \left( \frac{Q}{D(p_c)} - (m-1) \times t \right) \quad (5)$$

با ساده رابطه (۵)، مقدار نهایی سطح موجودی توزیع کننده به صورت رابطه (۶) تعیین می‌شود.

$$I = \frac{1}{r} \times \left( \frac{Q^r}{D(p_c)} - (m-1) \times m \times k \times t \right) \quad (6)$$

با توجه به این که میزان موجودی در هر سیکل توزیع کننده مشخص شده است؛ لذا می توان هزینه نگهداری سالیانه آن را تعیین کرد. بر این اساس مقدار آن به صورت زیر محاسبه می شود:

$$C_1(Q, K) = \frac{D(p_c)}{Q} \times h_c \times I = \frac{D(p_c)}{Q} \times h_c \times \frac{1}{r} \times \left( \frac{Q^r}{D(p_c)} - (m-1) \times m \times k \times t \right) \quad (7)$$

همان طور که قبلا بیان شده است در مدل بیان شده روابط  $K = p \times t$  و  $Q = m \times K$ ،  $D(p_c) = \alpha - \beta \times p_c$  بر قرار است. با جایگذاری این روابط در تابع هزینه سالیانه، مقدار آن به صورت رابطه (۸) ساده می شود:

$$C_1(Q, K) = \frac{h_c}{r} \times \left( Q - (Q - K) \times \frac{D(p_c)}{p} \right) \quad (8)$$

### ۳-۱-۲ هزینه خرید محصول

هزینه خرید هر واحد محصول توسط توزیع کننده برابر  $p_s$  است. با توجه به این که کمبود محصول مجاز نیست پس توزیع کننده موظف است کل تقاضای سالیانه خرده فروشان را تامین کند. بنابراین باید به اندازه تقاضای سالیانه خرده فروشان، محصول را از تامین کننده درخواست کند پس میزان خرید توزیع کننده برابر با تقاضای سالیانه خود ( $D(p_c)$ ) است. در این صورت کل هزینه خرید به صورت رابطه (۹) محاسبه می شود.

$$C_2(Q, K) = p_s \times D(p_c) \quad (9)$$

### ۳-۱-۳ هزینه ثابت سفارش دهی سالیانه

زمانی که توزیع کننده سفارشی را صادر می کند هزینه ثابتی برابر با  $A$  باید پرداخت کند با توجه به این که تعداد سیکل سالیانه  $\frac{D(p_c)}{Q}$  است، بنابراین کل هزینه سفارش دهی سالیانه به صورت رابطه (۱۰) است.

$$C_3(Q, K) = A \times \left( \frac{D(p_c)}{Q} \right) \quad (10)$$

### ۳-۱-۴ هزینه حمل

هزینه حمل در طول هر سیکل برابر  $m \times b$  است با توجه به این که تعداد سیکل سالیانه  $\frac{D(p_c)}{Q}$  است هزینه حمل به صورت رابطه (۱۱) است.

$$C_4(Q, K) = m \times b \times \left( \frac{D(p_c)}{Q} \right) = \left( \frac{Q}{K} \times b \times \frac{D(p_c)}{Q} \right) = b \times \left( \frac{D(p_c)}{K} \right) \quad (11)$$

حال می توان هزینه کل سیستم را با جمع زدن هزینه سالیانه نگهداری، هزینه سالیانه خرید مواد اولیه، هزینه سالیانه سفارش دهی و هزینه حمل محصول از رابطه (۱۲) محاسبه کرد.

$$C_8(Q, K) = C_1(Q, K) + C_2(Q, K) + C_3(Q, K) + C_4(Q, K) \quad (12)$$

$$C_8(Q, K) = c \times D(p_c) + b \times \left( \frac{D(p_c)}{K} \right) + A \times \left( \frac{D(p_c)}{Q} \right) + \frac{h_c}{r} \times \left( Q - (Q - K) \times \left( \frac{D(p_c)}{p} \right) \right)$$

## ۳-۱-۵ درآمد سالیانه توزیع کننده

با توجه به عدم وجود کمبود در سیستم بیان شده، توزیع کننده تمام محصول خریداری شده را در طول یک سال به فروش می‌رساند. بنابراین میزان درآمد سالیانه آن برابر است با حاصل ضرب میزان فروش در قیمت فروش آن است که بر اساس رابطه (۱۳) محاسبه می‌شود.

$$U_1(Q, p_c) = p_c \times D(p_c) \quad (13)$$

بنابراین سود توزیع کننده برای یک سیکل به صورت رابطه (۱۴) محاسبه می‌شود:

$$\Gamma_1(Q, K, p_c) = p_c \times D(p_c) - p_s \times D(p_c) - b \times \left(\frac{D(p_c)}{K}\right) - A \times \left(\frac{D(p_c)}{Q}\right) - \frac{h_c}{2} \times \left(Q - (Q - K) \times \left(\frac{D(p_c)}{\lambda(p_s)}\right)\right) \quad (14)$$

## ۳-۲ بررسی سیستم تامین کننده

در این سیستم، تامین کننده محصولی را با نرخ  $p$  تولید می‌کند و با قیمت  $(p_s)$  به توزیع کننده می‌فروشد و در این سیستم هزینه، تقاضا و پارامترهای قیمت گذاری ثابت فرض شده است. تامین کننده بدون کمبود نیاز مشتریان را برآورده می‌کند به همین دلیل باید  $p \geq D(p_c)$  باشد. همچنین همان‌طور که بیان شد، قیمت فروش تامین کننده  $(p_s)$  را به می‌توان به عنوان تابعی از قیمت فروش توزیع کننده  $(p_c)$  نشان داد که در این تحقیق تابع اثرات قیمت به صورت  $p_s(p_c) = \phi + \gamma \times p_c$  بیان شده است. برای تعیین تابع هزینه‌های تامین کننده، کل هزینه‌های سیستم که شامل هزینه نگهداری، هزینه خرید مواد اولیه و هزینه آماده‌سازی و هزینه تولید است، محاسبه می‌شود. هزینه تولید هر واحد محصول  $c$  و هزینه آماده سازی در هر سیکل  $U$  است بر این اساس کل هزینه تامین کننده به ترتیب در ادامه محاسبه می‌شود.

