

## برخی شرایط لازم و کافی برای شناسایی نقاط اتکا در تحلیل پوششی داده‌ها

علی اکبر بانی<sup>۱</sup>، محسن رستمی مال خلیفه<sup>۲\*</sup>، فرهاد حسین زاده لطفی<sup>۳</sup>، داریوش اکبریان<sup>۴</sup>

۱- دکتری، گروه ریاضی، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

۲- دانشیار، گروه ریاضی، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

۳- استاد، گروه ریاضی، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

۴- استادیار، گروه ریاضی، واحد اراک، دانشگاه آزاد اسلامی، اراک، ایران

رسید مقاله: ۱۰ فروردین ۱۳۹۹

پذیرش مقاله: ۱۷ شهریور ۱۳۹۹

### چکیده

مطالعه نقاط اتکا با توجه به موقعیت استراتژیکی که در مجموعه امکان تولید (PPS) دارد، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. آن‌ها متصل‌کننده‌ی بخش کارا و ناکارای مرز PPS در تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) هستند. در این مقاله نقاط اتکا به عنوان زیرمجموعه‌ای از مجموعه نقاط کارای راسی مجموعه امکان تولید مورد مطالعه قرار گرفته است. بدین منظور در این کار دو شرط لازم و کافی و دو شرط کافی برای شناسایی نقاط اتکا در مدل‌های BCC آورده شده است. از آنجا که یکی از کاربردهای این نقاط در مبحث بهبود پوششی می‌باشد، در برخی موارد شناسایی همه‌ی نقاط اتکا ضروری نیست، بنابراین شرایط ذکر شده در این مقاله برای رسیدن به این هدف راهگشا است.

**کلمات کلیدی:** تحلیل پوششی داده‌ها، نقطه اتکا، مجموعه امکان تولید، مرز کارا و ناکارا.

### ۱ مقدمه

نخستین قدم‌ها در تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) به وسیله فارل [۱] و چارنز و همکاران [۲] برداشته شد. تحلیل پوششی داده‌ها یک تکنیک ناپارامتری و ابزار قدرتمندی برای ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیرنده (DMU) با چند ورودی و چند خروجی همگن می‌باشد [۳،۴]. در این تکنیک لزومی ندارد تابع تولید از پیش تعیین شده باشد. اولین مدل تحلیل پوششی داده‌ها توسط چارنز و همکاران [۲] برای بازده به مقیاس ثابت (CRS) مطرح شد و سپس به وسیله بنکر و همکاران [۵] برای حالت بازده به مقیاس متغیر (VRS) گسترش یافت.

یک نقطه اتکا در DEA یک واحد کارای راسی است [۶] به طوری که برخی از مولفه‌های ورودی آن می‌توانند افزایش یابند و/یا برخی از مولفه‌های خروجی آن می‌توانند کاهش یابند و DMU مجازی ساخته شده همچنان بر روی مرز مجموعه امکان تولید (PPS) باقی بماند. به عبارت دیگر، یک نقطه اتکا یک واحد راسی

\* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: mohsen\_rostamy@yahoo.com

مجموعه امکان تولید است به طوری که در این نقطه، از مرز کارا به بخش دسترسی آزاد مرز، انتقال انجام می‌شود. به علاوه لازم به ذکر است که نقاط اتکا در تحلیل پوششی داده‌ها نقش بسیار موثری را هم از نقطه نظر تئوری و هم نقطه نظر کاربردی بازی می‌کنند. اولین بار تاناسولیس و آلن [۷] مفهوم این نقاط را به منظور ساخت  $DMU$  های مشاهده‌نشده و گسترش مرز کارای  $DEA$  به کار بردند. راز [۸] از این مفهوم به منظور شناسایی قیمت‌ها در خدمات مراقبتی درمانی استفاده کرد. همچنین این نقاط نقش موثری را در [۹] در معرفی  $DMU$  های مشاهده‌نشده بازی می‌کنند. بوگونول و دولو [۱۰] روشی دیگر برای شناسایی آن‌ها بر پایه‌ی خصوصیات هندسی نقاط اتکا فراهم کردند. آنها بحث و بررسی خود را بر روی مجموعه امکان تولید با بازده به مقیاس متغیر انجام دادند. در روش آن‌ها  $PPS$  مدل  $BCC$  یکی پس از دیگری بر روی صفحات مختصات تصویر می‌شود، اکنون یک  $DMU$  کارای راسی یک نقطه اتکاست اگر و فقط اگر متعلق به مرز حداقل یکی از این تصاویر ساده باشد. مصطفایی و سلیمانی دامنه [۱۱] روشی را برای یافتن نقاط اتکا به کمک تکنیک تحلیل حساسیت پیشنهاد دادند و همچنین برخی شرایط برای شناسایی نقاط اتکا در [۱۲] ارایه دادند. بانی و همکاران [۱۳] روشی دیگر برای شناسایی این نقاط بر اساس یافتن ابرصفحه تکیه‌کننده ضعیف گذرنده از  $DMU$  کارای راسی مورد بررسی، معرفی کردند. به علاوه کارهای متفاوت دیگر با موارد اشاره‌شده بالا در محیط نامحدوب و همچنین بهینه‌سازی چند هدفه نیز انجام شده است [۱۴، ۱۵]. دیدن مراجع [۱۶، ۱۷] نیز به جهت جزئیات بیشتر خالی از لطف نیست.

در این مقاله، دو شرط لازم و کافی به همراه دو شرط کافی برای شناسایی نقاط اتکا در تکنولوژی  $VRS$  بیان شده است. بهبود پوششی از جمله مفاهیمی است که از نقاط اتکا به منظور گسترش مرز کارای قوی استفاده می‌کند. این مفهوم مبتنی بر تعریف واحدهای تصمیم‌گیرنده‌ی مشاهده‌نشده‌ای می‌باشد که توسط تعدیل سطوح ورودی و خروجی واحدهای تصمیم‌گیرنده‌ی کارای مشاهده‌شده‌ی خاص (نقاط اتکا) ایجاد می‌گردند. بنابراین در بعضی موارد یافتن برخی از نقاط اتکا (نه همگی آن‌ها) برای این مقصود کافی است و بعضی از روش‌های ارایه‌شده در این کار از نقطه نظر کاهش محاسبات نسبت به روش‌های پیشین دارای مزیت است.

ادامه مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است: در بخش دوم برخی پیشنیازها و مقدمات گفته شده است. بخش سوم به چهار زیر بخش تقسیم شده است. در دو زیر بخش ابتدایی دو شرط کافی و سپس در دو زیر بخش بعدی دو شرط لازم و کافی شرح داده می‌شود. بخش چهارم یک مثال کاربردی به جهت ارزیابی روش‌های ارایه‌شده و سپس در بخش پنجم نتایج مربوطه بیان شده است.

