

رویکردی جدید برای یافتن جواب مسایل حمل و نقل با پارامترهای خاکستری

فرید پور افقی^۱، داود درویشی سلوکالایی^{۲*}، جمال صفار اردبیلی^۳

۱- دانشجوی دکتری ریاضی کاربردی، دانشگاه پیام نور، گروه ریاضی، تهران، ایران

۲- استادیار گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، گروه ریاضی، تهران، ایران

۳- استادیار گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، گروه ریاضی، تهران، ایران

رسید مقاله: ۱۸ اردیبهشت ۱۳۹۹

پذیرش مقاله: ۱۲ آذر ۱۳۹۹

چکیده

در دنیای واقعی، تعیین میزان دقیق عرضه و تقاضا در مساله های حمل و نقل به دلیل تغییر شرایط اقتصادی ممکن است به سختی امکان پذیر باشد؛ اما هنگام حمل و نقل کالاهای ضروری به هنگام وقوع بلایای طبیعی یا جابجایی وسایل نظامی در زمان جنگ با داده های نادقیق سروکار خواهیم داشت. در این صورت به منظور مواجهه با عدم قطعیت داده ها و توصیف مناسب پارامترها در مساله حمل و نقل نیازمند رویکردهای جدیدی خواهیم بود. یکی از رویکردها استفاده از نظریه سیستم های خاکستری و پارامترهای خاکستری در مدل سازی این گونه مسایل است. بر این اساس، در این مقاله رویکرد جدیدی برای حل مساله حمل و نقل خاکستری معرفی شده است که بدون نیاز به سفیدسازی پارامترها با رویکردی مبتنی بر مقایسه اعداد خاکستری، جواب را به صورت اعداد خاکستری تعیین می کند. در نتیجه عدم قطعیت داده های ورودی در جواب های به دست آمده به خوبی منعکس خواهد شد. برای نشان دادن کارایی روش ارائه شده، مثال هایی مطرح و با روش پیشنهادی حل می شوند.

کلمات کلیدی: عدم قطعیت، اعداد خاکستری بازه ای، حمل و نقل خاکستری، عرضه، تقاضا.

۱ مقدمه

مدل های حمل و نقل نقش مهمی در تدارکات و مدیریت زنجیره تأمین، برای کاهش هزینه و بهبود خدمات دارند [۱]. در اکثر کشورها به دلیل گسترش شبکه حمل و نقل، ترافیک سنگین می باشد. به دلیل سنگینی ترافیک، محاسبه زمان ازدست رفته بسیار سخت می باشد؛ بنابراین بررسی مسایل حمل و نقل به جامعه و اقتصاد کمک خواهد کرد [۲]. در بازار بسیار رقابتی امروز، فشار بر سازمان ها برای یافتن راه های بهتری برای ایجاد انگیزه در مشتریان

* عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: d_darvishi@pnu.ac.ir

قوی تر می شود. آن‌ها با روشی مقرون به صرفه می خواهند، بهترین شیوه‌ها را انتخاب کنند. مدل‌های حمل و نقل چهارچوبی قدرتمند را برای رفع این چالش فراهم می کنند، به طوری که از حرکت کارآمد و در دسترس بودن به موقع مواد اولیه و کالاهای نهایی اطمینان حاصل می کنند [۱]. در یک مساله معمولی، محصول از یک مبدأ با عرضه مشخص به یک مقصد با تقاضای مشخص منتقل می شود. ضرایب C_{ij} در توابع هدف می توانند هزینه حمل و نقل، زمان تحویل، تعداد کالای حمل شده، عرضه و تقاضای تحقق نیافته و سایر موارد را با انتقال یک واحد محصول از منابع i به مقصد j نشان دهند [۳]. مساله حمل و نقل نوع خاصی از مساله برنامه ریزی خطی است که به حمل و نقل کالاها از مبادی به مقاصد می پردازد [۴]. مطالعه مساله‌ی اصلی حمل و نقل در ابتدا توسط کانترویچ [۵] آغاز شد و بعداً توسط هیچکاک [۶] الگوریتمی برای به دست آوردن جواب مساله حمل و نقل ارائه گردید. مساله حمل و نقل در شکل استاندارد و معمول خود درصدد حداقل کردن کل هزینه حمل کالا از مبدأها به مقصدها می باشد [۷]. مدل‌های حمل و نقل کاربردهای گسترده‌ای در لجستیک و زنجیره تأمین برای کاهش هزینه دارند. در بسیاری از موقعیت‌های واقعی زندگی، کالاها با توجه به منبع آن‌ها و ترکیب نهایی کالاهایی که به مقصد می‌رسند ممکن است از نظر برخی خصوصیات متفاوت باشند؛ بنابراین لازم است که مشخصات شناخته شده‌ای داشته باشد [۴]. در روش برنامه ریزی متداول، لازم است که پارامترها به عنوان مقادیر دقیق شناخته شوند؛ اما در شرایط عملی، پارامترها به ندرت دقیقاً شناخته شده‌اند و باید تخمین زده شوند [۳]. بیشتر مدل‌های ایجاد شده برای حل مساله حمل و نقل با این فرض استوار است که میزان عرضه، تقاضا و هزینه هر واحد دقیقاً شناخته شده است؛ اما در کاربردهای دنیای واقعی، عرضه، تقاضا و هزینه برای هر واحد، معمولاً دقیقاً مشخص نشده است؛ یعنی پارامترها در طبیعت نادقیق هستند [۱]. در تئوری تصمیم‌گیری، تصمیم‌گیری در شرایط عدم قطعیت یک شاخه حیاتی است و رویکردهای مختلفی برای مقابله با آن وجود دارد [۸]. برای مقابله با عدم قطعیت‌ها، روش‌های مختلفی از جمله اعداد بازه‌ای، فازی، راف و تصادفی توسعه داده شده‌اند. روش‌های احتمالی و فازی اغلب برای توصیف عناصر نامشخص و بهبود عدم قطعیت موجود در متغیر تصمیم به کار می‌روند. آنی کریستی و کالپانا [۹] روش‌هایی برای حل مسایل حمل و نقل فازی چندهدفه با استفاده از توابع عضویت غیرخطی ارائه نمودند. یولا و جاها [۱۰] روشی را برای حل مساله حمل و نقل چندهدفه پیشنهاد داده‌اند که در آن از تکنیک برنامه ریزی فازی با عملکرد عضویت خطی فازی با هزینه‌های متفاوت استفاده شده است. بسیاری از محققان [۱۱-۱۸] روش‌های مختلفی را برای حل مساله حمل و نقل در شرایط عدم قطعیت ارائه داده‌اند. الگوریتم‌های مختلفی برای حل مسایل حمل و نقل با فرض غیردقیق بودن ضرایب تابع هدف، میزان عرضه و تقاضا ارائه شده است [۷]. برای مقابله با چنین موقعیت‌هایی، دنگ [۱۹] مفهوم نظریه سیستم‌های خاکستری را معرفی کرد.

