

## محاسبه کشسانی مقیاس برای کارایی هزینه، کاربردی در کارخانجات قند و شکر ایران

ربابه قایقران سراب<sup>۱</sup>، علاءالدین ملک<sup>۲\*</sup>، علیرضا امیر تیموری<sup>۳</sup>، سهراب کردرستمی<sup>۴</sup>

۱- دانشجوی دکتری، گروه ریاضی کاربردی، واحد رشت، دانشگاه آزاد اسلامی، رشت، ایران

۲- دانشیار، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی کاربردی، واحد رشت، دانشگاه آزاد اسلامی، رشت، ایران

۳- دانشیار، دانشکده علوم ریاضی، گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

۴- استاد، گروه ریاضی کاربردی، واحد رشت، دانشگاه آزاد اسلامی، رشت، ایران

۵- استاد، گروه ریاضی، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران

رسید مقاله: ۱۱ آبان ۱۳۹۹

پذیرش مقاله: ۱۹ اردیبهشت ۱۴۰۰

### چکیده

بازده به مقیاس، چگونگی تغییر خروجی‌ها در قبال تغییر ورودی‌ها را مطالعه می‌کند و به دوشکل کیفی (بازده به مقیاس) و کمی (کشسانی مقیاس) ارایه می‌گردد. این مقاله به تشریح کشسانی مقیاس و سپس کشسانی مقیاس در مدل کارایی هزینه پرداخته و برای محاسبه آنها از تحلیل پوششی داده‌ها بهره گرفته است. از آنجا که صنعت قندوشکر نقش مهمی در اقتصاد ایران دارد، لذا کارایی کارخانجات قندوشکر به جهت جلوگیری از اتلاف منابع و کارایی هزینه برای صرفه‌جویی در هزینه تولید از اهمیت سرنوشت‌سازی برخوردار است. به این منظور، کشسانی مقیاس برای کارایی هزینه کارخانجات قندوشکر با ماده اولیه چغندر قند مورد بررسی قرار گرفته است. کشش مقیاس این واحدها، قبل و بعد از تصویر واحدهای ناکارا روی مرز کارایی تکنیکی و کارایی هزینه را به دست آوردیم. از نتایج کشسانی مقیاس برای واحدهای تحت بررسی، پی برده‌ایم بازده به مقیاس آنها ثابت است. در این مقاله، همچنین به تشریح روش‌هایی برای ادغام و نرمال کردن ورودی‌های هر کارخانه، به چهار ورودی و خروجی‌ها به یک خروجی در حالی که دارای واحدهای اندازه‌گیری مختلف هستند، پرداخته‌ایم و روشی برای به دست آوردن قیمت هر واحد توصیف نمودیم در حالی که قیمت کل را داریم.

**کلمات کلیدی:** تحلیل پوششی داده‌ها، کارایی هزینه، کشسانی مقیاس، بازده به مقیاس، کارخانه قندوشکر.

### ۱ مقدمه

در این مقاله، جهت ارزیابی کارایی از تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) استفاده شده است [۱]. DEA به کمک برنامه‌ریزی خطی، کارایی واحدها را به طور مجزا به وسیله روش بهینه‌سازی محاسبه می‌کند. یکی از مهم‌ترین

\* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: mala@modares.ac.ir

دیدگاه‌ها در تحلیل کارایی تولید به کاررفته در واحدها، اندازه‌گیری بازده به مقیاس (RTS) است، چون می‌تواند دیدگاه مهمی برای مدیریت واحد فراهم کند تا برای تحکیم موقعیت رقابتی، تصمیم عملی بگیرد.

در تحلیل پوششی داده‌های سنتی دو روش برای به‌دست آوردن بازده به مقیاس وجود دارد، یک روش با توجه به ماهیت کیفی بازده به مقیاس است که بازده به مقیاس افزایشی، کاهش‌ی و یا ثابت است. در تکنولوژی چند ورودی چند خروجی، بازده به مقیاس مربوط به حالتی است که ماکزیمم افزایش در همه خروجی‌ها را نسبت به افزایش داده شده در همه ورودی‌ها اندازه می‌گیرد [۲-۴]. حسین زاده لطفی و همکاران [۵] ناحیه‌ی پایداری بازده به مقیاس را محاسبه نمودند. پایان و همکاران [۶] با ارایه روش خطی، بازده به مقیاس چپ و راست واحدهای تصمیم‌گیرنده را ارزیابی نمودند. از جمله تحقیقاتی که اخیراً در این زمینه انجام شده است، می‌توان به مقاله پودینوفسکی و همکاران [۷] اشاره نمود.

روش دیگر که اولین بار توسط بنکر، چارنز و کوپر [۸] ارایه شده است، ارایه مقدار عددی برای بازده به مقیاس است که به آن کشسانی مقیاس (SE) و یا مقیاس اقتصادی گفته می‌شود. در خصوص کارایی واحدها امروز تنها تأکید، روی تکنولوژی نیست، بلکه بیشتر روی سازماندهی ساختاری، مدیریت، آموزش انجام کار، سازماندهی ورودی‌ها و دیگر توانایی‌های واحدها است. بنابراین فهمیدن خواص بازده به مقیاس و شاخص‌های آن از جمله کشسانی مقیاس جهت ضمانت تخمین ساختار تکنولوژی تولید برای واحدهای تولیدی امری ضروری است. با اندازه‌گیری کشسانی مقیاس، می‌فهمیم تغییر در یکی از متغیرهای اقتصادی به‌طورمثال: قیمت چه اندازه بر سایر متغیرها از جمله فروش تأثیری گذارد [۹]. ساهو و همکاران [۱۰] به بررسی همه‌جانبه روش‌های تخمین کشسانی مقیاس در تکنولوژی‌های تکه تکه خطی، لگاریتم خطی و مدل FDH در فضای ورودی-خروجی یا فضای هزینه-خروجی از مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها پرداختند.

کشسانی مقیاس، از دیدگاه فریش [۱۱] خاصیت تابع تولید است و به‌طورمنظم برای توصیف ارتباط بین مقیاس و کارایی استفاده می‌شود. سیوشی [۱۰] اولین فردی است که اندازه عددی بازده به مقیاس مدل کارایی هزینه DEA را به‌دست آورده است و در سال ۱۹۹۹ میلادی محاسبات عددی بازده به مقیاس براساس تابع تولید را به دوآلتی تابع هزینه ارتباط داده است [۱۲]. سزارونی و همکاران [۱۳] در مقاله‌ای ارتباط بین بازده به مقیاس و کشسانی مقیاس، برای نقاطی که تابع هزینه مشتق‌پذیر نیست را بیان می‌کنند. برای کارخانه‌های صنعتی به‌دلیل گوناگونی ماشین‌آلات و تولیدات آنها اندازه‌گیری ورودی‌ها به‌استثنای هزینه، کار دشواری است. البته ترکیب-ورودی اگر به‌وسیله یک‌اندازه بتواند نمایش داده شود، اندازه کشش خروجی، اندازه‌خوبی برای بازده به مقیاس و همچنین تولیدات و ماشین‌آلات کارخانه است و اندازه هزینه، معیارخوبی برای اندازه‌گیری مجموعه عوامل تولید برای تخمین کشسانی مقیاس است. زمانی که ورودی و خروجی در بین واحدها ناهمگون باشد، ایجاد مجموعه عوامل تولید در DEA می‌تواند مشکل‌ساز باشد، در این حالت تکنولوژی براساس هزینه در تخمین متفاوتی از کارایی تولید واحدها می‌تواند مفید باشد [۲، ۸، ۱۰، ۱۲، ۱۴-۲۵].

همه روش‌های استاندارد تعیین کشسانی مقیاس در روش DEA به‌وسیله صفحات مماس بر مرز در یک نقطه داده‌شده دنبال می‌شوند، این کار به‌وسیله جستجوی مقادیر ثابت (اصالتاً متغیر  $u_0$  در ادبیات DEA معرفی شده

است [۲۶]) و جدا کردن صفحه با صفحه‌ای که همه ورودی‌های آن صفر شده است، انجام می‌گیرد. در این مطالعه، با هر دو حد کشسانی مقیاس، حد راست و حد چپ آن آشنا می‌شویم.

از آنجا که صنعت قندوشکر نقش مهمی در اقتصاد ایران دارد و پس از صنعت نساجی، دومین صنعت قدیمی ایران به حساب می‌آید، کاربرد این مطالعه را در این صنعت دنبال می‌نماییم. بخش کشاورزی به‌عنوان مهم‌ترین بخش و تامین‌کننده مواد اولیه، بخش نفت به‌عنوان تامین‌کننده انرژی و بخش حمل‌ونقل، بخش‌های مرتبط و تاثیرگذار در این صنعت می‌باشند. بیشترین مصرف‌کننده این صنعت در درجه اول خانوارها و سپس صنایع غذایی و لبنی می‌باشند [۲۷]؛ لذا دولت ایران، روی شکر نظارت وسیع دارد، به‌گونه‌ای که قیمت شکر پایین نگه‌داشته شود و نیاز مشتریان نیز مرتفع گردد [۲۸] و به این دلیل مدیران صنایع قندوشکر به کارایی و تولید کارخانجات قندوشکر علاقمندند [۲۹].