## ۲ پیش‌نیازها

فرض کنیم یک مجموعه شامل  $n$  تا  $DMU$  داریم به طوری که  $DMU_j: j=1, \dots, n$  ورودی‌های  $x_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj}) \geq 0$  را به منظور تولید خروجی‌های  $y_j = (y_{1j}, \dots, y_{sj}) \geq 0$  مصرف می‌کنند. به علاوه نماد  $(x_j, y_j) (j \in J = \{1, \dots, n\})$  برای  $DMU$  های مشاهده‌شده به کار می‌رود که در آن اولین مولفه بردار ورودی و دومین مولفه بردار خروجی را نشان می‌دهد  $((x_j, y_j) \neq 0, \forall j \in J)$ . مجموعه امکان تولید عبارت است از گردآیه‌ی همه ترکیبات ورودی-خروجی ممکن که به صورت زیر تعریف می‌شود [۵، ۱۸].

$$T = \{ (x, y) \mid x \text{ می تواند } y \text{ را تولید کند} \}$$

در صورتی که تکنولوژی دارای بازده به مقیاس متغیر باشد مدل تحت بررسی *BCC* خواهد بود و مجموعه امکان تولید آن به صورت زیر قابل بیان می باشد.

$$T_v = \left\{ (x, y) \mid x \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j, y \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0; j = 1, \dots, n \right\}$$

مدل *BCC* در فرم پوششی در ماهیت های ورودی و خروجی برای  $DMU_k$  ( $k \in \{1, \dots, n\}$ ) به ترتیب به صورت زیر می باشد.

(ورودی محور)

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \theta - \varepsilon \left( \sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^+ \right) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta x_{ik}, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{rk}, \quad r = 1, \dots, s, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \\ & \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n, \\ & \theta \text{ is free.} \end{aligned} \tag{1}$$

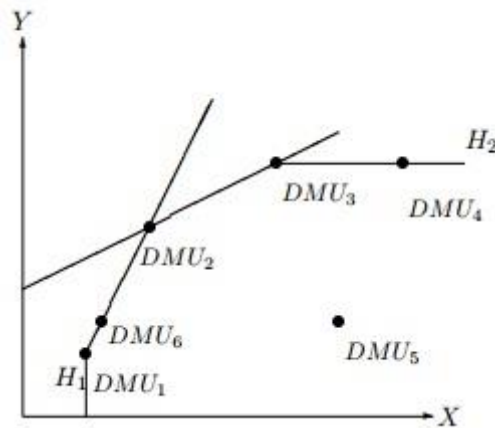
(خروجی محور)

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \varphi + \varepsilon \left( \sum_{i=1}^m t_i^- + \sum_{r=1}^s t_r^+ \right) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + t_i^- = x_{ik}, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - t_r^+ = \varphi y_{rk}, \quad r = 1, \dots, s, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \\ & \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n, \\ & \varphi \text{ is free.} \end{aligned} \tag{2}$$

که  $\varepsilon$  یک عدد بسیار کوچک مثبت غیرارشمیدسی می باشد. دو آل مدل های فوق که به فرم مضربی شهرت دارند به صورت زیر بیان می شود (حالت  $\varepsilon = 0$ ).

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rk} + u, \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} = 1, \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + u \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & u_r \geq 0, v_i \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m, \\ & u \text{ is free.} \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} - u, \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rk} = 1, \\ & -\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} + \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - u \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & u_r \geq 0, v_i \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m, \\ & u \text{ is free.} \end{aligned} \tag{4}$$



شکل ۱. DMU های راسی، غیرراسی و اتکا

**تعریف ۱:**  $DMU_k$  یک واحد کارای پارتو یا کارای قوی است اگر و فقط اگر حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

(i) برای هر جواب بهینه مدل (۱) داشته باشیم:  $\theta^* = 1, (s^{+*}, s^{-*}) = (0, 0)$ .

(ii) برای هر جواب بهینه مدل (۲) داشته باشیم:  $\varphi^* = 1, (t^{+*}, t^{-*}) = (0, 0)$ .

**تعریف ۲:**  $DMU_k$  یک واحد کارای ضعیف است اگر و فقط اگر حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

(iii) جواب بهینه‌ای برای مدل (۱) وجود داشته باشد به طوری که:  $\theta^* = 1, (s^{+*}, s^{-*}) \neq (0, 0)$ .

(iv) جواب بهینه‌ای برای مدل (۲) وجود داشته باشد به طوری که:  $\varphi^* = 1, (t^{+*}, t^{-*}) \neq (0, 0)$ .

قابل توجه است که اگر  $\theta^* < 1$  و  $\varphi^* > 1$  باشند آنگاه  $DMU_k$  یک نقطه درونی  $PPS$  خواهد بود.

واحدهای تصمیم‌گیرنده‌ی درونی و کارای ضعیف در مدل‌های BCC،  $DMU$  های ناکارا-BCC نامیده می‌شوند.

**تعریف ۳:** واحد کارای قوی  $DMU_k$  را کارای راسی می‌نامند هرگاه مدل‌های (۱) و (۲) جواب بهینه منحصر به فردی به صورت  $\lambda_j^* = 0, j \in J - \{k\}, \lambda_k^* > 0$  داشته باشد. در غیر این صورت  $DMU_k$  کارای غیرراسی است. از اینجا به بعد مجموعه  $DMU$  های ناکارا-BCC، کارای غیرراسی و کارای راسی در محیط با بازده به مقیاس متغیر، به ترتیب با نمادهای  $F, E$  و  $E^*$  نشان داده می‌شوند.

**توجه ۱:**  $DMU_k$  یک واحد کارای قوی نامیده می‌شود اگر و فقط اگر حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

(v) برای حداقل یکی از جواب‌های بهینه (۳) داشته باشیم:  $u_k^{*t} y_k + u_k^* = 1, (u^{*t}, v^{*t}) > 0$ .

(vi) برای حداقل یکی از جواب‌های بهینه (۴) داشته باشیم:  $v_k^{*t} x_k + u_k^* = 1, (u^{*t}, v^{*t}) > 0$ .

**توجه ۲:**  $DMU_k$  یک واحد کارای ضعیف نامیده می‌شود اگر و فقط اگر حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

<sup>۱</sup> (\*) نشان‌دهنده‌ی جواب بهینه می‌باشد.

<sup>۲</sup> هرگاه درون  $T_V$  را با  $\text{int } T_V$  نشان دهیم آنگاه  $\text{int } T_V = \{(x, y) \in T_V \mid \exists \varepsilon > 0; (x - \varepsilon e_1, y + \varepsilon e_2) \in T_V\}$  به ترتیب بردارهایی با ابعاد متناسب با ورودی‌ها و خروجی‌ها هستند که همه‌ی مولفه‌های آن‌ها برابر یک می‌باشد.