نظریه سیستم‌های خاکستری روش دیگری برای مقابله با مسایل تصمیم‌گیری در شرایط عدم قطعیت ارائه کرد [۸]. جینگ ناشا و جایش [۲۰] جوابی برای مساله‌ی حمل و نقل بازه‌ای چندهدفه بر اساس نظریه تصمیم‌گیری در وضعیت خاکستری ارائه دادند. نظریه سیستم‌های خاکستری به مطالعه سیستم‌های غیردقیق با اطلاعات کم و ناشناخته می‌پردازد [۲۱]. با ترکیب نظریه سیستم‌های خاکستری با روش اصلی مساله حمل و نقل، مساله حمل و نقل خاکستری بر اساس نظریه سیستم‌های خاکستری برقرار می‌شود. در شرایط ویژه، مانند حمل مواد اورژانسی در

هنگام وقوع بلایای طبیعی یا حمل تجهیزات نظامی در زمان جنگ، مسافت پیموده شده دیگر قطعی نیست زیرا شبکه حمل و نقل موجود ممکن است از بین برود. در این شرایط، ظرفیت حمل و نقل اغلب بسیار ضعیف می شود و در نتیجه بهینه سازی مسایل حمل و نقل اهمیت بیشتری پیدا می کند. مسایل حمل و نقل فوق را مسایل حمل و نقل خاکستری می نامیم [۲]. حمل و نقل خاکستری برای پارامترهای خود به اطلاعات توزیع نیاز ندارد، زیرا اعداد خاکستری برای ورودی های غیردقیق مناسب هستند [۲۲]. برخی از مطالعات قبلی روش حل مسایل حمل و نقل با پارامترهای عرضه و تقاضای دقیق را ارایه کرده اند؛ بنابراین بسیاری از محققان مسایل حمل و نقل را در محیط های مختلف مانند محیط های دقیق، فازی، تصادفی، راف و غیره مورد بررسی قرار داده اند ولی بندرت مساله حمل و نقل را در محیط خاکستری بررسی کرده اند. همان طور که گفته شد، گاهی اوقات ارزش پارامترهای حمل و نقل به شکل احتمال بین کران بالا و پایین، قابل بیان است. این امر به ما انگیزه می دهد که تمام پارامترهای مساله حمل و نقل را به صورت اعداد خاکستری بازه ای ارایه دهیم. به طور کلی، روش های موجود برای حل مساله حمل و نقل خاکستری، بر اساس سفیدسازی پارامترهای خاکستری و تبدیل مساله به یک مساله حمل و نقل معادل با پارامترهای دقیق می باشد که تنها می توانند جواب های دقیق را برای مساله حمل و نقل خاکستری ارایه دهند.

لذا در این مطالعه، با توجه به مزیت های نظریه سیستم های خاکستری جهت مواجهه با عدم قطعیت موجود در استفاده از مساله حمل و نقل در دنیای واقعی، ما یک رویکرد مستقیم جدید برای حل مساله حمل و نقل خاکستری معرفی می کنیم که بدون نیاز به سفیدسازی پارامترهای خاکستری و با استفاده از روش مقایسه اعداد خاکستری با یک شیوه جدید، جواب مساله حمل و نقل را به صورت اعداد خاکستری تعیین می کند در نتیجه باعث می شود تا عدم اطمینان در داده های ورودی را در نتایج به دست آمده بازتاب دهد. کاربرد روش پیشنهادی به کمک نمونه های عددی نشان داده شده است.

مقاله حاضر در ۶ بخش ارایه شده است. پس از بیان مقدمه، ابتدا در بخش ۲ دانش پایه درباره نظریه سیستم خاکستری و اعداد خاکستری بازه ای که در بخش های بعدی مورد نیاز هستند، بیان می شود. فرمول مدل های حمل و نقل با پارامترهای خاکستری در بخش ۳ ارایه شده است. الگوریتم پیشنهادی جدید برای حل مساله حمل و نقل خاکستری در بخش ۴ ارایه شده است. در بخش ۵، برای بیان کارآمدی و تفهیم روش پیشنهادی نمونه های عددی مطرح و حل می کنیم. سرانجام، بخش ۶ شامل نتیجه گیری و ارایه پیشنهاد می باشد.

۲ نظریه سیستم های خاکستری

به دلیل پیچیدگی ها و نقصان اطلاعات، طی دهه های اخیر، طراحی روش هایی برای شناخت، مدل سازی و مدیریت عدم دقت موجود در رفتار سیستم ها به یکی از موضوعات علمی جذاب تبدیل شده و نظریه ها و روش های متنوعی برای مطالعه سیستم های غیرقطعی توسعه داده شده است. در طول نیمه دوم قرن بیستم، در حوزه سیستم ها شاهد ظهور بی وقفه نظریه ها و روش های مختلف به منظور شناخت و مدیریت عدم اطمینان موجود در اطلاعات بوده ایم. از جمله، نظریه ریاضیات فازی، نظریه مجموعه های راف و ... که بخشی از تلاش های صورت گرفته در مطالعه سیستم های نادقیق در این دوره به حساب می آیند. در کنار روش های فوق، نظریه سیستم های

خاکستری یکی از مهم ترین دستاوردهای علمی در زمینه چگونگی استفاده از اطلاعات نادقیق محسوب می شود. این نظریه، روشی جدید برای مطالعه مسایلی است که به دلیل داده های اندک و اطلاعات محدود، عدم دقت بالایی دارند. سیستم خاکستری به عنوان سیستمی تعریف شده است که شامل اطلاعات غیرقطعی است. اگر اطلاعات واضح یک سیستم با رنگ سفید نشان داده شده باشند و اطلاعات ناشناخته به صورت سیاه نمایش داده شده باشند، آنگاه اطلاعات مربوط به طبیعی ترین سیستم ها، سفید (کاملاً شناخته شده) یا سیاه (کاملاً ناشناخته) نیست بلکه ترکیبی از هر دو به معنای خاکستری می باشند. ما به تعاریف زیر از عملگرهای اساسی ریاضی و رابطه ترتیبی جزئی اعداد خاکستری بازه ای که در مطالعات [۲۳-۲۵] معرفی شده نیاز داریم. نظریه سیستم خاکستری پژوهشگران بسیاری را به خود جلب کرده است [۲۶-۳۴]. در این بخش، به طور مختصر در مورد برخی از تعاریف و مفاهیم مورد نیاز برای مطالعه و تحلیل سیستم خاکستری، بحث خواهیم کرد.

تعریف ۱: عدد خاکستری عددی است که مقدار دقیق آن مشخص نیست. یک عدد خاکستری بازه ای می تواند پیوسته یا گسسته باشد. این ممکن است یک عدد گسسته در مجموعه ای از اعداد یا هر عدد از یک بازه باشد. به عبارت دیگر، عدد خاکستری بازه ای عددی است که کران بالا و پایین آن مشخص است؛ اما مکان آن بین کران بالا و پایین نامشخص است.

$$\otimes x \in [\underline{x}, \bar{x}] = \{x \leq t \leq \bar{x}\}, \quad \underline{x} < \bar{x} \quad (1)$$

که در آن $\otimes x$ عدد خاکستری، t اطلاعات، \underline{x} و \bar{x} کران پایین و کران بالای اطلاعات می باشد [۸].