در پژوهش‌های قبلی بهینه‌سازی کارخانجات بر افزایش تولید، تمرکز بیشتری نسبت به قیمت‌نهایی محصول و کارایی هزینه داشته‌اند، اما در این مقاله بر کارایی هزینه و کشسانی مقیاس با استفاده از مدل کارایی هزینه DEA متمرکز می‌شویم. دو نوع کارخانه تولید قندوشکر در ایران وجود دارد، کارخانجاتی که از چغندر قند استفاده می‌کنند و کارخانجاتی که از نیشکر استفاده می‌کنند. در این مطالعه، کارخانجاتی را بررسی می‌کنیم که از چغندر قند به‌عنوان ماده اولیه برای تولید قندوشکر استفاده می‌کنند. چغندر قند، محصول صنعتی است که نقش مهمی در تامین شکر برای ایران دارد. برگ چغندر قند موقعیت خاصی در سبد غذایی چارپایان و صنعت علوفه دام ایران دارد [۲۷]. سیاست‌های پرورش چارپایان اهلی و بهره‌برداری بهینه از منابع در این بخش، مکمل انگیزه کارایی در صنایع تولید قندوشکر می‌تواند باشد.

سازماندهی بخش‌های مختلف مقاله به‌صورت زیر است: در بخش دوم، مروری بر بازده به مقیاس و کارایی هزینه می‌شود. بخش سوم به تشریح مدل ریاضی کشسانی مقیاس برای مدل کارایی هزینه و ارایه یک مثال عددی می‌پردازد. در بخش چهارم مطالعه کاربردی در صنعت قندوشکر و کشش مقیاس این واحدها قبل و بعد از تصویر واحدهای ناکارا بر روی مرز کارایی تکنیکی و مرز کارایی هزینه مورد بررسی قرار گرفته است. نهایتاً نتیجه‌گیری و پیشنهادها برای تحقیقات آتی در بخش پنجم آورده شده است.

## ۲ پیشینازها و مقدمات

فرض می‌کنیم:  $DMU_j (j=1, \dots, n)$ ، یعنی  $n$  واحد تصمیم‌گیرنده (DMU) داریم که هر واحد  $m$  ورودی:  $x_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj}) \geq 0$  را برای تولید  $s$  خروجی:  $y_j = (y_{1j}, \dots, y_{sj}) \geq 0$  دارد. بردار هزینه ورودی  $w_j = (w_{1j}, \dots, w_{mj}) \geq 0$  و بردار قیمت خروجی  $p_j = (p_{1j}, \dots, p_{sj}) \geq 0$  می‌باشد.

### ۲-۱ بازده به مقیاس

بازده به مقیاس چگونگی تغییر خروجی‌ها در قبال تغییر ورودی‌ها را بیان می‌کند. اگر  $T$  مجموعه تکنولوژی از ورودی‌ها و خروجی‌ها باشد، به‌گونه‌ای که ورودی  $x$  بتواند خروجی  $y$  را تولید کند، یعنی  $(x, y) \in T$  در این

صورت برای ضریب  $\lambda$  به گونه‌ای که داشته باشیم  $\lambda(x, y) \in T$  سه نوع بازده به مقیاس داریم: اگر  $\lambda \geq 0$  باشد، بازده به مقیاس ثابت است و اگر افزایشی در ورودی‌ها داده شود، منجر به همان افزایش در خروجی‌ها خواهد شد. اگر  $0 \leq \lambda \leq 1$  بازده به مقیاس کاهشی است و با افزایش ورودی‌ها، افزایش در خروجی‌ها کمتر خواهد شد و اگر  $\lambda \geq 1$  بازده به مقیاس افزایشی است، یعنی با افزایش ورودی‌ها، افزایش در خروجی‌ها بیشتر خواهد شد [۳۰].

مجموعه امکان تولید با فرض بازده به مقیاس متغیر بر اساس اصول موضوعه عبارت است از [۶]:

$$T_v = \left\{ (x, y) : x \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j, \quad y \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j, \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j=1, \dots, n \right\} \quad (1)$$

در حالی که مجموعه بردارهای  $x = x_1, \dots, x_m \in R_+^m$  ورودی و مجموعه بردارهای  $y = y_1, \dots, y_s \in R_+^s$  خروجی می‌باشد.

## ۲-۲ کارایی تکنیکی

کارایی تکنیکی برای واحد  $o$  در مجموعه  $T_v$  جواب بهینه  $(\theta^*)$  مدل برنامه‌ریزی خطی زیر است [۵]:

$$\begin{cases} \theta^* = \min_{\theta, \lambda} \theta \\ s.t. \\ \theta x_o \geq x \lambda, \\ y_o \leq y \lambda, \\ e \lambda = 1 \\ \lambda \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

( $e$  بردار سطری است که همه عناصر آن یک هستند.)

## ۳-۲ کارایی هزینه [۳۱]

کارایی هزینه DEA مدل فار [۱۸] به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C(y_o; w_o) = \min_{x, \lambda} \sum_{i=1}^m w_{io} x_i \quad (3)$$

s.t.

$$\sum_{j \in J} x_{ij} \lambda_j \leq x_i \quad (\forall i), \quad \sum_{j \in J} y_{rj} \lambda_j \geq y_{ro} \quad (\forall r), \quad \sum_{j \in J} \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad J = \{1, \dots, n\}$$

فرض می‌کنیم  $x_i^* : i=1, 2, \dots, m$  جواب بهینه مدل (۳) باشد. کارایی هزینه واحد  $o$  به صورت نسبت حداقل-هزینه  $(C(y_o; w_o))$  به هزینه واقعی آن  $(c_o)$  به شکل زیر تعریف می‌گردد:

$$CE_o = \frac{C(y_o; w_o)}{c_o} = \frac{\sum_{i=1}^m w_{io} x_i^*}{\sum_{i=1}^m w_{io} x_{io}} \quad (4)$$

## ۳ کشسانی مقیاس برای مدل کارایی هزینه

## ۳-۱ کشسانی مقیاس

کشسانی مقیاس، انتساب مقدار عددی برای بازده به مقیاس می‌باشد. اگر مرز کارایی تکنولوژی  $T$ ، با استفاده از تابع تولید  $\varphi: x \rightarrow y$  و  $\varphi(x, y) = 0$  تعریف شود [۷]، آنگاه اگر افزایش  $\alpha$  در مولفه‌های ورودی داده شود و  $\beta$  حداکثر افزایش مولفه‌های خروجی باشد، به گونه‌ای که رابطه زیر برقرار باشد:

$$\varphi(\alpha x, \beta y) = 0 \quad (5)$$

با مشتق گرفتن رابطه (۵) نسبت به افزایش  $\alpha$  اندازه کشسانی مقیاس با رابطه زیر به دست می‌آید [۲]:

$$\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} = \varepsilon(x, y) = - \frac{\sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi(\alpha x, \beta y)}{\partial x_i} x_i}{\sum_{r=1}^s \frac{\partial \varphi(\alpha x, \beta y)}{\partial y_r} y_r} \quad (6)$$

## ۳-۲ کشسانی مقیاس و DEA [۸]

کارایی تکنیکی ورودی محور واحد  $o$  از مدل برنامه‌ریزی خطی زیر به دست می‌آید:

$$D_i(x_o, y_o) = \alpha(\beta) = \min \{ \alpha : (\alpha x, \beta y) \in T_v; \beta = 1 \} \quad (7)$$

دوآل مدل (۷) عبارت است از:

$$D_i(x_o, y_o) = \alpha(1) = \max \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} - u.$$

s.t.