## ۳-۲-۱- هزینه نگهداری

در محاسبه هزینه نگهداری تامین کننده نیاز به محاسبه میزان موجودی تامین کننده است و با توجه به این که در مدل‌های قطعی، میزان موجودی با مساحت قسمت موجودی برابر است. بنابراین با توجه به شکل ۱ مساحت هر سیکل  $\frac{k \times t}{2}$  است. تامین کننده در طول هر سیکل سفارش دهی موظف است به اندازه تعداد دفعات ارسال  $(m)$  این روند را تکرار کند تا سفارش هر دوره توزیع کننده را برآورد کند. پس هزینه نگهداری با استفاده از رابطه (۱۵) محاسبه می‌شود:

$$\text{holding cost} = h_s \times m \times \left(\frac{k \times t}{2}\right) \quad (15)$$

## ۳-۲-۲ هزینه تولید

هزینه تولید در هر سیکل محصول برابر با حاصل ضرب تعداد محصول تولیدی  $(Q = m \times K)$  در هزینه تولید هر واحد محصول که با استفاده از رابطه (۱۶) محاسبه می‌شود:

$$U_2(Q, K) = m \times K \times c \quad (16)$$

### ۳-۲-۳ کل هزینه‌های تامین کننده

حال می‌توان هزینه کل سیستم تامین کننده در هر سیکل را با جمع زدن هزینه نگه‌داری، هزینه تولید، هزینه آماده‌سازی و هزینه خرید مواد اولیه از رابطه (۱۷) محاسبه کرد:

$$U_{\tau}(Q, K) = U + h + U_{\tau} = U + \left( h_s \times m \times \frac{K \times t}{\tau} \right) + m \times K \times c = U + c \times K \times m + \left( \frac{1}{\tau} K \times m \times t \times h_s \right) \quad (17)$$

درآمد تامین کننده در هر سیکل از حاصل ضرب قیمت فروش هر واحد محصول در تعداد فروش تولید کننده در آن سیکل به دست می‌آید که با استفاده از رابطه (۱۸) نشان داده شده است:

$$U_{\tau}(Q, K, p_s) = m \times K \times p_s \quad (18)$$

با توجه به این که  $K = p \times t$  و  $Q = m \times K$  است تفاضل بین هزینه‌ها و درآمد تولید کننده در هر سیکل از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\Gamma_{\tau}(Q, K, p_s) = U_{\tau} - U_{\tau} = -U - c \times K \times m - \frac{1}{\tau} \times K \times m \times t \times h_s + K \times m \times p_s \quad (19)$$

با توجه به اینکه تعداد سیکل سالیانه  $\frac{D_{(p_c)}}{Q}$  است پس سود سالیانه به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\Gamma_{\tau}(Q, K, p_c) = \frac{D_{(p_c)}}{Q} \times (\Gamma_{\tau}(Q, K, p_s)) = \frac{d(p_c) \times (-U - c \times K \times m - \frac{1}{\tau} \times K \times m \times t \times h_s + K \times m \times p_s)}{Q} \quad (20)$$

### ۳-۳ سود یکپارچه سیستم

کل سود سیستم یکپارچه را از طریق مجموع سود سالیانه توزیع کننده و سود سالیانه تامین کننده تعیین می‌شود. بنابراین بر اساس روابط (۱۴) و (۲۰) مقدار آن پس از ساده‌سازی به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\Gamma(Q, K, p_c) = -cd(p_c) - \frac{bd(p_c)}{K} - \frac{Ad(p_c)}{Q} + d(p_c)p_c - \frac{1}{\tau}h(Q) - \frac{(-K+Q)d(p_c)}{\lambda(p_s)} + \frac{d(p_c)(-A - c \times K \times m - \frac{1}{\tau}K \times m \times t \times h_s + K \times m \times p_s)}{Q} \quad (21)$$

### ۳-۴ مدل ریاضی مساله

هدف اصلی در مساله بیان شده، تعیین مقادیر قیمت فروش توزیع کننده، قیمت فروش تولید کننده، میزان سفارش توزیع کننده، تعداد دفعات حمل توسط تولید کننده و در نهایت میزان هر بار حمل است به گونه‌ای که سود یکپارچه سیستم حداکثر گردد. با توجه به نوع مساله بیان شده تعداد دفعات ارسال متغیر گسسته است و حداقل آن برابر یک است چرا که حداقل یک بار ارسال باید انجام شود تا سیستم وظیفه اصلی خود را انجام دهد. همچنین حجم هر بار ارسال نیز متغیر گسسته است. بنابراین بر اساس توضیحات بیان شده مساله را می‌توان به صورت زیر مدل‌سازی کرد.

$$\text{Max } \Gamma(Q, K, p_c)$$

s.t.

$$Q = m \times K$$

$$m \geq 1 \text{ and Int. } \quad K \geq 0 \text{ and Int. } \quad Q \geq 0 \text{ and Int. } \quad p_c \geq 0$$

#### ۴ الگوریتم حل

برای حل مساله ابتدا بدون در نظر گرفتن محدودیت‌ها، مساله حل می‌شود و مقادیر بهینه مساله تعیین می‌شود که برای تعیین جواب بهینه ابتدا لازم است اثبات مقعر بودن مساله انجام شود که در ادامه اثبات مقعر بودن تابع سود انجام شده است و با توجه به مقعر بودن تابع سود، لذا می‌توان انتظار داشت جواب‌های عدد صحیح در اطراف نقطه بهینه به دست آمده در حالت پیوسته متمرکز باشند. بنابراین بر اساس یک الگوریتم پیشنهادی سعی می‌شود مقادیر متغیرهای تصمیم را در اطراف جواب بهینه پیوسته جستجو کرد. در ادامه اثبات مقعر بودن تابع سود کل بیان شده است، سپس بر اساس یک رویکرد ابتکاری برای تعیین جواب بهینه گسسته بیان شده است.

**لم ۱:** تابع سود کل مقعر است.

شرط مقعر بودن تابع سود این است که حاصل عبارت زیر منفی شود.

$$H = [Q \quad p_c \quad K] \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial Q^2} & \frac{\partial}{\partial Q \partial p_c} & \frac{\partial}{\partial Q \partial K} \\ \frac{\partial}{\partial p_c \partial Q} & \frac{\partial}{\partial p_c^2} & \frac{\partial}{\partial p_c \partial K} \\ \frac{\partial}{\partial K \partial Q} & \frac{\partial}{\partial K \partial p_c} & \frac{\partial}{\partial K^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ p_c \\ K \end{bmatrix} \quad (22)$$

مقدار رابطه (۲۲) بعد از ساده‌سازی به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$H = -\frac{2b\alpha}{K} - \frac{2(A+U)\alpha}{Q} - \frac{p_c(-h_c K + h_c Q + 2p \times p_c)\beta}{p} + \frac{K \times p_c \beta h_s}{p} \quad (23)$$

همان‌طور که مشخص است مقدار رابطه (۲۳) کمتر و مساوی صفر است در این صورت تابع سود کل مقعر است.