تعریف ۲: مرکز عدد خاکستری $\otimes x \in [\underline{x}, \bar{x}]$ را با نماد $\otimes \hat{x}$ و عرض (شعاع) آن را با نماد $\otimes x'$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\otimes \hat{x} = \frac{\underline{x} + \bar{x}}{2}, \quad \otimes x' = \frac{\bar{x} - \underline{x}}{2} \quad (2)$$

تذکره ۱: برای هر عدد خاکستری $\otimes x \in [\underline{x}, \bar{x}]$ روابط زیر را خواهیم داشت:

$$\bar{x} = \otimes \hat{x} + \otimes x', \quad \underline{x} = \otimes \hat{x} - \otimes x' \quad (3)$$

تذکره ۲: برای هر عدد خاکستری $\otimes x \in [\underline{x}, \bar{x}]$ رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$\otimes x \in [\underline{x}, \bar{x}] = \langle \otimes \hat{x}, \otimes x' \rangle \quad (4)$$

لم ۱: فرض کنید که $\otimes x \in [\underline{x}, \bar{x}]$, $\underline{x} < \bar{x}$ ، یک عدد خاکستری بازه ای و $k \in R - \{0\}$ باشد، آنگاه ضرب اسکالر k در عدد خاکستری $\otimes x$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$k.(\otimes x) = \otimes(kx) \in [k\underline{x}, k\bar{x}] \quad \text{if } k > 0 \quad (5)$$

$$k.(\otimes x) = \otimes(kx) \in [k\bar{x}, k\underline{x}] \quad \text{if } k < 0 \quad (6)$$

تعریف ۳: فرض کنید $\otimes x_1 \in [\underline{x}_1, \bar{x}_1]$ و $\otimes x_2 \in [\underline{x}_2, \bar{x}_2]$ دو عدد خاکستری باشند. می توان مفاهیم مربوط به روابط بین اعداد خاکستری را برای اعداد خاکستری بازه ای به صورت زیر بیان نمود [۳۵]:

$$\otimes x_1 + \otimes x_2 = [\underline{x}_1 + \underline{x}_2, \bar{x}_1 + \bar{x}_2] \quad (7)$$

$$\otimes x_1 - \otimes x_2 = \otimes x_1 + (-\otimes x_2) = [\underline{x}_1 - \bar{x}_2, \bar{x}_1 - \underline{x}_2] \quad (8)$$

$$\otimes x_1 \times \otimes x_2 = [\min\{\underline{x}_1 \underline{x}_2, \bar{x}_1 \bar{x}_2, \bar{x}_1 \underline{x}_2, \underline{x}_1 \bar{x}_2\}, \max\{\underline{x}_1 \underline{x}_2, \bar{x}_1 \bar{x}_2, \bar{x}_1 \underline{x}_2, \underline{x}_1 \bar{x}_2\}] \quad (9)$$

$$\frac{\otimes x_1}{\otimes x_2} = \otimes x_1 \times \otimes x_2^{-1} = \left[\min\left\{\frac{\underline{x}_1}{\underline{x}_2}, \frac{\underline{x}_1}{\bar{x}_2}, \frac{\bar{x}_1}{\underline{x}_2}, \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2}\right\}, \max\left\{\frac{\underline{x}_1}{\underline{x}_2}, \frac{\underline{x}_1}{\bar{x}_2}, \frac{\bar{x}_1}{\underline{x}_2}, \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2}\right\} \right] \cdot \notin [\underline{x}_2, \bar{x}_2] \quad (10)$$

قضیه ۱: هر عدد خاکستری بازه‌ای نامنفی می‌تواند به صورت مجموع دو عدد خاکستری بازه‌ای نامنفی کوچک‌تر یا مساوی خودش نوشته شود. به عبارت دیگر؛

$$\forall \otimes x \in [\underline{x}, \bar{x}], \otimes \hat{x} \geq 0, \exists \otimes y \in [\underline{y}, \bar{y}], \otimes \hat{y} \geq 0, \otimes z \in [\underline{z}, \bar{z}], \otimes \hat{z} \geq 0.$$

به طوری که

$$[\underline{x}, \bar{x}] = [\underline{y}, \bar{y}] + [\underline{z}, \bar{z}].$$

اثبات: اگر عدد خاکستری $\otimes y$ یا عدد خاکستری $\otimes z$ مساوی عدد خاکستری $\otimes x$ باشند حکم بدیهی است.

فرض کنید $\otimes y \in [\underline{y}, \bar{y}] \leq \otimes x \in [\underline{x}, \bar{x}]$ باشد. در این صورت داریم؛

$$0 \leq \otimes \hat{y} \leq \otimes \hat{x} \Rightarrow \otimes \hat{x} = \otimes \hat{y} + c, \quad 0 \leq c \in R$$

بنابراین عدد حقیقی c مرکز عدد خاکستری $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ بوده و روابط زیر را خواهیم داشت:

$$[\underline{x}, \bar{x}] = [\underline{y}, \bar{y}] + [c - \varepsilon, c + \varepsilon]$$

که در آن؛

$$[\underline{z}, \bar{z}] = [c - \varepsilon, c + \varepsilon] \blacksquare.$$

۲-۱ رتبه‌بندی اعداد خاکستری

با توسعه نظریه سیستم‌های خاکستری در زمینه‌های مختلف علمی و لزوم مقایسه اعداد خاکستری در زمینه‌های مختلف، رتبه‌بندی اعداد خاکستری، نقش بسیار مهمی در تصمیم‌گیری و کاربردهای نظریه سیستم‌های خاکستری ایفا می‌کند.

هو و وانگ با بررسی نواقص روش‌های مقایسه اعداد بازه‌ای یک رابطه ترتیب جدیدی به صورت زیر پیشنهاد کردند [۳۶].

تعریف ۴: فرض کنید $\otimes x = [\underline{x}, \bar{x}]$ و $\otimes y = [\underline{y}, \bar{y}]$ دو عدد خاکستری بازه‌ای، با مراکز $\otimes \hat{x}$ و $\otimes \hat{y}$ و

عرض‌های $\otimes x'$ و $\otimes y'$ باشند. در این صورت رابطه ترتیب بر اساس روش پیشنهادی هو و وانگ به صورت زیر خواهد بود:

$$\otimes x \leq_G \otimes y \text{ اگر و تنها اگر}$$

$$(1) \quad \otimes \hat{x} < \otimes \hat{y} \text{ وقتی که } \otimes \hat{x} \neq \otimes \hat{y}.$$

$$(2) \quad \otimes \hat{x} = \otimes \hat{y} \text{ وقتی که } \otimes x' \geq \otimes y'.$$

همچنین $\otimes x <_G \otimes y$ اگر و تنها اگر $\otimes x \leq_G \otimes y$ و $\otimes x \neq_G \otimes y$.

