مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال نوزدهم، شماره چهارم (پیاپی ۷۵)،زمستان ۰۱، ص ص ۱۵۸-۱۳۷
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

ساختار یک کلاس از روش‌های دوگامی باحافظه برای حل معادلات غیرخطی

ولی ترکاشوند[*،۱،۲]
۱- دکتری، دانشگاه فرهنگیان، مرکز آموزش عالی شهید بهشتی، تهران، ایران
۲- دکتری، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران، ایران

رسید مقاله: ۱۵ دی ۱۴۰۰
پذیرش مقاله: ۱۸ تیر ۱۴۰۱

چکیده
در این مقاله یک روش دوگامی بهین مرتبه ۴ با دوپارامتر خودشتابگر را برای حل معادلات غیرخطی ساخته‌ایم. در ادامه نیز با تقریب پارامترهای خودشتابگر یک کلاس از روش‌های جدید باحافظه که کاراترین آنها مرتبه‌ی همگرایی ۶/۳۷ یعنی با ۵۹/۳۷ درصد بهبود مرتبه‌ی همگرایی را دارد، مطرح شده است. مزیت دیگر این روش‌های جدید این است که نیازی به محاسبه مشتق ندارند. با استفاده از این روش‌های شبه استیفنسن معادلات غیرخطی دارای ریشه ساده، با تقریب اولیه‌ی مناسب ریشه حل شده است تا درستی قضایای مطرح‌شده را با مثال‌های عددی نشان دهیم.

کلمات کلیدی: معادلات غیرخطی، روش باحافظه، پارامتر خودشتابگر، درونیابی نیوتن.

۱ مقدمه
روش تکراری مرتبه دوم نیوتن[۱] معروف‌ترین روش برای حل معادلات غیرخطی است. اما نقطه ضعف آن محاسبه مشتق می‌باشد. این روش مشهور و معادله خطایش به صورت زیر می‌باشد:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = ۰,۱,۲,.... \qquad (۱)$$

ومعادله خطا

$$e_{k+1} = c_۲ e_k^۲ + o(e_k^۳),\ c_۲ = \frac{f''(\alpha)}{۲f'(\alpha)}.$$

می‌باشد. برای حل مشکل محاسبه مشتق، استیفنسن[۱] [۲] درسال ۱۹۳۳، مشتق مرتبه اول تابع را با تفاضل تقسیم‌شده مرتبه اول نیوتن تقریب زد:

[*] عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: torkashvand1978@gmail.com

[DOI: 10.52547/jamlu.19.4.137]

$$f'(x_k) \approx f[x_k, w_k] = \frac{f(x_k) - f(w_k)}{x_k - w_k}.$$

و روش مرتبه دو خود را به‌صورت زیر ارایه نمود:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{f(x_k)}{f[x_k, w_k]}, w_k = x_k + f(x_k), \quad k = ۰,۱,۲,.... \tag{۲}$$

معادله خطای این روش بدون حافظه نیز به‌صورت زیر می‌باشد:

$$e_{k+1} = (۱ + f'(\alpha))c_۲ e_k^۲ + o(e_k^۳), \quad c_۲ = \frac{f''(\alpha)}{۲f'(\alpha)},$$

شاخص کارایی هر دو روش فوق برابر است با

$$\sqrt{۲} = ۱/۴۱۴$$

در ادامه حل معادلات غیرخطی روش‌های دوگامی مطرح شد. ۲۷ سال بعد، درسال ۱۹۶۰ مشهورترین روش دوگامی بدون حافظه را استروفسکی[۲] ارایه نمود [۳]. این روش به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} y_k = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}, k = ۰,۱,۲,..., \\ x_{k+1} = y_k - \dfrac{f(y_k)}{f'(x_k)} \times \dfrac{f(x_k)}{f(x_k) - ۲f(y_k)}. \end{cases} \tag{۳}$$

این روش دارای مرتبه همگرایی ۴ و معادله خطای آن به‌صورت زیر است:

$$e_{k+1} = \left(c_۲^۳ - c_۲ c_۳\right) e_k^۴ + O\left(e_k^۵\right), \quad c_k = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!\, f'(\alpha)}, k = ۲,۳,....$$

۶ سال بعد از استروفسکی، جارات[۳] [۴] روش بدون حافظه دوگامی خود را به‌صورت زیر ارایه نمود:

$$\begin{cases} y_k = x_k - \dfrac{۱}{۲}\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}, k = ۰,۱,۲,..., \\ x_{k+1} = y_k - \dfrac{f(y_k)}{f'(x_k) - ۳f\left(x_k - ۳\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right)}. \end{cases} \tag{۴}$$

این روش بهین دارای مرتبه همگرایی ۴ و معادله خطای آن به‌صورت زیر است:

$$e_{k+1} = \left(c_۲^۳ - c_۲ c_۳ + \frac{c_۴}{۹}\right) e_k^۴ + O\left(e_k^۵\right).$$

در سال ۱۹۷۳، کینگ[۴] [۵] خانواده تک پارامتری خود را که روش استروفسکی نیز جزء آنهاست، به‌صورت زیر ارایه نمود:

[1] J.F. Steffensen
[2] A.M.Osrowski
[3] P.Jarrat
[4] R.F.King

[DOI: 10.52547/jamlu.19.4.137]

$$\begin{cases} y_k = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}, k = 0,1,2,\ldots, \\ x_{k+1} = y_k - \dfrac{f(y_k)}{f'(x_k)} \times \dfrac{f(x_k) + \beta f(y_k)}{f(x_k) + (\beta - 2) f(y_k)}. \end{cases} \quad (5)$$

این روش بهین دارای مرتبه همگرایی ۴ است و معادله خطای آن بصورت زیر می باشد :

$$e_{k+1} = \left((1+2\beta)c_2^3 - c_3c_2\right)e_k^4 + O\left(e_k^5\right).$$

در سال ۲۰۰۸، چان[1] [۶] روش مرتبه چهار زیر را با استفاده از ایده تابع وزن ارایه نمود:

$$\begin{cases} y_k = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}, t_k = \dfrac{f(y_k)}{f(x_k)} \ , k = 0,1,2,\ldots, \\ h(t_k) = h(0) + h'(0) \times t_k \ , h(0) = 1, h'(0) = -2, \left|h''(0)\right| < \infty, \\ x_{k+1} = y_k - \dfrac{f(y_k)}{f'(x_k) \times h(t_k)}. \end{cases} \quad (6)$$

این روش نیز دارای مرتبه همگرایی ۴ ومعادله خطای آن به‌صورت زیر است:

$$e_{k+1} = \left(c_2^3 - c_3c_2\right)e_k^4 + O\left(e_k^5\right).$$

در سال ۲۰۱۰ نیز لیو[2] و همکاران [۷] روش مرتبه چهار زیر را ارایه نمودند:

$$\begin{cases} y_k = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f[x_k, w_k]}, w_k = x_k + f(x_k), k = 0,1,2,\ldots, \\ x_{k+1} = y_k - \dfrac{f[x_k, y_k] - f[y_k, w_k] + f[x_k, w_k]}{f[x_k, y_k]^2} f(y_k). \end{cases} \quad (7)$$

شاخص کارایی روش‌های بهین مرتبه چهار فوق برابر است با [۳]:

مرتبه همگرایی به توان معکوس تعداد ارزیابی تابع $4^{\frac{1}{3}} = 1/5874$

افراد دیگری نیز روش‌های دوگامی بدون حافظه را برای حل معادلات غیرخطی به‌کار بردند. از جمله می‌توان به کانگ[3] - تراب[4] [۸] ، چان[۱۰و۹]، کنسال[5] و همکاران[۱۱]، کوردرو[6] و همکاران [۱۳، ۱۲] ، سلیمانی و همکاران[۱۴] و... اشاره نمود.

در ادامه این مقاله در بخش بعدی به بیان مساله پرداخته‌ایم و نیز در بخش سوم روشهای دوگامی بهین بدون حافظه را با دو پارامتر خودشتابگر معرفی خواهیم نمود. سپس در بخش چهارم روش‌های جدید باحافظه را با ۵۹/۳۷ درصد بهبود مرتبه همگرایی معرفی خواهیم نمود. در ادامه نیز در بخش پنج، صحت قضایای مطرح‌شده در بخش دو و سه را با ذکر مثال‌های عددی خواهیم دید. در پایان نیز نتیجه‌گیری را ملاحظه خواهیم کرد.