(vii) برای همه‌ی جواب‌های بهینه (۳) داشته باشیم:  $\langle u^{*t}, v^{*t} \rangle = 1, u_k^{*t} y_k + u_k^* = 1, (u^{*t}, v^{*t}) \neq 0$

(viii) برای همه‌ی جواب‌های بهینه (۴) داشته باشیم:  $\langle u^{*t}, v^{*t} \rangle = 1, (u^{*t}, v^{*t}) \neq 0, v^{*t} x_k + u_k^* = 1$

متناظر با هر  $DMU$  کارا- $BCC$  به صورت  $DMU_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj}, y_{1j}, \dots, y_{sj})$  برای هر  $\alpha, \gamma > 0$  واحدهای مجازی  $DMU_j^l = (x_{1j}, \dots, x_{lj} + \alpha, \dots, x_{mj}, y_{1j}, \dots, y_{sj})$  و  $DMU_j^q = (x_{1j}, \dots, x_{mj}, y_{1j}, \dots, y_{qj} - \gamma, \dots, y_{sj})$  را تعریف می‌کنیم. این  $DMU$ های مجازی، یا نقطه‌ای درون  $PPS$  مدل  $BCC$  هستند و یا بر روی برخی از رویه‌های دسترسی آزاد (رویه‌های نامتناهی) قرار دارند. حالت دوم این  $DMU$ های مجازی را "واحدهای مجازی کارای ضعیف" می‌نامیم و با نماد  $WEV DMU$  نمایش می‌دهیم. بنابراین از اینجا به بعد می‌توان گفت  $DMU_j^l (DMU_j^q)$  بر روی رویه‌ی نامتناهی با  $v_l = 0 (u_q = 0)$  قرار دارد. به همین منظور اگر  $DMU_j$  و  $DMU_j^l (DMU_j^q)$  بر روی یک ابرصفحه مشابه واقع باشند، آنگاه می‌گوییم  $\bar{u} \cdot \bar{v} - \bar{v} \cdot \bar{x} + \bar{u} = 0$  و  $(\bar{u}_q = 0) \bar{v}_l = 0$ . در شکل ۲،  $D M$  کارا- $BCC$   $D_v = (x_{1v}, x_{2v}, y_{1v})$  و  $WEV DMU D_v' = (x_{1v} + \alpha, x_{2v}, y_{1v})$  بر روی ابرصفحه‌ها (ها) مشابه قرار دارند و بنابراین  $\bar{v}_1 = 0$ . همچنین واحد راسی  $D_1 = (x_{11}, x_{21}, y_{11})$  و  $WEV DMU D_1''' = (x_{11}, x_{21}, y_{11} - \gamma)$  بر روی ابرصفحه‌ها (ها) مشابه قرار دارند پس بنابراین  $\bar{u}_1 = 0$ .

**تعریف ۴:** ابرصفحه‌ی سازای  $H = \{(x, y) | \bar{u}' y - \bar{v}' x = \bar{u} \cdot \bar{v}, (\bar{u}, \bar{v}) \geq 0, (\bar{u}, \bar{v}) \neq 0\}$  از مجموعه امکان تولید  $T_v$  یک ابرصفحه‌ی سازای ضعیف است اگر و فقط اگر تکیه‌کننده باشد و حداقل  $m+s$  تا از  $DMU$ های کارای راسی و مجازی کارای ضعیف از  $PPS$  بر روی  $H$  واقع باشند. (در این حالت حداقل یکی از مولفه‌های بردار گرادیان ابرصفحه مساوی صفر است).

در شکل ۱ ابرصفحه‌های  $H_1$  و  $H_2$  سازای ضعیف هستند.

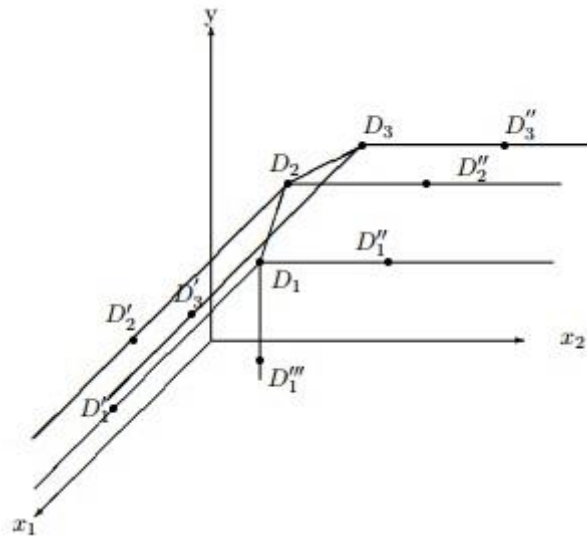
بوگنول و دولا (۲۰۰۹) واحدهای تصمیم‌گیرنده اتکا را به صورت زیر تعریف کردند [۱۰].

**تعریف ۵:**  $DMU_k \in E^*$  یک نقطه اتکاست هرگاه به یک رویه نامتناهی  $PPS$  مدل  $BCC$  متعلق باشد.

**تبصره ۱:** با توجه به تعریف نقطه اتکا به وضوح دیده می‌شود  $DMU_k \in E^*$  یک واحد اتکاست اگر و فقط اگر وجود داشته باشد حداقل یک  $l$  (یا  $q$ ) به طوری که  $DMU_k^l$  (یا  $DMU_k^q$ )،  $WEV DMU$  باشد (به عبارتی  $\bar{v}_l = 0$  (یا  $\bar{u}_q = 0$ )).

همچنین بوگنول و دولا (۲۰۰۹) در *Result 1*، نقطه اتکا را به شکل دیگری به صورت زیر تعریف کردند [۱۰].

**تبصره ۲:**  $DMU_k \in E^*$  یک نقطه اتکا نامیده می‌شود اگر و فقط اگر آن متعلق باشد به ابرصفحه تکیه‌کننده بر  $T_v$  مانند  $H_{(u,v,u)}$  به طوری که حداقل یکی از مولفه‌های بردار گرادیان  $(u, v)$  برابر صفر باشد.



شکل ۲.  $D_1, D_2, D_3$  نقاط اتکا هستند.

در شکل ۱،  $DMU_1$  و  $DMU_2$  واحدهای اتکا هستند. آنها بر روی رویه‌های نامتناهی به ترتیب با  $\bar{u} = 0$  و  $\bar{v} = 0$  قرار دارند. همچنین در شکل ۲،  $D_1, D_2, D_3$  واحدهای اتکا هستند.  $D_1$  بر روی سه رویه نامتناهی با  $\bar{v}_1 = 0$ ،  $\bar{v}_2 = 0$  و  $\bar{u} = 0$  قرار دارد.  $D_2$  بر روی دو رویه نامتناهی با  $\bar{v}_1 = 0$  و  $\bar{v}_2 = 0$  واقع می‌باشد. همچنین  $D_3$  بر روی دو رویه نامتناهی با  $\bar{v}_1 = 0$  و  $\bar{v}_2 = 0$  قرار دارد.

### ۳ شناسایی نقاط اتکای مجموعه امکان تولید مدل BCC

در چهار زیر بخش پیشرو مهم‌ترین نتایج به دست آمده در یافتن نقاط اتکا در محیطی با بازده به مقیاس متغیر بیان می‌شود. در دو زیر بخش ابتدایی، دو شرط کافی و بعد از آن دو شرط لازم و کافی آورده شده است.

