

## یک مدل بهینه‌سازی ریاضی برای زمان‌بندی کلاس‌های دانشجویان در شرایط کرونا زیستی

حسن رشیدی\*

۱-استاد، دانشگاه علامه طباطبائی، دانشکده آمار، ریاضی و رایانه، تهران، ایران

رسید مقاله: ۱۲ شهریور ۱۳۹۹

پذیرش مقاله: ۲۸ اردیبهشت ۱۴۰۰

### چکیده

به دلیل شیوع گسترده بیماری کوید-۱۹، بسیاری از دانشگاه‌های برتر جهان تصمیم گرفته‌اند که نیمسال آینده را به صورت مجازی برگزار کنند. در کشور ما هم، پیش‌بینی‌ها وضعیت قرمزی را برای برخی مناطق از لحاظ شیوع کرونا، نشان می‌دهد. با توجه به سکونت تعدادی زیادی از دانشجویان در این مناطق، برنامه‌ریزی نیمسال آینده دانشگاه‌ها باید با تمرکز بیشتری روی آموزش مجازی صورت پذیرد. طبق دستورالعمل‌های وزارت علوم، تحقیقات و فناوری ایران، نیمسال آینده باید به صورت دو شیوه شامل آموزش مجازی و آموزش حضوری به اجرا درآید. در آموزش حضوری با نیازمندی‌های فضای آموزشی و کلاس‌ها، دانشجویان به دو زیررسته (A) و (B) تقسیم می‌شود. دانشجویان هر رسته در هفته‌های متفاوتی در کلاس حضور خواهند یافت به گونه‌ای که اجرای پروتکل‌های بهداشتی در فضای آموزشی و کلاس‌ها امکان‌پذیر باشد. در این مقاله، برای تعیین تعداد دانشجویان و کلاس‌ها برای هر دو زیررسته (A) و (B) در آموزش حضوری، یک مدل بهینه‌سازی ریاضی به صورت برنامه‌ریزی غیرخطی با متغیرهای صحیح پیشنهاد می‌شود. در تابع هدف مدل، توزیع دانشجویان در فضای آموزشی و کلاس‌ها در نظر گرفته شده است به گونه‌ای که حداکثر پراکندگی ممکن، به دلیل جلوگیری از شیوع بیماری کرونا میسر گردد. در این مدل، محدودیت‌های ظرفیت کلاس و همچنین محدودیت‌هایی برای برگزاری کلاس در روزهای زوج (شنبه، دوشنبه)، روزهای فرد (یکشنبه و سه‌شنبه) و روز چهارشنبه در نظر گرفته شده است. این مدل برای تخصیص کلاس‌ها در دانشکده آمار، ریاضی و رایانه دانشگاه علامه طباطبائی، پیاده‌سازی شده و استفاده از آن نتایج رضایت‌بخشی برای تصمیم‌گیرندگان به همراه داشته است.

**کلمات کلیدی:** شیوع کرونا، آموزش حضوری، تخصیص کلاس، برنامه‌ریزی ریاضی.

\*عده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: hrashi@gmail.com

## ۱ مقدمه

به دلیل شیوع ویروس کرونا (کوید-۱۹) در ماه‌های اخیر، تمام مشاغل مرتبط با آموزش در سراسر جهان به شدت تحت تأثیر قرار گرفته‌اند. تقریباً بسیاری از فعالیت‌ها به طور جدی متوقف شده به گونه‌ای که احساس و مسئولیت بشر را برای بقاء تشدید کند. بخش آموزش نیز از چنگال‌های کوید-۱۹ مستثنی نیست، زیرا تمام موسسات آموزشی را مجبور به آموزش برخط یا آموزش الکترونیکی از طریق همه راه‌های ممکن، نموده است.

شیوع ویروس کوید-۱۹ به صورت تصاعدی و رواج آموزش‌های مجازی، نیازمند نگاهی نو و کاربردی به شیوه آموزش در دانشگاه‌ها می‌باشد. تصمیم‌گیران حوزه آموزش در همه کشورها بر این باوراند که برای نیمسال بعدی نیز حتی با رفع بیماری کرونا، از آموزش مجازی به عنوان یک ظرفیت بسیار مناسب بهره‌گیری کنند. در کشور ایران هم، ظهور چند موج شیوع کرونا و پیش‌بینی‌ها وضعیت قرمزی را برای برخی مناطق نشان می‌دهد. بنابراین، در برنامه‌ریزی نیمسال آینده باید تمرکز بیشتری روی آموزش مجازی صورت پذیرد.

یکی از رویکردهای موثر برای برگزاری کلاس‌های دانشگاه‌ها، یک رویکرد ترکیبی شامل آموزش مجازی و حضوری است. هدف اصلی این مقاله، ارائه یک مدل بهینه‌سازی ریاضی برای تخصیص کلاس‌های دانشگاه به دانشجویان طی آموزش حضوری آنان است به گونه‌ای که میزان پراکندگی آنها طی مدت حضور دانشجویان در کلاس‌ها بیشینه گردد. بقیه ساختار این مقاله به صورت زیر تنظیم شده است. در بخش دوم، ادبیات موضوع مرور می‌گردد. در بخش سوم، مدل بهینه‌سازی پیشنهادی، بیان و توصیف می‌شود و سپس به صورت معادلات ریاضی فرموله می‌گردد. در بخش چهارم، مدل بهینه‌سازی برای تصمیم‌گیری در دانشکده آمار، ریاضی و رایانه دانشگاه علامه طباطبائی پیاده‌سازی و اجرا می‌گردد. در بخش پنجم، نتایج کلی به دست آمده و کارهای آتی توضیح داده می‌شود.

## ۲ مروری بر ادبیات موضوع

ویروس کرونا، با عنوان کوید-۱۹<sup>۱</sup> اولین بار در ووهان، استان هوبی در چین در دسامبر سال ۲۰۱۹ شناسایی شد و طی چند هفته در سراسر جهان گسترش یافت. به دلیل شیوع تصاعدی ویروس کرونا، هنوز هم جامعه مراقبت‌های بهداشتی مضطرب‌ترین افراد هستند، زیرا بیشترین خطر عفونت را دارند. در این قسمت، ادبیات موضوع و مرتبط با اثرات شیوع ویروس کرونا و برنامه‌ریزی دروس در دانشگاه‌ها، مرور می‌شود.

در سال‌های اخیر، استفاده از مدل‌های ریاضی جهت زمان‌بندی دروس دانشگاهی مورد توجه قرار گرفته است. در تحقیق [۱] مدلی برای در نظر گرفتن محدودیت‌هایی همچون زمان مشاوره اساتید به دانشجویان، کیفیت تدریس اساتید و برنامه‌ریزی برای دروس پیش‌نیاز و پس‌نیاز پیشنهاد شده است. جهت ارزیابی مدل ارائه شده، یک مثال عددی مطرح و یک بار بدون در نظر گرفتن محدودیت‌ها و اهداف کیفیت ارائه دروس حل گردید و یک بار نیز مدل با استفاده از در نظر گرفتن محدودیت‌ها و اهداف کیفیت ارائه دروس حل گردید. در انتها جهت ارزیابی نتایج، چهار شاخص تعیین شد و نتایج حل با دو مدل مقایسه گردید. نتایج این تحقیق نشان

<sup>۱</sup> COVID-19

می‌داد با در نظر گرفتن محدودیت‌ها و اهداف کیفیت، زمان ارایه دروس و حضور اساتید برای مشاوره بهبود پیدا کرده است.

استقبال گسترده و انتشار سریع پیام‌های ایجاد شده در فضای مجازی و تعداد زیاد بازدید کنندگان، نشان‌دهنده استفاده موثر و به موقع از این فضا برای حل این مشکلات آموزشی و بهداشتی است. با این حال، فن‌آوری‌ها و برنامه‌های آموزشی جدید و ظرفیت رسانه ملی و خصوصی نیز باید مورد توجه قرار گیرد. دوره‌های برخط ساده، کاربردی و رایگان باید در دسترس همگان قرار گیرد و افراد بی‌سواد و معلول نیز باید بیشتر در نظر گرفته شوند. ارزشیابی کیفیت عملکرد مراکز آموزشی در ایران، در سال‌های اخیر مورد بررسی دقیق‌تری قرار گرفته است. در پژوهش [۲] با توجه به اهمیت ارزیابی کیفیت عملکرد دانشگاه‌ها و زیرمجموعه‌های آن، یک مدل ارزیابی جدید به نام تکنیک پروفایل کارایی ورودی بهبود یافته، بر اساس عملکرد تکنیک پروفایل کارایی کلاسیک، پیشنهاد گردید. همچنین با ارایه‌ی یک مثال عددی به همراه تحلیل نتایج و اعتبارسنجی، نشان داده شده است که این مدل پیشنهادی از اعتبار لازم برخوردار می‌باشد.