[1] C.Chun
[2] Zhongli Liu
[3] H.T.Kung
[4] J.F.Traub
[5] M.Kansal
[6] A.Cordero

[DOI: 10.52547/jamlu.19.4.137]

۲ بیان مساله

در این پژوهش روش‌های با حافظه و بدون حافظه برای حل معادلات غیرخطی مورد توجه قرار گرفته است. از آنجا که بسیاری ازمعادلات غیرخطی دارای ریشه دقیق نمی‌باشند، برای حل این معادلات از روش‌های تکراری می‌توان استفاده نمود. این روش‌ها نوع قدیمی‌ترشان، روش‌های بدون حافظه هستند که شاخص کارایی پایین‌تری دارند. از این رو محققین و پژوهشگران این حوزه روش‌های با حافظه را که دارای کارایی بالاتری هستند، برای حل معادلات غیرخطی به‌کار گرفته‌اند. در این کار نیز معادلات غیرخطی با استفاده از این روش حل شده است. برای این منظور ابتدا روش بدون حافظه مطرح‌شده را با ورود پارامترهای خودشتابگر به یک روش با حافظه با کارایی بالاتر و نیز بهبود مرتبه همگرایی تبدیل کرده‌ایم و در ادامه نیز پارامتر و یا پارامترهای داده‌شده را تقریب زده‌ایم و به این ترتیب بدون افزایش هزینه محاسبات کارآیی روش را ارتقا داده‌ایم.

۳ روش‌های بدون حافظه

روش معرفی‌شده لیو و همکاران [۷] که یک روش بدون حافظه است را می‌توان با ورود یک پارامتر خود شتابگر به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{cases} y_k = x_k - \dfrac{f\left(x_k\right)}{f\left[x_k, w_k\right]}, w_k = x_k + \gamma f\left(x_k\right),\ k = ۰,۱,۲,\ldots, \\ x_{k+۱} = y_k - \dfrac{f\left[x_k, y_k\right] - f\left[y_k, w_k\right] + f\left[x_k, w_k\right]}{f\left[x_k, y_k\right]^{۲}} f\left(y_k\right). \end{cases} \tag{۸}$$

این روش با سه فراخوانی $f(x_k), f(w_k), f(y_k)$ مرتبه همگرایی چهار دارد، از این‌رو طبق حدس کانگ-تراب بهین می‌باشد. قضیه زیر خطای روش بهین دو گامی بدون حافظه (۸) را مشخص می‌کند.

$$e_{n+۱} = \left(۱+\gamma f'(\alpha)\right) c_۲ (\left(۲+\gamma f'(\alpha)\right) c_۲^۲ - \left(۱+\gamma f'(\alpha)\right) c_۳ e_n^۴ + O(e_n^۵). \tag{۹}$$

که $c_n = \dfrac{f^{(n)}(\alpha)}{n!\, f'(\alpha)}, n = ۲,۳,\ldots$.

قضیه ۳-۱

فرض کنید $\alpha \in I$ریشه ساده تابع به اندازه کافی دیفرانسیل پذیر $f : I \subseteq R \to R$ روی بازه‌ی باز I باشد. اگر $x_۰$ به اندازه کافی به ریشه α نزدیک باشد، آنگاه روش (۸) دارای حداقل مرتبه همگرایی ۴ بوده و در معادله خطای (۹) صدق می‌کند.

برهان: فرض کنید $e_k = x_k - \alpha, e_{k+۱} = x_{k+۱} - \alpha, e_{k,y} = y_k - \alpha, e_{k,w} = w_k - \alpha$.

با استفاده از بسط تیلورتابع f حول نقطه‌ی $x_n = \alpha$ وبا فرض $c_k = \dfrac{f^{(k)}(\alpha)}{k!\, f'(\alpha)}$ داریم:

$$f\left(x_k\right) = f'(\alpha)\left[e_k + c_۲ e_k^۲ + c_۳ e_k^۳ + c_۴ e_k^۴ + O\left(e_k^۴\right)\right] \tag{۱۰}$$

[DOI: 10.52547/jamlu.19.4.137]

$$e_{k,w}=e_k+\gamma f(e_k)=e_k+\gamma f'(\alpha)e_k\left(1+c_2e_k+c_3e_k^2+c_4e_k^3\right)+O(e_k^4) \qquad (11)$$

از رابطه‌ی (۱۰) و رابطه‌ی (۱۱) نتیجه می‌شود:

$$f(e_{k,w})=f'(\alpha)(e_k+f'(\alpha)\gamma\left(e_k+e_k^2c_2+e_k^3c_3+e_k^4c_4\right)+c_2\left(e_k+f'(\alpha)\gamma\left(e_k+e_k^2c_2+e_k^3c_3+e_k^4c_4\right)\right)^2$$
$$+c_3\left(e_k+f'(\alpha)\gamma\left(e+e^2c_2+e^3c_3+e_k^4c_4\right)\right)^3+c_4\left(e_k+f'(\alpha)\gamma\left(e_k+e_k^2c_2+e_k^3c_3+e_k^4c_4\right)\right)^4$$
(۱۲)

از این رو می‌توان $f[x_k,w_k]$ را با استفاده از روابط (۱۰) و (۱۲) به‌صورت زیر نتیجه گرفت:

$$f[x_k,w_k]=-\frac{1}{e_kf'(\alpha)\gamma\left(1+e_kc_2+e_k^2c_3+e_k^3c_4\right)}(e_kf'(\alpha)\left(1+e_kc_2+e_k^2c_3+e_k^3c_4\right)$$
$$f'(\alpha)(e_k+e_kf'(\alpha)\gamma\left(1+e_kc_2+e_k^2c_3+e_k^3c_4\right)+c_2\left(e_k+e_kf'(\alpha)\gamma\left(1+e_kc_2+e_k^2c_3+e_k^3c_4\right)\right)^2)$$
$$+c_3\left(e_k+e_kf'(\alpha)\gamma\left(1+e_kc_2+e_k^2c_3+e_k^3c_4\right)\right)^3+c_4\left(e_k+e_kf'(\alpha)\gamma\left(1+e_kc_2+e_k^2c_3+e_k^3c_4\right)\right)^4)$$
(۱۳)

اکنون با تقسیم رابطه (۱۰) بر رابطه (۱۳) و همچنین معادله خطای نتیجه می‌شود:

$$e_{k,y}=\left(1+f'(\alpha)\gamma\right)c_2e_k^2+\left(-\left(2+2f'(\alpha)\lambda+f'(\alpha)^2\gamma^2\right)c_2^2+\left(2+3f'(\alpha)\gamma+f'(\alpha)^2\gamma^2\right)c_3\right)e_k^3+$$
$$(\left(4+5f'(\alpha)\gamma+3f'(\alpha)^2\gamma^2+f'(\alpha)^3\gamma^3\right)c_2^3-\left(7+10f'(\alpha)\gamma+7f'(\alpha)^2\gamma^2+2f'(\alpha)^3\gamma^3\right)c_2c_3$$
$$+\left(3+6f'(\alpha)\gamma+4f'(\alpha)^2\gamma^2+f'(\alpha)^3\gamma^3\right)c_4)e_k^4+O(e_k^5)$$
(۱۴)

از رابطه (۱۴) می‌توان $f(y_k)$ را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$f(y_k)=f'(\alpha)\left(1+f'(\alpha)\gamma\right)c_2e_k^2+$$
$$f'(\alpha)\left(-2c_2^2-2f'(\alpha)\gamma c_2^2+f'(\alpha)^2\gamma^2c_2^2+2c_3+3f'(\alpha)\gamma c_3+f'(\alpha)^2\gamma^2c_3\right)e_k^3+$$
$$f'(\alpha)(4c_2^3+5f'(\alpha)\gamma c_2^3+3c_2^3+f'(\alpha)^3\gamma^3c_2^3+c_2\left(c_2+f'(\alpha)\gamma c_2\right)^2-7c_2c_3-10f'(\alpha)\gamma c_2c_3$$
$$-7f'(\alpha)^2\gamma^2c_2c_3-2f'(\alpha)^3\gamma^3c_2c_3+3c_4+6f'(\alpha)\gamma c_4+4f'(\alpha)^2\gamma^2c_4+f'(\alpha)^3\gamma^3c_4)e_k^4+O(e_k^5)$$
(۱۵)