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - u \leq 0 \quad (\forall j), \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1, u_r, v_i \geq 0 \quad (\forall i, r); u: \text{free}.$$

در این صورت تابع تولیدی به صورت زیر برای واحد  $o$  می‌توانیم داشته باشیم:

$$\varphi(\alpha(1)x_o, y_o) = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} - \sum_{i=1}^m v_i \alpha(1)x_{io} - u = 0 \quad (9)$$

با توجه به تعریف (۶)، کشسانی مقیاس ورودی محور واحد  $o$  به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\varepsilon_i(x_o, y_o) = - \frac{\sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi(\alpha(1)x_o, y_o)}{\partial x_{io}} x_{io}}{\sum_{r=1}^s \frac{\partial \varphi(\alpha(1)x_o, y_o)}{\partial y_{ro}} y_{ro}} = \frac{\alpha(1)}{\alpha(1)+u} = \frac{1}{1 + \frac{u}{D_i(x_o, y_o)}} \quad (10)$$

### ۳-۳ کشسانی مقیاس مدل کارایی هزینه [۱۳]

اولین بار سیوشی [۱۰]، کشسانی مقیاس را برای مدل کارایی هزینه فار [۱۸] محاسبه کرد. دو آل مدل کارایی هزینه فار (مدل (۳)) عبارت است از:

$$\begin{aligned} \max_{u, \omega} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} - \omega \\ \text{s.t.} \quad & \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \omega \leq 0 \quad (\forall j), \quad v_i \leq w_o \quad (\forall i), \quad u_r \geq 0 \quad (\forall r), \\ & v_i \geq 0 \quad (\forall i), \quad \omega: \text{ free} \end{aligned} \quad (11)$$

اگر  $DMU_O$  کارای هزینه باشد، هزینه حداقل و هزینه واقعی آن هر دو یکی هستند و عبارت است از:

$$c_o = C(y_o; w_o) = \sum_{r=1}^s u_r^* y_{ro} - \omega_o^* \quad (12)$$

کشسانی مقیاس مدل کارایی هزینه  $(\varepsilon_c(y; w))$  می تواند به صورت زیر تعریف شود [۳]:

$$\varepsilon_c(y; w) = \frac{C(y_o; w_o)}{C(y_o; w_o) + \omega_o^*} \Rightarrow \varepsilon_c(y; w) = \frac{C(y_o; w_o)}{\sum_{r=1}^s y_{ro} \frac{\partial C(y_o; w_o)}{\partial y_{ro}}} = \frac{C(y_o; w_o)}{\sum_{r=1}^s u_r^* y_{ro}} = \frac{1}{1 + \frac{\omega_o^*}{C(y_o; w_o)}} \quad (13)$$

با فرض چندگانگی  $\omega_o$  بهینه، برنامه زیر را برای یافتن حداقل و حداکثر مقدار آن به صورت زیر ارائه می کنیم:

$$\begin{aligned} \omega_o^+ (\omega_o^-) &= \max(\min) \omega_o \\ \text{s.t.} \quad & \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} - \omega_o = C(y_o; w_o), \quad (14) \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \omega_o \leq \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \quad (\forall j \neq o), \quad v_i \leq w_o \quad (\forall i), \\ & v_i, u_r \geq 0 \quad (\forall i, r), \quad \omega_o: \text{ free} \end{aligned}$$

با استفاده از نتایج مدل (۱۴) می توانیم کشسانی مقیاس چپ و راست ورودی محور برای  $DMU_O$  را به دست آوریم.

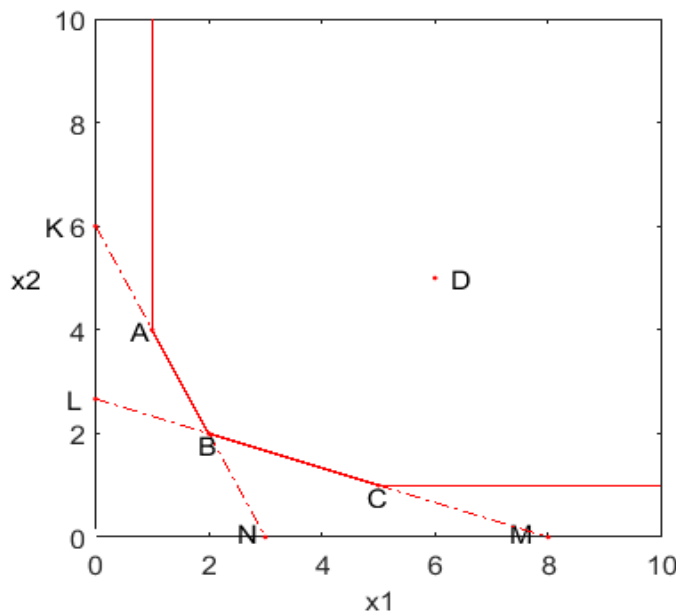
$$\varepsilon_c^+(y_o; w_o) = \frac{1}{1 + \frac{\omega_o^+}{C(y_o; w_o)}} \quad \varepsilon_c^-(y_o; w_o) = \frac{1}{1 + \frac{\omega_o^-}{C(y_o; w_o)}} \quad (15)$$

در مجموعه امکان تولید  $T_v$ ، اگر جواب بهین دیگری داشته باشیم، به گونه ای که  $\omega_o^+ < 0$  ( $\varepsilon_c^+(\cdot) > 1$ ) باشد، بازده به مقیاس افزایشی است و اگر  $\omega_o^- > 0$  ( $\varepsilon_c^-(\cdot) < 1$ ) باشد، بازده به مقیاس کاهش می آید و در صورتی که  $\omega_o^+ \geq 0 \geq \omega_o^-$  ( $\varepsilon_c^+(\cdot) \leq 1 \leq \varepsilon_c^-(\cdot)$ ) باشد، بازده به مقیاس ثابت است.

برای معرفی روش ارایه شده در این مقاله، از داده‌هایی که در مرجع [۳۲] آمده است، استفاده می‌کنیم که چهار واحد با دو ورودی و یک خروجی است. مجموعه امکان تولید آن در شکل ۱ ارایه شده است. جدول داده‌ها و نتایج تحلیل داده و همچنین جدول نتایج کشسانی مقیاس قبل و بعد از آن که تصویر واحدهای ناکارا را روی مرز کارایی تکنیکی و کارایی هزینه آوردیم، به ترتیب در جداول ۱ تا ۶ ارایه شده است. از این جداول نتیجه می‌گیریم، این واحدها قبل و بعد از آن که تصویر واحدهای ناکارا روی مرز کارایی تکنیکی و یا کارایی هزینه قرار بگیرند، دارای بازده به مقیاس ثابت می‌باشند.

**جدول ۱.** اطلاعات تحلیل داده‌ای قبل از تصویر واحدهای ناکارا روی مرز کارایی تکنیکی و  $cost-e$  (کارایی هزینه) کمبود ورودی و  $s^+$  متغیر مازاد خروجی و  $teq-e$  کارایی تکنیکی و  $cost-e$  (کارایی هزینه)

DMU	$y$	$x_1$	$x_2$	$c_1$	$c_2$	teq-e	$s_1^-$	$s_2^-$	$s^+$	Cost-e	$C(y_o; w_o)$
A	۱	۱	۴	۲	۳	۱	۰	۰	۰	۰/۷۱	۱۰
B	۱	۲	۲	۱/۵	۳	۱	۰	۰	۰	۱	۹
C	۱	۵	۱	۱/۵	۴	۱	۰	۰	۰	۰/۹۶	۱۱
D	۱	۶	۵	۱	۲	۰/۳۸۱	۰	۰	۰	۰/۳۸	۶



شکل ۱. مجموعه امکان تولید

**جدول ۲.** کشش مقیاس واحدها قبل از تصویر واحدهای ناکارا روی مرز کارا

DMU	$\omega_o^+$	$\varepsilon_c^+$	$\omega_o^-$	$\varepsilon_c^-$
A	۰	۱	-۱۰	$+\infty$
B	۰	۱	-۹	$+\infty$
C	۰	۱	-۱۱	$+\infty$
D	۰	۱	-۶	$+\infty$

**جدول ۳.** اطلاعات تحلیل داده‌ای بعد از تصویر واحدهای ناکارا روی مرز کارایی تکنیکی ( $s_1^-$ ,  $s_2^-$ ,  $s_3^+$  متغیر مازاد خروجی و teq-e کارایی تکنیکی و cost-e کارایی هزینه)

DMU	y	$x_1$	$x_2$	teq-e	$s_1^-$	$s_2^-$	$s_3^+$	Cost-e	$C(y_o; w_o)$
A	۱	۱	۴	۱	۰	۰	۰	۰/۷۱	۱۰
B	۱	۲	۲	۱	۰	۰	۰	۱	۹
C	۱	۵	۱	۱	۰	۰	۰	۰/۹۶	۱۱
D	۱	۲/۲۸۶	۱/۹۰۵	۱	۰	۰	۰	۰/۹۸	۶

**جدول ۴.** کشش مقیاس واحدها بعد از تصویر واحدهای ناکارا روی مرز کارایی تکنیکی

DMU	$\omega_o^+$	$\varepsilon_c^+$	$\omega_o^-$	$\varepsilon_c^-$
A	۰	۱	-۱۰	$+\infty$
B	۰	۱	-۹	$+\infty$
C	۰	۱	-۱۱	$+\infty$
D	۰	۱	-۶	$+\infty$

**جدول ۵.** اطلاعات تحلیل داده‌ای بعد از تصویر واحدهای ناکارا روی مرز کارایی هزینه ( $s_1^-$ ,  $s_2^-$ ,  $s_3^+$  متغیرهای کمبود ورودی و Y متغیر مازاد خروجی و teq-e کارایی تکنیکی و cost-e کارایی هزینه)