مرکز و عرض اعداد خاکستری بازه‌ای به ترتیب مقدار مورد انتظار و عدم قطعیت پارامترها در نظر گرفته می‌شوند. لذا وقتی مرکزهای اعداد خاکستری بازه‌ای باهم برابر باشند برای مقایسه آن‌ها از عرض‌های اعداد خاکستری بازه‌ای استفاده می‌شود. درویشی و همکاران [۲۸] در مقایسه اعداد خاکستری به جزییات بیشتری پرداخته‌اند.

۳ مسایل حمل و نقل خاکستری

برای ساختن یک مدل واقعی، به منظور کاهش هزینه‌های اطلاعات، استفاده از مسایل حمل و نقل با پارامتر غیرقطعی مناسب‌تر است. عدم دقت موجود در پارامترها بدان معنی است که اطلاعات مربوط به این پارامترها کامل نیست. با این حال، حتی با اطلاعات ناقص، مدل مورد استفاده به طور معمول قادر به ارائه یک مقدار خاکستری برای پارامترها است؛ بنابراین، استفاده از مسایل حمل و نقل خاکستری برای مدل‌سازی و حل مسایل دنیای واقعی مناسب‌تر است [۱]. مساله حمل و نقل خاکستری تعمیم مساله حمل و نقل معمولی می‌باشد که در آن داده‌های ورودی به جای مقادیر ثابت به عنوان عدد خاکستری بازه‌ای در نظر گرفته می‌شوند. این مساله زمانی رخ می‌دهد که عدم قطعیت در داده‌های مساله وجود داشته و بیان آن‌ها به صورت اعداد خاکستری بازه‌ای برای تصمیم‌گیرندگان راحت‌تر است. مساله حمل و نقل خاکستری در حالت کلی در جدول ۱ نمایش داده شده است [۴].

جدول ۱. ماتریس حمل و نقل خاکستری

مقاصد مبادی	۱	۲	...	j	...	n	عرضه
۱	$\otimes c_{11}$	$\otimes c_{12}$...	$\otimes c_{1j}$...	$\otimes c_{1n}$	$\otimes a_1$
۲	$\otimes c_{21}$	$\otimes c_{22}$...	$\otimes c_{2j}$...	$\otimes c_{2n}$	$\otimes a_2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	$\otimes c_{i1}$	$\otimes c_{ir}$...	$\otimes c_{ij}$...	$\otimes c_{in}$	$\otimes a_i$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	$\otimes c_{m1}$	$\otimes c_{m2}$...	$\otimes c_{mj}$...	$\otimes c_{mn}$	$\otimes a_m$
تقاضا	$\otimes b_1$	$\otimes b_2$...	$\otimes b_j$...	$\otimes b_n$	

مدل ریاضی مساله حمل و نقل خاکستری به شرح زیر ارائه می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & \otimes Z =_G \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \otimes c_{ij} \otimes x_{ij} \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \otimes x_{ij} =_G \otimes a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 & \sum_{i=1}^m \otimes x_{ij} =_G \otimes b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \\
 & \otimes x_{ij} \geq_G \otimes 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{11}$$

به طوری که $\otimes c_{ij}$ ، $\otimes a_i$ و $\otimes b_j$ برای هر i و j ، اعداد خاکستری بازه‌ای هستند.

در اینجا فرض بر این است که $\otimes Z$ مینیمم مقدار تابع هدف بوده، $\otimes c_{ij}$ ها برای هر $i = 1, 2, \dots, m$ و $j = 1, 2, \dots, n$ ضرایب هزینه تابع هدف، $\otimes a_i$ برای هر $i = 1, 2, \dots, m$ میزان عرضه مبدأ i ام و $\otimes b_j$ برای هر $j = 1, 2, \dots, n$ میزان تقاضای مقصد j می‌باشد. همچنین داریم:

$$\otimes c_{ij} >_G \otimes 0 \text{ و } \otimes b_j >_G \otimes 0, \otimes a_i >_G \otimes 0.$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} \text{Min } \otimes Z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \otimes [c_{ij}, \bar{c}_{ij}] \times \otimes [x_{ij}, \bar{x}_{ij}] \\ \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n \otimes [x_{ij}, \bar{x}_{ij}] &= \otimes [a_i, \bar{a}_i], \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m \otimes [x_{ij}, \bar{x}_{ij}] &= \otimes [b_j, \bar{b}_j], \quad j = 1, 2, \dots, n \\ x_{ij} \geq 0, \quad \bar{x}_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (12)$$

که در آن، c_{ij} ، \bar{c}_{ij} ، a_i ، \bar{a}_i ، b_j و \bar{b}_j برای هر i ، j اعداد حقیقی مثبت می‌باشند.

تعریف ۵: بازه $[x_{ij}, \bar{x}_{ij}]$ برای هر $i = 1, 2, \dots, m$ و $j = 1, 2, \dots, n$ جواب مساله حمل و نقل خاکستری نامیده می‌شود هرگاه در معادلات (۱۲) صدق کند.

تعریف ۶: جواب مساله $[x_{ij}, \bar{x}_{ij}]$ برای هر $i = 1, 2, \dots, m$ و $j = 1, 2, \dots, n$ یک جواب بهینه برای مساله حمل و نقل خاکستری خواهد بود هرگاه برای هر جواب مساله دیگری مانند $[y_{ij}, \bar{y}_{ij}]$ برای هر $i = 1, 2, \dots, m$ و $j = 1, 2, \dots, n$ رابطه زیر را داشته باشیم؛

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [c_{ij}, \bar{c}_{ij}] \times [x_{ij}, \bar{x}_{ij}] \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [c_{ij}, \bar{c}_{ij}] \times [y_{ij}, \bar{y}_{ij}]$$

تعریف ۷: هر جواب مساله حمل و نقل خاکستری با m منبع و n مقصد یک جواب مساله اساسی خاکستری نامیده می‌شود هرگاه به تعداد $m+n-1$ تخصیص مثبت برای x_{ij} داشته باشیم. اگر تعداد تخصیص‌ها در جواب اساسی خاکستری کمتر از $m+n-1$ باشد جواب مساله اساسی خاکستری تبهگن نامیده می‌شود.

تعریف ۸: یک جواب مساله خاکستری، جواب بهینه خاکستری نامیده می‌شود هرگاه مجموع هزینه‌های مساله حمل و نقل خاکستری را مینیمم کند.