از روابط (۱۰)، (۱۱)، (۱۲)، (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) می‌توان نتایج زیر را به‌دست آورد:

$$e_{k,y}=\left(1+f'(\alpha)\gamma\right)c_2e_k^2+\left(-\left(2+2f'(\alpha)\lambda+f'(\alpha)^2\gamma^2\right)c_2^2+\left(2+3f'(\alpha)\gamma+f'(\alpha)^2\gamma^2\right)c_3\right)e_k^3+$$
$$(\left(4+5f'(\alpha)\gamma+3f'(\alpha)^2\gamma^2+f'(\alpha)^3\gamma^3\right)c_2^3-\left(7+10f'(\alpha)\gamma+7f'(\alpha)^2\gamma^2+2f'(\alpha)^3\gamma^3\right)c_2c_3$$
$$+\left(3+6f'(\alpha)\gamma+4f'(\alpha)^2\gamma^2+f'(\alpha)^3\gamma^3\right)c_4)e_k^4+O(e_k^5)$$
(۱۶)

[DOI: 10.52547/jamlu.19.4.137]

$$f[y_k,w_k]=f'(\alpha)+(1+f'(\alpha)\gamma)c_2e_k+f'(\alpha)\Big(\big(1+2f'(\alpha)\gamma\big)c_2^2+\big(1+f'(\alpha)\gamma\big)^2c_3\Big)e_k^2+$$
$$f'(\alpha)\Big(-\big(2+f'(\alpha)\gamma\big(2+f'(\alpha)\gamma\big)\big)c_2^3+\big(1+2f'(\alpha)\gamma\big)\big(3+2f'(\alpha)\gamma\big)c_2c_3+\big(1+f'(\alpha)\gamma\big)^3c_4\Big)e_k^3+$$
$$f'(\alpha)(\big(4+f'(\alpha)\gamma\big(5+f'(\alpha)\gamma\big(3+f'(\alpha)\gamma\big)\big)\big)c_2^4-\big(8+f'(\alpha)\gamma\big)\big(11+f'(\alpha)\gamma\big(7+3f'(\alpha)\gamma\big)\big)c_2^2c_3+$$
$$\big(1+f'(\alpha)\gamma\big)\big(2+f'(\alpha)\gamma\big)\big(5+f'(\alpha)\gamma\big)c_3^2+\big(4+f'(\alpha)\gamma\big(13+f'(\alpha)\gamma\big)\big)c_2c_4+\big(1+f'(\alpha)\gamma\big)^4c_5)e_k^4+O(e_k^5)$$
(۱۷)

در نهایت با استفاده از روابط (۱۰) الی (۱۷) خواهیم داشت:

$$e_{n+1}=\big(1+\gamma f'(\alpha)\big)c_2(\big(2+\gamma f'(\alpha)\big)c_2^2-\big(1+\gamma f'(\alpha)\big)c_3e_n^4+O(e_n^5).$$

و به این ترتیب اثبات قضیه به پایان می‌رسد. □

روش لیو و همکاران را می‌توان با ورود دو پارامتر خودشتابگر به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{cases} y_k=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f[x_k,w_k]+\beta f(w_k)},\ w_k=x_k+\gamma f(x_k), \\ x_{k+1}=y_k-\dfrac{f[x_k,y_k]-f[y_k,w_k]+f[x_k,w_k]}{f[x_k,y_k]^2}f(y_k),\ k=0,1,2,\dots \end{cases} \tag{۱۸}$$

قضیه ۲-۲ معادله خطای روش بهین دو گامی بدون حافظه (۱۸) را نشان می‌دهد.

قضیه ۳-۲

فرض کنید $\alpha\in I$ریشه ساده تابع به اندازه کافی دیفرانسیل پذیر $f:\ I\subseteq R\to R$ روی بازه‌ی باز I باشد. اگر x_0 به اندازه کافی به ریشه α نزدیک باشد، آنگاه روش (۱۰) دارای حداقل مرتبه همگرایی ۴ بوده و در معادله خطای زیر صدق می‌کند:

$$e_{n+1}=\big(1+\gamma f'(\alpha)\big)\Big(\beta+c_2)(\beta\big(1+\gamma f'(\alpha)\big)c_2+\Big(2+\gamma f'(\alpha)\Big)c_2^2-\big(1+\gamma f'(\alpha)\big)c_3e_n^4+O(e_n^5\Big)$$
(۱۹)

اثبات: روش اثبات مشابه قضیه قبل می‌باشد. با استفاده از برنامه زیر که با استفاده از نرم افزار Mathematica نوشته شده است، قضیه اثبات می‌شود:

$$Clear["Global'*"]$$
$$f[e\_]=fla*(e+c_2e_n^2+c_3e_n^3+c_4e_n^4);$$
$$ew=e+\gamma[f[e],\{e,0,4\}];$$
$$ey=e-Series[\frac{f[e]}{f[e,ew]+\beta f[ew]},\{e,0,4\}];$$
$$e1=ey-Series[\frac{(f[e,ey]-f[ey,ew]+f[e,ew])}{f[e,ey]^2}f[ey],\{e,0,4\}]//Fullsimplify$$

خروجی این برنامه به‌صورت زیر است:

[DOI: 10.52547/jamlu.19.4.137]

$$e_{n+1}=\left(1+\gamma f'(\alpha)\right)\left(\beta+c_2)(\beta\left(1+\gamma f'(\alpha)\right)c_2+\left(2+\gamma f'(\alpha)\right)c_2^2-\left(1+\gamma f'(\alpha)\right)c_3 e_n^4+O(e_n^5)\right)$$

و به این ترتیب اثبات این قضیه نیزبه پایان می‌رسد. □

در ادامه این مقاله در بخش سوم روش‌های با حافظه را مورد بررسی قرار خواهیم داد. لازم به ذکر است روش‌های با حافظه را با همان تعداد ارزیابی روش‌های بدون حافظه، با ورود پارامترهای خود شتابگر و نیز تقریب آنها با استفاده از اطلاعات قبل خواهیم ساخت که مرتبه همگرایی و نیز به تبع آن شاخص کارایی بالاتری دارند.

٤ ساختار روش‌های باحافظه جدید

این بخش شامل دوبخش است. ابتدا خانواده روش‌های تک پارامتری مطرح می‌شود، سپس در بخش دوم نیز روش‌های دو پرامتری را برای حل معادلات غیرخطی مطرح خواهیم کرد.

٤-١خانواده روش‌های تک پارامتری با حافظه

با ملاحظه رابطه (۹) متوجه خواهیم شد که مرتبه روش داده‌شده (۸) ، چهار خواهد بود. اگر

$$(1+\gamma f'(\alpha))\neq 0$$

حال اگر داشته باشیم:

$$\gamma=\frac{-1}{f'(\alpha)}.$$

آنگاه معادله خطای روش (۸) بیش از چهار خواهد بود از آنجایی که α ، ریشه دقیق معادله، در دسترس نیست پس مقدار γ قابل محاسبه دقیق نخواهد بود. اما به‌جای آن می‌توان از تقریب $f'(\alpha)\approx\overline{f'(\alpha)}$ استفاده نمود. از این‌رو ما با استفاده از تقریب زیر

$$\gamma=\frac{-1}{\overline{f'(\alpha)}}$$

روش‌های باحافظه تک پارامتری و نیز دو پارامتری با مرتبه همگرایی ۴/۲۳۶۱، ۴/۵۶۱۶، ۴/۷۸۹۲ و ۵/۲۳۶۱ خواهیم ساخت.

اگر پارامتر $\gamma=\frac{-1}{f'(\alpha)}$ را به‌صورت‌های زیرتقریب بزنیم، روش‌های باحافظه با مرتبه‌های همگرایی مختلف را به‌دست خواهیم آورد:

الف- روش تقریب سکانت:

$$\overline{f'(\alpha)}=\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}. \tag{۲۰}$$

ب- روش تقریب بهبودیافته سکانت:

$$\overline{f'(\alpha)}=\frac{f(x_k)-f(y_{k-1})}{x_k-y_{k-1}}. \tag{۲۱}$$

[DOI: 10.52547/jamlu.19.4.137]

ج- روش تقریب نیوتن:

$$\overline{f'(\alpha)} = N'_{۲}(x_k), \quad N_{۲}(t) = N_{۲}(t; x_k, y_{k-۱}, x_{k-۱}). \tag{۲۲}$$

که $N'_{۲}(x_k)$ چندجمله‌ای درونیاب درجه ۲ نیوتن با استفاده از نقاط $x_k, y_{k-۱}, x_{k-۱}$ می‌باشد. لازم به ذکر است این نقاط معلوم می‌باشند.