در تحقیقی در کشور عربستان، تأثیر اپیدمی ویروس کوید-۱۹ بر درک دانشجویان پزشکی و عوامل نگرانی روانشناختی آنها در شیوع این ویروس مورد مطالعه قرار گرفت [۳] که در آن، ۲۰۰ دانشجو از کالج پزشکی دانشگاه کینگ سعود در شهر ریاض انتخاب و مورد بررسی قرار گرفتند. شرکت کنندگان به یک پرسشنامه پاسخ دادند و داده‌های جمع‌آوری شده با استفاده از روش‌های آماری مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت. حدود ۸۷٪ از پرسش‌نامه‌ها، پاسخ داده شد. یافته‌های این پژوهش نشان می‌دهد میانگین استرس دانش آموزان بانوان نسبت به مردان بالاتر است و سطح استرس با نمره اختلال اضطراب فراگیر ارتباط معنی‌داری دارد. این مطالعه نشان داد تعداد منابع قابل دسترس دانشجویان با اضطراب و اضطراب ناشی از ویروس کوید-۱۹ ارتباط مستقیمی دارد و برخی عوامل شامل افزایش گزارش خودابرازی در مورد عادات ماهانه، اجتناب از خودنمایی اجتماعی، درجه اضطراب تعمیم یافته و همچنین جنسیت زن بودن، اهمیت کمتری دارند. سایر متغیرها از جمله تعداد دسترسی به منابع، موافقت با ترس و درجه آگاهی از ویروس کرونا، همه غیرمعنی‌دار بودند. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد نیازهای روانی دانشجویان پزشکی در هنگام شیوع ویروس کوید-۱۹ باید به‌طور مناسب برطرف شود به گونه‌ای که بتوانند سودمند ظاهر شوند.

تحقیقی نشان می‌دهد شیوع گسترده ویروس کرونا (کوید-۱۹) در کشورهای مختلف جهان، تصمیم‌گیران را مجبور به اجرای سیاست‌های مختلفی برای شکستن زنجیره شیوع این ویروس نموده و سازمان بهداشت جهانی اعلامیه‌های متعددی در این زمینه صادر کرده است [۴]. در این تحقیق، مضامین اصلی مدیریت آموزش پزشکی شامل اعمال نفوذ در حالت‌های از راه دور یا غیرمتمرکز تحویل آموزش پزشکی، حفظ یکپارچگی ارزیابی‌های سازنده و جمع‌بندی در هنگام بازسازی اجزای مخاطب بیمار و تدوین برنامه‌های عملیاتی برای نگهداری از فعالیت‌های اساسی بر اساس سطح هشدار، مدنظر قرار گرفته است. این اصول اصلی باید بدون وقفه در فضاهای مختلف مراکز دانشگاهی به کار رود. تصمیمات کلیدی از تیم‌های واکنش همه‌گیر به حداقل رساندن اختلالات عمده در آموزش پزشکی و کنترل انتقال بیماری کمک می‌کند که در جهت به حداقل رساندن آلودگی‌های بین

خوشه‌ای و برنامه‌هایی برای تفکیک در داخل و میان گروه‌ها، تغییر شکل تقویم‌های دانشگاهی، و همچنین به تعویق انداختن برخی فعالیت‌ها می‌باشد. این تحقیق نشان می‌دهد در حالی که به حداقل رساندن انتقال شیوع بیماری همه‌گیر در مراکز بهداشتی و درمانی مهم است، آموزش‌های پایدار پزشکی و فعالیت‌های تحقیقاتی باید، به طور موثر ادامه یابد.

در تحقیقی دیگر در کشور کانادا، مدلی برای پیش‌بینی شیوع کوید-۱۹ با استفاده از مدل‌های پیشرفته آموزش عمیق<sup>۱</sup>، بر اساس مجموعه داده‌های عمومی ارائه شده توسط دانشگاه جان هاپکینز و وزارت بهداشت، تهیه شده است [۵]. در این تحقیق، ویژگی‌های اصلی برای پیش‌بینی روند و زمان توقف احتمالی شیوع کوید-۱۹ فعلی انتخاب و در سراسر جهان مورد ارزیابی قرار گرفته است. در این مقاله، شبکه‌های حافظه کوتاه مدت<sup>۲</sup> (LSTM)، به عنوان رویکردی از نوع یادگیری عمیق برای پیش‌بینی موارد آینده کوید-۱۹ بیان می‌گردد. براساس نتایج شبکه حافظه کوتاه مدت، پیش‌بینی گردید که احتمال پایان این شیوع در حدود ژوئن سال ۲۰۲۰ خواهد بود. علاوه بر این، در این تحقیق نرخ انتقال کانادا با ایتالیا و آمریکا مقایسه می‌گردد. همچنین پیش‌بینی‌های روز ۲، ۴، ۶، ۸، ۱۰، ۱۲ و ۱۴ برای ۲ روز متوالی ارائه گردید که براساس داده‌های موجود تا ۳۱ مارس ۲۰۲۰ بود. با توجه به اخبار روزمره و منتشر شده در خصوص شیوع این ویروس، نتایج این تحقیق پیش‌بینی صحیحی برای پایان دوره این ویروس نشان نداده است.

تحقیقی نشان می‌دهد زندگی در قرنطینه خانگی در کشور ایران، نتایج منفی از جهت روان‌شناختی دانشجویان در همه‌گیری کوید-۱۹ به همراه داشته است [۶]. این تحقیق از نوع کیفی با رویکرد پدیدارشناختی تفسیری است که در آن نمونه‌گیری هدفمند در سال ۲۰۲۰ در تهران انجام شد. داده‌ها از طریق مصاحبه‌های نیمه‌ساختاریافته جمع‌آوری شد. شرکت‌کنندگان در این مطالعه دانشجویان تحصیلات تکمیلی با تجربه زندگی طبیعی در قرنطینه بودند. داده‌های تحقیق با ۱۵ مصاحبه به اشباع نظری رسیدند. تمام داده‌ها با استفاده از رویکرد "پدیدارشناسی ون مانن"<sup>۳</sup> مورد تحلیل قرار گرفت. تجزیه و تحلیل داده‌ها، شامل چهار مضمون اصلی "ایجاد احساسات منفی، گنجی و بدبینی"، "ایجاد رفتار وسواسی در مورد بدن و شستشو"، "نگرانی در مورد سلامت خانواده"، "نگرانی‌های اقتصادی و اجتماعی، ترس از فردا خلاص شدن از شر ویروس" بودند. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد تجارب دانشجویان از زندگی در قرنطینه بسیار منحصر به فرد می‌باشد و درک پیچیدگی‌های تجربه‌ها، باورها و نگرش‌های آنها در مورد زندگی در قرنطینه می‌تواند برنامه‌های جامعی را برای تصمیم‌گیرندگان، متخصصان مراقبت‌های بهداشتی و متخصصان بهداشت روان ارائه دهد.

شیوع کوید-۱۹، نیازمند بهترین راه حل در فرایند یادگیری است. بدین منظور، یادگیری الکترونیکی به عنوان برنامه اولویت‌دار جدیدی در دانشگاه دولتی اسلامی (دانشگاه اسلامی سوماترای شمال-میانه)<sup>۴</sup> به صورت شکلی از برنامه دیجیتالی شدن، انجام گرفته است [۷]. این برنامه با هدف ارتقاء کیفیت فرایند یادگیری و در

<sup>1</sup> Deep Learning

<sup>2</sup> LSTM (Long Short Term Memory)

<sup>3</sup> Van Manen Phenomenology

<sup>4</sup> UIN North Sumatera Medan

تلاش برای پاسخگویی به خواسته‌های توسعه فناوری اطلاعات اجرا می‌شود. به همین دلیل، این دانشگاه صریحاً استفاده رسمی از یادگیری الکترونیکی را به عنوان یک وسیله یادگیری مبتنی بر الکترونیکی طی فرمانی در سال ۲۰۱۹ اعمال کرد. برنامه یادگیری الکترونیکی<sup>۱</sup>، چنان که دوباره کوید-۱۹ نیاز به فرایند یادگیری در این دانشگاه به صورت برخط را نشان داد، مورد تاکید قرار گرفت. صدور بخشنامه‌ای از طرف رئیس این دانشگاه، روند کلاس‌های برخط (به صورت شبکه‌ای) را تا پایان نیمسال حتی سال تحصیلی گسترش می‌دهد. در این برنامه، یادگیری الکترونیکی، نه تنها کلاس را به صورت برخط ارائه می‌کند، بلکه با وجود سیستم‌ها در قالب نرم افزار، می‌توان تعامل بین مربیان، مدرسین و دانشجویان را، به صورت مستقیم (هماهنگ) و غیرمستقیم با تأخیر (غیرهم‌زمان)، تنظیم و نظارت نمود. از جمله امکانات الکترونیکی که توسط این دانشگاه تسهیل می‌شود، یادگیری رسانه‌ها در مورد برنامه یادگیری الکترونیکی، لیست حضور و غیاب دانشجویان در برنامه درسی، ارزیابی آن‌ها و سایر فعالیت‌های کلاسی در برنامه پورتال این دانشگاه منعکس شده است.

در مطالعه دیگری در کشور ایران، آموزش به‌عنوان مهم‌ترین اقدامات جهت پیشگیری و نحوه مقابله با عفونت و قرار گرفتن در معرض بیماران آلوده، برای مقابله با کوید-۱۹، مطرح شده است [۸]. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد شناسایی به موقع و طراحی یک پروتکل آموزشی در مورد شیوع گسترده ویروس و آموزش عمومی فعال و مؤثر نیز باید در نظر گرفته شود. علاوه بر این، نظرات کاربران و بازدیدکنندگان در مورد اصلاح و به‌روزرسانی پیام‌های آموزشی، اثربخشی روش آموزش را افزایش می‌دهد و محتوای آموزشی در قالب‌های مختلف رسانه‌ای می‌تواند برای افزایش اثربخشی یادگیری، طراحی و اجرا شوند. بنابراین، برای مدیریت ویروس، سیاست‌گذاران در سیستم سلامت و کلیه سازمان‌های درگیر باید در ارائه محتوای آموزشی نوآورانه، یکپارچه و کاربردی برای همه افراد گام بردارند.