DMU	y	$x_1$	$x_2$	teq-e	$s_1^-$	$s_2^-$	$s_3^+$	Cost-e	$C(y_o; w_o)$
A	۱	۰/۷۱۴	۲/۸۵۷	۱	۰	۰	۰	۱	۱۰
B	۱	۲	۲	۱	۰	۰	۰	۱	۹
C	۱	۴/۷۸۳	۰/۹۵۷	۱	۰	۰	۰	۰/۹۹	۱۰/۸۷۵
D	۱	۲/۲۵۰	۱/۸۷۵	۱	۰	۰	۰	۱	۶

**جدول ۶.** کشش مقیاس واحدها بعد از تصویر واحدهای ناکارا روی مرز کارایی هزینه

DMU	$\omega_o^+$	$\varepsilon_c^+$	$\omega_o^-$	$\varepsilon_c^-$
A	۰	۱	-۱۰	$+\infty$
B	۰	۱	-۹	$+\infty$
C	۰	۱	-۱۰/۸۷۵	$+\infty$
D	۰	۱	-۶	$+\infty$

## ۴ مطالعه کاربردی در صنعت قندوشکر

### ۴-۱ مطالعه کاربردی

صنعت قندوشکر کشور از سال ۱۲۷۴ خورشیدی با احداث کارخانه‌ای توسط یک شرکت بلژیکی در محل کهریزک تهران آغاز به کار کرد. در چهاردهه نخست فعالیت، تولید و توزیع قندوشکر انحصاراً در دست دولت قرار داشته و از سال‌های ۱۳۳۰ خورشیدی به بعد با اعطای مجوز به کارخانجات خصوصی رونق و شکوفایی واقعی این صنعت آغاز شده است [۳۳].

قندوشکر به عنوان یک ماده غذایی مورد نیاز بدن و اصلی ترین ماده شیرین کننده، علاوه بر مصرف بالای آن در سبد روزانه خانوار، بیشترین مصرف را در صنایعی از جمله نوشابه سازی، کنسرو و کمپوت، شیرینی و شکلات دارد. این ماده غذایی از جمله کالاهای ضروری در تمامی نقاط جهان است و علاوه بر اهمیت غذایی از لحاظ سیاسی و اقتصادی نیز، همواره به عنوان یک ماده استراتژیک مهم، مطرح و مورد توجه بوده است، بدین سبب اکثر کشورها سعی در تهیه و تولید آن داشته و تا حد امکان نیازهای داخلی خود را تأمین می نمایند و تعدادی از کشورها نیز سهم بسزایی از درآمدهای خود را از صادرات این محصول به دست می آورند. در زمینه ایجاد اشتغال، هم به طور مستقیم توسط صنعت و هم به طور غیرمستقیم در بخش کشاورزی از اهمیت بالایی برخوردار است.

کشورهای در حال توسعه ۶۷ درصد از شکر جهانی را مصرف می کنند و انتظار می رود در آینده به ویژه آسیا با رشد تقاضا روبه رو شود و مصرف جهانی شکر روند صعودی خود را حفظ کند. با در نظر گرفتن رشد جمعیت نیز، نسبت موجودی شکر در کشور در حال کاهش می باشد و این موضوع افزایش تقاضای شکر را در پی خواهد داشت [۲۷] و [۳۴]. در حال حاضر فعالیت اصلی کارخانجات تولید قندوشکر، انجام کلیه امور تولیدی مربوط به صنعت قندسازی، تصفیه و استخراج شکر، استحصال شکر از چغندر قند و خدمات کارمزدی تصفیه شکر خام است و مهم ترین ماده مصرفی کارخانه، چغندر قند و شکر خام است و مواد اولیه تماماً از داخل تهیه می شوند (کارخانجات شکر، تنها در برخی از فصول سال برای استمرار فعالیت کارخانه و پیشگیری از بیکاری کارگران می توانند، مقداری شکر خام برای تصفیه وارد کنند) [۳۳]. همه این مطالب، پرداختن به موضوع کارایی و علی الخصوص کارایی هزینه و کشتانی مقیاس را برای صنایع قندوشکر کشور، موضوعی مورد علاقه کارشناسان اقتصادی قرار می دهد. مقاله حاضر با در نظر گرفتن پانزده کارخانه قندوشکر ایران که مربوط به سال ۱۳۹۳- خورشیدی است به محاسبه کشتانی مقیاس برای مدل کارایی هزینه ورودی محور [۳۵] می پردازد. تعداد ورودی های کارخانجات قندوشکر مورد مطالعه هجده و تعداد خروجی های آن چهارتا است که به چهار گروه ورودی و یک گروه خروجی به صورت زیر تقسیم شده اند:

- ۱- نیروی کار شامل: الف- تولید، کنترل کیفی ب- اداری، مالی، دفتری ج- فنی، برق
  - د- بازرگانی ه- کشاورزی و- سایر، خدمات
  - ۲- انرژی شامل: الف- دیزل ب- برق مصرفی ج- گاز مصرفی د- مازوت
  - ۳- مواد اولیه شامل: الف- چغندر قند ب- شکر خام خریداری شده ج- سنگ آهک د- کیسه پروپیل
  - ه- ذغال کک
  - ۴- سایر نهاده ها شامل: الف- تعمیرات و نگهداری ب- هزینه خرید خدمات ج- حقوق و دستمزد
- پیمانکاری
- همچنین، خروجی کارخانجات قندوشکر عبارت است از:
- الف- شکر سفید چغندری ب- تفاله خشک ج- ملاس د- شکر خام کارمزدی

برای برخی از کارخانجات، به جای هزینه هر واحد از ورودی، هزینه کل آن ورودی را برای سال ۱۳۹۳ خورشیدی داشته‌ایم. به همین دلیل از شاخص فیشر برای به دست آوردن هزینه هر واحد از ورودی استفاده نموده‌ایم. فرض کنیم، تعداد ورودی‌هایی که قیمت آنها معلوم است،  $Z$  باشد و قیمت ورودی‌های آنها برای سال پایه، یک باشد. شاخص فیشر ترکیبی از شاخص لاسپیرز و پاشه است، به عبارت بهتر، شاخص فیشرمیانگین هندسی شاخص لاسپیرز و پاشه است که به وسیله رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$F_t = \sqrt{P_t \times L_t} \quad (۱۶)$$

$F_t$  و  $P_t$  و  $L_t$  به ترتیب شاخص فیشر و پاشه و لاسپیرز می‌باشد. شاخص لاسپیرز به وسیله رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$L_t = \frac{\sum_{i=1}^z p_i^t q_i}{\sum_{i=1}^z p_i q_i} \quad (۱۷)$$

$q_i^0$  و  $p_i^0$  به ترتیب مقدار و قیمت هرواحد از ورودی در زمان اولیه و  $q_i^t$  و  $p_i^t$  قیمت هرواحد از ورودی  $t$  در زمان  $t$  می‌باشد [۳۶]. شاخص پاشه به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P_t = \frac{\sum_{i=1}^z p_i^t q_i^t}{\sum_{i=1}^z p_i q_i^t} \quad (۱۸)$$

$q_i^t$  مقدار هرواحد از ورودی  $t$  در زمان  $t$  می‌باشد، سپس هزینه کل ورودی را به هزینه هرواحد از آن ورودی تقسیم می‌کنیم تا مقدار آن ورودی را به دست آوریم. ورودی‌ها یا خروجی‌هایی که قرار است در یک گروه قرار گیرند، اگر دارای واحدهای اندازه‌گیری مختلف باشند، از روش بی‌واحد کردن کمیت‌ها برای یکسان‌سازی واحدها استفاده می‌کنیم [۳۷]، برای این کار ماکزیمم مقدار ورودی‌هایی که دارای واحدهای اندازه‌گیری مختلف هستند را به دست می‌آوریم، سپس مقدار بقیه ورودی‌ها را به آن تقسیم می‌کنیم. پس از آن هزینه کل هروورودی را به مقدار جدید آن تقسیم می‌کنیم (واحد اندازه‌گیری نیروی - انسانی به نفر ساعت، نفت گاز (دیزل) به لیتر، گاز مصرفی و الکتریسیته و مازوت به مگاوات ساعت، چغندر قند و شکر خام به تن، سنگ آهک و کیسه پروپیل و زغال کک به کیلوگرم می‌باشد).

برای ادغام ورودی‌ها یا خروجی‌هایی که می‌خواهند در یک گروه قرار گیرند، از میانگین وزنی استفاده می‌نماییم. یعنی حاصل ضرب مقدار در هزینه هر ورودی را که می‌خواهیم، ادغام کنیم را به دست آورده، آنها را جمع نموده و سپس بر جمع مقادیر آن ورودی‌ها، تقسیم می‌کنیم. برای نرمال‌سازی مقادیر ورودی برای به دست آوردن یک واحد از خروجی، مقدار خروجی را در قیمت آن ضرب کرده و خروجی جدید را به دست

می آوریم. سپس مقدار ورودی و خروجی را بر خروجی جدید تقسیم می کنیم، در این صورت ورودی ها به مقدار- یک خروجی، نرمال خواهند شد.