د- روش نیوتن:

$$\overline{f'(\alpha)} = N'_{۳}(x_k), \quad N_{۳}(t) = N_{۳}(t; x_k, y_{k-۱}, x_{k-۱}, w_{k-۱}). \tag{۲۳}$$

که $N'_{۳}(x_k)$ چندجمله‌ای درونیاب درجه ۳ نیوتن از بین نقاط معلوم $x_k, y_{k-۱}, x_{k-۱}, w_{k-۱}$ می‌باشد. لازم به ذکر است با این نقاط بهترین چندجمله‌ای تقریب زده خواهد شد.

پس پارامترشتابگر $\gamma = \gamma_k$ را به‌صورت های زیر می‌توان تعیین نمود:

الف- روش تقریب سکانت :

$$\gamma_k = \frac{-۱}{\overline{f'(\alpha)}} = -\frac{x_k - x_{k-۱}}{f(x_k) - f(x_{k-۱})} \quad . \tag{۲۴}$$

ب- روش تقریب بهبودیافته سکانت :

$$\gamma_k = \frac{-۱}{\overline{f'(\alpha)}} = -\frac{x_k - y_{k-۱}}{f(x_k) - f(y_{k-۱})} \quad . \tag{۲۵}$$

ج- روش تقریب نیوتن:

$$\gamma_k = \frac{-۱}{\overline{f'(\alpha)}} = \frac{-۱}{N'_{۲}(x_k)} \, . \tag{۲۶}$$

که $N_{۲}(t) = f(x_k) + f[x_k, y_{k-۱}](t - x_k) + f[x_k, y_{k-۱}, x_{k-۱}](t - x_{k-۱})(t - y_{k-۱})$

د- روش نیوتن:

$$\gamma_k = \frac{-۱}{\overline{f'(\alpha)}} = \frac{-۱}{N'_{۳}(x_k)} \, . \tag{۲۷}$$

که

$$\begin{aligned} N_{۳}(t) = {} & f(x_k) + f[x_k, y_{k-۱}](t - x_k) + f[x_k, y_{k-۱}, w_{k-۱}](t - y_{k-۱})(t - w_{k-۱}) \\ & + f[x_k, y_{k-۱}, w_{k-۱}, x_{k-۱}](t - y_{k-۱})(t - w_{k-۱})(t - x_{k-۱}). \end{aligned}$$

حال اگر پارامترخودشتابگر γ_k را با استفاده از یکی از روش‌های فوق تعیین کنیم، روش‌های باحافظه زیر را خواهیم داشت:

[DOI: 10.52547/jamlu.19.4.137]

$$\begin{cases} \gamma_k = -\dfrac{x_k - x_{k-۱}}{f(x_k) - f(x_{k-۱})},\ k = ۱,۲,۳,.., \\ w_k = x_k + \gamma_k f(x_k),\ y_k = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f[x_k, w_k]},\ k = ۰,۱,۲,.., \\ x_{k+۱} = y_k - \dfrac{f[x_k, y_k] - f[y_k, w_k] + f[x_k, w_k]}{f[x_k, y_k]^۲} f(y_k). \end{cases} \quad (۲۸)$$

$$\begin{cases} \gamma_k = -\dfrac{x_k - y_{k-۱}}{f(x_k) - f(y_{k-۱})},\ k = ۱,۲,۳,.., \\ w_k = x_k + \gamma_k f(x_k),\ y_k = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f[x_k, w_k]},\ k = ۰,۱,۲,.., \\ x_{k+۱} = y_k - \dfrac{f[x_k, y_k] - f[y_k, w_k] + f[x_k, w_k]}{f[x_k, y_k]^۲} f(y_k). \end{cases} \quad (۲۹)$$

$$\begin{cases} \gamma_k = -\dfrac{۱}{N'_۲(x_k)},\ k = ۱,۲,۳,.., \\ w_k = x_k + \gamma_k f(x_k),\ y_k = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f[x_k, w_k]},\ k = ۰,۱,۲,.., \\ x_{k+۱} = y_k - \dfrac{f[x_k, y_k] - f[y_k, w_k] + f[x_k, w_k]}{f[x_k, y_k]^۲} f(y_k). \end{cases} \quad (۳۰)$$

$$\begin{cases} \gamma_k = -\dfrac{۱}{N'_۳(x_k)},\ k = ۱,۲,۳,.., \\ w_k = x_k + \gamma_k f(x_k),\ y_k = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f[x_k, w_k]},\ k = ۰,۱,۲,.., \\ x_{k+۱} = y_k - \dfrac{f[x_k, y_k] - f[y_k, w_k] + f[x_k, w_k]}{f[x_k, y_k]^۲} f(y_k). \end{cases} \quad (۳۱)$$

قضیه ٤-١

فرض کنید $\alpha \in I$ریشه ساده تابع به اندازه کافی دیفرانسیل‌پذیر $f\ :\ I \subseteq R \to R$ روی بازه ی باز I باشد. اگر $x_۰$ به اندازه کافی به ریشه α نزدیک باشد، آنگاه مرتبه همگرایی روش‌های(۲۸)، (۲۹)، (۳۰) و(۳۱) به ترتیب برابر است با: ۴/۲۳۶۱، ۴/۵۶۱۶، ۴/۷۹۱۲ و ۵/۲۳۶۱.

اثبات مرتبه همگرایی رابطه (۲۸): نشان می‌دهیم مرتبه‌ی همگرایی روش تک پارامتری باحافظه (۲۸) حداقل برابراست با :

$$۲ + \sqrt{۵}$$

[DOI: 10.52547/jamlu.19.4.137]

با استفاده از بسط مک لورن تابع $f(x)$ حول نقطه $x=\alpha$ خواهیم داشت:

$$f(x)=f(\alpha)+(x-\alpha)f'(\alpha)+\frac{(x-\alpha)^{۲}f''(\alpha)}{۲!}+\frac{(x-\alpha)^{۳}f'''(\alpha)}{۳!}+\dots \qquad (۳۲)$$

حال با استفاده از روابط $e_k=x_k-\alpha, e_{k+۱}=x_{k+۱}-\alpha$ و نیز رابطه (۲۴) داریم:

$$f(x_k)=f(\alpha)+(x_k-\alpha)f'(\alpha)+\frac{(x_k-\alpha)^{۲}f''(\alpha)}{۲!}+\frac{(x_k-\alpha)^{۳}f'''(\alpha)}{۳!}+\dots \qquad (۳۳)$$

و

$$f(x_{k-۱})=f(\alpha)+(x_{k-۱}-\alpha)f'(\alpha)+\frac{(x_{k-۱}-\alpha)^{۲}f''(\alpha)}{۲!}+\frac{(x_{k-۱}-\alpha)^{۳}f'''(\alpha)}{۳!}+\dots \qquad (۳۴)$$

با استفاده از روابط $e_k=x_k-\alpha, e_{k+۱}=x_{k+۱}-\alpha$ و نیز رابطه‌های(۳۳) و(۳۴) رابطه زیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{f(x_k)-f(x_{k-۱})}{x_k-x_{k-۱}}=\frac{(e_k-e_{k-۱})f'(\alpha)+\frac{(e_k^{۲}-e_{k-۱}^{۲})f''(\alpha)}{۲!}+\frac{(e_k^{۳}-e_{k-۱}^{۳})f'''(\alpha)}{۳!}+\dots}{e_k-e_{k-۱}} \qquad (۳۵)$$

$$=f'(\alpha)+\frac{(e_k+e_{k-۱})f''(\alpha)}{۲!}+\frac{(e_k^{۲}+e_k+e_{k-۱}+e_{k-۱}^{۲})f'''(\alpha)}{۳!}+\dots$$

و با استفاده از رابطه (۲۴) داریم:

$$\gamma_k=-\frac{x_k-x_{k-۱}}{f(x_k)-f(x_{k-۱})}=\frac{-۱}{f'(\alpha)+(e_k+e_{k-۱})\frac{f''(\alpha)}{۲!}+\frac{(e_k^{۲}+e_ke_{k-۱}+e_{k-۱}^{۲})f'''(\alpha)}{۳!}+\dots} \qquad (۳۶)$$

حال برای محاسبه $(۱+\gamma f'(\alpha))$ با استفاده از رابطه (۳۶) خواهیم داشت:

$$(۱+\gamma_k f'(\alpha))=۱-\frac{f'(\alpha)}{f'(\alpha)+(e_k+e_{k-۱})\frac{f''(\alpha)}{۲!}+\frac{(e_k^{۲}+e_ke_{k-۱}+e_{k-۱}^{۲})f'''(\alpha)}{۳!}+\dots} \qquad (۳۷)$$

$$=\frac{(e_k+e_{k-۱})c_۲+(e_k^{۲}+e_ke_{k-۱}+e_{k-۱}^{۲})c_۳+\dots}{۱+(e_k+e_{k-۱})c_۲+(e_k^{۲}+e_ke_{k-۱}+e_{k-۱}^{۲})c_۳+\dots}\sim c_۲e_{k-۱}$$