در کشور اندونزی اجرای درخواست تجدیدنظر در بین افراد برای رعایت فاصله فیزیکی، مورد مطالعه قرار گرفته [۹] و بر اساس آن، یکی از رویکردها، انجام فرایند یادگیری به صورت برخط در منزل است. هدف از این مطالعه، یافتن چگونگی استفاده از الگوی یادگیری آمیخته با کاربردهای روحیه‌بخش در دانش‌آموزان و معلمان دوره ابتدایی در طول همه‌گیری کوید-۱۹ است. این پژوهش از نوع یک طرح شبه‌آزمایشی با گروه کنترل پیش‌آزمون-پس‌آزمون است. نتایج این پژوهش نشان می‌دهد استفاده از الگوی یادگیری ترکیبی از مدل<sup>۲</sup> برای دانش‌آموزان و آموزش معلمان مدارس ابتدایی مؤثر است و می‌تواند به عنوان یک راه حل یادگیری مبتنی بر شبکه یا به صورت برخط مورد استفاده قرار گیرد.

در تحقیقی در کشور هند اثربخشی پلتفرم دیجیتالی [۱۰]، به عنوان ابزارهای مدرن فناوری اطلاعات و ارتباطات به ویژه در مناطق روستایی مطرح گردید [۱۰] که نشان می‌دهد یادگیری الکترونیکی برای مدارس روستایی هند هنوز، یک رویا می‌باشد. در تحقیقی دیگر، آسیب‌شناسی دانشگاه آلمان تحت تأثیر بیماری‌های کرونا و اقدامات مربوطه قرار گرفته است [۱۱] که در آن، نظرسنجی از میان ۳۶ آسیب‌شناسی دانشگاهی با نرخ

<sup>1</sup> E-Learning<sup>2</sup> Moodle

بازگشت ۸۳٪ انجام و ارزیابی صورت گرفت. این تحقیق، محدودیت‌های قابل توجهی در تحقیق و همچنین تمایل زیاد به شناسایی دقیق کوید-۱۹ را نشان می‌دهد.

### ۳ مدل پیشنهادی

با توجه به شیوع بیماری کرونا، پیشنهاد می‌شود نیمسال آینده به صورت دو بخش شامل آموزش مجازی به مدت ۱۰ هفته (مطابق اغلب دانشگاه‌های اروپا [۱۲]) و آموزش حضوری به مدت ۳ تا ۶ هفته در دو زیررسته A و B، برنامه‌ریزی شود. در آموزش حضوری، باید توزیع دانشجویان در فضای آموزشی و کلاس‌ها به گونه‌ای انجام شود که حداکثر پراکندگی ممکن را، به دلیل جلوگیری از شیوع بیماری کرونا داشته باشد. در این قسمت، یک مدل بهینه‌سازی ریاضی غیرخطی [۱۳] جهت تخصیص کلاس‌ها به دانشجویان ارائه می‌گردد و عناصر آن، شامل فرضیات مدل، پارامترهای ورودی مدل، متغیرهای تصمیم‌گیری، محدودیت‌ها و تابع هدف، توضیح داده می‌شود.

### ۳-۱ فرضیات مدل

فرضیات مدل بهینه‌سازی، به صورت زیر تعیین می‌شود.

✓ **فرض ۱:** در مدل پیشنهادی، دانشجویان به رسته‌هایی تقسیم می‌شوند. این رسته‌ها، می‌توانند بر حسب معیار مختلفی مانند مراحل تحصیل دانشجویان در مقاطع کارشناسی، ارشد و دکتری و با نیازمندی‌های گذراندن واحد درسی در مراحل تحصیلی و همچنین سال ورود به دانشگاه، مشخص گردد.

✓ **فرض ۲:** در آموزش حضوری با نیازمندی‌های فضای آموزشی، دانشجویان هر رسته به دو زیررسته A و B تقسیم می‌شود. دانشجویان هر رسته در هفته‌های متفاوتی در کلاس حضور خواهند یافت به گونه‌ای که اجرای پروتکل‌های بهداشتی در دانشگاه و کلاس‌ها امکان‌پذیر باشد. در واقع، در طول نیمسال تحصیلی، تعدادی از کلاس‌ها در زیررسته A (B) به صورت حضوری و هم‌زمان مطالب آن کلاس‌ها برای زیررسته B (A) به صورت مجازی است.

✓ **فرض ۳:** در آموزش حضوری با نیازمندی‌های فضای آموزشی، باید محدودیت‌های ظرفیت کلاس‌ها و فضای آموزشی در نظر گرفته شود.

✓ **فرض ۴:** در آموزش حضوری، مدت برگزاری هر درس ۲ واحدی، ۲ ساعت در نظر گرفته می‌شود و برای دروس ۴ واحدی و یا ۳ واحدی، باید دو جلسه مجزا در روزهای زوج (شنبه و دوشنبه) و یا در روزهای فرد (یکشنبه و سه‌شنبه) تخصیص داده شود.

✓ **فرض ۵:** در آموزش حضوری، تابع هدف دربرگیرنده توزیع مناسب دانشجویان در فضای آموزشی و کلاس‌ها است به گونه‌ای که حداکثر پراکندگی ممکن، به دلیل جلوگیری از شیوع بیماری کرونا میسر گردد.

✓ **فرض ۶:** در آموزش حضوری، تعداد کمینه و بیشینه برای دانشجویان در هر جلسه در نظر گرفته می‌شود.

### ۲-۳ پارامترهای ورودی

این پارامترها، قبل از فرآیند حل مدل و در ابتدا باید به صورت داده‌های ورودی در جدول ۱ تعیین شوند.

جدول ۱. پارامترهای ورودی مدل بهینه‌سازی

ردیف	شرح مختصر پارامتر	پارامتر	توصیف پارامتر به انگلیسی
۱	تعداد رشته‌های دانشجویی در دانشکده	$N$	Number of Categories of Students
۲	تعداد کل دانشجویان در رشته $i$	$S_i$	Number of Students in Category $i$
۳	متوسط تعداد واحد درسی مورد نیاز برای رشته $i$	$U_i$	Average Number of Unit-Course required for Category $i$
۴	تعداد کلاس‌های درسی موجود در دانشکده	$NC$	Number of Class-Rooms
۵	ظرفیت متوسط هر کلاس درسی در دانشکده (بر حسب دانشجو)	$ACR$	Average Capacity of Students in Class-Rooms
۶	تعداد جلسات برای هر درس (۲ برای دروس ۳ و ۴ واحدی، یک برای درس ۲ واحدی، ۱ برای درس ۱ واحدی)	$NUS$	Number of Units per Session
۷	حداکثر میزان نسبی (بین یک و صفر) کلاس‌های درسی در ۴ روز اول هفته در ۴ جلسه اول (۲ جلسه صبح و ۲ جلسه بعدازظهر)، که باید توسط مدیریت دانشکده پوشش داده شود.	$\alpha$	Maximum Relative Value (between zero and one) of Class-Rooms on Saturday, Sunday, Monday and Tuesday between ۸:۰۰ and ۱۷:۳۰
۸	حداکثر میزان نسبی (بین یک و صفر) کلاس‌های درسی در ۴ شنبه در ۴ جلسه اول (۲ جلسه صبح و ۲ جلسه بعدازظهر)، که باید توسط مدیریت دانشکده پوشش داده شود.	$\beta$	Maximum Relative Value (between zero and one) of Class-Rooms on Wednesday between ۸:۰۰ and ۱۷:۳۰
۹	حداکثر میزان نسبی (بین یک و صفر) کلاس‌های درسی در ساعات آخر وقت (بین ۱۷:۳۰ تا ۱۹:۳۰)، که باید توسط مدیریت پوشش داده شود.	$\lambda$	Maximum Relative Value (between zero and one) of Class-Rooms between ۱۷:۳۰ to ۱۹:۳۰
۱۰	یک حد پایین و یک حد بالا برای هر ظرفیت هر کلاس	$LB, UB$	The Lower and Upper Bound for Capacity of Each Class-Room

این پارامترها، شامل تعداد رشته‌های دانشجویی (مطابق فرض-۱)، تعداد کلاس‌ها در فضای آموزشی، ظرفیت متوسط هر کلاس، حداکثر تعداد کلاس‌ها در روزهای زوج (شنبه و دوشنبه)، روزهای فرد (یکشنبه و سه‌شنبه) و چهارشنبه، حداکثر تعداد کلاس‌ها در ساعات آخر وقت (ساعت ۱۷:۳۰ تا ۱۹:۳۰) می‌باشند.

### ۳-۳ متغیرهای تصمیم‌گیری

متغیرهای تصمیم‌گیری شامل تعداد دانشجو-واحد (تعداد دانشجویان  $\times$  تعداد واحد) در هر رشته به تفکیک ساعات برگزاری کلاس در روزهای زوج (شنبه و دوشنبه) و روزهای فرد (یکشنبه و سه‌شنبه) و همچنین چهارشنبه می‌باشند. این متغیرها در جدول ۲ منعکس شده است و از حل مدل بهینه‌سازی، به دست می‌آیند.