• الگوریتم پیشنهادی

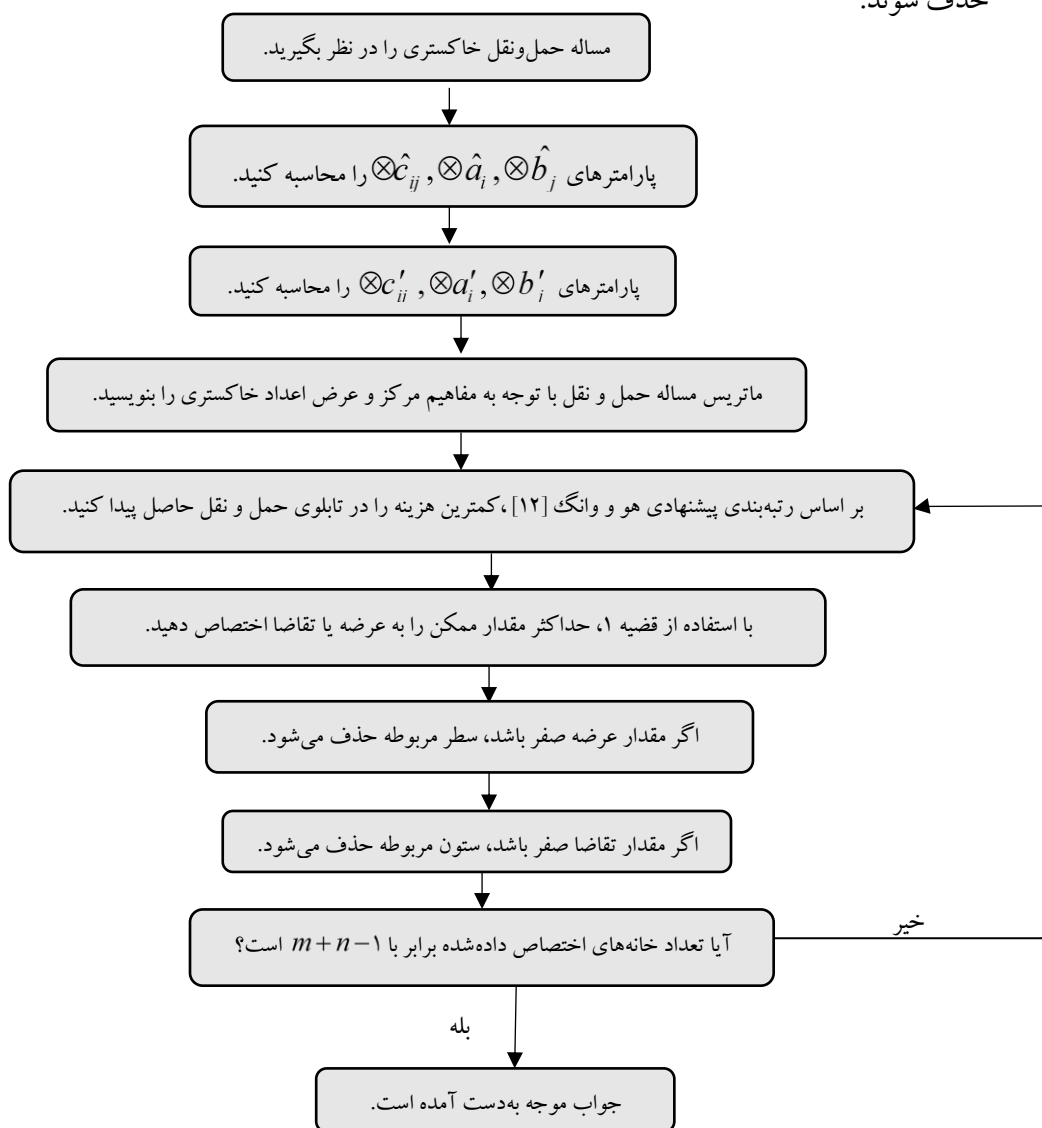
مساله حمل و نقل خاکستری مدل (۱۱) را با مقادیر عرضه و تقاضای برابر در نظر بگیرید.

مرحله ۱: مرکزهای هزینه‌های خاکستری، عرضه‌های خاکستری و تقاضاهای خاکستری را محاسبه کنید.

مرحله ۲: عرض‌های هزینه‌های خاکستری، عرضه‌های خاکستری و تقاضاهای خاکستری را محاسبه کنید.

مرحله ۳: ماتریس مساله حمل و نقل متناظر با مساله (۱۱) را که توسط عرض و مرکز مشخص می شود را بنویسید.
مرحله ۴: مکان کم ترین ضرایب هزینه را در تابلو حمل و نقل حاصل بر اساس رویکرد رتبه بندی اعداد خاکستری هو و وانگ [۳۶] پیدا کنید. مکان متناظر در جدول حمل و نقل خاکستری کم ترین هزینه را خواهد داشت. اگر بیش از یک مکان چنین ویژگی وجود دارد، یکی را به دلخواه انتخاب کنید و حداکثر مقدار ممکن را به آن اختصاص دهید و سپس براساس قضیه ۱، پس از کسر هزینه اختصاص یافته از سطر و ستون، مقدار عرضه و تقاضا باقی مانده را بنویسید.

مرحله ۵: اگر مقدار عرضه صفر شد، ردیف مربوطه و اگر مقدار تقاضا صفر شد، ستون مربوطه حذف می شود.
مرحله ۶: مراحل ۴ و ۵ را تکرار کنید تا تمام مقادیر عرضه و تقاضا اختصاص داده شده و تمام سطرها و ستونها حذف شوند.



شکل ۱. نمودار فرآیند الگوریتم پیشنهادی

۴ مثال عددی

با توجه به نتایج به دست آمده و به منظور روشن ساختن بحث‌های صورت گرفته به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱: یک شرکت حمل و نقل می‌خواهد نیازهای اساسی مردم در چهار شهر را که در سیل گرفتار شده‌اند، از سه شهر هم‌جوار تأمین کند. با توجه به شرایط بحرانی پیش آمده امکان تعیین دقیق هزینه حمل و نقل برای هر واحد کالا، میزان عرضه و تقاضای کالاهای مورد نیاز برای هر شهر وجود ندارد؛ اما با توجه به خسارت سیل و پیش‌بینی‌های انجام شده، جدول حمل و نقل ۲ بر اساس اعداد خاکستری ارائه شده است. مساله را طوری حل کنید که ضمن رفع نیاز شهرها، هزینه حمل و نقل به حداقل برسد.

جدول ۲. ماتریس مساله حمل و نقل خاکستری

مقاصد مبادی	۱	۲	۳	۴	عرضه
۱	$\otimes [1, 2]$	$\otimes [1, 3]$	$\otimes [5, 9]$	$\otimes [4, 8]$	$\otimes [7, 9]$
۲	$\otimes [1, 2]$	$\otimes [7, 10]$	$\otimes [2, 6]$	$\otimes [3, 5]$	$\otimes [17, 21]$
۳	$\otimes [7, 9]$	$\otimes [7, 11]$	$\otimes [3, 5]$	$\otimes [5, 7]$	$\otimes [16, 18]$
تقاضا	$\otimes [10, 12]$	$\otimes [2, 4]$	$\otimes [13, 15]$	$\otimes [15, 17]$	$\otimes [40, 48]$