از رابطه (۳۷) و نیز معادله خطای آن خواهیم داشت:

$$\begin{cases} e_{k+۱}\sim(۱+\gamma_k f'(\alpha))e_k^{۴}, \\ e_{k,y}\sim(۱+\gamma_k f'(\alpha))e_k^{۲}, \\ e_{k,w}\sim(۱+\gamma_k f'(\alpha))e_k. \end{cases} \qquad (۳۸)$$

در ادامه فرض کنید دنباله های $\{x_k\}$ و $\{w_k\},\{y_k\}$ همگرا با مرتبه همگرایی $r_۱, r_۲$ و r باشند، داریم :

[DOI: 10.52547/jamlu.19.4.137]

$$\begin{cases} e_{k+1} \sim e_k^{r} \sim e_{k-1}^{r^2}, \\ e_{k,y} \sim e_k^{r_2} \sim e_{k-1}^{rr_2}, \\ e_{k,w} \sim e_k^{r_1} \sim e_{k-1}^{rr_1}. \end{cases} \tag{۳۹}$$

در نهایت با استفاده از جفت روابط (۳۸) و(۳۹) به دستگاه سه معادله و سه مجهول زیر خواهیم رسید:

$$\begin{cases} rr_1 - 1 - r = 0, \\ rr_2 - 1 - 2r = 0, \\ r^2 - 1 - 4r = 0 \ . \end{cases} \tag{۴۰}$$

جواب این دستگاه معادلات عبارتست از:

$$\begin{cases} r_1 = -1 + \sqrt{5} \sim 1/2361, \\ r_2 = \sqrt{5} \sim 2/2361, \\ r = 2 + \sqrt{5} \sim 4/2361. \end{cases}$$

اثبات مرتبه همگرایی روش (۲۹): با استفاده از رابطه (۳۲) خواهیم داشت:

$$f\left(y_{k-1}\right) = f\left(\alpha\right) + \left(y_{k-1} - \alpha\right) f'\left(\alpha\right) + \frac{\left(y_{k-1} - \alpha\right)^2 f''\left(\alpha\right)}{2!} + \frac{\left(y_{k-1} - \alpha\right)^3 f'''\left(\alpha\right)}{3!} + \dots \tag{۴۱}$$

با استفاده از رابطه $x_k - y_{k-1} = e_k - e_{k-1,y}$ و نیز رابطه های(۳۳) و(۴۱) رابطه زیر نتیجه می‌شود:

$$\gamma_k = -\frac{x_k - y_{k-1}}{f\left(x_k\right) - f\left(y_{k-1}\right)} = \frac{-1}{f'(\alpha) + \left(e_k + e_{k-1,y}\right)\frac{f''(\alpha)}{2!} + \frac{\left(e_k^2 + e_k e_{k-1,y} + e_{k-1,y}^2\right) f'''(\alpha)}{3!} + \dots} \tag{۴۲}$$

حال برای محاسبه $(1+\gamma f'(\alpha))$ با استفاده از رابطه (۴۲) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \left(1 + \gamma_k f'\left(\alpha\right)\right) &= 1 - \frac{f'(\alpha)}{f'(\alpha) + \left(e_k + e_{k-1,y}\right)\frac{f''(\alpha)}{2!} + \frac{\left(e_k^2 + e_k e_{k-1,y} + e_{k-1,y}^2\right) f'''(\alpha)}{3!} + \dots} \\ &= \frac{\left(e_k + e_{k-1,y}\right)c_2 + \left(e_k^2 + e_k e_{k-1,y} + e_{k-1,y}^2\right)c_3 + \dots}{1 + \left(e_k + e_{k-1,y}\right)c_2 + \left(e_k^2 + e_k e_{k-1,y} + e_{k-1,y}^2\right)c_3 + \dots} \sim c_2 e_{k-1,y} \end{aligned} \tag{۴۳}$$

از رابطه (۴۳) و نیز معادله خطای آن خواهیم داشت:

$$\begin{cases} e_{k+1} \sim \left(1 + \gamma_k f'(\alpha)\right) e_k^4 \\ e_{k,y} \sim \left(1 + \gamma_k f'\left(\alpha\right)\right) e_k^2 \\ e_{k,w} \sim \left(1 + \gamma_k f'\left(\alpha\right)\right) e_k \end{cases} \tag{۴۴}$$

در ادامه فرض کنید دنباله‌های $\{y_k\},\{w_k\}$ و $\{x_k\}$ همگرا با مرتبه همگرایی r_1, r_2 و r باشند، داریم :

[DOI: 10.52547/jamlu.19.4.137]

$$\begin{cases} e_{k+1} \sim e_k^{r} \sim e_{k-1}^{r^{2}} \\ e_{k,y} \sim e_k^{r_2} \sim e_{k-1}^{rr_2} \\ e_{k,w} \sim e_k^{r_1} \sim e_{k-1}^{rr_1} \end{cases} \tag{۴۵}$$

در نهایت با استفاده از جفت روابط (۴۴) و (۴۵) به دستگاه سه معادله و سه مجهول زیر خواهیم رسید:

$$\begin{cases} rr_1 - r_2 - r = 0, \\ rr_2 - r_2 - 2r = 0, \\ r^2 - r_2 - 4r = 0 \end{cases} \tag{۴۶}$$

جواب این دستگاه معادلات عبارتست از:

$$\begin{cases} r_1 = \frac{1}{4}\left(9 - \sqrt{17}\right) \cong 1/2192, \\ r_2 = \frac{1}{4}\left(5 + \sqrt{17}\right) \cong 2/5616, \\ r = \frac{1}{2}\left(5 + \sqrt{17}\right) \cong 4/5616. \end{cases}$$

اثبات همگرایی روش (۳۰): کاملا مشابه روش (۲۹) است.

اثبات همگرایی روش (۳۱):

با استفاده از برنامه کاربردی زیر در نرم افزار Mathematica

```
ClearAll["Global'*"]
A[t_]:=InterpolatingPolynomial[{{e,fx},{ew,fw},{ey,fy},{e1,fx1}},t]
Approximation=-1/A'[e1]//Simplify;
fx=fla*(e+c2*e^2+c3*e^3+c4*e^4);
fw=fla*(ew+c2*ew^2+c3*ew^3+c4*ew^4);
fy=fla*(ey+c2*ey^2+c3*ey^3+c4*ey^4);
fx1=fla*(e1+c2*e1^2+c3*e1^3+c4*e1^4);
γ=Series[Approximation,{e,0,2},{ew,0,2},{ey,0,2},{e1,0,0}]//Simplify;
Collect[Series[+1+γ*fla,{e,0,1},{ew,0,1},{ey,0,1},{e1,0,0}],{e,ew,ey,e1},Simplify]
```

خروجی این برنامه به‌صورت زیر است.

$$c_4 e \,\text{ewey}$$

از این خروجی برای محاسبه $(1+\gamma f'(\alpha))$ و استفاده از رابطه (۲۷) خواهیم داشت:

$$\left(1 + \gamma_k f'(\alpha)\right) \sim c_4 e_{k-1} e_{k-1,w} e_{k-1,y}. \tag{۴۷}$$

از رابطه (۴۷) و نیز معادله خطای آن خواهیم داشت:

[DOI: 10.52547/jamlu.19.4.137]

$$
\begin{cases}
e_{k+۱} \sim \left(۱+\gamma_k f'(\alpha)\right)e_k^{۴}, \\
e_{k,y} \sim \left(۱+\gamma_k f'(\alpha)\right)e_k^{۲}, \\
e_{k,w} \sim \left(۱+\gamma_k f'(\alpha)\right)e_k.
\end{cases} \tag{۴۸}
$$

در ادامه فرض کنید دنباله‌های $\{y_k\},\{w_k\}$ و $\{x_k\}$ همگرا با مرتبه همگرایی $r_۱, r_۲$ و r باشند، داریم:

$$
\begin{cases}
e_{k+۱} \sim e_k^{r} \sim e_{k-۱}^{r^{۲}}, \\
e_{k,y} \sim e_k^{r_۲} \sim e_{k-۱}^{rr_۲}, \\
e_{k,w} \sim e_k^{r_۱} \sim e_{k-۱}^{rr_۱}.
\end{cases} \tag{۴۹}
$$

در نهایت با استفاده از جفت روابط (۴۸) و(۴۹) مساوی قرار دادن توان‌های $e_{k,w}, e_{k,y}$ و $e_{k+۱}$ به دستگاه سه معادله و سه مجهول زیر خواهیم رسید:

$$
\begin{cases}
rr_۱ - ۱ - r۱ - r۲ - r = ۰, \\
rr_۲ - ۱ - r۱ - r۲ - ۲r = ۰, \\
r^{۲} - ۱ - r۱ - r۲ - ۴r = ۰.
\end{cases} \tag{۵۰}
$$

جواب این دستگاه معادلات عبارتست از:

$$
\begin{cases}
r_۱ = ۱+\sqrt{۵} \cong ۲/۲۳۶۱, \\
r_۲ = \sqrt{۵} \cong ۳/۲۳۶۱, \\
r = ۳+\sqrt{۵} \cong ۵/۲۳۶۱.
\end{cases}
$$

و به این ترتیب اثبات قضیه به پایان می‌رسد. □

اکنون می‌توانیم گزاره‌های زیر را بیان کنیم.