**جدول ۲. متغیرهای تصمیم‌گیری در مدل بهینه‌سازی**

ردیف	شرح مختصر متغیر	متغیر	توصیف متغیر به انگلیسی
۱	تعداد دانشجو-واحد در رسته $i$ برای برگزاری کلاس در روزهای زوج (هر دو زیررسته A و B)	$XE_{i,j}$ for $i=1, 2, \dots, N$ , $j=1(A-10), 2(10-12), 3(13:30-15:30), 4(15:30-17:30), 5(17:30-19:30)$	Number of Students-Unit Course in Category $i$ and Session $j$ on Saturday and Monday
۲	تعداد دانشجو-واحد در رسته $i$ برای برگزاری کلاس در روزهای فرد (هر دو زیررسته A و B)	$XO_{i,j}$ for $i=1, 2, \dots, N$ , $j=1(A-10), 2(10-12), 3(13:30-15:30), 4(15:30-17:30), 5(17:30-19:30)$	Number of Students-Unit Course in Category $i$ and Session $j$ on Sunday and Tuesday
۳	تعداد دانشجو-واحد در رسته $i$ برای برگزاری کلاس در روز چهارشنبه (هر دو زیررسته A و B)	$XF_{i,j}$ for $i=1, 2, \dots, N$ , $j=1(A-10), 2(10-12), 3(13:30-15:30), 4(15:30-17:30), 5(17:30-19:30)$	Number of Students-Unit Course in Category $i$ and Session $j$ on Wednesday

**۳-۴ محدودیت‌های مدل**

در این مدل بهینه‌سازی، ۷ دسته محدودیت، مطابق جدول ۳ وجود دارد. سه محدودیت (۱)، (۲) و (۳) به تعداد دانشجو-واحد قابل حضور برای همه رسته‌ها در هر کلاس، به تفکیک روزهای زوج (شنبه و دوشنبه) و فرد (یکشنبه و سه‌شنبه) و چهارشنبه مربوط می‌شود. ضریب دو در سمت چپ محدودیت‌های (۱) و (۲)، به دلیل وجود ۲ روز (برای روزهای فرد و زوج) می‌باشد که باید در دو روز مختلف در کلاس‌ها حضور داشته باشند. محدودیت‌های (۴) و (۵) به ترتیب به حداکثر توزیع نسبی تعداد دانشجویان حضور یافته در ۴ جلسه اول (۲ جلسه صبح و ۲ جلسه بعد از ظهر) در روزهای فرد و زوج و همچنین روز ۴ شنبه در هر رسته‌ها مربوط می‌گردد.

**جدول ۳. محدودیت‌های مدل بهینه‌سازی**

رابطه	محدودیت	شرح مختصر محدودیت
(۱)	$2 \times \sum_{i=1}^N XE_{i,j} \leq (NC \times ACR \times NUS)$ For $j=1(A-10), 2(10-12), 3(13:30-15:30), 4(15:30-17:30), 5(17:30-19:30)$	تعداد دانشجو-واحد در روزهای زوج (شنبه و دوشنبه) در همه رسته‌ها که در جلسه $j$ حضور می‌یابند، نباید از ظرفیت کل جلسه $j$ در همان روز تجاوز کند
(۲)	$2 \times \sum_{i=1}^N XO_{i,j} \leq (NC \times ACR \times NUS)$ For $j=1(A-10), 2(10-12), 3(13:30-15:30), 4(15:30-17:30), 5(17:30-19:30)$	تعداد دانشجو-واحد در روزهای فرد (یکشنبه و سه‌شنبه) در همه رسته‌ها که در جلسه $j$ حضور می‌یابند، نباید از ظرفیت کل جلسه $j$ در همان روز تجاوز کند
(۳)	$\sum_{i=1}^N XF_{i,j} \leq (NC \times ACR \times NUS)$	تعداد دانشجو-واحد در روزهای چهارشنبه در همه رسته‌ها که در

جلسه  $j$  حضور می‌یابد، نباید از ظرفیت کل جلسه  $j$  در همان روز تجاوز کند

تعداد دانشجو-واحد در روزهای زوج (شنبه و دوشنبه) و روزهای فرد (یکشنبه و سه‌شنبه) در همه رسته‌ها که در ۴ جلسه اول آن روز حضور می‌یابد، نباید بیشتر از حداکثر تعداد کلاس‌های درسی بر حسب سیاست مدیر آموزشی باشد.

تعداد دانشجو-واحد در روزهای چهارشنبه در همه رسته‌ها که در ۴ جلسه اول آن روز حضور می‌یابد، نباید بیشتر از حداکثر تعداد کلاس‌های درسی بر حسب سیاست مدیر آموزشی باشد.

تعداد دانشجو-واحد در ساعت (جلسه) ۱۷:۳۰-۱۹:۳۰ در همه روزها برای هر رسته، نباید بیشتر از تعداد دانشجو-واحد تعیین شده در آن رسته برای آن ساعت باشد.

یک حد پایین و یک حد بالا برای هر متغیر تصمیم‌گیری؛ همه متغیرهای تصمیم‌گیری اعداد صحیح هستند

$$j=1(1-10), 2(10-12), 3(13:30-15:30), 4(15:30-17:30), 5(17:30-19:30)$$

$$2 \times \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^4 XE_{i,j} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^4 XO_{i,j} \right) \leq \alpha \times \sum_{i=1}^N (S_i \times U_i)$$

Where  $j=1(1-10), 2(10-12), 3(13:30-15:30), 4(15:30-17:30)$  (۴)

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^4 X\varphi_{i,j} \leq \beta \times \sum_{i=1}^N (S_i \times U_i)$$

Where  $j=1(1-10), 2(10-12), 3(13:30-15:30), 4(15:30-17:30)$  (۵)

$$\sum_{i=1}^N (2 \times XE_{i,5} + 2 \times XO_{i,5} + X\varphi_{i,5}) \leq \lambda \times \sum_{i=1}^N (S_i \times U_i)$$

Where  $j=5$  is for time( 17:30-19:30) (۶)

$$LB \leq XO_{i,j} \leq UB; LB \leq XE_{i,j} \leq UB;$$

$$LB \leq X\varphi_{i,j} \leq UB; i=1,2,3,\dots,N; j=1,2,3,4,5$$

$XO_{i,j}$  is Integer;  $XE_{i,j}$  is integer;  $X\varphi_{i,j}$  is integer (۷)

محدودیت (۶) به کنترل حداکثر تعداد دانشجویان در همه کلاس‌ها در همه روزهای در ساعت آخر هر روز (ساعت ۱۷:۳۰ تا ۱۹:۳۰) مربوط می‌گردد و محدودیت (۷) حداقل و حداکثر ارزش‌ها را برای متغیر تصمیم‌گیری کنترل می‌کند. طبق مقرارت جدید وزارت علوم، کلاس‌های دانشگاه باید حدود نصف ظرفیت هر کلاس را برای دانشجویان، جهت جلوگیری از شیوع ویروس کرونا در نظر بگیرند.

### ۳-۵ تابع هدف مدل

در تابع هدف، توزیع کلی دانشجویان در فضای آموزشی و کلاس‌ها در نظر گرفته شده است. در این توزیع، ارزش‌های ممکن برای هر متغیر تصمیم‌گیری باید حداکثر پراکندگی ممکن بین دو جلسه مجاور هم از نظر زمانی، را به دلیل جلوگیری از شیوع بیماری کرونا داشته باشد. در تابع هدف مدل به صورت رابطه (۸)، توان دوم اختلاف بین متغیرهای تصمیم‌گیری به عنوان معیار استفاده می‌شود به گونه‌ای که اختلاف‌های کوچک‌تر کم‌تر و اختلاف‌های بزرگ‌تر، بیشتر نشان داده شود. در این رابطه، هر عبارت توان دوم اختلاف بین تعداد کل دانشجو-

واحد در همه روزها بین هر دو جلسه متوالی و برای هر رشته است. واضح است که اندیس  $j$  در متغیرهای تصمیم‌گیری مربوط به شماره جلسات در هر روز می‌باشد و ارزش‌های عددی بین یک تا پنج به خود می‌گیرد. ضریب دو در بخش اول عبارت مربوط به تابع هدف، نشان‌گر آن است که کلاس‌های روزهای زوج و فرد، هر یک دو جلسه تشکیل خواهد شد.

$$Max Z = 2 \times \left( \begin{aligned} & \left( \sum_{i=1}^N XE_{i,\delta} - \sum_{i=1}^N XE_{i,\varphi} \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^N XE_{i,\varphi} - \sum_{i=1}^N XE_{i,\gamma} \right)^2 \\ & + \left( \sum_{i=1}^N XE_{i,\gamma} - \sum_{i=1}^N XE_{i,\nu} \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^N XE_{i,\nu} - \sum_{i=1}^N XE_{i,\iota} \right)^2 \\ & + \left( \sum_{i=1}^N XO_{i,\delta} - \sum_{i=1}^N XO_{i,\varphi} \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^N XO_{i,\varphi} - \sum_{i=1}^N XO_{i,\gamma} \right)^2 \\ & + \left( \sum_{i=1}^N XO_{i,\gamma} - \sum_{i=1}^N XO_{i,\nu} \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^N XO_{i,\nu} - \sum_{i=1}^N XO_{i,\iota} \right)^2 \\ & + \left( \sum_{i=1}^N X\varphi_{i,\delta} - \sum_{i=1}^N X\varphi_{i,\varphi} \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^N X\varphi_{i,\varphi} - \sum_{i=1}^N X\varphi_{i,\gamma} \right)^2 \\ & + \left( \sum_{i=1}^N X\varphi_{i,\gamma} - \sum_{i=1}^N X\varphi_{i,\nu} \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^N X\varphi_{i,\nu} - \sum_{i=1}^N X\varphi_{i,\iota} \right)^2 \end{aligned} \right)$$