مساله را به صورت زیر فرمول‌بندی می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
 \text{Min } \otimes Z = & \otimes [1, 2] \times \otimes x_{11} + \otimes [1, 3] \times \otimes x_{12} + \otimes [5, 9] \times \otimes x_{13} + \otimes [4, 8] \times \otimes x_{14} \\
 & + \otimes [1, 2] \times \otimes x_{21} + \otimes [7, 10] \times \otimes x_{22} + \otimes [2, 6] \times \otimes x_{23} + \otimes [3, 5] \times \otimes x_{24} \\
 & + \otimes [7, 9] \times \otimes x_{31} + \otimes [7, 11] \times \otimes x_{32} + \otimes [3, 5] \times \otimes x_{33} + \otimes [5, 7] \times \otimes x_{34} \\
 \text{s.t. } & \sum_{j=1}^4 \otimes x_{1j} = \otimes [7, 9] \\
 & \sum_{j=1}^4 \otimes x_{2j} = \otimes [17, 21] \\
 & \sum_{j=1}^4 \otimes x_{3j} = \otimes [16, 18] \\
 & \sum_{i=1}^3 \otimes x_{i1} = \otimes [10, 12] \\
 & \sum_{i=1}^3 \otimes x_{i2} = \otimes [2, 4] \\
 & \sum_{i=1}^3 \otimes x_{i3} = \otimes [13, 15] \\
 & \sum_{i=1}^3 \otimes x_{i4} = \otimes [15, 17] \\
 & \otimes x_{ij} \geq \otimes 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3, 4
 \end{aligned}$$

اکنون ماتریس مساله حمل و نقل را با توجه به مفاهیم مرکز و عرض اعداد خاکستری در جدول ۳ در نظر می گیریم.

جدول ۳. ماتریس مساله حمل و نقل با توجه به مفاهیم مرکز و عرض اعداد خاکستری

مقاصد مبای	۱	۲	۳	۴	عرضه
۱	$\langle 1/5, 0/5 \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle$	$\langle 7, 2 \rangle$	$\langle 6, 2 \rangle$	$\langle 8, 1 \rangle$
۲	$\langle 1/5, 0/5 \rangle$	$\langle 8/5, 1/5 \rangle$	$\langle 4, 2 \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle$	$\langle 19, 2 \rangle$
۳	$\langle 8, 1 \rangle$	$\langle 9, 2 \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle$	$\langle 6, 1 \rangle$	$\langle 17, 1 \rangle$
تقاضا	$\langle 11, 1 \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle$	$\langle 14, 1 \rangle$	$\langle 16, 1 \rangle$	$\langle 44, 4 \rangle$

تخصیص اول: بر اساس رتبه بندی پیشنهادی هو و وانگ کم ترین هزینه در سطر اول و ستون اول جدول ۳ قرار دارد؛ بنابراین کم ترین هزینه خاکستری در سطر اول و ستون اول جدول ۲ خواهد بود. لذا اولین تخصیص برای سطر اول و ستون اول جدول ۲ با مقایسه مقادیر عرضه سطر اول و تقاضای ستون اول برابر $\otimes x_{11} = \otimes [7, 9]$ خواهد بود. بعد از این تخصیص چون مقدار عرضه سطر اول برابر صفر شده، آن را از جدول ۲ حذف می کنیم. حال با استفاده از قضیه ۱ می توان نوشت، $\otimes [10, 12] = \otimes [7, 9] + \otimes [3, 3]$. در نتیجه مقدار تقاضای باقیمانده ستون اول برابر با $\otimes [3, 3]$ خواهد بود. پس از اولین تخصیص ماتریس حمل و نقل خاکستری، به فرم زیر درمی آید:

جدول ۴. ماتریس مساله حمل و نقل خاکستری بعد از اولین تخصیص

مقاصد مبای	۱	۲	۳	۴	عرضه
۲	$\otimes [1, 2]$	$\otimes [7, 10]$	$\otimes [2, 6]$	$\otimes [3, 5]$	$\otimes [17, 21]$
۳	$\otimes [7, 9]$	$\otimes [7, 11]$	$\otimes [3, 5]$	$\otimes [5, 7]$	$\otimes [16, 18]$
تقاضا	$\otimes [3, 3]$	$\otimes [2, 4]$	$\otimes [13, 15]$	$\otimes [15, 17]$	$\otimes [33, 39]$

ماتریس مساله حمل و نقل متناظر جدول ۴ با توجه به مفاهیم مرکز و عرض اعداد خاکستری در جدول ۵ آورده شده است.

جدول ۵. ماتریس مساله حمل و نقل متناظر جدول ۴ با توجه به مفاهیم مرکز و عرض اعداد خاکستری

مقاصد مبای	۱	۲	۳	۴	عرضه
۲	$\langle 1/5, 0/5 \rangle$	$\langle 8/5, 1/5 \rangle$	$\langle 4, 2 \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle$	$\langle 19, 2 \rangle$
۳	$\langle 8, 1 \rangle$	$\langle 9, 2 \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle$	$\langle 6, 1 \rangle$	$\langle 17, 1 \rangle$
تقاضا	$\langle 3, 0 \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle$	$\langle 14, 1 \rangle$	$\langle 16, 1 \rangle$	$\langle 36, 3 \rangle$

تخصیص دوم: بر اساس رتبه بندی پیشنهادی هو و وانگ کم ترین هزینه در سطر دوم و ستون اول جدول ۵ قرار دارد؛ بنابراین کم ترین هزینه خاکستری در سطر دوم و ستون اول جدول ۴ خواهد بود. لذا دومین تخصیص برای

سطر اول و ستون اول جدول ۴ با مقایسه مقادیر عرضه سطر دوم و تقاضای ستون اول برابر $\otimes x_{11} = \otimes [3, 3]$ خواهد بود. بعد از این تخصیص چون مقدار تقاضای ستون اول برابر صفر شده، آن را از جدول ۴ حذف می‌کنیم.

حال با استفاده از قضیه ۱ می‌توان نوشت: $\otimes [17, 21] = \otimes [3, 3] + \otimes [14, 18]$

در نتیجه مقدار عرضه باقیمانده سطر دوم برابر با $\otimes [14, 18]$ خواهد بود. پس از دومین تخصیص ماتریس حمل و نقل خاکستری، به فرم زیر درمی‌آید:

جدول ۶. ماتریس مساله حمل و نقل خاکستری بعد از دومین تخصیص

مقاصد مبادی	۲	۳	۴	عرضه
۲	$\otimes [7, 10]$	$\otimes [2, 6]$	$\otimes [3, 5]$	$\otimes [14, 18]$
۳	$\otimes [7, 11]$	$\otimes [3, 5]$	$\otimes [5, 7]$	$\otimes [16, 18]$
تقاضا	$\otimes [2, 4]$	$\otimes [13, 15]$	$\otimes [15, 17]$	$\otimes [30, 36]$

ماتریس مساله حمل و نقل متناظر جدول ۶ با توجه به مفاهیم مرکز و عرض اعداد خاکستری در جدول ۷ آورده شده است.