■

با توجه مقعر بودن تابع سود می‌توان مقدار بهینه متغیرهای تصمیم را بر اساس مشتق اول نسبت به متغیرهای تصمیم تعیین کرد. در ادامه مقادیر مشتق اول تابع سود نسبت به هر یک از متغیرهای تصمیم به دست آورده می‌شود.

✓ مشتق اول تابع سود نسبت به  $Q$

$$\frac{(A+U)(\alpha - p_c \beta)}{Q^2} - \frac{h(p - \alpha + p_c \beta)}{2p} \quad (24)$$

✓ مشتق اول تابع سود نسبت به  $p_c$

$$\alpha + c\beta + \frac{b\beta}{K} + \frac{h(K - Q)\beta}{2p} + \frac{(A+U - 2Qp_c)\beta}{Q} + \frac{K\beta h_s}{2p} \quad (25)$$

✓ مشتق اول تابع سود نسبت به  $k$

$$\frac{(\alpha - p_c \beta)(hK^\gamma - \gamma bp + K^\gamma h_s)}{\gamma K^\gamma p} \quad (26)$$

#### ۴-۱ الگولیتیم حل ابتکاری

**قدم اول:** با مساوی صفر قراردادن مشتق‌های اول (رابطه (۲۴)، (۲۵) و (۲۶)) و حل آنها به صورت هم‌زمان و تعیین مقدار بهینه قیمت فروش توزیع‌کننده، میزان سفارش و مقدار بهینه هر بار ارسال تولیدکننده

**قدم دوم:** اگر مقدار بهینه هر بار ارسال و مقدار تعداد مراحل ارسال  $(m = \frac{Q}{k})$  عدد صحیح باشند به جواب بهینه رسیده‌ایم در غیر این صورت به قدم سوم می‌رویم:

**قدم سوم:** مقدار  $k_1$  و مقدار  $k_2$  به صورت  $k_1^* = [K^*] + 1$ ،  $k_2^* = [K^*]$  تعریف کنید

مقدار  $m_1$  و مقدار  $m_2$  به صورت  $m_1^* = \left[\frac{Q}{K^*}\right] + 1$ ،  $m_2^* = \left[\frac{Q}{K^*}\right]$  تعریف کنید سپس به قدم چهارم بروید

**قدم چهارم:** بر اساس قدم سوم مقدار سفارش دارای چهار حالت زیر می‌شود:

$$Q_2^* = k_2^* \times m_2^* = ([K^*] + 1) \times \left[\frac{Q}{K^*}\right] \quad Q_1^* = k_1^* \times m_1^* = [K^*] \times \left[\frac{Q}{K^*}\right]$$

$$Q_4^* = k_4^* \times m_4^* = ([K^*] + 1) \times \left(\left[\frac{Q}{K^*}\right] + 1\right) \quad Q_3^* = k_3^* \times m_3^* = [K^*] \times \left(\left[\frac{Q}{K^*}\right] + 1\right)$$

**قدم پنجم:** بر اساس رابطه (۲۵) مقدار بهینه قیمت توزیع‌کننده برای چهار حالت بیان شده در قدم چهارم تعیین می‌شود.

**قدم ششم:** بر اساس مقادیر قدم چهارم و پنجم مقادیر سود کل تعیین می‌شود و هر حالتی که بیشترین سود را دارد به عنوان بهترین جواب انتخاب می‌شود.

#### ۴-۲ مثال عددی و تحلیل حساسیت

در این بخش یک مثال عددی برای بررسی مساله مدلسازی‌شده، تحلیل حساسیت و تفسیر نتایج آن بیان شده‌است. فرض کنید در یک سیستم تولیدی که در آن نرخ تولید تامین‌کننده در سال ۱۰۰ واحد است تقاضای توزیع‌کننده به عنوان  $D(p_c) = 50 - 0.3 \times p_c$  واحد در سال تعریف می‌شود. توزیع‌کننده در هر سیکل یک بار سفارش می‌دهد و هزینه سفارش دهی آن برابر با ۵۰۰ واحد پولی در نظر گرفته شده است. هزینه‌های نگهداری هر واحد محصول در سال برای توزیع‌کننده و هزینه‌های حمل‌ونقل برای هر دریافت به ترتیب ۶ واحد پولی و ۲۰ واحد پولی است. هزینه ثابت تولیدی برای تامین‌کننده در هر سیکل تولیدی ۲۰۰ واحد پولی، هزینه نگهداری هر واحد محصول برابر ۴ واحد پولی است و هزینه تولید هر واحد محصول ۴۰ واحد پولی در نظر گرفته شده است. قیمت فروش هر واحد محصول تامین‌کننده وابسته به قیمت فروش توزیع‌کننده است و از تابع  $p_s = 25 + 0.2 \times p_c$  پیروی می‌کند.

### حل مثال بیان شده بر اساس الگوریتم بیان شده

**قدم اول:** معادلات (۲۴)، (۲۵) و (۲۶) به صورت هم زمان حل و نتایج زیر حاصل شده است. (برای حل معادلات به صورت هم زمان از نرم افزار متمتیکا<sup>۱</sup> کمک گرفته شده است)

$$P_c^* = 108/248 \quad Q^* = 70/4153 \quad k^* = 20 \quad \Gamma^*(Q, k, p_c) = 812.59$$

**قدم دوم:** با توجه به این که تعداد دفعات ارسال  $(m = Q/K)$  عدد صحیح نیست جواب حالت پیوسته بهینه نیست. پس بر اساس قدم سوم مقادیر مختلف تعداد دفعات ارسال و حجم هر بار ارسال محاسبه می شود.