#### ۳-۱ یافتن نقاط اتکا به کمک مدل‌های ابر کارایی

در این زیر بخش، شناسایی  $DMU$  های اتکا را با استفاده از مدل‌های ابر کارایی به صورت زیر مطرح می‌کنیم. ابتدا، به کمک مدل‌های مربوطه،  $DMU_k$  ( $k \in J$ ) را ارزیابی می‌کنیم. سپس تمامی  $DMU$  های کارا - BCC را نگه داشته و دیگر  $DMU$  ها را حذف می‌کنیم. فرض کنید مجموعه‌ی تمامی  $DMU$  های کارا - BCC به صورت  $E' (= E \cup E^*)$  نمایش داده شود. متناظر با هر  $(k \in E')$   $DMU_k = (x_{1k}, \dots, x_{mk}, y_{1k}, \dots, y_{sk})$  مدل‌های زیر را حل می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & \theta_l^k - \varepsilon \left( \sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^+ \right) \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in E' - \{k\}} \lambda_j^k x_{lj} + s_i^- = \theta_l^k x_{lk}, \\
 & \sum_{j \in E' - \{k\}} \lambda_j^k x_{ij} + s_i^- = x_{ik}, \quad i = 1, \dots, m, i \neq l, \\
 & \sum_{j \in E' - \{k\}} \lambda_j^k y_{rj} - s_r^+ = y_{rk}, \quad r = 1, \dots, s, \\
 & \sum_{j \in E' - \{k\}} \lambda_j^k = 1, \\
 & \lambda_j^k \geq 0, s_i^-, s_r^+ \geq 0, \quad \forall j \in E' - \{k\}, \forall i, \forall r, \\
 & \theta_l^k \text{ is free,}
 \end{aligned} \tag{5}$$

برای  $l \in \{1, \dots, m\}$

$$\begin{aligned}
 \text{Max} \quad & \varphi_q^k + \varepsilon (\sum_{i=1}^m t_i^- + \sum_{r=1}^s t_r^+) \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in E' - \{k\}} \mu_j^k x_{ij} + t_i^- = x_{ik}, \quad i = 1, \dots, m, \\
 & \sum_{j \in E' - \{k\}} \mu_j^k y_{qj} - t_q^+ = \varphi_q^k y_{qk}, \quad (6) \\
 & \sum_{j \in E' - \{k\}} \mu_j^k y_{rj} - t_r^+ = y_{rk}, \quad r = 1, \dots, s, r \neq q, \\
 & \sum_{j \in E' - \{k\}} \mu_j^k = 1, \\
 & \mu_j^k \geq 0, t_i^-, t_r^+ \geq 0, \quad \forall j \in E' - \{k\}, \forall i, \forall r, \\
 & \varphi_q^k \text{ is free},
 \end{aligned}$$

برای  $q \in \{1, \dots, s\}$

قضایای زیر برای مدل‌های (۵) و (۶) برقرارند. قضیه (۲) یک شرط کافی برای یافتن  $DMU$  های اتکا فراهم می‌کند.

**قضیه ۱:**  $DMU_k$  یک واحد کارا- $BCC$  است اگر و فقط اگر برای هر  $l$  (یا  $q$ ) یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

الف) مدل (۵) (یا مدل (۶)) نشدنی باشد.

ب)  $\theta_l^{k*} \geq 1$  (یا  $\varphi_q^{k*} \leq 1$ ).

برهان.

(فقط اگر). فرض کنید  $DMU_k$  یک واحد کارا- $BCC$  می‌باشد که برای برخی  $l$  مدل (۵) شدنی است. اکنون نشان می‌دهیم  $\theta_l^{k*} \geq 1$ . مدل زیر را برای  $DMU_k$  در نظر بگیریم.

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & \theta_l^k - \varepsilon (\sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^+) \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in E'} \lambda_j^k x_{ij} + s_i^- = \theta_l^k x_{lk}, \\
 & \sum_{j \in E'} \lambda_j^k x_{ij} + s_i^- = x_{ik}, \quad i = 1, \dots, m, i \neq l, \quad (7) \\
 & \sum_{j \in E'} \lambda_j^k y_{rj} - s_r^+ = y_{rk}, \quad r = 1, \dots, s, \\
 & \sum_{j \in E'} \lambda_j^k = 1, \\
 & \lambda_j^k \geq 0, s_i^-, s_r^+ \geq 0, \quad \forall j \in E', \forall i, \forall r, \\
 & \theta_l^k \text{ is free},
 \end{aligned}$$

برای  $l \in \{1, \dots, m\}$

حال فرض کنید  $\theta_l^{k*}$ ،  $\theta_l^{k*}$  و  $\theta_l^{k*}$  مقدار توابع هدف به ترتیب مدل‌های (۱)، (۷) و (۵) برای  $DMU_k$  باشند. به آسانی دیده می‌شود که  $\theta_l^{k*} \leq \theta_l^{k*} \leq \theta_l^{k*}$ . بدین ترتیب داریم  $\theta_l^{k*} \geq 1$ .

(اگر). برای اثبات قسمت "اگر"، می‌تواند از نامساوی  $\theta_l^{k*} \leq \theta_l^{k*} \leq \theta_l^{k*}$  استفاده شود و از آوردن جزئیات خودداری می‌کنیم.

■

**قضیه ۲:** اگر برای حداقل یک  $l$  (یا  $q$ )، مدل (۵) (یا مدل (۶)) نشدنی شود آن گاه  $DMU_k$  یک واحد اتکا می‌باشد.

**برهان:** فرض کنید برای حداقل یک  $l$ ، مدل (۵) نشدنی باشد. ابتدا نشان می‌دهیم  $DMU_k \in E^*$ . به برهان خلف فرض کنید  $DMU_k \in E \setminus E^*$ . بنابراین واحدهای حقیقی یا مجازی  $DMU_p = (x_p, y_p)$  و  $DMU_q = (x_q, y_q)$  وجود دارد به طوری که

$$DMU_k = \bar{\lambda} DMU_p + \bar{\mu} DMU_q \quad (*)$$

برای یک  $\bar{\lambda} > 0$  و  $\bar{\mu} > 0$  و  $\bar{\lambda} + \bar{\mu} = 1$ .

باجایگذاری (\*) در (۵) به جای  $DMU_k$ ، می‌توان یک جواب شدنی برای مدل (۵) پیدا کرد که این یک تناقض است. بنابراین،  $DMU_k \in E^*$ .

اکنون نشان می‌دهیم  $DMU_k$  بر روی ابرصفحه(ها)ی سازای ضعیف (رویه نامتناهی) قرار دارد که موازی با  $l$  امین محور ورودی است.