از بین کارخانجات قندوشکر، با استفاده از برنامه گمز<sup>۱</sup> واحد کارای هزینه را به دست آورده و سپس کارخانه ای که کم ترین هزینه را دارد با DMUO نشان می دهیم. گمز یکی از نرم افزارهای مورد استفاده برای بهینه سازی است و اولین نرم افزار سیستمی برای ترکیب زبان ریاضی با برنامه نویسی سنتی به منظور توصیف کارایی و حل مسایل بهینه سازی است. گمز در بیشتر از ۱۲۰ کشور با کاربرانی در دو بعد کلاسیک و رسمی در زمینه های مختلف مانند انرژی و برنامه ریزی تولید، مدل اقتصادی و بسیاری از مدل های دیگر استفاده می شود. اطلاعات پردازش شده بدون نرمال سازی برای یک شدن خروجی پانزده کارخانه در جدول ۷ آمده است:

جدول ۷. پانزده کارخانه قندوشکر با چهار ورودی و یک خروجی

واحد	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$y$
۱	۷۹۵۱۶۸	۱/۱	۱۶۷۹۱۸/۵	۷۳۷۹۵۴۹	۴۶۲۵۳
۲	۶۷۱۱۸۷	۱/۱	۱۶۲۸۴۰	۱۰۴۵۹۱۸۳	۶۹۱۸۷
۳	۷۳۴۲۲۰	۱/۱۴	۲۵۵۶۲۴	۲۲۱۰۴	۱۴۸۳۹۷
۴	۷۰۵۹۴۶	۱/۱۹	۱۷۲۴۵۷	۱۳۷۱۸	۹۹۲۰۸
۵	۶۷۳۹۸۷	۱/۰۷	۷۱۲۷۰	۱۴۵۸۶	۱۰۷۴۰۳
۶	۶۲۷۴۱۴	۱/۰۸	۸۲۶۱۳	۱۲۱۴۶	۶۷۳۷۴
۷	۱۳۲۰۹۱۰۷/۶۳	۲۶۴۶۶۸۹۹/۴۹	۱۷۵۸۹۶۴	۱۱۵۰۳۳۴۳۸	۱۲۹۰۱۲
۸	۱۰۵۴۸۳۹۱	۲۱۳۸۲۷۱۶/۹۸	۱۳۷۵۵۱۶	۹۶۸۴۲	۱۱۴۳۷۵
۹	۱۰۷۶۱۴۰۳	۱۸۹۶۹۶۶۶/۳۳	۱۳۸۹۱۷۰	۹۴۵۵۷۱۰۸/۹۸	۱۱۹۴۴۱
۱۰	۵۵۰	۲۹۰۴۷۰۰	۱۶۱۸۴۵	۷۸۸۳۰۰۰۰۰۰۰	۱۳۵۷۸۱
۱۱	۵۲۷	۳۰۵۹۹۵۱۹۴۷۷	۲۱۰۰۰۰	۷۹۴۸۶۲۴۲۸۳۶	۱۰۹۹۷۶
۱۲	۴۲۱	۲۹۱۹۶۵۸۴۹۹۸	۱۵۶۲۲۹	۱۱۸۶۲۳۲۷۱۵۵۶	۵۶۲۰۱
۱۳	۵۰۹	۶۲۳۳۵۹۶۱۳۸۱	۳۰۰۰۰۰	۱۴۳۷۶۱۷۸۶۹۰۵	۱۲۱۰۶۰
۱۴	۲۵۳	۶۶۷۶۵۵۳۷۴۵۴	۳۱۲۵۰۰	۳۳۸۰۴۱۴۴۰۸۵۲/۳	۱۰۴۹۴۳
۱۵	۲۳۸	۴۰۲۱۱۱۵۴۶۶۴	۳۲۵۷۲۵	۱۸۰۰۴۷۰۲۳۹۸۲/۲۰۲	۹۸۳۲۷

<sup>1</sup> GAMS

**جدول ۸.** اطلاعات نرمال شده با خروجی یک، قبل از تصویر واحدهای ناکارا روی مرز کارا (  $C_1, C_2, C_3, C_4$  هزینه‌های ورودی)

واحد	$y$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
۱	۱	۰/۰۰۵۹۸۳۵۶۵۶۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۸۲۸	۰/۰۰۱۲۶۳۵۷۱۲۵	۰/۰۵۵۵۳۰۴۲۳۲۰	۱۳/۰۲	۵۹۲۸۱۶/۸۸	۴۳۷/۹۷	۱
۲	۱	۰/۰۰۴۹۱۰۴۶۵۶۷	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۸۰۵	۰/۰۰۱۱۹۱۳۵۲۳۸	۰/۰۷۶۵۲۰۳۴۲۳۹	۱۵/۴۹	۸۵۰۲۵۷/۳۳	۵۰۸/۷۲	۱/۱۷
۳	۱	۰/۰۰۲۸۹۸۵۹۶۷۳	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۴۵۰	۰/۰۰۱۰۹۱۶۷۴۰	۰/۰۰۰۰۰۸۷۲۶۳۴۷	۲۰/۳۳	۴۷۷۵۳۹۶/۳	۵۷۷/۶۴	۷۱۸/۹۹
۴	۱	۰/۰۰۴۲۲۴۷۴۳۳۷	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۷۱۲	۰/۰۰۱۰۳۲۰۷۱۰۰	۰/۰۰۰۰۰۸۲۰۹۵۵۴	۱۲/۲۲	۴۷۴۷۲۴۴/۸۵	۹۹۴/۰۴	۹۴۲/۵۰
۵	۱	۰/۰۰۵۰۶۰۳۶۹۸۳	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۸۰۳	۰/۰۰۰۵۳۵۱۰۳۱۴	۰/۰۰۰۰۱۰۹۵۱۳۳۲	۲۴/۷۰	۴۴۰۹۸۵۵/۳	۱۳۱۴/۶۷	۱۰۶۸/۸۸
۶	۱	۰/۰۰۳۹۴۶۳۶۳۹۱	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۶۷۹	۰/۰۰۰۵۱۹۶۲۶۵۳	۰/۰۰۰۰۰۷۶۳۹۶۹۸	۲۹/۱۶	۴۴۴۱۵۲۳/۳۱	۱۸۰۴/۸۲	۱۲۶۵/۱۹
۷	۱	۰/۰۰۰۰۱۱۳۱۲۲۶	۰/۰۰۰۰۰۲۲۶۶۶۲۱	۰/۰۰۰۰۰۱۵۰۶۳۷	۰/۰۰۰۰۰۹۸۵۱۴۴۴	۱۲۱۱/۸۹	۱۲۱۱/۸۹۱۱	۵۳۰۷۷۳/۲۳	۱۲۱۱/۸۹۱۱۰۲
۸	۱	۰/۰۰۰۰۰۹۶۳۱۴۹	۰/۰۰۰۰۰۱۹۵۲۴۰۷	۰/۰۰۰۰۰۱۲۵۵۹۵	۰/۰۰۰۰۰۰۸۸۴۲	۱۳۴۶/۴۶	۱۳۴۶/۴۶۱۲۶	۵۸۹۷۱۱/۰۶	۱۲۴۶/۴۶۱۲۵۸
۹	۱	۰/۰۰۰۰۰۹۱۴۵۴۴	۰/۰۰۰۰۰۱۶۱۲۱۱۳	۰/۰۰۰۰۰۱۱۸۰۵۷	۰/۰۰۰۰۰۸۰۳۵۸۱۵	۱۵۱۷/۷۴	۱۵۱۷/۷۳۸۷۷	۶۶۴۷۲۵/۷	۱۵۱۷/۷۳۸۸۷۳
۱۰	۱	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۶۰	۰/۰۰۰۰۰۰۳۱۵۵۹۷	۰/۰۰۰۰۰۰۱۷۵۸۵	۰/۰۸۵۶۴۹۰۳۳۴۵	۱۱۰۱۸۳۶۳۶	۱	۵۸۷۲۸۳۵/۱	۱
۱۱	۱	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۳۸	۰/۰۲۱۷۷۶۴۱۳۵۵	۰/۰۰۰۰۰۰۱۴۹۴۵	۰/۰۵۶۵۶۷۰۷۴۴۳	۱۳۸۲۸۰۸۳۵	۱/۱۴۱۹۴۶۰۴	۶۶۶۹۷۰۹/۵	۱/۱۴۱۹۴۶۰۳۷
۱۲	۱	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۵۵	۰/۰۳۷۸۵۰۷۴۰۴۴	۰/۰۰۰۰۰۰۲۰۲۵۴	۰/۱۵۳۷۸۴۳۷۷۹۴	۶۷۸۸۱۲۳۵	۰/۶۵۸۷۰۷	۳۸۸۲۷۸۰	۰/۶۵۸۷۰۷
۱۳	۱	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۵۴	۰/۰۶۶۱۹۶۴۰۳۲۲	۰/۰۰۰۰۰۰۰۳۱۸۵۸	۰/۱۵۲۶۶۴۸۹۸۴۵	۱۷۷۱۴۷۳۴۸	۰/۵۶۰۵۵۹۲۵	۳۰۰۱۰۲۶/۷	۰/۵۶۰۵۵۹۲۵۴
۱۴	۱	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۳۰	۰/۰۷۸۲۱۴۴۰۵۷۴	۰/۰۰۰۰۰۰۰۳۶۶۰۹	۰/۳۹۶۰۰۸۳۵۱۳۰	۳۲۷۹۵۲۵۶۹	۰/۴۴۳۰۷۲۹	۲۰۴۷۱۸۷/۲	۰/۴۴۳۰۷۲۸۹۶
۱۵	۱	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲۵	۰/۰۴۲۳۴۸۴۳۷۹۸	۰/۰۰۰۰۰۰۰۳۴۳۰۴	۰/۱۸۹۶۱۶۷۹۳۹۶	۳۶۴۳۶۵۵۴۶	۰/۴۷۴۹۹۲۵۸	۲۱۸۵۰۱۵	۰/۴۷۴۹۹۲۵۷۸