**قدم سوم:** مقادیر جدید تعداد دفعات ارسال و حجم هر بار ارسال به صورت زیر محاسبه می شود.

$$m_1^* = \left\lfloor \frac{Q^*}{K^*} \right\rfloor + 1 = 4 \quad m_2^* = \left\lfloor \frac{Q^*}{K^*} \right\rfloor = 3 \quad k_1^* = \lceil K^* \rceil + 1 = 21, k_2^* = \lceil K^* \rceil = 20$$

**قدم چهارم:** مقادیر مختلف سفارش به صورت زیر محاسبه می شود.

$$Q_1^* = k_1^* \times m_1^* = (\lceil K^* \rceil + 1) \times \left\lfloor \frac{Q^*}{K^*} \right\rfloor = 63 \quad Q_2^* = k_2^* \times m_2^* = \lceil K^* \rceil \times \left\lfloor \frac{Q^*}{K^*} \right\rfloor = 60$$

$$Q_3^* = k_1^* \times m_2^* = \lceil K^* \rceil \times \left( \left\lfloor \frac{Q^*}{K^*} \right\rfloor + 1 \right) = 80 \quad Q_4^* = k_2^* \times m_1^* = (\lceil K^* \rceil + 1) \times \left( \left\lfloor \frac{Q^*}{K^*} \right\rfloor + 1 \right) = 84$$

**قدم پنجم:** مقادیر قیمت فروش توزیع کننده متناظر با مقادیر مختلف سفارش به صورت زیر محاسبه می شود.

$$P_{c2}^* = 108/945 \quad P_{c3}^* = 107/508 \quad P_{c4}^* = 107/241 \quad P_{c1}^* = 109/342$$

**قدم ششم:** مقادیر سود متناظر با مقادیر مختلف سفارش و قیمت فروش توزیع کننده به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\Gamma^*(Q_2^*, k_2^*, P_{c2}^*) = 810/534$$

$$\Gamma^*(Q_1^*, k_1^*, P_{c1}^*) = 808/428$$

$$\Gamma^*(Q_4^*, k_4^*, P_{c4}^*) = 807/416$$

$$\Gamma^*(Q_3^*, k_3^*, P_{c3}^*) = 808/913$$

با توجه به این که بیشترین سود مربوط به حالت دوم است پس بهترین جواب به صورت زیر است.

$$\Gamma^*(Q_2^*, k_2^*, P_{c2}^*) = 810/534 \quad P_{c2}^* = 108/945 \quad Q_1^* = k_1^* \times m_1^* = (\lceil K^* \rceil + 1) \times \left\lfloor \frac{Q^*}{K^*} \right\rfloor = 63$$

$$K^* = k_1^* = 21 \quad \text{and} \quad m^* = m_1^* = 3$$

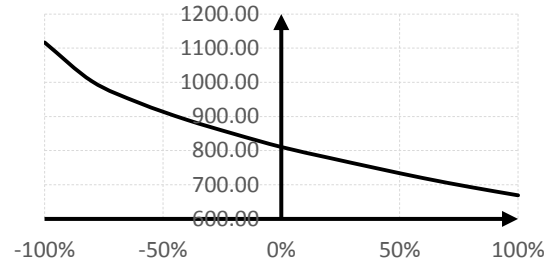
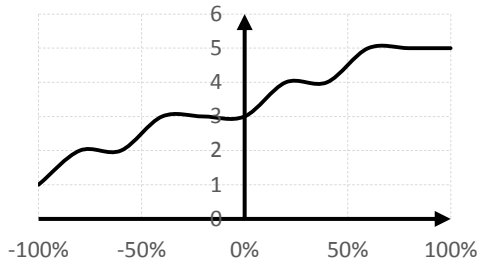
### ۵ تحلیل حساسیت

برای تحلیل حساسیت و راست آزمایی مدل، تغییرات جواب بهینه و سود بهینه نسبت به تغییرات پارامترهای مدل بررسی می شود. پارامترهایی که در این مساله تغییرات آنها مورد بررسی قرار گرفته است شامل، هزینه ثابت سفارش دهی توزیع کننده، هزینه ثابت آماده سازی، هزینه نگهداری توزیع کننده، هزینه نگهداری تولید کننده و هزینه حمل و نقل هر بار ارسال هستند. در این قسمت سعی می شود یکی از پارامترها را تغییر دهیم در حالی که مقدار سایر پارامترها ثابت فرض می شود. در تحلیل حساسیت پارامترها، در تغییرات هر پارامتر ۱۰ مساله مختلف در نظر گرفته شده و نتایج عددی آنها در جدول انشان داده شده است.