در نظر بگیرید واحد مجازی  $DMU'_k$  که به صورت زیر است.

$$DMU'_k = (x_{1k}, \dots, x_{lk} + \alpha, \dots, x_{mk}, y_{1k}, \dots, y_{sk})$$

که  $\alpha > 0$  است. کافی است نشان دهیم که  $DMU'_k$  یک واحد کارای ضعیف خروجی محور مدل BCC است. مدل زیر را برای  $DMU'_k$  در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} & \text{Max} \quad \varphi \\ & \text{s.t.} \quad \sum_{j \in E'} \lambda_j x_{lj} + \mu_k (x_{lk} + \alpha) \leq x_{lk} + \alpha, \quad (A) \\ & \quad \sum_{j \in E'} \lambda_j x_{ij} + \mu_k x_{ik} \leq x_{ik}, \quad i = 1, \dots, m, i \neq l, \\ & \quad \sum_{j \in E'} \lambda_j y_{rj} + \mu_k y_{rk} \geq \varphi y_{rk}, \quad r = 1, \dots, s, \\ & \quad \sum_{j \in E'} \lambda_j + \mu_k = 1, \\ & \quad \lambda_j \geq 0, \mu_k \geq 0, \quad \forall j \in E', \\ & \quad \varphi \text{ is free.} \end{aligned}$$

فرض کنید  $(\lambda_j^* (j = 1, \dots, n), \mu_k^*, \varphi^*)$  یک جواب بهینه مدل فوق باشد. باید نشان دهیم  $\varphi^* = 1$ . به برهان خلف، فرض کنیم  $\varphi^* > 1$ ، بنابراین داریم:

$$\sum_{j \in E'} \lambda_j^* y_{rj} + \mu_k^* y_{rk} = \sum_{j \in E' - \{k\}} \lambda_j^* y_{rj} + (\lambda_k^* + \mu_k^*) y_{rk} \geq \varphi^* y_{rk} > y_{rk}, \quad r = 1, \dots, s,$$

بنابراین  $(\lambda_j^* = 0 (j = 1, \dots, n, j \neq k), \mu_k^* + \lambda_k^* = 1)$  نمی‌تواند جواب بهینه مدل (A) باشد. در نتیجه،  $\mu_k^* + \lambda_k^* < 1$  و  $\mu_k^* \neq 1$ .

بدین ترتیب می‌تواند محدودیت‌های مدل (A) به صورت زیر نوشته شود:

$$\sum_{j \in E' - \{k\}} \lambda_j^* x_{lj} \leq (1 - \mu_k^* - \lambda_k^*) x_{lk} + (1 - \mu_k^*) \alpha, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j \in E' - \{k\}} \lambda_j^* x_{ij} &\leq (1 - \mu_k^* - \lambda_k^*) x_{ik}, & i = 1, \dots, m, i \neq k, \\ \sum_{j \in E' - \{k\}} \lambda_j^* y_{rj} &> (1 - \mu_k^* - \lambda_k^*) y_{rk}, & r = 1, \dots, s, \\ \sum_{j \in E' - \{k\}} \lambda_j^* &= 1 - \mu_k^* - \lambda_k^*, \end{aligned}$$

با تقسیم طرف دوم مدل (۹) بر  $1 - \mu_k^* - \lambda_k^*$  و تعریف  $\bar{\mu}_j = \frac{\lambda_j^*}{1 - \mu_k^* - \lambda_k^*}$  ( $j \in E' - \{k\}$ )، بنابراین مدل (۹) به صورت زیر خواهد شد.

$$\begin{aligned} \sum_{j \in E' - \{k\}} \bar{\mu}_j x_{lj} &\leq x_{lk} + \beta, & (10) \\ \sum_{j \in E' - \{k\}} \bar{\mu}_j x_{ij} &\leq x_{ik}, & i = 1, \dots, m, i \neq l, \\ \sum_{j \in E' - \{k\}} \bar{\mu}_j y_{rj} &> y_{rk}, & r = 1, \dots, s, \\ \sum_{j \in E' - \{k\}} \bar{\mu}_j &= 1, \end{aligned}$$

که  $\beta = (\frac{1 - \mu_k^*}{1 - \mu_k^* - \lambda_k^*}) \alpha$ . از آنجا که  $\beta > 0$  آن گاه وجود دارد  $\hat{\theta} > 1$  به طوری که  $x_{lk} + \beta = \hat{\theta} x_{lk}$ ، بنابراین داریم:  $\sum_{j \in E' - \{k\}} \bar{\mu}_j x_{lj} \leq \hat{\theta} x_{lk}$ . پس، محدودیت‌های مدل (۹) می‌تواند به صورت زیر نوشته شود.

$$\begin{aligned} \sum_{j \in E' - \{k\}} \bar{\mu}_j x_{lj} &\leq \hat{\theta} x_{lk}, & (11) \\ \sum_{j \in E' - \{k\}} \bar{\mu}_j x_{ij} &\leq x_{ik}, & i = 1, \dots, m, i \neq l, \\ \sum_{j \in E' - \{k\}} \bar{\mu}_j y_{rj} &> y_{rk}, & r = 1, \dots, s, \\ \sum_{j \in E' - \{k\}} \bar{\mu}_j &= 1, \\ \bar{\mu}_j &\geq 0, & j \in E' - \{k\}, \end{aligned}$$

بنابراین،  $(\bar{\mu}_j (j \in E' - \{k\}), \hat{\theta})$  یک جواب شدنی برای مدل (۵) می‌باشد و این یک تناقض است. بدین ترتیب نتیجه می‌گیریم  $\varphi^* = 1$ . از طرف دیگر دیگر  $DMU'_k$  به وسیله  $DMU_k$  مغلوب می‌شود. بنابراین  $DMU'_k$  یک واحد کارای ضعیف است. پس،  $DMU_k$  بر روی ابرصفحه‌ی سازای ضعیف موازی با  $l$  امین محور ورودی قرار دارد. در حالتی که برای حداقل یک  $q$ ، مدل (۶) نشدنی شود، اثبات به طور مشابه قابل بیان است.

### ۳-۲ شناسایی نقاط اتکا به کمک $u_0$

در این زیر بخش، می‌توان به کمک  $u$  به یک شرط کافی برای شناسایی نقاط اتکای تکنولوژی  $VRS$  رسید. بدین منظور دو مدل زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} u_0^{\text{In}} &= \text{Max } u, \\ \text{s.t. } \sum_{r=1}^s u_r y_{rk} + u &= 1, & (a) \\ \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + u &\leq 0, & j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} = 1, \\
 & u_r \geq 0, v_i \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m, \\
 & u, \text{ is free,} \\
 u_k^{out} = & \quad \text{Max} \quad u, \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rk} = 1, \\
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - u, \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} + u, = 1, \\
 & u_r \geq 0, v_i \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m, \\
 & u, \text{ is free.}
 \end{aligned} \tag{13}$$

قضیه زیر یک شرط کافی برای تشخیص اتکا بودن واحد تحت بررسی  $DMU_k$  ارائه می‌دهد.

**قضیه ۳:** فرض کنید  $DMU_k \in E^*$  واحد تحت ارزیابی باشد. اگر حداقل یکی از مدل‌های (۱۲) یا (۱۳) مقدار بهینه برابر ۱ داشته باشد، آن‌گاه  $DMU_k$  یک واحد اتکاست.

**برهان:** فرض کنید مدل (۱۲) دارای مقدار بهینه  $u^{in*} = 1$  باشد. در این صورت با توجه به محدودیت (a) در این

مدل، در جواب بهینه داریم،  $u^* y_k = 0$ . از آنجایی که همه‌ی مولفه‌های  $y_k$  صفر نیستند و همچنین  $\begin{cases} u^* \geq 0 \\ y_k \geq 0 \end{cases}$  پس حداقل یکی از مولفه‌های  $u^*$  لزوماً صفر خواهد بود. در این صورت ابرصفحه‌ی تکیه‌کننده‌ای به دست می‌آید که حداقل یکی از مولفه‌های بردار نرمال آن صفر است و از  $DMU_k$  نیز می‌گذرد. پس  $DMU_k$  یک نقطه اتکاست.