مشاهده می‌گردد، واحدهای ۶ و ۸ و ۱۴ کارایی هزینه است و  $DMU_{14}$  دارای کمترین هزینه می‌باشد. اطلاعات تحلیل داده‌ای و کشسانی مقیاس به شرحی که برای جداول ۹ و ۱۰ ارائه شده است، بعد از آنکه تصویر واحدهای ناکارا را روی مرز کارایی هزینه به دست آوردیم در جدول ۱۴ آورده شده است. مشاهده می‌گردد، واحد ۵ و واحدهای ۷ الی ۱۲ کارایی هزینه و واحد ۱۲ دارای کمترین هزینه می‌باشد. از این جداول نتیجه گرفتیم، این واحدها قبل و بعد از آن که تصویر واحدهای ناکارا روی مرز کارایی تکنیکی و یا کارایی هزینه قرار بگیرند، دارای بازده به مقیاس ثابت می‌باشند.

**جدول ۹.** اطلاعات تحلیل داده‌ای قبل از تصویر واحدهای ناکارار روی مرز کارا (  $s_1^-$ ,  $s_2^-$ ,  $s_3^-$ ,  $s_4^-$  متغیرهای کمبود ورودی و  $s_5^+$  متغیر مازاد خروجی و  $teq-e$  کارایی تکنیکی و  $cost-e$  کارایی هزینه)

واحد	teq-e	$s_1^-$	$s_2^-$	$s_3^-$	$s_4^-$	$s_5^+$	Cost-e	$C(y_o; w_o)$
۱	۰/۶۴۹۹۹۵۳۱	۰/۰۰۰۵۸۸۶۳	.	.	۰/۰۳۶۰۱۱۴۲	.	۰/۴۱	۰/۲۸۳۰۶۵۹۴
۲	۰/۶۷۸۰۵۳۹۷	.	.	.	۰/۰۵۱۸۰۱۷۷	.	۰/۴۳	۰/۳۳۱۳۳۹۱۱
۳	۱	.	.	.	.	.	۰/۶۴	۰/۴۶۷۷۵۵۲۸
۴	۰/۹۳۷۳۷۱۶۹	۰/۰۰۰۰۶۷۵۰	.	۰/۰۰۰۴۲۲۷۱	.	.	۰/۵۸	۰/۷۰۸۰۷۵۸۷
۵	۰/۹۷۰۷۶۷۳۲	۰/۰۰۰۰۹۶۷۳۴	.	.	۰/۰۰۰۰۰۰۲۵۹	.	۰/۹۱	۰/۸۹۲۲۲۵۸۴
۶	۱	.	.	.	.	.	۱	۱/۱۷۹۷۳۳۹۵
۷	۰/۸۰۸۸۱۶۹۹	.	۰/۰۰۰۰۰۰۲۱۸	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۴	.	.	۰/۷۳	۰/۷۰۲۰۶۶۱۵
۸	۱	.	.	.	.	.	۱	۰/۷۸۰۰۲۴۶۰
۹	۱	.	.	.	.	.	۰/۹۳	۰/۸۷۹۲۴۸۲۴
۱۰	۱	.	.	.	.	.	۰/۸۴	۰/۹۹۷۳۵۲۵۷
۱۱	۱	.	.	.	.	.	۱	۱/۱۳۸۱۰۲۳۵
۱۲	۰/۳۷۷۸۸۲۲۶	.	۰/۰۰۶۱۵۲۹۸	.	۰/۰۵۶۹۰۷۶۹	.	۰/۶۹	۰/۶۵۷۳۳۸۸۲
۱۳	۰/۴۶۹۱۰۹۳۲	.	۰/۰۰۹۲۷۶۹۴	.	۰/۰۱۵۰۴۹۴۵	.	۰/۴۸	۰/۵۵۸۸۵۲۶۴
۱۴	۰/۴۰۸۲۳۱۶۰	.	۰/۰۱۰۱۵۳۱۸	.	۰/۰۱۵۰۹۶۰۵	.	۰/۴۴	۰/۴۶۳۶۵۷۲۵
۱۵	۰/۴۴۵۸۸۱۳۳	.	.	.	۰/۰۲۴۱۱۵۷۵	.	۰/۵۳	۰/۵۰۰۴۱۲۵۵

**جدول ۱۰.** کشش مقیاس واحدها قبل از تصویر واحدهای ناکارار روی مرز کارا

واحد	$\omega_o^+$	$\varepsilon_c^+$	$\omega_o^-$	$\varepsilon_c^-$
۱	۸۰۰۰۰۰	.	-۰/۲۸۳۰۶۵۹۴	$+\infty$
۲	۸۰۰۰۰۰	.	-۰/۳۳۱۳۳۹۱۱	$+\infty$
۳	۸۰۰۰۰۰	.	-۰/۴۶۷۷۵۵۲۸	$+\infty$
۴	۸۰۰۰۰۰	.	-۰/۷۰۸۰۷۵۸۷	$+\infty$
۵	۸۰۰۰۰۰	.	-۰/۸۹۲۲۲۵۸۴	$+\infty$
۶	۸۰۰۰۰۰	.	-۱/۱۷۹۷۳۳۹۵	$+\infty$
۷	۸۰۰۰۰۰	.	-۰/۷۰۲۰۶۶۱۵	$+\infty$
۸	۸۰۰۰۰۰	.	-۰/۷۸۰۰۲۴۶۰	$+\infty$
۹	۸۰۰۰۰۰	.	-۰/۸۷۹۲۴۸۲۴	$+\infty$
۱۰	۸۰۰۰۰۰	.	-۰/۹۹۷۳۵۲۵۷	$+\infty$
۱۱	۸۰۰۰۰۰	.	-۱/۱۳۸۱۰۲۳۵	$+\infty$
۱۲	۸۰۰۰۰۰	.	-۰/۶۵۷۳۳۸۸۲	$+\infty$
۱۳	۸۰۰۰۰۰	.	-۰/۵۵۸۸۵۲۶۴	$+\infty$
۱۴	۸۰۰۰۰۰	.	-۰/۴۶۳۶۵۷۲۵	$+\infty$
۱۵	۸۰۰۰۰۰	.	-۰/۵۰۰۴۱۲۵۵	$+\infty$