#### ۴ مطالعه موردی

در این قسمت، مدل پیشنهادی برای تخصیص کلاس‌های دانشکده آمار، ریاضی و رایانه در دانشگاه علامه طباطبائی، و نتایج پیاده‌سازی آن ارائه می‌شود. رشته‌های دانشجویان در دانشگاه علامه طباطبائی شامل: (الف) کلیه دانشجویان تحصیلات تکمیلی ورودی نیمسال اول در سال ۱۳۹۸ (۹۸۱) با نیازمندی گذراندن واحد درسی، (ب) کلیه دانشجویان تحصیلات تکمیلی قبل از ورودی نیمسال اول در سال ۱۳۹۸ (ماقبل ۹۸۱) در سنوات مجاز تحصیل با نیازمندی گذراندن واحد درسی، (ج) کلیه دانشجویان مقطع کارشناسی ورودی ۱۳۹۷ و ۱۳۹۸ نیازمند گذراندن واحد درسی، (د) کلیه دانشجویان تحصیلات تکمیلی در مرحله گردآوری داده‌ها و تصویب پروپوزال، (ه) کلیه دانشجویان ورودی نیمسال اول در سال ۱۳۹۹ (۹۹۱) در مقطع کارشناسی، (و) کلیه دانشجویان ورودی ورودی نیمسال اول در سال ۱۳۹۹ (۹۹۱) در مقطع ارشد و دکتری و (ز) کلیه دانشجویان ورودی سال ۱۳۹۶ و ما قبل در مقطع کارشناسی با نیازمندی گذراندن واحد درسی می‌باشد. جدول ۴ نمایی از تعداد دانشجویان دانشکده به همراه متوسط تعداد واحد درسی برای هر دانشجو به عنوان ورودی‌های مدل در قالب استفاده شده برای دانشکده آمار، ریاضی و رایانه در دانشگاه علامه طباطبائی، در کنار متغیرهای تصمیم‌گیری را نشان می‌دهد. متغیرهای تصمیم‌گیری در ستون‌های سمت چپ به روز و ساعت برگزاری کلاس است که ارزش آنها از حل مدل محاسبه خواهد شد.

جدول ۴. نام و تعداد دانشجویان رشته‌های مختلف در دانشکده آمار، ریاضی و رایانه در دانشگاه علامه طباطبائی

رسته (i)	نام رسته	تعداد کل دانشجویان $S_i$	مؤسسه تعداد واحد $S_i X U_i$	تعداد کل دانشجو-واحد $S_i X U_i$	روزهای زوج $(XE_{ij})$	روزهای فرد $(XO_{ij})$	شنبه $(4X_{ij})$
۱	کلیه دانشجویان تحصیلات تکمیلی ۹۸۱	۷۶	۶	۲۲۸	۱۷۳۰-۱۹۳۰ ۱۵۳۰-۱۷۳۰ ۱۳۳۰-۱۵۳۰ ۱۰-۱۲ ۸-۱۰	۱۷۳۰-۱۹۳۰ ۱۵۳۰-۱۷۳۰ ۱۳۳۰-۱۵۳۰ ۱۰-۱۲ ۸-۱۰	۱۷۳۰-۱۹۳۰ ۱۵۳۰-۱۷۳۰ ۱۳۳۰-۱۵۳۰ ۱۰-۱۲ ۸-۱۰
۲	کلیه دانشجویان تحصیلات تکمیلی ماقبل ۹۸۱ در سنوات مجاز تحصیل- نیازمند واحد درسی	۶۱	۳	۹۱	۱۷۳۰-۱۹۳۰ ۱۵۳۰-۱۷۳۰ ۱۳۳۰-۱۵۳۰ ۱۰-۱۲ ۸-۱۰	۱۷۳۰-۱۹۳۰ ۱۵۳۰-۱۷۳۰ ۱۳۳۰-۱۵۳۰ ۱۰-۱۲ ۸-۱۰	۱۷۳۰-۱۹۳۰ ۱۵۳۰-۱۷۳۰ ۱۳۳۰-۱۵۳۰ ۱۰-۱۲ ۸-۱۰
۳	کلیه دانشجویان مقطع کارشناسی ورودی ۹۷ و ۹۸	۶۲	۱۸	۵۵۸	۱۷۳۰-۱۹۳۰ ۱۵۳۰-۱۷۳۰ ۱۳۳۰-۱۵۳۰ ۱۰-۱۲ ۸-۱۰	۱۷۳۰-۱۹۳۰ ۱۵۳۰-۱۷۳۰ ۱۳۳۰-۱۵۳۰ ۱۰-۱۲ ۸-۱۰	۱۷۳۰-۱۹۳۰ ۱۵۳۰-۱۷۳۰ ۱۳۳۰-۱۵۳۰ ۱۰-۱۲ ۸-۱۰
۴	کلیه دانشجویان مقطع کارشناسی ورودی ۹۹۱ در	۴۵	۱۸	۴۰۵	۱۷۳۰-۱۹۳۰ ۱۵۳۰-۱۷۳۰ ۱۳۳۰-۱۵۳۰ ۱۰-۱۲ ۸-۱۰	۱۷۳۰-۱۹۳۰ ۱۵۳۰-۱۷۳۰ ۱۳۳۰-۱۵۳۰ ۱۰-۱۲ ۸-۱۰	۱۷۳۰-۱۹۳۰ ۱۵۳۰-۱۷۳۰ ۱۳۳۰-۱۵۳۰ ۱۰-۱۲ ۸-۱۰
۵	کلیه دانشجویان مقطع ارشد و دکتری	۷۸	۱۲	۴۶۸	۱۷۳۰-۱۹۳۰ ۱۵۳۰-۱۷۳۰ ۱۳۳۰-۱۵۳۰ ۱۰-۱۲ ۸-۱۰	۱۷۳۰-۱۹۳۰ ۱۵۳۰-۱۷۳۰ ۱۳۳۰-۱۵۳۰ ۱۰-۱۲ ۸-۱۰	۱۷۳۰-۱۹۳۰ ۱۵۳۰-۱۷۳۰ ۱۳۳۰-۱۵۳۰ ۱۰-۱۲ ۸-۱۰
۶	کلیه دانشجویان ورودی ۹۶ و ماقبل (مقطع کارشناسی)	۱۲۰	۱۸	۱۰۸۰	۱۷۳۰-۱۹۳۰ ۱۵۳۰-۱۷۳۰ ۱۳۳۰-۱۵۳۰ ۱۰-۱۲ ۸-۱۰	۱۷۳۰-۱۹۳۰ ۱۵۳۰-۱۷۳۰ ۱۳۳۰-۱۵۳۰ ۱۰-۱۲ ۸-۱۰	۱۷۳۰-۱۹۳۰ ۱۵۳۰-۱۷۳۰ ۱۳۳۰-۱۵۳۰ ۱۰-۱۲ ۸-۱۰

برای تعیین تعداد کلاس‌ها در دانشکده آمار، ریاضی و رایانه در دانشگاه علامه طباطبائی برای هر دو زیررسته A و B در آموزش حضوری، می‌توان از یک مدل بهینه‌سازی ریاضی به صورت برنامه‌ریزی اعداد صحیح بهره‌گیری نمود. مدل‌ها در انواع زبان‌ها و سیستم‌های برنامه‌نویسی قابل توسعه و پیاده‌سازی هستند. جهت حل مدل روی صفحه گسترده به همراه افزونه‌های<sup>۱</sup> آن‌ها تمرکز می‌کنیم. صفحات گسترده با قدرت و انعطاف‌پذیری زیاد، به عنوان ابزاری جهت توسعه نرم افزار و اجرای آسان شناخته شده است. طیف گسترده‌ای از برنامه‌های کاربردی در تجارت، مهندسی، ریاضیات و علوم را می‌توان توسط افزونه‌ها حل نمود. دلیل عمده استفاده از صفحات گسترده آن است که شامل محاسبات آماری گسترده، ابزارهای پیش‌بینی و مدل‌سازی و قابلیت‌های بانک اطلاعاتی می‌باشد [۱۴]. قابلیت‌های دیگر به مدیریت داده‌ها، کارکردها و روال‌ها بر می‌گردد. با تکامل بسته‌های صفحه گسترده، افزونه‌هایی برای ساخت و حل مدل‌های خاص توسعه داده شدند. در میان بسته‌های

<sup>1</sup> Add-in

الحاقی، بسیاری از آنها برای توسعه<sup>۱</sup> DSS ساخته شدند. این افزونه‌های مربوط به DSS شامل Solver<sup>۲</sup> و What'sBest!<sup>۳</sup> برای انجام بهینه‌سازی خطی و غیرخطی است. افزونه‌های دیگری به عنوان ابزار شبیه‌سازی به صورت رایگان یا با هزینه بسیار کمی در دسترس هستند.

یکی از روش‌های موثر در ابزار Solver در نرم افزار اکسل، روش‌های مبتنی بر گرادیان می‌باشد که شیب تابع هدف را به صورت عددی محاسبه می‌کند و می‌تواند برای بهبود یک جواب فعلی استفاده شود. در نرم افزار اکسل، روش گرادیان کاهشی تعمیم‌یافته<sup>۴</sup> استفاده شده است ([۱۵] و [۱۶]) که می‌تواند برای حل مسایل هموار غیرخطی، راه حل موثری باشد و جواب خیلی نزدیک بهینه را با اختلاف اندکی، به دست آورد. شبه کد مربوط به این روش در شکل ۱، آمده است.