■

### ۳-۳ یک شرط لازم و کافی برای نقاط اتکا در $T_v$

در مدل‌های برنامه‌ریزی خطی اگر بدانیم در جواب بهینه، هر یک از متغیرهای تصمیم چه مقداری را می‌گیرند، می‌توان از ابتدا همان مقدار را به متغیر تصمیم اختصاص داد و به عنوان یکی از محدودیت‌ها در قیود مساله قرار گیرد. بنابراین دستگاه‌های زیر برای تشخیص اتکا بودن  $DMU_k = (x_k, y_k) \in E^*$  ارائه می‌شوند.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + u, \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, j \neq k, \\
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{rk} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} + u, = 0, \\
 & v_t = 0, \\
 & \sum_{r=1}^s u_r + \sum_{i=1}^m v_i = 1, \\
 & u_r \geq 0, v_i \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m, \\
 & u, \text{ is free,}
 \end{aligned} \tag{14}$$

برای هر  $t \in \{1, \dots, m\}$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + u, \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, j \neq k, \\
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{rk} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} + u, = 0,
 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} u_l &= 0, \\ \sum_{r=1}^s u_r + \sum_{i=1}^m v_i &= 1, \\ u_r \geq 0, v_i \geq 0, \quad r &= 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m, \\ u_r &\text{ is free,} \end{aligned}$$

برای هر  $l \in \{1, \dots, s\}$ .

در دستگاه‌های فوق محدودیت  $\sum_{r=1}^s u_r + \sum_{i=1}^m v_i = 1$  به جهت نرمالسازی بردار گرادینان به دست آمده برای ساختن ابرصفحه‌ی تکیه کننده می‌باشد.

**قضیه ۴:**  $DMU_k = (x_k, y_k) \in E^*$  یک نقطه اتکا است اگر و فقط اگر حداقل یکی از دستگاه‌های (۱۴) یا (۱۵) شدنی باشند.

**برهان:** بدون این که به کلیت مساله خلی وارد شود، فرض کنید به ازای یک  $t \in \{1, \dots, m\}$  دستگاه  $t$  ام (۱۴) شدنی باشد. بنابراین بردار  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{u}_t)$  وجود دارد که در دستگاه (۱۴) صدق می‌کند. یعنی داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^s \bar{u}_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m \bar{v}_i x_{ij} + \bar{u}_t &\leq 0, \quad j = 1, \dots, n, j \neq k, \\ \sum_{r=1}^s \bar{u}_r y_{rk} - \sum_{i=1}^m \bar{v}_i x_{ik} + \bar{u}_t &= 0, \\ \bar{v}_t &= 0, \\ \sum_{r=1}^s \bar{u}_r + \sum_{i=1}^m \bar{v}_i &= 1, \\ \bar{u}_r \geq 0, \bar{v}_i \geq 0, \quad r &= 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m, \\ \bar{u}_t &\text{ is free,} \end{aligned}$$

و با توجه به نحوه ساخته شدن  $T_v$ ، به ازای هر  $(x, y) \in T_v$  دلخواه داریم:  $\bar{u}_t y - \bar{v}_t x + \bar{u}_t \leq 0$ . بنابراین ابرصفحه‌ی  $\bar{H} = \{(x, y) | \bar{u}_t y - \bar{v}_t x + \bar{u}_t = 0\}$  تکیه کننده بر  $T_v$  در  $(x_k, y_k)$  است و مولفه‌ی  $t$  ام بردار  $v$  آن برابر صفر می‌باشد. در نتیجه واحد تحت ارزیابی یک نقطه‌ی اتکا است. اثبات عکس آن نیز واضح است که از آوردن آن صرف نظر می‌شود.

■

### ۳-۴ یافتن نقاط اتکا به کمک مجموعه مرجع

در این زیر بخش، با استفاده از مجموعه مرجع، نقاط اتکا در تکنولوژی  $VRS$  شناسایی می‌شوند. برای رسیدن به این هدف، مختصر آشوب روی  $DMU_k = (x_k, y_k) \in E^*$  به صورت زیر انجام می‌دهیم. ( $E^*$  مجموعه واحدهای کارایی راسی)

$$\begin{aligned} DMU_k &= (x_{1k}, \dots, x_{mk}, y_{1k}, \dots, y_{sk}) \\ &\downarrow \\ DMU_k^\varepsilon &= (x_{1k} + \varepsilon, \dots, x_{mk} + \varepsilon, y_{1k} - \varepsilon, \dots, y_{sk} - \varepsilon) \end{aligned}$$

که در آن  $\varepsilon > 0$  و به اندازه کافی کوچک است. هم اکنون واحد مجازی ساخته شده  $DMU_k^\varepsilon$  به کمک مدل‌های زیر مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } \theta \\
 \text{s.t. } & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta (x_{ik} + \varepsilon), \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{ik} + \varepsilon, \quad i = 1, \dots, m, i \neq t, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{rk} - \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \\
 & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,
 \end{aligned} \tag{16}$$

برای هر  $t \in \{1, \dots, m\}$ .

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } \phi^l \\
 \text{s.t. } & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{ik} + \varepsilon, \quad i = 1, \dots, m, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{lj} \geq \phi^l (y_{lk} - \varepsilon), \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{rk} - \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s, r \neq l, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \\
 & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,
 \end{aligned} \tag{17}$$

برای هر  $l \in \{1, \dots, s\}$ .

در هر یک از مدل‌های فوق واحد مجازی ساخته شده ( $DMU_k^\varepsilon$ ) موازی با  $t$  امین محور ورودی یا  $l$  امین محور خروجی بر روی مرز مجموعه امکان تولید تصویر می‌شود و لازم به ذکر است که این واحد تصویر شده با  $DMU_k$  بر روی یک ابرصفحه واقع هستند. اکنون  $DMU_k^\varepsilon$  توسط مدل‌های (۱۶) و (۱۷) مورد ارزیابی قرار می‌گیرد و در هر مرحله با تشکیل مجموعه مرجع می‌توان در مورد اتکا بودن  $DMU$  تحت بررسی تصمیم گرفت.

**قضیه ۵:**  $DMU_k \in E^*$  یک نقطه اتکاست اگر و فقط اگر وجود داشته باشد حداقل یک  $t \in \{1, \dots, m\}$  (یا  $l \in \{1, \dots, s\}$ ) که در ارزیابی  $DMU_k^\varepsilon$  به کمک مدل (۱۶) (یا مدل (۱۷)) تعداد اعضای مجموعه مرجع کمتر از  $m + s$  تا باشد.