**جدول ۱۱.** اطلاعات نرمال شده با خروجی یک، بعد از تصویر واحدهای ناکارا روی مرز کارایی تکنیکی

واحد	$y$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
۱	$y$	۰/۰۰۳۳۰۰۶۵۹۵۸	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۵۳۸	۰/۰۰۰۸۲۱۳۱۵۳۸	۰/۰۰۰۰۸۳۰۹۴۶۴
۲	۱	۰/۰۰۳۳۲۹۵۶۰۷۴	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۵۴۶	۰/۰۰۰۸۰۷۸۰۱۲۱	۰/۰۰۰۰۸۳۱۵۱۹۵
۳	۱	۰/۰۰۲۸۹۸۵۹۶۷۳	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۴۵۰	۰/۰۰۱۰۰۹۱۶۷۴۰	۰/۰۰۰۰۸۷۲۶۳۴۷
۴	۱	۰/۰۰۳۸۹۲۶۵۳۸۹	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۶۶۸	۰/۰۰۰۵۴۴۷۲۴۱۴	۰/۰۰۰۰۷۶۹۵۴۰۳
۵	۱	۰/۰۰۳۹۴۵۱۰۱۶۶	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۷۸۰	۰/۰۰۰۵۱۹۴۶۰۶۴	۰/۰۰۰۱۰۳۷۲۱۹۵
۶	۱	۰/۰۰۳۹۴۶۳۶۳۹۱	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۶۷۹	۰/۰۰۰۵۱۹۶۲۶۵۳	۰/۰۰۰۰۷۶۳۹۶۹۸
۷	۱	۰/۰۰۰۰۰۰۹۱۴۹۵۵	۰/۰۰۰۰۱۶۱۵۲۸۱	۰/۰۰۰۰۰۰۱۱۷۸۳۸	۰/۰۰۰۰۷۹۶۸۰۱۵
۸	۱	۰/۰۰۰۰۰۰۹۶۳۱۴۹	۰/۰۰۰۰۱۹۵۲۴۰۷	۰/۰۰۰۰۰۰۱۲۵۵۹۵	۰/۰۰۰۰۰۰۸۸۴۲
۹	۱	۰/۰۰۰۰۰۰۹۱۴۵۴۴	۰/۰۰۰۰۱۶۱۲۱۱۳	۰/۰۰۰۰۰۰۱۱۸۰۵۷	۰/۰۰۰۰۰۸۰۳۵۸۱۵
۱۰	۱	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۶۰	۰/۰۰۰۰۰۰۳۱۵۵۹۷	۰/۰۰۰۰۰۰۱۷۵۸۵	۰/۰۰۸۵۶۴۹۰۳۳۴۵
۱۱	۱	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۳۸	۰/۰۰۲۱۷۷۶۴۱۳۵۵	۰/۰۰۰۰۰۰۱۴۹۴۵	۰/۰۵۶۵۶۷۰۷۴۴۳
۱۲	۱	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۴۰	۰/۰۰۲۱۷۷۶۴۰۹۹۰	۰/۰۰۰۰۰۰۱۴۹۴۵	۰/۰۵۶۵۶۷۰۷۴۳۵
۱۳	۱	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲۵	۰/۰۰۲۱۷۷۶۴۰۹۷۰	۰/۰۰۰۰۰۰۱۴۹۴۵	۰/۰۵۶۵۶۷۰۷۶۷۰
۱۴	۱	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۲	۰/۰۰۲۱۷۷۶۴۱۲۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۱۴۹۴۵	۰/۰۵۶۵۶۷۰۷۲۸۶
۱۵	۱	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۱	۰/۰۱۸۸۲۶۷۴۲۹	۰/۰۰۰۰۰۰۱۵۲۹۶	۰/۰۶۰۴۳۲۱۶۵۶۰

**جدول ۱۲.** اطلاعات تحلیل داده‌ای و کشش مقیاس، بعد از تصویر واحدهای ناکارا روی مرز کارایی تکنیکی ( $s_1^-$ ,  $s_2^-$ ,  $s_3^-$ ,  $s_4^-$  و  $s_5^-$  متغیرهای کمبود ورودی و  $s_6^+$  متغیر مازاد خروجی و  $Cost-e$  کارایی هزینه)

واحد	teq-e	$s_1^-$	$s_2^-$	$s_3^-$	$s_4^-$	$s_5^-$	$s_6^+$	Cost-e	$C(y_o; w_o)$	$\omega_0^+$	$\epsilon_c^+$	$\omega_0^-$	$\epsilon_c^-$
۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۷۰	۰/۲۸۳۰۶۵۹۴	۸۰۰۰۰۰	۰	-۰/۲۸۳۰۶۵۹۴	$+\infty$
۲	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۷۱	۰/۳۳۱۳۳۹۱۱	۸۰۰۰۰۰	۰	-۰/۳۳۱۳۳۹۱۱	$+\infty$
۳	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۶۴	۰/۴۶۷۷۵۵۲۸	۸۰۰۰۰۰	۰	-۰/۴۶۷۷۵۵۲۸	$+\infty$
۴	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۹۷	۰/۷۰۸۰۷۵۸۷	۸۰۰۰۰۰	۰	-۰/۷۰۸۰۷۵۸۷	$+\infty$
۵	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۹۶	۰/۸۹۲۲۲۵۸۴	۸۰۰۰۰۰	۰	-۰/۸۹۲۲۲۵۸۴	$+\infty$
۶	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱/۱۷۹۷۳۳۹۵	۸۰۰۰۰۰	۰	-۱/۱۷۹۷۳۳۹۵	$+\infty$
۷	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۹۳	۰/۷۰۲۰۶۶۱۵	۸۰۰۰۰۰	۰	-۰/۷۰۲۰۶۶۱۵	$+\infty$
۸	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰/۷۸۰۰۲۴۶۰	۸۰۰۰۰۰	۰	-۰/۷۸۰۰۲۴۶۰	$+\infty$
۹	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۹۳	۰/۸۷۹۲۴۸۲۴	۸۰۰۰۰۰	۰	-۰/۸۷۹۲۴۸۲۴	$+\infty$
۱۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۸۲	۰/۹۶۹۳۶۰۳۲	۸۰۰۰۰۰	۰	-۰/۹۶۹۳۶۰۳۲	$+\infty$
۱۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۹۷	۱/۱۰۲۹۷۱۹۹	۸۰۰۰۰۰	۰	-۱/۱۰۲۹۷۱۹۹	$+\infty$
۱۲	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۹۷	۰/۶۴۰۰۹۳۵۳	۸۰۰۰۰۰	۰	-۰/۶۴۰۰۹۳۵۳	$+\infty$
۱۳	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۹۶	۰/۵۱۳۸۴۸۲۲	۸۰۰۰۰۰	۰	-۰/۵۱۳۸۴۸۲۲	$+\infty$
۱۴	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰/۳۸۰۳۴۰۶۵	۸۰۰۰۰۰	۰	-۰/۳۸۰۳۴۰۶۵	$+\infty$
۱۵	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۹۹	۰/۴۰۷۸۴۵۲۰	۸۰۰۰۰۰	۰	-۰/۴۰۷۸۴۵۲۰	$+\infty$



## ۵ نتیجه گیری و پیشنهادها

این مقاله به شرح کشسانی مقیاس در مدل کارایی هزینه ورودی محور پرداخته است. کشسانی مقیاس عبارت است از ارایه مقدار عددی برای بازده به مقیاس واحد مورد بررسی. برای تشریح موضوع از مدل کاربردی کارخانجات قندوشکری که از چغندر قند استفاده می کنند و هجده ورودی و چهار خروجی دارند، بهره برده ایم. کلیه عملیات مورد نیاز جهت آماده سازی داده ها، از جمله به دست آوردن هزینه هر واحد، ادغام و نرمال سازی داده هایی با واحدهای اندازه گیری مختلف و ارایه واحدهایی با چهار ورودی و یک خروجی را بیان نمودیم. جداول کارایی هزینه و کشسانی مقیاس این واحدها، قبل و بعد از تصویر واحدهای ناکارا به مرز کارا را ارایه کردیم. پس از تحلیل جداول به دست آمده و مقدار حداقل و حداکثر  $w_0$  نتیجه گرفتیم، این واحدها دارای بازده به مقیاس ثابت می باشند، یعنی هر افزایشی در ورودی این واحدها منجر به همان میزان افزایش در خروجی آنها خواهد شد. قبل از تصویر واحدها به مرز کارایی تکنیکی واحدهای ۶، ۸ و ۱۱ کارایی هزینه و واحد ۸ دارای کمترین هزینه بوده است. پس از تصویر واحدهای ناکارا به مرز کارایی تکنیکی، واحدهای ۶، ۸ و ۱۴ کارایی هزینه و واحد ۱۴ دارای کمترین هزینه بوده است. از تصویر واحدهای ناکارا به مرز کارایی هزینه نتیجه گرفتیم واحد ۵ و واحدهای ۷ الی ۱۲ کارایی هزینه و واحد ۱۲ دارای کمترین هزینه می باشد. همچنین نتیجه گرفتیم، کشش مقیاس قبل از تصویر واحدهای ناکارا روی مرز کارا با کشش مقیاس بعد از تصویر واحدهای ناکارا روی مرز کارایی تکنیکی یا کارایی هزینه، تفاوتی ندارد که می تواند به صورت دو قضیه در تحقیقات آتی ارایه و اثبات گردد. نتایج به دست آمده از این مقاله برای کارخانجات قندوشکر نشان می دهد که کشسانی مقیاس مدل کارایی هزینه به راحتی قابل ارایه برای تعیین مقدار عددی بازده به مقیاس می باشد. این تحلیل کمک می کند تا تصویر درستی از نتایج کشسانی مقیاس مدل کارایی هزینه بر عملکرد کارخانجات داشته باشیم، یعنی اگر یک کارخانه قصد توسعه منابع به منظور دستیابی به سود بیشتر و یا کم کردن منابع با توجه به سیاست های قیمت بازار را داشته باشد، قبل از اقدام با استفاده از کشسانی مقیاس مدل کارایی هزینه، نتایج را پیش بینی کرده و تصمیم به اقدام برای توسعه و یا کم کردن منابع می گیرد و از خسارت های جبران ناپذیر جلوگیری می نماید. زمانی که ورودی ها ناهمگن هستند، به منظور به حساب آوردن وضعیتی که قیمت های ورودی شرکت ها متفاوت یا تفاوت های کیفی در منابع وجود داشته باشند، مدل کارایی هزینه، مبتنی بر مقدار تن [۲۰] (با برپاسازی مجموعه تولید در فضای هزینه خروجی) می باید، جایگزین شود، این مدل بیشتر در DEA جهت دار (برای توسعه اندازه مقدار محور جهت دار) برای ناکارایی تکنیکی گسترش یافته است [۳۸، ۳۹، ۴، ۱۶]. مدل های خروجی محور برای ارزیابی کارایی درآمد و سود و در نظر داشتن قیمت نامعین ورودی برای ارزیابی کشسانی مقیاس مدل کارایی هزینه، موضوع جالبی برای تحقیقات آتی خواهد بود.