گزاره ٤-۱

مرتبه‌ی همگرایی روش‌های با حافظه (۲۸)، (۲۹)، (۳۰) و (۳۱) به ترتیب برابراست با : **۴/۲۳۶۱، ۴/۵۶۱۶، ۴/۷۹۱۲** و **۵/۲۳۶۱**. از این رو شاخص کارایی آنها به‌صورت زیراست:

$$
\begin{cases}
\sqrt[۳]{۴/۲۳۶۱} = ۱/۶۱۸۱, \\
\sqrt[۳]{۴/۵۶۱۶} = ۱/۶۵۸۵, \\
\sqrt[۳]{۴/۷۹۱۲} = ۱/۶۸۵۸, \\
\sqrt[۳]{۵/۲۳۶۱} = ۱/۷۳۶۵.
\end{cases}
$$

گزاره ٤-۲

هریک از روش‌های باحافظه (۲۸)، (۲۹)، (۳۰) و (۳۱) که به ترتیب **۰/۲۳۶۱، ۰/۵۶۱۶، ۰/۷۹۱۲** و **۱/۲۳۶۱** بهبود مرتبه همگرایی روش بدون حافظه (۸) را داشته‌اند، میزان بهبود همگرایی به ترتیب زیر دارند:

۵/۹۱٪ ، ۱۴/۰۴٪ ، ۱۹/۷۸٪ و **۳۰/۹۰٪** .

[DOI: 10.52547/jamlu.19.4.137]

۲-٤ روش‌های باحافظه دوپارامتری

حال برای ساخت روش دوگامی باحافظه دو پارامتری جدید به‌صورت زیر عمل خواهیم نمود. با ملاحظه رابطه (۱۹) متوجه خواهیم شد که مرتبه روش داده شده (۱۸) ، چهار خواهد بود، اگر

$$\left(1+\gamma f'(\alpha)\right)\neq 0, \qquad \left(\beta+c_2\right)\neq 0.$$

از این رو اگر داشته باشیم:

$$\gamma=\frac{-1}{f'(\alpha)},\ \beta=-c_2=\frac{-f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}.$$

آنگاه معادله خطای روش (۱۸) بیش از چهار خواهد بود. از آنجایی که α، ریشه‌ی دقیق معادله در دسترس نیست، پس مقدار γ, β قابل محاسبه دقیق نخواهند بود. اما به‌جای آن می‌توان از تقریب‌های زیر

$$f'(\alpha)\approx\overline{f'(\alpha)},\ f''(\alpha)\approx\overline{f''(\alpha)}.$$

استفاده نمود. از این‌رو می‌توان تقریب‌های زیر

$$\gamma=\frac{-1}{\overline{f'(\alpha)}},\ \beta=\frac{-\overline{f''(\alpha)}}{2\overline{f'(\alpha)}}.$$

را نظر گرفت. در ادامه این بخش روش‌های باحافظه دو پارامتری با مرتبه همگرایی ۶/۳۷ ساخته می‌شود.

اگر پارامترهای $\gamma_k=\frac{-1}{\overline{f'(\alpha)}},\ \beta_k=\frac{-\overline{f''(\alpha)}}{2\overline{f'(\alpha)}}$ که

$$\overline{f'(\alpha)}=N'_3\left(x_k\right),\qquad N_3\left(t;x_k,y_{k-1},x_{k-1},w_{k-1}\right). \tag{51}$$

$$\overline{f''(\alpha)}=N''_4\left(x_k\right),\qquad N_4\left(t;w_k,x_k,y_{k-1},x_{k-1},w_{k-1}\right). \tag{52}$$

پس پارامتر های $\gamma_k=\gamma,\ \beta_k=\beta$ را به‌صورت بازگشتی زیر می‌توان تعیین نمود:

$$\gamma_k=\frac{-1}{\overline{f'(\alpha)}}=\frac{-1}{N'_3\left(x_k\right)},\ \ \beta_k=\frac{-\overline{f''(\alpha)}}{2\overline{f'(\alpha)}}=\frac{-N''_4\left(w_k\right)}{2N'_4\left(w_k\right)}. \tag{53}$$

در حالی که

$$\begin{aligned}N_4(t)=&\ f\left(x_k\right)+f\left[x_k,y_{k-1}\right]\left(t-x_k\right)+f\left[x_k,y_{k-1},w_{k-1}\right]\left(t-y_{k-1}\right)\left(t-w_{k-1}\right)\\&+f\left[x_k,y_{k-1},w_{k-1},x_{k-1}\right]\left(t-y_{k-1}\right)\left(t-w_{k-1}\right)\left(t-x_{k-1}\right)\\&+f\left[w_k,x_k,y_{k-1},w_{k-1},x_{k-1}\right]\left(t-x_k\right)\left(t-y_{k-1}\right)\left(t-w_{k-1}\right)\left(t-x_{k-1}\right).\end{aligned}$$

و با تعیین پارامترهای $\gamma_k,\ \beta_k$ با استفاده از روش فوق، روش‌های باحافظه زیر را خواهیم داشت:

[DOI: 10.52547/jamlu.19.4.137]

$$\begin{cases} \gamma_k = \dfrac{-1}{N_3'\left(x_k\right)},\ \beta_k = \dfrac{-N''_4(w_k)}{2N'_4(w_k)}\ k = 1,2,3,.., \\ w_k = x_k + \gamma_k f\left(x_k\right), y_k = x_k - \dfrac{f\left(x_k\right)}{f\left[x_k, w_k\right] + \beta_k f\left(x_k\right)},\ k = 0,1,2,.., \\ x_{k+1} = y_k - \dfrac{f\left[x_k, y_k\right] - f\left[y_k, w_k\right] + f\left[x_k, w_k\right]}{f\left[x_k, y_k\right]^2} f\left(y_k\right). \end{cases} \quad (54)$$

قضیه ٤-۲

فرض کنید $\alpha \in I$ریشه ساده تابع به اندازه کافی دیفرانسیل‌پذیر $f\ :\ I \subseteq R \to R$ روی بازه ی باز I باشد. اگر x_0 به اندازه کافی به ریشه α نزدیک باشد، آنگاه مرتبه همگرایی روش (۵۴) برابر است با ۶/۳۷.