**برهان:** بدون این که به کلیت مساله خلی وارد شود فرض کنید به ازای یک  $t \in \{1, \dots, m\}$ ، واحد  $DMU_k^\varepsilon$  به کمک مدل (۱۶) ارزیابی شود و تعداد اعضای مجموعه مرجع کمتر از  $m + s$  تا باشد آن‌گاه این بدین معنی است که تصویر  $DMU_k^\varepsilon$  بر روی مرز  $PPS$ ، روی یک ابرصفحه‌ی سازای ضعیف قرار می‌گیرد که این ابرصفحه از  $DMU_k$  نیز می‌گذرد. بنابراین واحد تحت ارزیابی ( $DMU_k$ ) یک نقطه اتکا است. عکس قضیه سراسر است و از آوردن آن صرف نظر می‌شود.

**تذکره ۱:** لازم است ذکر گردد، برای واحد تحت ارزیابی  $DMU_k \in E^*$ ، ممکن است حل کلیه مدل‌های (۱۶) و (۱۷) ضروری نباشد، بلکه چنانچه در هر مرحله‌ای با تشکیل مجموعه‌ی مرجع تعداد اعضای آن مجموعه کمتر از  $m + s$  گردد در همان مرحله متوقف می‌شویم و واحد تحت بررسی یک نقطه اتکا است.

در بخش بعدی به جهت درک بهتر روش‌های بیان‌شده، همچنین بررسی نتایج بین آن‌ها یک مثال کاربردی بر اساس داده‌های حقیقی ارائه می‌گردد.

#### ۴ مثال عددی (داده‌های تجربی)

داده‌های حقیقی جدول ۱ برای ۱۷ دانشکده دانشگاه را در نظر بگیرید. این مجموعه داده‌ها برگرفته از تحقیق انجام‌شده در دانشگاه آزاد اسلامی واحد مبارکه می‌باشد [۱۹]. واحدهای تصمیم‌گیرنده با صرف دو ورودی اقدام به تولید دو خروجی می‌کنند و به شرح زیر است: تعداد دانشجویان کارشناسی ( $x_1$ )، تعداد اعضای هیات علمی تمام‌وقت و نیمه‌وقت ( $x_2$ )، تعداد فارغ‌التحصیلان ( $y_1$ )، تعداد مقالات تحقیقاتی ( $y_2$ ). به وضوح می‌توان بررسی کرد که واحدهای راسی عبارتند از  $\{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8, D_9, D_{10}, D_{11}, D_{12}, D_{13}\}$  و سایر DMUها غیرراسی هستند از این رو مدل‌های پیشنهادی بر روی این DMUها مورد ارزیابی قرار می‌گیرند. در جدول ۱ ستون‌های ۹-۶ نتیجه تحقیق بر اساس قضیه ۲ برای هر واحد تصمیم‌گیرنده راسی، مشاهده می‌شود و از آنجا که در هر سطر حداقل یکی از مدل‌های (۵) یا (۶) نشدنی است پس تمامی واحدهای راسی، نقاط اتکا می‌باشند.

جدول ۱. نتایج مربوط به قضایای ۲ و ۳ به‌علاوه داده‌های مربوط به مثال عددی

DMU	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	$l=1$	$l=2$	$q=1$	$q=2$	$u_0^{in}$	$u_0^{out}$
$D_1$	۲۶	۷	۱۲	۳	نشدنی	نشدنی	نشدنی	نشدنی	۱	-۰/۳۷۱
$D_2$	۲۹	۶	۱۰	۷	نشدنی	نشدنی	نشدنی	نشدنی	۱	۰/۸۶۰
$D_3$	۴۰	۸	۲۰	۶	نشدنی	نشدنی	نشدنی	نشدنی	۰/۱۷۸	-۰/۱۷۶
$D_4$	۴۲	۷	۱۲	۶	-	-	-	-	-	-
$D_5$	۴۵	۹	۱۸	۶	-	-	-	-	-	-
$D_6$	۹۲	۱۲	۴۰	۲	-	-	-	-	-	-
$D_7$	۸۳	۱۱	۵۸	۳	نشدنی	نشدنی	نشدنی	نشدنی	۰/۴۵۰	۰/۶۲۴
$D_8$	۸۷	۱۴	۵۲	۷	نشدنی	نشدنی	نشدنی	نشدنی	-۰/۷۲۵	۰/۵۵۵
$D_9$	۱۴۹	۱۶	۶۱	۴	-	-	-	-	-	-
$D_{10}$	۱۷۷	۱۷	۵۴	۱۲	نشدنی	نشدنی	نشدنی	نشدنی	-۰/۰۹۰	۱
$D_{11}$	۱۹۱	۱۹	۶۱	۱۱	-	-	-	-	-	-
$D_{12}$	۱۸۵	۱۴	۷۳	۴	نشدنی	نشدنی	نشدنی	نشدنی	-۰/۰۰۳	۰/۶۱۶
$D_{13}$	۱۸۶	۲۰	۸۵	۱۰	نشدنی	نشدنی	نشدنی	نشدنی	-۰/۰۱۶	۱
$D_{14}$	۷۴	۱۲	۳۶	۵	-	-	-	-	-	-
$D_{15}$	۱۶۴	۲۲	۶۹	۸	-	-	-	-	-	-
$D_{16}$	۲۲۵	۲۰	۸۰	۵	-	-	-	-	-	-
$D_{17}$	۱۰۸	۱۰	۲۷	۳	-	-	-	-	-	-

ستون‌های ۱۱-۱۰ خروجی‌ها بر طبق قضیه ۳ را بیان می‌کنند که واحدهای  $\{D_1, D_2, D_{10}, D_{13}\}$  به عنوان اتکا معرفی می‌شوند. نتایج مربوط به دو شرط لازم و کافی موجود در این مقاله در جدول ۲ دیده می‌شود. ستون‌های ۲-۵ بر اساس قضیه ۴ و ستون‌های ۶-۹ خروجی‌ها بر طبق قضیه ۵ را بیان می‌کنند و اعداد ذکر شده در این جدول تعداد اعضای مجموعه مرجع را نشان می‌دهند. بر طبق جدول ۲ نیز تمامی واحدهای راسی نقاط اتکا هستند.

جدول ۲. نتایج مربوط به فضای ۴ و ۵ در مثال عددی

$DMU$	$v_1=0$	$v_2=0$	$u_1=0$	$u_2=0$	$t=1$	$t=2$	$l=1$	$l=2$
					$D_1$	نشدنی	شدنی	شدنی
$D_2$	شدنی	شدنی	شدنی	شدنی	۲	۱	۳	۲
$D_3$	نشدنی	شدنی	نشدنی	نشدنی	۳	۲	۳	۳
$D_4$	-	-	-	-	-	-	-	-
$D_5$	-	-	-	-	-	-	-	-
$D_6$	-	-	-	-	-	-	-	-
$D_7$	شدنی	شدنی	نشدنی	شدنی	۲	۲	۲	۳
$D_8$	نشدنی	شدنی	نشدنی	نشدنی	۲	۴	۳	۳
$D_9$	-	-	-	-	-	-	-	-
$D_{10}$	شدنی	شدنی	شدنی	نشدنی	۳	۳	۳	۱
$D_{11}$	-	-	-	-	-	-	-	-
$D_{12}$	شدنی	نشدنی	نشدنی	شدنی	۳	۲	۲	۳
$D_{13}$	شدنی	شدنی	نشدنی	شدنی	۲	۲	۱	۲
$D_{14}$	-	-	-	-	-	-	-	-
$D_{15}$	-	-	-	-	-	-	-	-
$D_{16}$	-	-	-	-	-	-	-	-
$D_{17}$	-	-	-	-	-	-	-	-