## منابع

- [1] Kordrostami, S., Amirteimoori, A., Masoumzadeh, A. (2015). Evaluating the performance of staff and branches of Saderat bank of Guilan using the data envelopment analysis. Journal of Operational Research in its Applications, 12(2), 125-137.
- [2] Hanoch, G. (1970). Homotheticity in joint production. J. Econ. Theory, 2, 423-426.

- [3] Panzar, J. C., Willig, R. D. (1977). Economies of scale in multi output production. Q. J. Econ., XLI, 481-493.
- [4] Baumol, W. J., Panzar, J. C., Willig, R. D. (1982). Contestable markets and theory of industrial structure. New York: Harcourt Brace Jovanovich.
- [5] Hosseinzadeh Lotfi, F., Ghelej Beigi, Z., Gholami, K., Aghayi, N. (2011). Classification sensitivity analysis of returns to scale in DEA. Journal of Operational Research in its Applications, 8(3), 115-124.
- [6] Payan, A., Rahmani Perchikolaei, B. (2020). Expansionary-contradictory policies in stock companies using left and right returns to scales in data envelopment analysis models. Journal of Operational Research in its Applications, 17(1), 119-137.
- [7] Podinovski, V. V., Finn, R. F. (2020). Scale Elasticity and Returns to Scale. In S. C. Ray et al. (Eds.), Handbook of Production Economics, pp. 1-39. Singapore: Springer.
- [8] Banker, R. D., Charnes, A., Cooper, W. W. (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. Manage. Sci., 30, 1078-1092.
- [9] Kazemi Matin, R. (2018). Scale elasticity in DEA models: review and new results. *Iranian Data Envelopment analysis Society*. Website [http://irandeads.ir/files/site1/files/SE+ND+UD\\_IDEAS-1.pdf](http://irandeads.ir/files/site1/files/SE+ND+UD_IDEAS-1.pdf).
- [10] Sahoo, Biresh K., Tone, K. (2015). Scale elasticity in non-parametric DEA approach. In Joe Zhu (ed.), data envelopment analysis, pp. 269-290. New York: Springer.
- [11] Frisch, R. (1965). Theory of production. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
- [12] Sueyoshi, T. (1999). DEA duality on returns to scale (RTS) in production and cost analyses: an occurrence of multiple solutions and differences between production based and cost based RTS estimates. Manage. Sci., 45, 1593-1608.
- [13] Cesaroni, G., Kerstens, K., Van de Woestyne, I. (2020). The shape of ray average cost and Its role in multioutput scale economies: Some Generalisations. "Working Papers 2020-EQM-03", IESEG School of management.
- [14] Fare, R., Grosskopf, S. (2006). Resolving a strange case of efficiency. J. Oper. Res. Soc., 57, 1366-1368.
- [15] Farrell, M. J., (1957). The measurement of productive efficiency. Journal of Royal Statistical Society, Series (A) 120, 253-290.
- [16] Fukuyama, H., Weber, W. L. (2004). Economic inefficiency measurement of input spending when decision making units face different input prices. J. Oper. Res. Soc., 55, 1102-1110.
- [17] Grosskopf, S., Yaisawarng, S. (1990). Economies of scope in the provision of local public services. Nat. Tax J., 43, 61-74.
- [18] Sahoo, B. K., Kerstens, K., Tone, K. (2012). Returns to growth in a non-parametric DEA approach. Int. Trans. Oper. Res., 19, 463-486.
- [19] Sahoo, B. K., Sengupta, J. K., Mandal, A. (2007). Productive performance evaluation of the banking sector in India using data envelopment analysis. Int. J. Oper. Res., 4, 1-17.
- [20] Sahoo, B. K., Tone, K. (2009a). Decomposing capacity utilization in data envelopment analysis: an application to banks in India. Eur. J. Oper. Res., 195, 575-594.
- [21] Sengupta, J. K. (1999). A dynamic efficiency model using data envelopment analysis. Int. J. Prod. Econ., 62, 209-218.
- [22] Sengupta, J. K. (2002). Economics of efficiency measurement by the DEA approach. Appl. Econ., 34, 1133-1139.
- [23] Sengupta, J. K. (2004). The survivor technique and the cost frontier: a nonparametric approach. Int. J. Product Econ., 87, 185-193.
- [24] Sengupta, J. K. (2005a). Nonparametric efficiency analysis under uncertainty using data envelopment analysis. Int. J. Prod. Econ., 95, 39-49.
- [25] Sengupta, J. K. (2005b). Data envelopment analysis with heterogeneous data: an application. J. Oper. Res. Soc. 56, 676-686.
- [26] Sahoo, B. K., Tone, K. (2009b). Radial and non-radial decompositions of profit change: with an application to Indian banking. Eur. J. Oper. Res., 196, 1130-1146.
- [27] Karim Shahi, M. (2016). Fundamental review of the sugar industry. World Economy. (in Persian). <https://jahanehtesad.com/بررسی-بنیادی-صنعت-قندو-شکر/>
- [28] Zare, S., Monazzam, MR., Behzadi, M., Hasanvand, D., Ahmadi, S. (2017). Hearing loss among Fasa sugar factory workers', Fars Provincre, Iran. JOHE, 6 (2), 70-76.
- [29] Yazdani, S., Rahimi, R. (2012). Evaluation of the efficiency of sugar beet production in Qazvin plain, Iran. Journal of Sugar Beet, 28 (2), 113-118.

- [30] Ganji, N., Yazdani, S., Saleh, A. (2018). Identifying the factors affecting the efficiency of water input in wheat production of Alborz province (data envelopment analysis approach). *Iranian Journal of Economic Research and Agricultural Development*, 49-2 (1), 13-22.
- [31] Amirteimoori, A., Kordrostami, S., Rezaitabar, A. (2006). An improvement to the cost efficiency interval: a DEA-based approach. *Applied Mathematics and Computation*, 181(1), 775- 781.
- [32] Jahanshahloo, G. R., Roshdi, I., Davtalab-olyaie, M. (2013). Characterizing and finding full dimensional efficiency facets of PPS with constant returns to scale technology. *Science and Research Branch (IAU)*, Vol. 5, 290- 301.
- [33] Cherkat Kargozari Bank Ayande (in Persian) (2016). Analysis of Ghazvin sugar mills. [www.old.babc.ir/tbssc/Reports/sadabadi](http://www.old.babc.ir/tbssc/Reports/sadabadi)
- [34] Yazdanbakhsh, S., Elahi, M., Shahnooshi Forooshani, N. (2012). Economic evaluation of sugar industry from macro management perspective. Paper presented at the 34th annual seminar on sugar factories in Iran, Mashad: Sugar Hall, September 18-19 2012.
- [35] Kazemi Matin, R., Najafi, S. S. (2014). Aggregation of Farrell efficiency indices: input oriented with cost function. *Journal of Operational Research in its Applications*, 11(1), 105-117.
- [36] Taheri Akerdi, A., Ramzanzadeh Zeidi, A., Eghbal, M. R. (2015). Investigate the relationship between point to point inflation and the Tehran stock exchange overall index. *Indian Journal Of Fundamental And Applied Life Sciences*, Vol. 5 (S2), 135-143.
- [37] Hubber, David (2015). How to do units and scaling right. *Excellence Cluster Universe*.
- [38] Chambers, R. G., Chung, Y., Fare, R. (1996). Benefit and distance functions. *J. Econ. Theory* 70, 407-419.
- [39] Chambers, R. G., Chung, Y., Fare, R. (1998). Profit, directional distance functions and Nerlovian efficiency. *J. Optim. theory Appl*, 98, 351-364.