اثبات: مشابه قضیه قبل داریم:

$$\begin{cases} \left(1 + \gamma_k f'\ (\alpha)\right) \sim c_4 e_{k-1} e_{k-1,w} e_{k-1,y}, \\ \left(\beta_k + c_2\right) \sim c_4 e_{k-1} e_{k-1,w} e_{k-1,y}. \end{cases} \quad (55)$$

از رابطه (۵۵) و نیز معادله خطای آن خواهیم داشت:

$$\begin{cases} e_{k+1} \sim \left(1 + \gamma_k f'\ (\alpha)\right) e_k^4 \sim e_{k-1} e_{k-1,w} e_{k-1,y} e_k^4, \\ e_{k,y} \sim \left(1 + \gamma_k f'\ (\alpha)\right) e_k^2 \sim e_{k-1} e_{k-1,w} e_{k-1,y} e_k^2, \\ e_{k,w} \sim \left(1 + \gamma_k f'\ (\alpha)\right) e_k \sim e_{k-1} e_{k-1,w} e_{k-1,y}\ e_k. \end{cases} \quad (56)$$

با فرض این که دنباله های $\{y_k\}$,$\{w_k\}$ و $\{x_k\}$ همگرا با مرتبه همگرایی r_1, r_2 و r باشند، داریم:

$$\begin{cases} e_{k+1} \sim e_k^r \sim e_{k-1}^{r^2}, \\ e_{k,y} \sim e_k^{r_2} \sim e_{k-1}^{rr_2}, \\ e_{k,w} \sim e_k^{r_1} \sim e_{k-1}^{rr_1}. \end{cases} \quad (57)$$

با استفاده از جفت روابط (۵۶) و (۵۷) و مساوی قرار دادن توان‌های $e_{k,y}$, $e_{k,w}$ و e_{k+1} به دستگاه سه معادله و سه مجهول زیر خواهیم رسید:

$$\begin{cases} rr_1 - 1 - r_1 - r_2 - r = 0, \\ rr_2 - 2 - 2r_1 - 2r_2 - 2r = 0, \\ r^2 - 2 - 2r_1 - 2r_2 - 4r = 0. \end{cases} \quad (58)$$

که جواب این دستگاه معادلات عبارتست از:

[DOI: 10.52547/jamlu.19.4.137]

$$\begin{cases} r_1 = \frac{1}{4}\left(3+\sqrt{33}\right) \sim 2/1861, \\ r_2 = \frac{1}{2}\left(3+\sqrt{33}\right) \sim 4/3723, \\ r = \frac{1}{2}\left(7+\sqrt{33}\right) \sim 6/3723. \end{cases}$$

و به این ترتیب اثبات قضیه به پایان می‌رسد. □

گزاره ٤-٣

شاخص کارایی روش باحافظه (۵۴) برابر است با $\sqrt[3]{6/3723} = 1/8540$. از آنجاکه این روش مرتبه همگرایی را از ۴ به ۶/۳۷۲۳ رسانده است، پس میزان بهبود مرتبه همگرایی آن، ۵۹/۳۷٪ می‌باشد.

مطالعه بیشتر روش‌های باحافظه چندگامی را در مراجع ذکرشده زیر می‌توانید مشاهده نمایید. نتا[1] [۱۵]، لاله چینی و همکاران [۱۶]، ترکاشوند و همکاران [۱۸ و۱۷]، پتکوویچ[2]و همکاران [۲۰، ۱۹]، ونگ[3] [۲۱]، سلیمانی وهمکاران [۲۲] و کوردرو و همکاران [۲۳] و... .

علاوه براین عهدی اقدم و همکارانش رضاپور و قوسی نیز روش‌های بدون حافظه را در مراجع [۳۰، ۲۹] مطالعه نمودند.

ترکاشوند و همکاران کاربردی از این روش‌ها را در تعیین مقادیر ویژه ماتریس‌ها به کار برده‌اند [۳۱]. علاوه براین، ترکاشوند و همکاران، دینامیک روش‌های تکراری وهمگرایی موضعی و نیمه‌موضعی آنها را مورد بررسی قرار داده‌اند. [۳۲، ۳۳]

دربخش بعدی مقایسه بهبود مرتبه همگرایی و نیز شاخص کارایی روش‌های جدید را با دیگر روش‌های با حافظه و بدون حافظه خواهیم دید.

۵ مثال‌های عددی

درجدول ۱ پنج معادله غیرخطی همراه ریشه‌ی دقیق و حدس اولیه ریشه را مشاهده می‌نمایید. در جدول ۲، میزان بهبود همگرایی، روش‌های جدید با دیگر روش‌های با حافظه مقایسه شده است. درجدول‌های ۳ تا ۷ مقدار خطای مرتبه اول تا سوم و نیز مرتبه همگرایی و شاخص کارایی روش‌های مختلف مقایسه شده‌اند. جدول ۸ نیز شاخص کارایی و مرتبه همگرایی روش‌های با حافظه و بدون حافظه را نشان می‌دهد. حدس اولیه‌ی ریشه هر معادله در همگرایی روش عددی مطرح‌شده نقشی اساسی دارد. برای مطالع بیشتر حدس اولیه به مرجع [۲۸] مراجعه شود. تمامی محاسبات با استفاده از نرم افزار Mathematica با دقت $|x_{k+1} - x_k| \leq 10^{-10}$ انجام شده است. عبارات زیر در تمامی جدول‌ها استفاده شده است:

[1] B. Netta
[2] M.S. Petkovic
[3] X.Wang

[DOI: 10.52547/jamlu.19.4.137]

الف- $x_{\circ}$ مقدار حدس ریشه اولیه معادله غیرخطی $f(x)=\circ$.

ب- α ریشه دقیق معادله غیرخطی $f(x)=\circ$.

پ- عبارت $|x_n-\alpha|$ نشان‌دهنده مقدار خطای مرحله n ام از ریشه معادله.

ت-عبارت $m(-n)$ نشان‌دهنده $m\times ۱۰^{-n}$ می‌باشد.

ث- شاخص کارایی فرمول استروفسکی $IE=r^{\frac{۱}{\theta_f}}$ استفاده شده که θ_f تعداد ارزیابی از تابع و یا مشتق‌های آن و r مرتبه‌ی همگرایی روش تکراری داده شده است.

ج- مرتبه همگرایی محاسباتی:
$$r_c=\frac{log\left(\left|\frac{f(x_{k+۱})}{f(x_k)}\right|\right)}{log\left(\left|\frac{f(x_k)}{f(x_{k-۱})}\right|\right)}$$

جدول ۱. مثال‌های عددی بررسی‌شده

حدس اولیه	ریشه معادله	تابع بررسی شده
$x_{\circ}=\circ/۶$	$\alpha=\circ$	$f_۱(x)=x\log(۱+x\sin x)+e^{-۱+x^۲+x\cos x}\sin\pi x$
$x_{\circ}=۱/۴$	$\alpha=۱$	$f_۲(x)=۱+\frac{۱}{x^۴}-\frac{۱}{x}-x^۲$
$x_{\circ}=۲/۲$	$\alpha=۲$	$f_۳(x)=(x-۲)(x^{۱۰}+x+۲)e^{-۵x}$
$x_{\circ}=-۱/۴$	$\alpha=-۱$	$f_۴(x)=e^{x^۲-x}-\cos(x^۲-۱)+x^۳+۱$
$x_{\circ}=\circ/۶$	$\alpha=\circ$	$f_۵(x)=\log(۱+x^۲)+e^{-۳x+x^۲}\sin x$

جدول ۲. مقایسه درصد بهبود مرتبه همگرایی روش جدید با دیگر روش‌های باحافظه

درصد بهبود مرتبه همگرایی	مرتبه همگرایی	مرتبه روش بدون حافظه بهین	تعدادارزیابی	تعدادگام	نام روش با حافظه
٪ ۵/۹	۴/۲۳۶۱	۴	۳	۲	Petkovic et al (۲۰۱۰) [۲۰]
٪ ۱۱/۲۴	۴/۴۴۹۵	۴	۳	۲	Petkovic et al (۲۰۱۰) [۲۰]
٪ ۵۰	۱۲	۸	۴	۳	Soleymani et al (۲۰۱۵) [۲۲]
٪ ۵۰	۳	۲	۲	۱	Dzunic-Petkovic (۲۰۱۲) [۲۶]
٪ ۲۰/۵	۲/۴۵۷۱	۲	۲	۱	Traub (۱۹۶۴) [۲۵]
٪ ۵۰	۶	۴	۳	۲	Lalehchini et al (۲۰۲۰) [۱۶]
٪ ۵۰	۱۲	۸	۴	۳	Sharifi et al (۲۰۱۶) [۲۸]
٪ ۱۱/۲۴	۴/۴۴۹۵	۴	۳	۲	Wang (۲۰۱۸) [۲۱]
٪ ۵/۹	۴/۲۳۶۱	۴	۳	۲	Wang (۲۰۱۸) [۲۱]
٪ ۵/۹	۴/۲۳۶۱	۴	۳	۲	روش (۲۸)
٪ ۱۴/۰۴	۴/۵۶۱۶	۴	۴	۳	روش (۲۹)

[DOI: 10.52547/jamlu.19.4.137]

٪ ۱۹/۷۸	۴/۷۹۱۲	۴	۳	۲	روش (۳۰)
٪ ۳۰/۹۰	۵/۲۳۶۱	۴	۳	۲	روش (۳۱)
٪ ۵۹/۳۱	۶/۳۷۲۳	۴	۳	۲	روش (۵۴)