**Step 1-** Set  $k=0$  and obtain a feasible solution  $XY^0$  at  $f^0$   
**Step 2-** At feasible point  $XY^k$ , partition variables  $XY$  into  $XY_N, XY_B, XY_S$   
**Step 3-** Calculate reduced gradient,  $(df/dXY_S)$   
**Step 4.** Evaluate gradient projection search direction for  $XY_S$  with quasi-Newton extension  
**Step 5-** Find  $\gamma \in (0,1]$  with  $XY_S(\gamma)$   
**Step 6-** Solve for Constraints  $(XY_S(\gamma), XY_B, XY_N) = 0$   
**Step 7-If**  $f(XY_S(\gamma), XY_B, XY_N) < f(XY_S^k, XY_B, XY_N)$  **Then**  
 $XY_S^{k+1} = XY_S(\gamma)$   
 $k = k+1$   
**Step 8- If**  $|(df/dXY_S)| < \epsilon$  **Then Stop. Else Goto Step 2.**

شکل ۱. شبه کد مربوط به روش گرادیان کاهشی تعمیم‌یافته [۱۵، ۱۶]

در این شبه کد، در گام ۱ یک جواب امکان‌پذیر مشخص و مقدار تابع هدف  $f$  محاسبه می‌گردد. در گام ۲، متغیرهای تصمیم‌گیری  $(XY)$  به سه بخش متغیرهای غیر پایه  $(XY_N)$ ، متغیرهای پایه  $(XY_B)$  و متغیرهای وابسته  $(XY_S)$  تقسیم می‌شوند. در گام ۳، مشتق تابع هدف نسبت به متغیرهای وابسته محاسبه می‌گردد. در گام ۴، جهت جستجوی گرادیان به کمک روش نیوتن توسعه‌یافته<sup>۵</sup> تعیین می‌شود. روش‌های شبه نیوتن ماتریس هیسین<sup>۶</sup> را در هر تکرار با استفاده از فقط مشتق‌های مرتبه اول تقریب می‌کنند. تقریب‌های فوق در هر تکرار با یک ماتریس رتبه پایین به‌هنگام می‌شوند. در گام ۵، یک ارزش تصادفی با توزیع یکنواخت بین صفر و یک برای پارامتر  $\gamma$  تعیین می‌شود و در گام ۶ معادله Constraints  $(XY_S(\gamma), XY_B, XY_N)$  که در آن محدودیت‌های مدل در نظر گرفته شده، حل می‌گردد. در گام ۷، مقایسه‌ای بین ارزش فعلی تابع هدف در دو مرحله متوالی انجام و در صورت یافتن جواب بهتر،  $XY_S$  جایگزین می‌شود. در گام ۸ مشتق تابع هدف محاسبه‌شده و در صورتی که قدرمطلق آن از ارزش  $\epsilon$  کم‌تر باشد، جواب نهایی پیدا شده است. در غیر آن صورت گام‌های ۲ تا ۷ بایستی تکرار گردد. جزییات بیشتر در خصوص روش گرادیان کاهشی تعمیم‌یافته در [۱۵] منعکس شده است.

<sup>1</sup> Decision Support Systems

<sup>2</sup> Frontline Systems Inc., solver.com

<sup>3</sup> A version of LINDO, from LINDO Systems, Inc., lindo.com

<sup>4</sup> Generalized Reduced Gradient method

<sup>5</sup> Quasi-Newton Extension

<sup>6</sup> Hessian Matrix

برای اجرای مدل در دانشکده آمار، ریاضی و رایانه در دانشگاه علامه طباطبائی، تعداد کلاس‌ها در این دانشکده  $NC = 9$ ، ظرفیت متوسط هر کلاس  $ACR = 30$ ، حداقل تعداد دانشجو در هر کلاس ارزش ۱۰ و حداکثر آن  $30 (LB, UB - \text{مطابق جدول ۱})$  و تعداد واحد درسی بر هر جلسه  $NUS = 2$  در نظر گرفته شد (جدول ۱). با توجه به نظرات تصمیم‌گیرندگان، تعداد ۲۵ آزمایش با پارامترهای مختلف  $\alpha, \beta, \lambda$  برای به‌دست آمدن نتیجه مطلوب، صورت گرفت. جدول ۵، ارزش تابع هدف به‌دست آمده از حل مدل توسط روش گرادیان کاهشی تعمیم‌یافته، را برای ۲۵ آزمایش با  $\epsilon = 0.0001$ ، نشان می‌دهد. مطابق اطلاعات این جدول، مدل به‌دست آمده برای ۱۷ آزمایش با ارزش‌های خاص برای پارامترها، جواب امکان‌پذیر نداشت.

شکل ۲، نتایج به‌دست آمده از حل مدل را برای ارزش تابع هدف، در دانشکده آمار ریاضی و رایانه دانشگاه علامه طباطبائی، با ارزش‌های مختلف برای پارامترهای  $\alpha, \beta, \lambda$  نشان می‌دهد. پس از حل مدل، محاسبات لازم جهت تعیین تعداد دانشجو-واحد در این دانشکده، انجام شد. شکل ۳، نتایج به‌دست آمده از حل مدل برای تعداد جلسات (سمت راست)، درصد تعداد دانشجو-واحد اضافه شده (نمودار وسط) و درصد دانشجوی اضافه‌شده، با ارزش‌های مختلف پارامترهای  $\alpha, \beta, \lambda$  را برای این دانشکده نشان می‌دهد. مطابق نتایج به‌دست آمده از شکل‌های ۲ و ۳، می‌توان مشاهدات زیر را برای اجرای مدل در دانشکده آمار، ریاضی و رایانه نتیجه گرفت:

**مشاهده-۱:** در بین آزمایشات انجام شده، بهترین نتایج به‌دست آمده برای تابع هدف با ارزش بیشتر از اجرای مدل مربوط به تنظیم پارامترها به صورت زیر

$$\alpha = 0.9, \beta = 0.25, \lambda = 0.25; \alpha = 0.9, \beta = 0.2, \lambda = 0.25; \alpha = 0.9, \beta = 0.3, \lambda = 0.3,$$

بوده و برای این سه حالت خاص از پارامترها، ارزش تابع هدف نیز در بهترین شرایط، ۳۱۰۱۳ می‌باشد.

**جدول ۵.** نتایج به‌دست آمده از حل مدل برای ارزش تابع هدف با پارامترهای مختلف (NFS=No Feasible Solution)

آزمایش	$\alpha$	$\beta$	$\lambda$	ارزش تابع هدف، رابطه (۸)
۱	۰/۸۵	۰/۲۵	۰/۲۵	۱,۳۱۲
۲	۰/۸۵	۰/۳۰	۰/۲۵	۴,۰۴۲
۳	۰/۸۵	۰/۳۰	۰/۳۰	۱۹,۸۸۵
۴	۰/۹۰	۰/۲۵	۰/۲۵	۳۱۰۱۳
۵	۰/۹۰	۰/۳۰	۰/۳۰	۳۱۰۱۳
۶	۰/۹۰	۰/۲۵	۰/۲۵	۲۷,۴۰۱
۷	۰/۸۵	۰/۲۰	۰/۲۵	۲۹,۸۳۳
۸	۰/۹۰	۰/۲۰	۰/۲۵	۳۱۰۱۳
۹	۰/۸۵	۰/۳۰	۰/۲۰	NFS
۱۰	۰/۸۵	۰/۲۵	۰/۲۰	NFS
۱۱	۰/۸۵	۰/۲۵	۰/۱۵	NFS
۱۲	۰/۸۵	۰/۲۵	۰/۱۰	NFS

NFS	۰/۲۰	۰/۲۵	۰/۹۰	۱۳
NFS	۰/۱۵	۰/۲۵	۰/۹۰	۱۴
NFS	۰/۱۰	۰/۲۵	۰/۹۰	۱۵
NFS	۰/۲۰	۰/۲۰	۰/۸۵	۱۶
NFS	۰/۱۵	۰/۲۰	۰/۸۵	۱۷
NFS	۰/۱۰	۰/۲۰	۰/۸۵	۱۸
NFS	۰/۲۰	۰/۲۰	۰/۹۰	۱۹
NFS	۰/۱۵	۰/۲۰	۰/۹۰	۲۰
NFS	۰/۱۰	۰/۲۰	۰/۹۰	۲۱
NFS	۰/۲۵	۰/۱۰	۰/۸۰	۲۲
NFS	۰/۲۰	۰/۱۰	۰/۸۰	۲۳
NFS	۰/۱۵	۰/۱۰	۰/۸۰	۲۴
NFS	۰/۱۰	۰/۱۰	۰/۸۰	۲۵

✓ **مشاهده-۲:** بدترین شرایط و در واقع کم‌ترین ارزش تابع هدف به دست آمده از اجرای مدل مربوط به تنظیم پارامترها مطابق  $\alpha = 0/15, \beta = 0/25, \lambda = 0/25$  می‌باشد. ارزش تابع هدف برای این شرایط، ۱,۳۱۲ می‌باشد.