جدول ۱. تغییرات جواب بهینه مدل پیشنهادی بر اثر تغییرات پارامترهای مدل

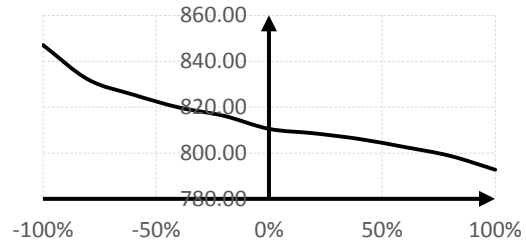
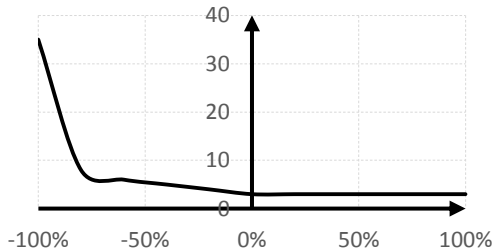
ردیف	تعداد سفارش	پارامتر				متغیرهای تصمیم							سود یکپارچه بهینه
		هزینه ثابت سفارش توزیع کننده	هزینه ثابت آماده‌سازی تولید کننده	هزینه نگهداری توزیع کننده	هزینه نگهداری تولید کننده	هزینه حمل و نقل	مقدار بهینه هر بار ارسال	مقدار بهینه سفارش دهی	تعداد بهینه ارسال	قیمت بهینه تولید کننده	قیمت بهینه توزیع کننده		
تعداد سفارش	۱	۱۰۰	۰	۰	۰	۲۰	۲۰	۲۰	۱	۵۲/۸۰۶۶	۱۰۴/۰۳۳	۱۱۱۶/۸۸	
	۲	۸۰	۱۰۰	۴۰	۰	۲۰	۲۰	۴۰	۲	۵۳/۰۹۶۶	۱۰۵/۴۸۳	۱۰۰۳/۰۲	
	۳	۶۰	۲۰۰	۸۰	۰	۲۰	۲۰	۴۰	۲	۵۳/۴۴۶۶	۱۰۷/۱۳۳	۹۳۹/۸۰	
	۴	۴۰	۳۰۰	۱۲۰	۰	۲۰	۲۰	۶۰	۳	۵۳/۳۸۶۶	۱۰۶/۹۳۳	۸۹۰/۴۲	
	۵	۲۰	۴۰۰	۱۶۰	۰	۲۰	۲۰	۶۰	۳	۵۳/۶۲	۱۰۸/۱۰۰	۸۴۹/۰۲	
	۶	۲۰	۶۰۰	۲۴۰	۰	۲۰	۲۰	۸۰	۴	۵۳/۶۷۶۶	۱۰۸/۳۸۳	۷۷۹/۰۸	
	۷	۴۰	۷۰۰	۲۸۰	۰	۲۰	۲۰	۸۰	۴	۵۳/۸۵۱۶	۱۰۹/۲۵۸	۷۴۸/۷۲	
	۸	۶۰	۸۰۰	۳۲۰	۰	۲۰	۱۹	۹۵	۵	۵۳/۷۶۰۸	۱۰۸/۸۰۴	۷۱۹/۴۱	
	۹	۸۰	۹۰۰	۳۶۰	۰	۲۰	۲۰	۱۰۰	۵	۵۳/۸۲۶۶	۱۰۹/۱۳۳	۶۹۳/۰۳	
	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۴۰۰	۰	۲۰	۲۰	۱۰۰	۵	۵۳/۹۶۶۶	۱۰۹/۸۳۳	۶۶۹/۰۱	
تعداد سفارش	۱	۱۰۰	۵۰۰	۲۰۰	۰	۲	۷۰	۳۵	۳۵	۵۳/۴۴۶۶	۱۰۷/۲۳۳	۸۴۷/۰۷	
	۲	۸۰	۵۰۰	۲۰۰	۰	۴	۷۲	۸	۷۲	۵۳/۵۱۲۴	۱۰۷/۴۶۲	۸۳۲/۰۲	
	۳	۶۰	۵۰۰	۲۰۰	۰	۸	۷۲	۶	۷۲	۵۳/۵۴۹۶	۱۰۷/۷۴۸	۸۲۵/۴۳	
	۴	۴۰	۵۰۰	۲۰۰	۰	۱۲	۷۵	۵	۷۵	۵۳/۵۳	۱۰۷/۶۵	۸۱۹/۸۹	
	۵	۲۰	۵۰۰	۲۰۰	۰	۱۶	۷۲	۴	۷۲	۵۳/۶۰۱۸	۱۰۸/۰۰۹	۸۱۶/۲۲	
	۶	۲۰	۵۰۰	۲۰۰	۰	۲۴	۶۶	۳	۶۶	۵۳/۷۴۸۴	۱۰۸/۷۴۲	۸۰۸/۵۹	
	۷	۴۰	۵۰۰	۲۰۰	۰	۲۸	۶۹	۳	۶۹	۵۳/۷۱۰۸	۱۰۸/۵۵۴	۸۰۶/۱۱	
	۸	۶۰	۵۰۰	۲۰۰	۰	۳۲	۷۵	۳	۷۵	۵۳/۶۲۸	۱۰۸/۱۴	۸۰۲/۶۱	
	۹	۸۰	۵۰۰	۲۰۰	۰	۳۶	۷۸	۳	۷۸	۵۳/۵۹۸۶	۱۰۷/۹۹۳	۷۹۸/۷۹	
	۱۰	۱۰۰	۵۰۰	۲۰۰	۰	۴۰	۸۴	۳	۸۴	۵۳/۵۳۰۸	۱۰۷/۶۵۴	۷۹۲/۷۴	
تعداد سفارش	۱	۳۳	۵۰۰	۲۰۰	۰	۲۰	۲۲	۸۸	۴	۵۳/۴۶۵	۱۰۷/۳۲۵	۸۸۰/۴۳	
	۲	۲۰	۵۰۰	۲۰۰	۰	۲۰	۲۱	۸۴	۴	۵۳/۴۸۶	۱۰۷/۴۳	۸۵۱/۰۹	
	۳	۳	۵۰۰	۲۰۰	۰	۲۰	۲۰	۸۰	۴	۵۳/۵۰۷۶	۱۰۷/۵۳۸	۸۱۶/۸۵	
	۴	۱۵	۵۰۰	۲۰۰	۰	۲۰	۲۰	۶۰	۳	۵۳/۸۳۵۴	۱۰۹/۱۷۷	۷۸۴/۵۳	
	۵	۳۸	۵۰۰	۲۰۰	۰	۲۰	۱۹	۵۷	۳	۵۳/۸۸۰۲	۱۰۹/۴۰۱	۷۴۷/۲۴	
	۶	۹۸	۵۰۰	۲۰۰	۰	۲۰	۱۶	۴۸	۳	۵۴/۰۹۱۶	۱۱۰/۴۵۸	۶۶۲/۲۲	
	۷	۱۳۸	۵۰۰	۲۰۰	۰	۲۰	۱۵	۴۵	۳	۵۴/۱۷۱	۱۱۰/۸۵۵	۶۱۲/۷۲	
	۸	۱۸۷	۵۰۰	۲۰۰	۰	۲۰	۱۳	۳۹	۳	۵۴/۴۱۷۸	۱۱۲/۰۸۹	۵۵۸/۲۲	
	۹	۲۴۳	۵۰۰	۲۰۰	۰	۲۰	۱۲	۳۶	۳	۵۴/۵۵۴۶	۱۱۲/۷۷۳	۵۰۰/۵۶	
	۱۰	۳۱۳	۵۰۰	۲۰۰	۰	۲۰	۱۱	۳۳	۳	۵۴/۷۱۸۸	۱۱۳/۵۹۴	۴۳۵/۸۰	

بر اساس نتایج به دست آمده از تحلیل حساسیت هزینه‌های ثابت راه‌اندازی و سفارش دهی، با افزایش این هزینه‌ها به صورت هم‌زمان، تعداد دفعات دریافت محصول در هر سیکل افزایش می‌یابد (شکل ۴) و از طرف دیگر با افزایش تعداد دریافت محصول در هر سیکل، مقدار سفارش دهی هر سیکل افزایش می‌یابد و این امر باعث افزایش هزینه نگهداری می‌شود و در نهایت مقدار سود بهینه روند کاهشی خواهد داشت (شکل ۳).