جدول ۷. ماتریس مساله حمل و نقل متناظر جدول ۶ با توجه به مفاهیم مرکز و عرض اعداد خاکستری

مقاصد مبادی	۲	۳	۴	عرضه
۲	$\langle 8/5, 1/5 \rangle$	$\langle 4, 2 \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle$	$\langle 19, 2 \rangle$
۳	$\langle 9, 2 \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle$	$\langle 6, 1 \rangle$	$\langle 17, 1 \rangle$
تقاضا	$\langle 3, 1 \rangle$	$\langle 14, 1 \rangle$	$\langle 16, 1 \rangle$	$\langle 36, 3 \rangle$

تخصیص سوم: بر اساس رتبه‌بندی پیشنهادی هو و وانگ کم‌ترین هزینه در سطر دوم و ستون سوم جدول ۷ قرار دارد؛ بنابراین کم‌ترین هزینه خاکستری در سطر دوم و ستون سوم جدول ۶ خواهد بود. لذا سومین تخصیص برای سطر دوم و ستون سوم جدول ۶ با مقایسه مقادیر عرضه سطر دوم و تقاضای ستون سوم برابر $\otimes x_{33} = \otimes [13, 15]$ خواهد بود. بعد از تخصیص چون مقدار تقاضای ستون سوم برابر صفر شده، آن را از جدول ۶ حذف می‌کنیم.

حال می‌توان نوشت: $\otimes [14, 18] = \otimes [13, 15] + \otimes [1, 3]$

در نتیجه مقدار عرضه باقیمانده سطر دوم برابر با $\otimes [1, 3]$ خواهد بود.

ما این روند را تا زمانی که تمام مقادیر عرضه و تقاضا تخصیص یابد و تمام سطرها و ستون‌ها حذف شود ادامه می‌دهیم؛ بنابراین در پایان این روش به جواب زیر خواهیم رسید.

$\otimes x_{11} = \otimes [7, 9]$, $\otimes x_{11} = \otimes [3, 3]$, $\otimes x_{33} = \otimes [13, 15]$, $\otimes x_{33} = \otimes [1, 3]$, $\otimes x_{33} = \otimes [2, 4]$, $\otimes x_{33} = \otimes [14, 14]$

یافته‌های پژوهش نشان می‌دهد که مجموع مقادیر اختصاص یافته در هر سطر برابر با میزان عرضه است. مجموع مقادیر اختصاص داده شده در هر ستون برابر با مقدار تقاضای آن است و همچنین تعداد متغیرهای اساسی برابر ۶ است؛ بنابراین، جواب به دست آمده یک جواب موجه برای مساله حمل و نقل خاکستری است.

$$\otimes Z = \otimes [1,2] \times \otimes [7,9] + \otimes [1,2] \times \otimes [3,3] + \otimes [2,6] \times \otimes [13,15] + \otimes [3,5] \times \otimes [1,3] + \otimes [7,11] \times \otimes [2,4] + \otimes [5,7] \times \otimes [14,14] =_G \otimes [123,271].$$

مثال ۲: مساله حمل و نقل خاکستری نامتوازن زیر را در نظر بگیرید.

جدول ۸. ماتریس مساله حمل و نقل خاکستری

مقاصد	عرضه		
مبادی	۱	۲	
۱	$\otimes [1,4]$	$\otimes [2,4]$	$\otimes [2,5]$
۲	$\otimes [3,5]$	$\otimes [2,4]$	$\otimes [3,5]$
			$\otimes [5,10]$
تقاضا	$\otimes [2,4]$	$\otimes [3,6]$	$\otimes [3,7]$

جواب: ابتدا با اضافه کردن یک ستون تقاضای مجازی با هزینه حمل صفر و میزان تقاضای $\otimes [2,3]$ ، مساله حمل و نقل خاکستری را متوازن می‌کنیم.

جدول ۹. ماتریس متوازن شده مساله حمل و نقل خاکستری

مقاصد	عرضه			
مبادی	۱	۲	۳	
۱	$\otimes [1,4]$	$\otimes [2,4]$	$\otimes [0,0]$	$\otimes [2,5]$
۲	$\otimes [3,5]$	$\otimes [2,4]$	$\otimes [0,0]$	$\otimes [3,5]$
				$\otimes [5,10]$
تقاضا	$\otimes [2,4]$	$\otimes [3,6]$	$\otimes [2,3]$	$\otimes [5,10]$

ماتریس مساله حمل و نقل با توجه به مفاهیم مرکز و عرض اعداد خاکستری در جدول ۱۰ آورده شده است.

جدول ۱۰. ماتریس مساله حمل و نقل متناظر جدول ۹ با توجه به مفاهیم مرکز و عرض اعداد خاکستری

مقاصد	عرضه			
مبادی	۱	۲	۳	
۱	$\langle 2/5, 1/5 \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle$	$\langle 0, 0 \rangle$	$\langle 3/5, 1/5 \rangle$
۲	$\langle 4, 1 \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle$	$\langle 0, 0 \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle$
تقاضا	$\langle 3, 1 \rangle$	$\langle 4/5, 1/5 \rangle$	$\langle 2/5, 0/5 \rangle$	$\langle 7/5, 2/5 \rangle$

با به کار گیری الگوریتم پیشنهادی تخصیص های زیر را خواهیم داشت.

$$\otimes x_{11} = \otimes [0, 2], \otimes x_{12} = \otimes [2, 3], \otimes x_{21} = \otimes [1, 1], \otimes x_{22} = \otimes [2, 4]$$

بنابراین جواب موجه مساله حمل و نقل خاکستری به صورت زیر تعیین می شود.

$$\otimes Z = \otimes [1, 4] \times \otimes [0, 2] + \otimes [0, 0] \times \otimes [2, 3] + \otimes [3, 5] \times \otimes [1, 1] + \otimes [2, 4] \times \otimes [2, 4] =_G \otimes [7, 29].$$

۵ نتیجه گیری

مساله حمل و نقل کاربردهای عملی گسترده‌ای در سیستم‌های لجستیک، برنامه‌ریزی نیروی انسانی، تخصیص کارکنان، کنترل موجودی، برنامه‌ریزی تولید و غیره دارد و هدف از آن یافتن بهترین جواب برای تحقق تقاضای n مقصد با استفاده از ظرفیت‌های عرضه m مبدأ می‌باشد. روش‌های کارآمد مختلفی برای حل مسایل حمل و نقل با پارامترهای کاملاً دقیق ایجاد شده است اما در مسایل زندگی واقعی، این شرایط ممکن است همیشه ارضا نشود. در این مقاله، مساله حمل و نقل تحت عدم قطعیت خاکستری به طوری که کلیه پارامترهای حمل و نقل به صورت اعداد خاکستری بازه‌ای بیان شده‌اند مدل‌سازی و حل شده است. از نظریه سیستم‌های خاکستری برای حل مساله تصمیم‌گیری با پارامترهای نامشخص استفاده می‌کنیم که در آن داده‌های ورودی با یک احتمالی، بین یک کران پایین و یک کران بالا قرار می‌گیرند. برخلاف روش‌های موجود برای حل این گونه مسایل که از سفیدسازی پارامترهای خاکستری استفاده می‌کنند و باعث می‌شوند تا عدم قطعیت موجود در داده‌های ورودی مساله در همان ابتدا نادیده گرفته شوند و عملاً، عدم قطعیتی در خروجی مساله مشاهده نشود، در این مطالعه، با توجه به مزیت‌های نظریه سیستم‌های خاکستری جهت مواجهه با عدم قطعیت موجود در استفاده از مساله حمل و نقل در دنیای واقعی، یک رویکرد جدید را پیشنهاد کرده‌ایم. این روش می‌تواند جواب مساله حمل و نقل خاکستری را در حالت متوازن یا نامتوازن به‌طور مستقیم و بدون تبدیل آن به یک مساله معادل کلاسیک، با استفاده از سفیدسازی پارامترهای خاکستری مساله حمل و نقل و یک روش جدید مقایسه اعداد خاکستری، به صورت اعداد خاکستری تعیین کند. بدین ترتیب عدم قطعیت موجود در داده‌های ورودی بهتر در جواب پایانی بازتاب می‌یابد. این روش از پیچیدگی کمتری برخوردار بوده و به کارگیری آن آسان است.