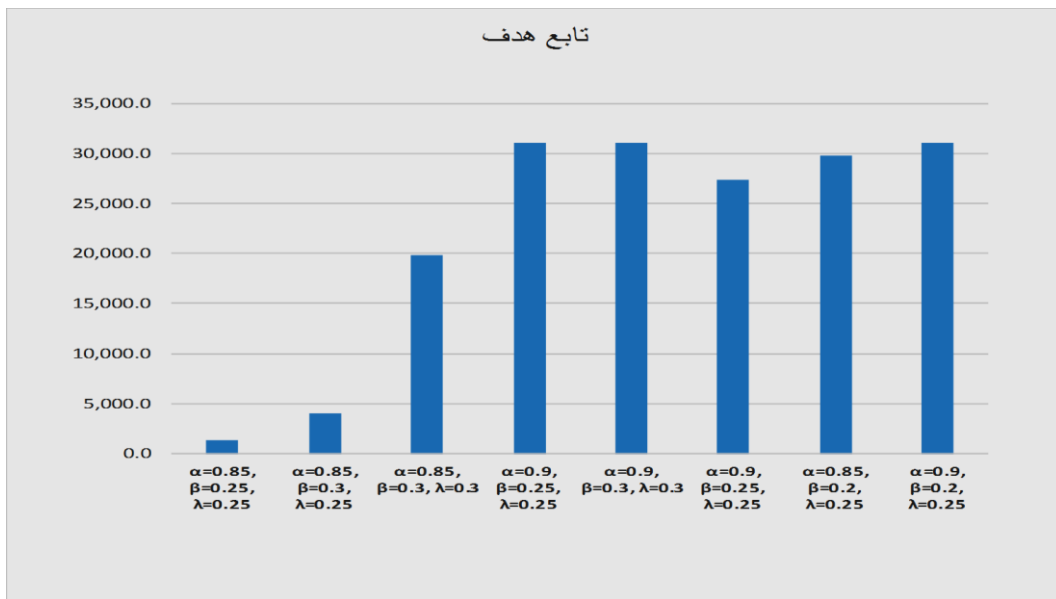
✓ **مشاهده-۳:** تعداد جلسات کلاسی برای همه جواب‌های امکان‌پذیر از اجرای مدل بین ۱۵۰ و ۱۵۲ می‌باشد. بر این اساس، تعداد متوسط جلسات در طول ۵ روز هفته، حداقل ۳۰ جلسه و حداکثر ۳۱ جلسه خواهد بود.

✓ **مشاهده-۴:** کم‌ترین درصد اضافه دانشجو در تعیین کلاس‌های دانشکده، با مقادیر

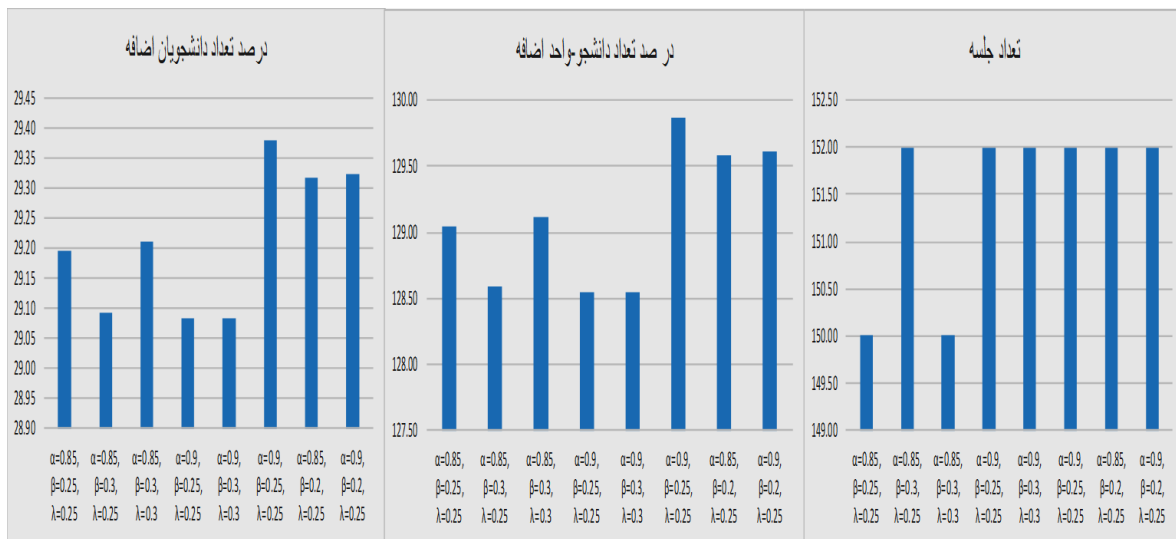
$$\alpha = 0/9, \beta = 0/25, \lambda = 0/25; \alpha = 0/9, \beta = 0/3, \lambda = 0/3$$

می‌باشد که ارزش‌های یکسانی برابر ۲۹/۰۸ درصد است.

**مشاهده-۵:** بیشترین درصد اضافه دانشجو در تعیین کلاس‌های دانشکده، با ارزش پارامترها به صورت  $\alpha = 0/9, \beta = 0/25, \lambda = 0/25$  می‌باشد که ارزش برابر ۲۹/۳۸ درصد است.



شکل ۲. نتایج به دست آمده از حل مدل برای تابع هدف با ارزش‌های مختلف پارامترهای  $\alpha, \beta, \lambda$



شکل ۳. نتایج به دست آمده از حل مدل برای تعداد جلسات (سمت راست)، درصد تعداد دانشجو-واحد اضافه شده (نمودار وسط) و درصد

دانشجوی اضافه شده، با ارزش‌های مختلف پارامترهای  $\alpha, \beta, \lambda$

بهترین نتایج به دست آمده برای تابع هدف با ارزش بیشتر، با مقادیر

$$\alpha = 0.9, \beta = 0.25, \lambda = 0.25; \alpha = 0.9, \beta = 0.2, \lambda = 0.25$$

و همچنین  $\alpha = 0.9, \beta = 0.3, \lambda = 0.3$  می‌باشد که در جدول ۶ منعکس شده است. بر اساس اطلاعات این

جدول، می‌توان مشاهدات زیر را نتیجه‌گیری نمود:

✓ **مشاهده-۶:** ارزش  $\alpha = 0/9$  برای حداکثر تعداد کلاس‌ها در ۴ روز اول هفته و همچنین ۴ جلسه اول در هر روز اهمیت بسزایی دارد. دلیل این اهمیت، به ایجاد ارزش بیشتر برای تابع هدف، و در واقع به توزیع حداکثری تعداد کلاس‌ها در این ایام برمی‌گردد.

✓ **مشاهده-۷:** دانشجویان ورودی ۹۶ و ماقبل (مقطع کارشناسی)، بیشترین تعداد دانشجو-واحد را در ایام هفته خواهند داشت. دلیل عمده این افزایش ناشی از تعداد زیاد دانشجویان برای این رشته می‌باشد.

✓ **مشاهده-۸:** توزیع ارزش دانشجو-واحد در طول ساعات آموزشی برای ایام روزهای کاری در هفته تقریباً به صورت یکسانی، با ارزش‌های حدود ۲۰ دانشجو-واحد، انجام شده است. ارزشی ۲۰ به ظرفیت حداقل تعداد دانشجو (ارزش ۱۰) و تعداد واحد درسی برای هر جلسه (ارزش ۲) برمی‌گردد.

**جدول ۶.** نتایج به‌دست آمده از بهترین آزمایش (ماکزیمم تابع هدف) برای تعیین کلاس‌ها در دانشکده آمار، ریاضی و رایانه دانشگاه علامه طباطبائی

رسته (i)	نام رسته	S	تعداد کل دانشجویان U <sub>j</sub>	مؤسسه تعداد واحد S × U <sub>j</sub>	تعداد کل دانشجو-واحد														
					روزهای زوج (XE <sub>ij</sub> )			روزهای فرد (XO <sub>ij</sub> )			شنبه (۴X <sub>ij</sub> )								
۱	کلیه دانشجویان تحصیلات تکمیلی ۹۸۱ کلیه دانشجویان تحصیلات تکمیلی ۹۸۱	۷۶	۶	۲۲۸	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰		
					۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	
					۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰
					۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰
					۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰
					۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰
					۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰
					۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰
					۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰
					۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰
					۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰
					۲	ماقبل ۹۸۱ در سنوات مجاز تحصیل - نیازمند واحد درسی کلیه دانشجویان	۶۱	۳	۹۱	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰
۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰						۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰		
۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰						۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	
۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰						۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	
۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰						۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	
۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰						۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	
۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰						۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	
۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰						۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	
۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰						۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	
۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰						۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	
۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰						۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	
۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰						۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	
۳	مقطع کارشناسی ورودی ۹۷ و ۹۸	۶۲	۱۸	۵۵۸	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱			
					۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱		
					۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱		
					۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱		
					۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱		
					۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱		
					۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱		
					۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱		
					۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱		
					۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱		
					۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱		
					۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱		

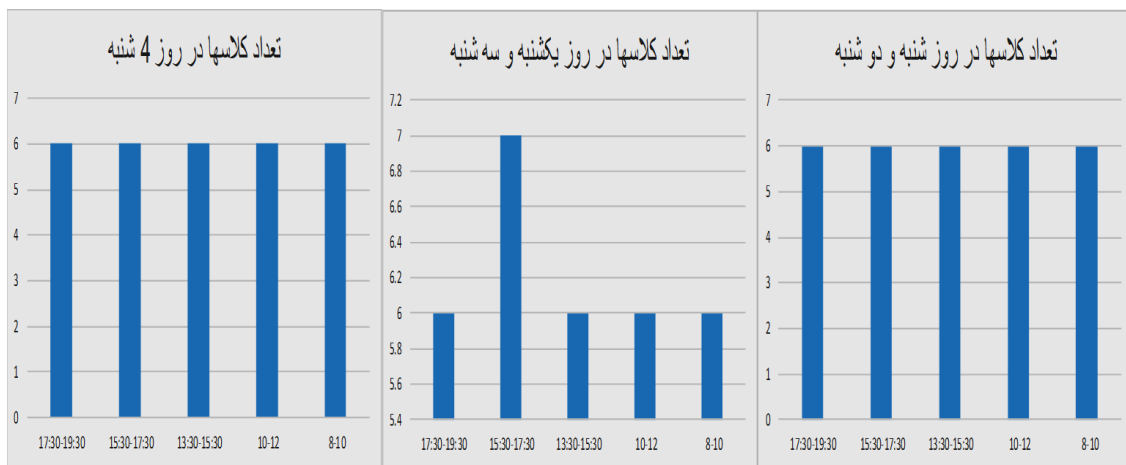


✓ **مشاهده-۹:** تعداد دانشجویان در روزهای زوج برای ۴ جلسه اول در این روزها، بیشتر از تعداد دانشجویان در ساعات پایانی (بین ۱۷:۳۰-۱۹:۳۰) می‌باشد. این تعداد برابر ۷۵ دانشجو می‌باشد که با توجه به توزیع آنها در ۷ کلاس فیزیکی و حدود ۱۰ دانشجو در هر کلاس، اجرای پروتکل‌های بهداشتی میسر خواهد بود.