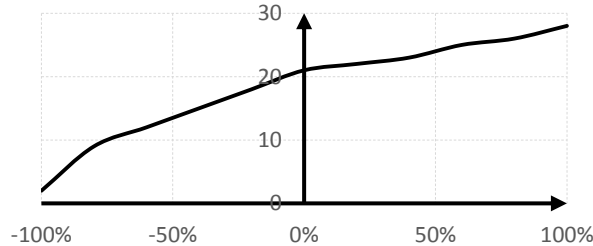


**شکل ۳.** تغییرات سود نسبت به تغییرات هزینه‌های آماده‌سازی و سفارش‌دهی  
**شکل ۴.** تغییرات تعداد دریافت در هر سیکل نسبت به تغییرات هزینه‌های آماده‌سازی و سفارش‌دهی

در ادامه به بررسی تغییرات هزینه حمل و نقل هر بار ارسال پرداخته شده است و نتایج نشان می‌دهد، با افزایش هزینه حمل هر بار ارسال، تعداد دفعات دریافت محصول در هر سیکل کاهش (شکل ۶) ولی حجم محصول دریافتی در هر بار ارسال افزایش می‌یابد (شکل ۷) و حاصل این تغییرات، باعث افزایش مقدار سفارش‌دهی هر سیکل می‌شود و علت آن نیز به خاطر افزایش هزینه‌های حمل و نقل است و در نهایت مقدار سود بهینه روند کاهشی خواهد داشت (شکل ۵).

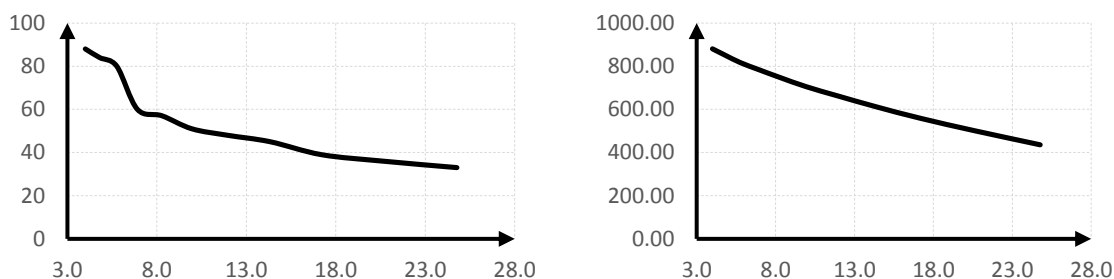


**شکل ۵.** حساسیت سود نسبت هزینه ثابت حمل هر بار ارسال  
**شکل ۶.** حساسیت تعداد دفعات دریافت نسبت به تغییرات هزینه ثابت حمل هر بار ارسال

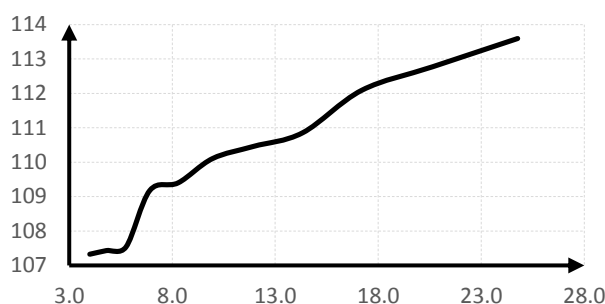


**شکل ۷.** حساسیت مقدار بهینه هر بار ارسال نسبت به تغییرات هزینه ثابت حمل هر بار ارسال

همچنین نتایج حاصل از تغییرات هزینه نگهداری واحد محصول در واحد زمان نشان می‌دهد با افزایش هزینه نگهداری هر واحد محصول توزیع‌کننده، کل سود سیستم کاهش می‌یابد (شکل ۸). علت این امر، افزایش هزینه نگهداری که باعث افزایش قیمت فروش (شکل ۱۰)، کاهش تقاضای مشتری و در نتیجه کاهش میزان سفارش (شکل ۹) است.



**شکل ۸.** حساسیت سود کل نسبت تغییرات هزینه نگهداری هر واحد **شکل ۹.** تغییرات میزان سفارش نسبت تغییرات هزینه نگهداری هر واحد محصول توسط توزیع کننده



**شکل ۱۰.** تغییرات قیمت فروش توزیع کننده نسبت تغییرات هزینه نگهداری هر واحد محصول آن

در ادامه به مقایسه روش پیشنهادی با مدل سفارش اقتصادی که توزیع کننده تمام سفارشات را به صورت یکجا دریافت می کند (حالت کلاسیک) پرداخته می شود. بر اساس مثال بیان شده، به بررسی تغییرات پارامترها بر جواب بهینه مدل کلاسیک پرداخته می شود و در نهایت جواب مدل پیشنهادی که در جدول ۱ آورده شده است با حالت کلاسیک آن مقایسه می شود. برای مقایسه تابع سود دو مدل از شاخص<sup>۱</sup> RPD استفاده شده است. RPD شاخصی برای اندازه گیری تغییرات داده ها است و به صورت زیر تعریف می شود.

$$RPD = \frac{\text{مقدار سود بهینه مدل کلاسیک} - \text{مقدار سود بهینه مدل دریافت چندگانه}}{\text{مقدار سود بهینه مدل دریافت چندگانه}} \times 100 \quad (27)$$

بر اساس نتایج به دست آمده در جدول ۲ مشخص است که با افزایش هزینه ثابت سفارش دهی و هزینه راه اندازی مقدار شاخص RPD افزایش می یابد و این امر بیان می کند در سیستم های مدیریت موجودی، هر چه مقدار هزینه های ثابت سفارش دهی و یا راه اندازی افزایش یابد، کارایی مدل پیشنهادی افزایش می یابد به عبارت دیگر در یک سیستم تولیدی یا سفارش دهی، اگر مقدار هزینه ثابت راه اندازی و یا هزینه ثابت سفارش دهی عددی بزرگی باشد سیاست دریافت چندگانه دارای کارایی بهتری نسبت به مدل کلاسیک دارد و بهبود هزینه و سود آن قابل توجه است در چنین مواقعی مدیریت واحد تولیدی یا شرکت خدماتی بهتر است از سیاست دریافت چندگانه استفاده کند. در این مقاله منظور از مدل کلاسیک، مدل های کنترل موجودی با یکبار دریافت در هر سیکل است. در مساله بررسی شده، توزیع کننده محصولات خود را طی چند مرحله دریافت می کند ولی در مدل های پایه ای

<sup>1</sup> Relative Percent Difference

کنترل موجودی، مانند مدل EOQ دریافت در هر سیکل فقط یک بار انجام می‌شود. بر این اساس تابع سود کل تولیدکننده و توزیع‌کننده در حالتی دریافت و ارسال یک بار در هر سیکل باشد به صورت زیر است.

$$\mathfrak{R}(Q, p_c) = -c \times d(p_c) - \frac{d(p_c)}{Q}(b+A) + d(p_c) \times p_c - \frac{1}{\gamma} h \times Q + \frac{d(p_c)(-A - c \times Q - \frac{1}{\gamma} Q \times t \times h_s + Q \times p_s)}{Q} \quad (28)$$

تفاوت سود یکپارچه مدل کلاسیک (رابطه (۲۸)) با مدل پیشنهادی در این است که در مدل کلاسیک تعداد دریافتها در هر سیکل برابر با یک است؛ لذا مقدار m در مدل کلاسیک برابر یک بوده و این امر باعث می‌شود که مقدار K و Q با هم برابر شوند. لذا تنها مجهول مساله در مدل کلاسیک، میزان سفارش است.