منابع

- [1] Kavitha, K. and Pandian, P., (2012). Sensitivity analysis of supply and demand in a fully interval transportation problem. *International Journal of Engineering Research and Applications*, 2(3), 1900-1910.
- [2] Bai, G., Mao, J. and Lu, G., (2004). Grey transportation problem. *Kybernetes*, 33(2), 219-224.
- [3] Roy, S.K. and Mahapatra, D.R., (2011). Multi-objective interval valued transportation probabilistic problem involving log-normal, *International Journal of Mathematics and Scientific Computing*, 1(2), 14-21.
- [4] Pandian, P. and Anuradha, D., (2011). Solving interval transportation problems with additional impurity constraints, *Journal of Physical Sciences*, 15, 103-112.
- [5] Kantorovich, L.V., (1960). Mathematical methods of organizing and planning production, *Management Science*, 6(4), 366-422.
- [6] Hitchcock, F.L., (1941). The distribution of a product from several sources to numerous localities, *Journal of Mathematical Physics*, 20, 224-230.
- [7] Gupta, A. and Kumar, A., (2012). A new method for solving linear multi objective transportation problems with fuzzy parameters, *Applied Mathematical Modelling*, 36, 1421-1430.

- [8] Baidya, A., Bera, U.K. and Maiti, M., (2016). The grey linear programming approach and its application to multi-objective multi-stage solid transportation problem, *Opsearch*, 53(3), 500–522.
- [9] Annie Christi, M.S. and Kalpana, I., (2016). Solutions of multi objective fuzzy transportation problem with non-linear membership functions, *International Journal of Engineering Research and Application*, 6(11), 52-57.
- [10] Yeola, M.C. and Jahav, V.A., (2016). Solving multi-objective transportation problem using fuzzy programming technique parallel method, *International Journal of Recent Scientific Research*, 7(1), 8455-8457.
- [11] Abdul Kalam Azad, S.M., Hossain, B. and Rahaman, M., (2017). An algorithmic approach to solve transportation problem with the average total opportunity cost method, *International Journal of Scientific and Research Publications*, 7(2), 262-270.
- [12] Nasserli, H., and Khabiri, B., (2019). A grey transportation problem in fuzzy environment. *Journal of Operational Research and Its Applications*, 16 (3), 111-122.
- [13] Chanas, S. and Kuchta, D., (1996). A concept of solution of the transportation problem with fuzzy cost coefficient, *Fuzzy Sets and Systems*, 82, 299-305.
- [14] Dutta, D. and Satyanarayana Murthy, A., (2010). Fuzzy transportation problem with additional restrictions, *Journal of Engineering and Applied Sciences*, 5(2), 36-40.
- [15] Kowalski, K., Lev, B., Shen, W. and Tu, Y., (2014). A fast and simple branching algorithm for solving small scale fixed-charge transportation problem. *Operations Research Perspectives*, 1(1), 1-5.
- [16] Pandian, P., Natarajan, G. and Akilbasha, A., (2016). Fully rough integer interval transportation problems, *International Journal of Pharmacy and Technology*, 8, 13866-13876.
- [17] Pandian, P. and Akilbasha, A., (2018). Fuzzy interval integer transportation problems, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 111(9), 133-142.
- [18] Sophia Porchelvi, R. and Anitha, M., (2018). On solving multi objective interval transportation problem using fuzzy programming technique, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 118(6), 483-491.
- [19] Deng, J.L., (1982). The control problems of grey systems, *Systems and Control Letters*, 1(5), 288-294.
- [20] Jignasha, G.P. and Jayesh M.D., (2017). Solving multi Objective interval transportation problem using grey situation decision-making theory based on grey numbers, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 113(2), 219-233.
- [21] Li, Q.X. and Lin, Y., (2014). A briefing to grey systems theory, *Journal of Systems Science and Information*, 2(2), 178-192.
- [22] Wang, S., Xie, Y., Tang, Y., Zang, H. and Wang, Z., (2013). An interval programming based traffic planning model for urban vehicle emissions management, *Energy and Power Engineering*, 5, 344-349.
- [23] Liu, S. F. and Xie, N., (2013). *Grey Systems Theory and its Applications*, The Science Press of China, Beijing.
- [24] Xie, N.M., (2013). On computational algorithms of grey numbers based on information background, *Grey Systems: Theory and Application*, 3(2), 177-190.
- [25] Yang Y. and John R., (2012). Grey system and greyness, *Information Sciences*, 185, 249-264.
- [26] Nasserli, S.H. and Darvishi, D., (2016b). Diet modeling in uncertainty conditions using grey systems approach, *Journal of Operational Research and its Applications*, 12(4), 29-45.
- [27] Darvishi salokolaei, D., (2019). Some duality results in grey linear programming problem, *Journal of Operational Research and Its Applications*, 16(3), 55-68.
- [28] Darvishi, D., Forrest, J. and Liu, S., (2019). A comparative analysis of grey ranking approaches, *Grey Systems: Theory and Application*, 9(4), 472-487.
- [29] Darvishi, D. and Nasserli, S.H., (2018). A dual simplex method for grey linear programming problems based on duality results, *Grey Systems: Theory and Application*, 30(3), 127-142.
- [30] Liu, S., Yang, Y. and Forrest, J., (2017). *Grey Data Analysis*, Springer, Singapore.
- [31] Nasserli, S.H., Yazdani, A.B. and Darvishi, D., (2016). A primal simplex algorithm for solving linear programming problem with grey cost coefficients, *Journal of New Researches in Mathematics*, 1(4), 121-142.
- [32] Nasserli, S.H., Darvishi, D. and Yazdani, A., (2017). A new approach for solving grey assignment problems, *Control and Optimization in Applied Mathematics*, 2(1), 15-28.
- [33] Nasserli, S.H. and Darvishi, D., (2018). Duality results on grey linear programming problems, *The Journal of Grey System*, 30(3), 127-142.

- [34] Saffar Ardabili, J., Darvishi, D. and PourOfoghi, F., (2020). Application of center and width concepts to solving grey linear programming, *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 6(49), 1-12.
- [35] Moore, R.E., Kearfott, R.B. and Cloud, M.J., (2009). *Introduction to Interval Analysis*. SIAM Press, Philadelphia.
- [36] Hu, B.Q. and Wang, S., (2006). A novel approach in uncertain programming part I: new arithmetic and order relation for interval numbers, *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2(4), 351-371.