✓ **مشاهده-۱۰:** تعداد دانشجویان در روزهای فرد و همچنین در روز چهارشنبه برای ساعت بین ۱۵:۳۰-۱۷:۳۰ در این روزها، بیشتر از تعداد دانشجویان در بقیه ساعات می‌باشد. این تعداد به ترتیب برابر ۹۰ و ۷۵ دانشجو می‌باشد که تنها برای یک نوبت به حد ماکزیمم خود می‌رسد و با توجه به توزیع آنها در ۷ کلاس فیزیکی، اندکی بیش از ۱۰ دانشجو در هر کلاس، خواهد بود.

نتایج به‌دست آمده از حل مدل در بهترین شرایط استفاده از فضای آموزشی برای دانشکده آمار، ریاضی و رایانه دانشگاه علامه طباطبائی و در مجموع، تعداد کلاسها در روزهای زوج، فرد و چهارشنبه (به ترتیب نمودار سمت راست، نمودار وسط و نمودار سمت چپ) برای ساعات مختلف روز در شکل ۵، نشان داده شده است. بر اساس اطلاعات شکل ۴، می‌توان مشاهدات زیر را نتیجه‌گیری نمود:

✓ **مشاهده-۱۱:** حداکثر تعداد کلاس‌ها در روزهای فرد و بین ساعت ۱۷:۳۰-۱۹:۳۰ اتفاق می‌افتد. این تعداد برابر ۷ می‌باشد و نشان می‌دهد که از تمامی ۹ کلاس موجود در دانشکده آمار، ریاضی و رایانه، استفاده نخواهد شد. بنابراین، اجرای پروتکل‌های بهداشتی میسر خواهد بود.



شکل ۵. نتایج به‌دست آمده از حل مدل برای مجموع تعداد کلاس‌ها در روزهای زوج، فرد و چهارشنبه (به ترتیب نمودار سمت راست، نمودار وسط و نمودار سمت چپ) برای ساعات مختلف روز در دانشکده آمار، ریاضی و رایانه دانشگاه علامه طباطبائی

## ۵ خلاصه و جمع بندی

در این تحقیق، برنامه‌ریزی نیمسال آینده در دانشگاه‌ها و با تمرکز بیشتری روی آموزش مجازی مورد مطالعه قرار گرفته است. این برنامه باید به صورت دو شیوه شامل آموزش مجازی و آموزش حضوری، به اجرا درآید. در آموزش حضوری با نیازمندی‌های فضای آموزشی، دانشجویان به دو زیرسته (A) و (B) تقسیم شدند به گونه‌ای

که اجرای پروتکل‌های بهداشتی در دانشکده و کلاس‌ها امکان‌پذیر گردد. در این مقاله، برای تعیین تعداد دانشجویان در کلاس‌ها برای هر دو زیررسته (A) و (B) در آموزش حضوری، یک مدل بهینه‌سازی ریاضی به صورت برنامه‌ریزی غیرخطی پیشنهاد شده است که شامل ۹۰ متغیر تصمیم‌گیری می‌باشد. در تابع هدف مدل، توزیع دانشجویان در فضای آموزشی و کلاس‌ها به گونه‌ای در نظر گرفته شد که حداکثر پراکندگی ممکن را، به دلیل جلوگیری از شیوع بیماری کرونا داشته باشد. این مدل برای تخصیص کلاس‌ها در فضای آموزشی در دانشکده آمار، ریاضی و رایانه دانشگاه علامه طباطبائی، پیاده‌سازی شده و نتایج به دست آمده از اجرای مدل، چشم انداز روشن و مثبتی برای تصمیم‌گیرندگان در دانشگاه علامه طباطبائی به همراه داشته است. برای ادامه این تحقیق، تصمیم بر آن است که مدل‌های بهینه‌سازی دیگری به تفکیک گروه‌های آموزشی، با توجه به محدودیت‌های آنها طراحی و سپس اجرا گردد.

### تشکر و سپاسگزاری

در راستای انجام این تحقیق، از سرکار خانم الهام سلیمی (مدیر آموزش دانشکده آمار، ریاضی و رایانه دانشگاه علامه طباطبائی) که داده‌های مربوط به اطلاعات ورودی مدل را فراهم کردند، تشکر و سپاسگزاری می‌شود.

### منابع

- [1] Tavakoli, M.M, Shirviyehzad H., Hosseinzadeh Lotfi F., Najafi E., (2018). Introducing a new mathematical model for scheduling university course schedules based on the quality of course presentation. *Operations research and its applications*, 15 (3), 45-66.
- [2] Mansouri, Ehsan, Fazli, Leila. (2020), providing a model for evaluating the quality of performance of higher education centers. *Operations research and its applications*, 17 (3), PP. 23-43.
- [3] Al-Rabiaah, A., Temsah, M.-H., Al-Eyadhy, A.A., Al-Saadi, B., Somily, A.M. (2020), Middle East Respiratory Syndrome-Corona Virus (MERS-CoV) associated stress among medical students at a university teaching hospital in Saudi Arabia, *Journal of Infection and Public Health*, 13(5), 687-691.
- [4] Ashokka, B., Ong, S.Y., Tay, K.H., Gee, C.F., Samarasekera, D.D. (2020), Coordinated responses of academic medical centers to pandemics: Sustaining medical education during Covid-19, *Medical Teacher*, Article in Press
- [5] Chimmula, V.K.R., Zhang, L. (2020), Time series forecasting of Covid-19 transmission in Canada using LSTM networks, *Chaos, Solitons and Fractals* 135,109864.
- [6] Khodabakhshi-koolae A., (2020), living in Home Quarantine: Analyzing Psychological Experiences of College Students during Covid-19 pandemic, *Journal of Military Medicine*, 22(2), 130-138.
- [7] Mesiono (2020), E-learning management of state Islamic university of north Sumatera in pandemic Covid-19, *International Journal of Advanced Science and Technology*, 29(5), 9573-9582.
- [8] Peyravi, M., Ahmadi Marzaleh, M., Shamspour, N., Soltani, A. (2020), Public Education and Electronic Awareness of the New Coronavirus (Covid-19): Experiences from Iran, *Disaster Medicine and Public Health Preparednes*.
- [9] Rachmadtullah, R., Subandowo, M., Rasmitadila, Samsudin, A., Nurtanto, M. (2020), Use of blended learning with moodle: Study effectiveness in elementary school teacher education students during the Covid-19 pandemic, *International Journal of Advanced Science and Technology*, 29(7), 3272-3277.
- [10] Raja Murugadoss, J., Krishna Kishore, K. (2020), Effectiveness of E-learning in rural India and significance of self-directed learning, *International Journal of Advanced Science and Technology*, 29(6), 6015-6020.
- [11] Schreck, J., Baretton, G., Schirmacher, P., (2020), Situation of the German university pathologies under the constraints of the corona pandemic—evaluation of a first representative survey | [Situation

- der Deutschen Universitätspathologien unter den Einschränkungen der Corona-Pandemie – Auswertung einer ersten repräsentativen Umfrage], Pathologe, Article in Press.
- [12] European Commission/EACEA/Eurydice (2019), The Organization of the Academic Year in Europe –2019/20. Eurydice Facts and Figures. Luxembourg: Publications Office of the European Union, available at [https://eacea.ec.europa.eu/national-policies/eurydice/sites/eurydice/files/academic\\_calendars\\_19\\_20\\_en\\_.pdf](https://eacea.ec.europa.eu/national-policies/eurydice/sites/eurydice/files/academic_calendars_19_20_en_.pdf), Last check: 22 Dec 2020.
- [13] Eiselt, H. A. (2019), Sandblom, Carl Louis, Nonlinear Optimization Methods and Applications, International Series in Operations Research & Management Science, Springer.
- [14] Frontline Solvers Excel Product Overview, (2020), Analytic Solver - Our All-in-One Solution, <https://www.solver.com/products-overview>, last accessed: 19 June 2020.
- [15] Rudd K. (2017), A Generalized Reduced Gradient Method for the Optimal Control of Very-Large-Scale Robotic Systems, IEEE Transactions On Robotics, 33 (5), 1226-1232.
- [16] Baker K., (2006) Optimization Modeling with Spreadsheets. Duxbury.