**جدول ۲. تغییرات جواب بهینه مدل کلاسیک بر اثر تغییرات پارامترهای مدل**

تغییرات پارامتر	تغییرات پارامتر	پارامتر					مقدار بهینه سفارش دهی (Q)	قیمت بهینه تولیدکننده	قیمت بهینه توزیع‌کننده	سود	RPD	
		تغییرات پارامتر	تغییرات پارامتر	تغییرات پارامتر	تغییرات پارامتر	تغییرات پارامتر						
تغییرات پارامترهای سفارش دهی	۱	-۶۰	۲۰۰	۸۰	۶	۴	۲۰	۳۹/۸۴۰	۴۶/۴۹۹	۱۰۷/۴۹۷	۹۳۰/۸۰۲	%۰/۹۵
	۲	-۲۰	۴۰۰	۱۶۰	۶	۴	۲۰	۵۴/۶۸۳	۴۶/۸۳۷	۱۰۹/۱۸۳	۸۲۷/۲۴۷	%۲/۵۶
	۳	۲۰	۶۰۰	۲۴۰	۶	۴	۲۰	۶۵/۸۸۸	۴۷/۱۰۴	۱۱۰/۵۱۸	۷۴۸/۱۲۳	%۳/۹۷
	۴	۶۰	۸۰۰	۳۲۰	۶	۴	۲۰	۷۵/۱۶	۴۷/۳۳۴	۱۱۱/۶۶۹	۶۸۱/۹۵۱	%۵/۲۱
	۵	۱۰۰	۱۰۰۰	۴۰۰	۶	۴	۲۰	۸۳/۱۶۵	۴۷/۵۴۰	۱۱۲/۷۰۲	۶۲۴/۱۵۳	%۶/۷۰
تغییرات پارامترهای حمل و نقل	۶	-۱۰۰	۵۰۰	۲۰۰	۶	۴	۰	۵۹/۷۹۱	۴۶/۹۶	۱۰۹/۷۸۵	۷۹۱/۲۸۵	%۶/۵۹
	۷	-۶۰	۵۰۰	۲۰۰	۶	۴	۸	۶۰/۶۱۱۴	۴۶/۹۶۵	۱۰۹/۸۲۳	۷۸۹/۰۰۹	%۴/۴۱
	۸	-۲۰	۵۰۰	۲۰۰	۶	۴	۱۶	۶۰/۴۳۴	۴۶/۹۷۲	۱۰۹/۸۶۱	۷۸۶/۷۴۶	%۳/۶۱
	۹	۲۰	۵۰۰	۲۰۰	۶	۴	۲۴	۶۰/۷۵۳	۴۶/۹۸۰	۱۰۹/۸۹۹	۷۸۴/۴۹۷	%۲/۹۸
	۱۰	۶۰	۵۰۰	۲۰۰	۶	۴	۳۲	۶۱/۰۶۹	۴۶/۹۸۷	۱۰۹/۹۳۷	۷۸۲/۲۶۱	%۲/۵۴
تغییرات پارامترهای نگهداری	۱۱		۵۰۰	۲۰۰	۴	۴	۲۰	۷۲/۸۶۵	۴۶/۸۰۱	۱۰۹/۰۰۳	۸۵۱/۸۱۲	%۳/۲۵
	۱۲		۵۰۰	۲۰۰	۵.۸	۴	۲۰	۶۱/۵۶۲	۴۶/۹۵۹	۱۰۹/۷۹۷	۷۹۱/۷۲۸	%۳/۰۸
	۱۳		۵۰۰	۲۰۰	۸.۳	۴	۲۰	۵۱/۸۷۳	۴۷/۱۵۸	۱۱۰/۷۹۲	۷۲۱/۳۱۸	%۳/۴۷
	۱۴		۵۰۰	۲۰۰	۱۱.۹	۴	۲۰	۴۳/۳۴۱	۴۷/۴۱۵	۱۱۲/۰۷۳	۶۳۶/۲۶۳	%۳/۹۲
	۱۵		۵۰۰	۲۰۰	۱۷.۲	۴	۲۰	۳۵/۸۰۳	۴۷/۷۴۹	۱۱۳/۷۴۶	۵۳۲/۲۶۱	%۴/۶۵

همچنین با افزایش هزینه حمل هر بار دریافت، همان طور که از جدول ۱ پیداست، تعداد دریافت‌ها در هر بار سفارش کاهش می‌یابد و این امر باعث می‌شود که سیستم دریافت چندگانه به سمت مدل کلاسیک سوق پیدا کند و مقدار RPD ردیف‌های ۶ الی ۱۰ جدول ۲ گویای این مطلب است که با افزایش مقدار هزینه حمل، مقدار این شاخص کاهش می‌یابد. در چنین مواقعی اگر هزینه‌های حمل و نقل زیاد باشد تصمیم مناسب برای مدیریت، دریافت به صورت یک مرحله‌ای است. در نهایت به بررسی تاثیر هزینه نگهداری در انتخاب سیستم سفارش‌دهی پرداخته می‌شود در ردیف‌های ۱۱ الی ۱۵ جدول ۲ هزینه نگهداری سیستم افزایش یافته است و اثرات این افزایش، باعث افزایش شاخص RPD و در نتیجه افزایش کارایی مدل پیشنهادی است. بنابراین مدل پیشنهادی برای زمانی که هزینه نگهداری یا هزینه سفارش‌دهی عدد بزرگی باشد کارایی خیلی بهتری نسبت به مدل کلاسیک دارد و در چنین مواقعی پیشنهاد می‌شود مدیریت از سیستم دریافت چندگانه استفاده نماید.