## ۵ نتیجه‌گیری و پیشنهادها

مطالعه بر روی نقاط مرزی مجموعه امکان تولید در تحلیل پوششی داده‌ها از اهمیت زیادی برخوردار است. در این بین در سال‌های اخیر به نقاط اتکا به عنوان زیرمجموعه‌ای از نقاط کارای راسی، با توجه به موقعیت مهمی که دارند به صورت ویژه پرداخته شده است. اولین بار تاناسولیس و آلن [۷] مفهوم این نقاط را به منظور ساخت  $DMU$ ‌های مشاهده‌نشده و گسترش مرز کارای  $DEA$  به کار بردند. یکی از کاربردهای این نقاط در مبحث بهبود

پوششی می‌باشد که در برخی موارد لازم نیست تمامی نقاط اتکا شناسایی شوند. در نتیجه یافتن برخی از این نقاط بدین منظور کافی است و شرایط ذکر شده در اینجا برای رسیدن به این هدف راهگشا است. در این کار، دو شرط لازم و کافی به همراه دو شرط کافی برای شناسایی نقاط اتکا در تکنولوژی *VRS* بیان شده است و لازم به ذکر است بعضی از این روش‌ها از نقطه نظر کاهش محاسبات نسبت به روش‌های پیشین دارای مزیت است. همچنین تعریف، توصیف و شناسایی نقاط اتکا در محیط‌های نادقیق (*DEA* با داده‌های فازی و بازه‌ای، ببینید [۲۰-۲۹]) می‌تواند جهت‌دهی موثری را برای مطالعات و تحقیقات آینده به ما بدهد.

## منابع

- [1] Farrell, M.J., (1957). The measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, 120(3), 253-290.
- [2] Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E., (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, 2(6), 429-444.
- [3] Cooper, W.W., Seiford, L.M., Tone, K., (2007). *Data envelopment analysis: A comprehensive text with models, applications, references and DEA-solver software* (2nd ed.): Springer.
- [4] Emrouznejad, A., Parker, B., Tavares, G., (2008). Evaluation of research in efficiency and productivity: A thirty years survey of the scholarly literature in DEA. *Socio-Economic Planning Sciences*, 42(3), 151-157.
- [5] Banker, R.D., Charnes, A., Cooper, W.W., (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management Science*, 30(9), 1078-1092.
- [6] Charnes, A., Cooper, W.W., Thrall, R.M., (1991). A structure for classifying and characterizing efficiency and inefficiency in data envelopment analysis. *Journal of Productivity Analysis*, 2(3), 197-237.
- [7] Thanassoulis, E., Allen, R., (1998). Simulating weights restrictions in data envelopment analysis by means of unobserved DMUs. *Management Science*, 44(4), 586-594.
- [8] Rouse, P., (2004). Using DEA to set prices for health care delivery in New Zealand hospitals, Working paper. The University of Auckland, New Zealand.
- [9] Thanassoulis, E., Kortelainen, M., Allen, R., (2012). Improving envelopment in Data Envelopment Analysis under variable returns to scale. *European Journal of Operational Research*, 218(1), 175-185.
- [10] Bournol, M.L., Dula, J.H., (2009). Anchor points in DEA. *European Journal of Operational Research*, 192(2), 668-676.
- [11] Mostafaei, A., Soleimani-damaneh, M., (2014). Identifying the anchor points in DEA using sensitivity analysis in linear programming. *European Journal of Operational Research*, 237(1), 383-388.
- [12] Mostafaei, A., Soleimani-damaneh, M., (2016). Some Conditions for Characterizing Anchor Points. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 33(2), 1650013.
- [13] Bani, A.A., Rostamy-Malkhalifeh, M., Hosseinzadeh Lotfi, F., Akbarian, D., (2020). A Method for Finding the Anchor Points of BCC Model in DEA Context. *Journal of Mathematical Extension*, 14(2), 49-68.
- [14] Soleimani-damaneh, M., Mostafaei, A., (2015). Identification of the anchor points in FDH models. *European Journal of Operational Research*, 246(3), 936-943.
- [15] Koushki, J., Soleimani-damaneh, M., (2019). Anchor points in multiobjective optimization: definition, characterization and detection. *Optimization Methods and Software*, 34(6), 1145-1167.
- [16] Bournol, M.L., (2001). *Nonparametric frontier analysis with multiple constituencies*. Ph.D. Dissertation, The University of Mississippi.
- [17] Allen, R., Thanassoulis, E., (2004). Improving envelopment in data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, 154(4), 363-379.
- [18] Banker, R.D., (1984). Estimation most productive scale size using data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, 17(1), 35-44.
- [19] Hadi-venchek, A., Foroughi, A.A., Soleimani-damaneh, M., (2008). A DEA model for resource allocation. *Economic Modelling*. 25(5), 983-993.

- [20] Bellman, R.E., Zadeh, L.A., (1970). Decision making in a fuzzy environment. *Manage. Sci.* 17(4), 141–164.
- [21] Buckley, J.J., (1983). Fuzzy programming and the Pareto optimal set. *Fuzzy Set Syst.* 10(1-3), 57–63.
- [22] Peykani, P., Mohammadi, E., Emrouznejad, A., Pishvae, M.S., Rostamy-Malkhalifeh, M., (2019). Fuzzy data envelopment analysis: an adjustable approach. *Expert Systems with Applications*, 136, 439-452.
- [23] Peykani, P., Mohammadi, E., Pishvae, M.S., Rostamy-Malkhalifeh, M., Jabbarzadeh, A., (2018). A novel fuzzy data envelopment analysis based on robust possibilistic programming: possibility, necessity and credibility-based approaches. *RAIRO-Operations Research*, 52(4), 1445-1463.
- [24] Rostamy-Malkhalifeh, M., Aghayi, N., (2011). Measuring Overall Profit Efficiency with Fuzzy Data. *Journal of Mathematical Extension*, 5(2), 73-90.
- [25] Moore, R.E., (1979). *Method and Application of Interval Analysis*. SIAM, Philadelphia.
- [26] Sengupta, J.K., (1981). *Optimal Decision under Uncertainty*. Springer, New York.
- [27] Hosseinzadeh Lotfi, F., Navabakhs, M., Tehranian, A., Rostamy-Malkhalifeh, M., Shahverdi, R., (2007). Ranking bank branches with interval data the application of DEA. *International Mathematical Forum*, 2(9), 429-440.
- [28] Rostamy-Malkhalifeh, M., Seyed Esmaeili, F.S., (2016). Computing the efficiency interval of decision making units (DMUs) having interval inputs and outputs with the presence of negative data. *Journal of New Researches in Mathematics*, 1(4), 5-14.
- [29] Rostamy-Malkhalifeh, M., Aghayi, N., (2011). Two Ranking of Units on the Overall Profit Efficiency with Interval Data. *Mathematics Scientific Journal*, 8(2), 73-93.