## ۶ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله سیستم یکپارچه تامین‌کننده-توزیع‌کننده مورد بررسی قرار گرفته است. تولیدکننده محصولات تولیدی خود را بر اساس سیاست خود بر اساس تولید به هنگام برای توزیع‌کننده ارسال می‌کند و توزیع‌کننده نیز بر اساس پیش‌بینی‌های خود تقاضای ادغامی مشتریان را پیش‌بینی می‌کند و در این مقاله فرض شده است که نوسانات تقاضا ادغامی مشتریان بسیار کم است که از این تغییرات صرفه‌نظر شده است؛ بنابراین تقاضای مشتریان توزیع‌کننده فقط به قیمت فروش وابسته است. در این سیستم توزیع‌کننده سفارش مورد نیاز یک سیکل خود را برای تامین‌کننده ارسال می‌کند و تامین‌کننده محصولات سفارش داده‌شده توسط توزیع‌کننده را در چند مرحله ارسال می‌کند. قیمت فروش تولیدکننده وابسته به قیمت فروش توزیع‌کننده است که به صورت یک تابع افزایشی نسبت به قیمت فروش توزیع‌کننده بیان شده است. مساله بیان‌شده، مدل‌سازی شده و بر اساس یک الگوریتم پیشنهادی جواب بهینه مساله به دست آمده است. نتایج محاسباتی نشان می‌دهد که مساله پیشنهادی وابستگی خیلی زیادی نسبت به هزینه نگهداری و هزینه ثابت سفارش‌دهی و راه اندازی دارد. در مسایل برنامه‌ریزی و کنترل موجودی در زمینه موضوع بررسی شده ممکن است تغییرات تقاضا ناچیز نباشد و در این صورت می‌توان آن را به صورت غیرقطعی بررسی کرد. در چنین حالتی، تغییرات زیاد تقاضا پیچیدگی مساله را افزایش داده و می‌تواند زمینه مناسبی برای توسعه مدل پیشنهادی باشد. همچنین بررسی مساله در حالت چند تولیدکننده و چند توزیع‌کننده با در نظر گرفتن مواردی مانند رقابت بین اعضای زنجیره توسعه مناسبی برای چنین مسایلی خواهد بود.

## منابع

- [1] F.W. Harris,(1913), "How many parts to make at once", Factory, the Magazine of Management, 10: 135-136.
- [2] E. Taft,(1918), "The most economical production lot", Iron Age, 101: 1410-1412.
- [3] H. Sadeghi,(2019), "Optimal pricing and replenishment policy for production system with discrete demand", International Journal of Industrial Engineering and Management Science, 6: 37-50.

- [4] G.A. Widyadanaa, H.M. Wee, 2009, "A multi-product EPQ model with discrete delivery order: a Langrangean solution approach", *Global perspective for competitive enterprise, economy and ecology*, Springerpp. 601-608.
- [5] H.M. Wee, G.A. Widyadana,(2013), "Single-vendor single-buyer inventory model with discrete delivery order, random machine unavailability time and lost sales", *International Journal of Production Economics*, 143: 574-579.
- [6] S.H.R. Pasandideh, S.T.A. Niaki,(2010), "Optimizing the economic production quantity model with discrete delivery orders", *Journal of Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research*, 44: 49-62.
- [7] L.E. Cárdenas-Barrón, G. Treviño-Garza, G.A. Widyadana, H.-M. Wee,(2014), "A constrained multi-products EPQ inventory model with discrete delivery order and lot size", *Applied Mathematics and Computation*, 230: 359-370.
- [8] A.H. Nobil, A.H.A. Sedigh, L.E. Cárdenas-Barrón,(2017), "A multiproduct single machine economic production quantity (EPQ) inventory model with discrete delivery order, joint production policy and budget constraints", *Annals of Operations Research*, DOI: 1-37.
- [9] S. Shafiee-Gol, M.M. Nasiri, A.A. Taleizadeh,(2016), "Pricing and production decisions in multi-product single machine manufacturing system with discrete delivery and rework", *Opsearch*, 53: 873-888.
- [10] H. Sadeghi, A. Makui, H. Heydari,(2013), "Determining the periodicity and planned lead time in serial-production systems with dependent demand and uncertain lead time", *Uncertain Supply Chain Management*, 1: 87-98.
- [11] H. Sadeghi, A. Makui, M. Heydari,(2016), "Multilevel production systems with dependent demand with uncertainty of lead times", *Mathematical Problems in Engineering*, 2016.
- [12] H. Sadeghi, A. Makui, M. Heydari, A.H. Ghapanchi,(2015), "Proposing a model for optimising planned lead-times and periodicity in MRP systems under uncertainty", *International Journal of Services and Operations Management*, 21: 310-331.
- [13] M. AlDurgam, K. Adegbola, C.H. Glock,(2017), "A single-vendor single-manufacturer integrated inventory model with stochastic demand and variable production rate", *International Journal of Production Economics*, 191: 335-350.
- [14] Y. Liu, Q. Li, Z. Yang,(2019), "A new production and shipment policy for a coordinated single-vendor single-buyer system with deteriorating items", *Computers & Industrial Engineering*, 128: 492-501.
- [15] A. Mahmoodi, H. Sadeghi,(2020), "Developing (1, T) Policy for Two-level Inventory Systems with non-Identical Retailers and Perishable Items", *Journal of Operational Research and Its Applications*, 17: 27-46.
- [16] Y.-J. Lin, C.-H. Ho,(2011), "Integrated inventory model with quantity discount and price-sensitive demand", *Top*, 19: 177-188.
- [17] B. Pal, S.S. Sana, K. Chaudhuri,(2012), "Multi-item EOQ model while demand is sales price and price break sensitive", *Economic Modelling*, 29: 2283-2288.
- [18] S. Tiwari, L.E. Cárdenas-Barrón, M. Goh, A.A. Shaikh,(2018), "Joint pricing and inventory model for deteriorating items with expiration dates and partial backlogging under two-level partial trade credits in supply chain", *International Journal of Production Economics*, 200: 16-36.
- [19] S. Rezaee, M. khakestari,(2019), "An Introduction to Hybrid Model Inventory Control with a Green Supplier Selection Model under Uncertainty", *Journal of Operational Research and Its Applications*, 16: 73-87.
- [20] M. Rastogi, S. Singh,(2019), "An inventory system for varying deteriorating pharmaceutical items with price-sensitive demand and variable holding cost under partial backlogging in healthcare industries", *Sādhanā*, 44: 95.
- [21] H. Sadeghi, H. Golpîra, S.A.R. Khan,(2021), "Optimal integrated production-inventory system considering shortages and discrete delivery orders", *Computers & Industrial Engineering*, 156: 107233.
- [22] B. Karthick, R. Uthayakumar,(2021), "Optimizing an imperfect production model with varying setup cost, price discount, and lead time under fuzzy demand", *Process Integration and Optimization for Sustainability*, 5: 13-29.