جدول۳. مقایسه خطای مطلق، شاخص کارایی و مرتبه همگرایی محاسباتی روش‌های جدید با دیگر روش‌ها

$$f_1(x) = x\log(1 + x\sin x) + e^{-1+x^2+x\cos x}\sin \pi x$$

IE	r_c	$\lvert x_3-\alpha\rvert$	$\lvert x_2-\alpha\rvert$	$\lvert x_1-\alpha\rvert$	روش‌های بررسی‌شده
۱/۴۱۴۳	۲/۰۰۰۱	۰/۲۴۴۷۶(−۱)	۰/۱۵۹۱۰(۰)	۰/۶۰۰۰۰(۰)	Newton [۱]
۱/۴۱۴۲	۲	۰/۱۳۷۶۸(۱)	۰/۸۶۲۹۶(۰)	۰/۶۰۰۰۰(۰)	Steffensen [۱]
۱/۴۴۲۳	۳	۰/۴۰۰۷۲(−۱)	۰/۳۳۶۳۷(۰)	۰/۶۰۰۰۰(۰)	Hally
۱/۴۴۲۳	۳	۰/۱۱۲۸۲(۱)	۰/۱۲۶۷۶(۱)	۰/۶۰۰۰۰(۱)	Chebychev
۱/۴۴۲۳	۳	۰/۱۰۰۲۸(−۲)	۰/۴۴۳۷۷(۰)	۰/۶۰۰۰۰(۰)	Abbasbandy [۲۴]
۱/۶۱۸۰	۱/۶۱۸۰	۰/۱۲۷۸۹(−۱)	۰/۴۴۲۶۴(−۱)	۰/۶۰۰۰۰(۰)	Secant , $x_0 = 0/3,\ x_1 = 0/6$
۱/۵۷۵۶	۲/۴۸۲۵	۰/۱۲۶۰۲(−۲)	۰/۵۶۲۳۰(−۱)	۰/۴۷۸۱۱(۰)	Traub (۱۹۶۴) , $\gamma_0 = 0/1$ [۲۵]
۱/۶۱۸۰	۴/۲۳۵۷	۰/۳۶۸۱۲(−۱۲)	۰/۱۱۲۷۶(−۲)	۰/۲۵۱۲۶(۰)	روش (۲۸) , $\gamma_0 = 0/1$
۱/۶۵۸۴	۴/۵۶۱۲	۰/۲۲۹۷۸(−۱۳)	۰/۱۰۶۶۷(−۲)	۰/۲۵۱۲۶(۰)	روش (۲۹) , $\gamma_0 = 0/1$
۱/۶۸۵۹	۴/۷۹۱۵	۰/۲۲۹۷۸(−۱۳)	۰/۱۰۶۶۷(−۲)	۰/۲۵۱۲۶(۰)	روش (۳۰) , $\gamma_0 = 0/1$
۱/۷۳۶۵	۵/۲۳۶۱	۰/۲۳۱۳۰(−۱۶)	۰/۴۷۸۳۷(−۳)	۰/۲۵۱۲۶(۰)	روش (۳۱) , $\gamma_0 = 0/1$
۱/۸۵۴۰	۶/۳۷۲۳	۰/۴۴۹۶۹(−۲۶)	۰/۴۱۹۱۳(−۴)	۰/۱۹۹۷۰(۰)	روش (۵۴) , $\gamma_0 = 0/1$

جدول٤. مقایسه خطای مطلق، شاخص کارایی و مرتبه همگرایی محاسباتی روش‌های جدید با دیگر روش‌ها

$$f_2(x) = 1 + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x} - x^2$$

IE	r_c	$\lvert x_3-\alpha\rvert$	$\lvert x_2-\alpha\rvert$	$\lvert x_1-\alpha\rvert$	روش‌های بررسی‌شده
۱/۴۱۴۲	۲	۰/۷۵۹۰۸(−۲)	۰/۶۶۱۱۶(−۱)	۰/۴۰۰۰۰(۰)	Newton [۱]
۱	۱	۰/۴۰۰۰۰(۰)	۰/۴۰۰۰۰(۰)	۰/۴۰۰۰۰(۰)	Steffensen [۱]
۱/۴۴۲۳	۳	۰/۸۴۲۸۲(−۳)	۰/۶۹۱۱۷(−۱)	۰/۴۰۰۰۰(۰)	Abbasbandy [۲۴]
۱/۵۸۷۴	۴	۰/۱۱۲۸۲(−۹)	۰/۱۲۶۷۶(−۲)	۰/۸۷۵۳۹(−۱)	Liu et al [۷]
۱/۵۵۰۷	۲/۴۰۴۸	۰/۱۲۷۷۱(−۵)	۰/۲۸۰۹۴(−۲)	۰/۶۰۸۰۱(−۱)	Traub (۱۹۶۴) , $\gamma_0 = 0/1$ [۲۵]
۱/۶۱۸۱	۴/۲۳۶۲	۰/۱۱۱۲۳(−۳۹)	۰/۲۶۶۰۱(−۹)	۰/۳۳۸۹۶(−۲)	روش (۲۸) , $\gamma_0 = 0/1$
۱/۶۵۸۱	۴/۵۶۱۸	۰/۲۲۹۷۴(−۳۶)	۰/۱۰۶۶۷(−۱۰)	۰/۳۳۸۹۶(−۲)	روش (۲۹) , $\gamma_0 = 0/1$
۱/۶۸۵۹	۴/۷۹۱۵	۰/۳۱۱۷۲(−۲۹)	۰/۲۷۸۸۹(−۱۰)	۰/۳۳۸۹۶(−۲)	روش (۳۰) , $\gamma_0 = 0/1$
۱/۷۳۶۵	۵/۲۳۶۱	۰/۲۰۱۸۳(−۵۴)	۰/۷۸۶۲۹(−۱۱)	۰/۳۳۸۹۶(−۲)	روش (۳۱) , $\gamma_0 = 0/1$
۱/۸۵۴۰	۶/۳۷۲۳	۰/۸۲۶۱۵(−۷۶)	۰/۱۳۱۹۶(−۱۲)	۰/۳۴۷۰۸(−۲)	روش (۵۴) , $\gamma_0 = 0/1$

[DOI: 10.52547/jamlu.19.4.137]

جدول۵. مقایسه خطای مطلق، شاخص کارایی و مرتبه همگرایی محاسباتی روش‌های جدید با دیگر روش‌ها

$f_۳(x) = (x-۲)(x^{۱۰}+x+۲)e^{-۵x}$					
روش‌های بررسی‌شده	$\lvert x_۱-\alpha \rvert$	$\lvert x_۲-\alpha \rvert$	$\lvert x_۳-\alpha \rvert$	r_c	IE
Newton [۱]	۰/۲۰۰۰۰(۰)	۰/۲۰۳۳۰(-۱)	۰/۱۲۷۲۶(-۴)	۲	۱/۴۱۴۲
Steffensen [۱]	۰/۲۰۰۰۰(۰)	۰/۲۱۷۴۱(-۱)	۰/۱۷۵۵۸(-۴)	۲	۱/۴۱۴۲
Hally	۰/۲۰۰۰۰(۰)	۰/۹۴۳۲۷(-۲)	۰/۱۰۰۱۷(-۵)	۳	۱/۴۴۲۳
Chebychev	۰/۲۰۰۰۰(۰)	۰/۱۴۰۸۱(-۱)	۰/۳۳۳۵۰(-۵)	۳	۱/۴۴۲۳
Abbasbandy [۲۴]	۰/۲۰۰۰۰(۰)	۰/۱۷۳۹۱(۰)	۰/۱۲۲۳۱(-۲)	۳	۱/۴۴۲۳
Secant, $x_۰ = ۲/۲,\ x_۱ = ۱/۸$	۰/۲۰۰۰۰(۰)	۰/۲۲۹۹۶(-۳)	۰/۱۱۰۳۲(-۴)	۱/۶۱۸۰	۱/۶۱۸۰
Traub (۱۹۶۴) , $\gamma_۰ = ۰/۱$ [۲۵]	۰/۲۰۴۶۸(-۱)	۰/۹۷۵۳۱(-۷)	۰/۲۲۴۸۲(-۱۹)	۲/۴۸۲۵	۱/۵۷۵۶
Liu et al [۷]	۰/۱۲۵۷۷(-۲)	۰/۵۰۷۲۶(-۱۳)	۰/۱۶۱۱۵(-۵۴)	۴	۱/۵۸۷۴
روش (۲۸), $\gamma_۰ = ۰/۱$	۰/۱۱۳۸۲(-۲)	۰/۸۶۹۶۸(-۱۶)	۰/۳۶۸۱۲(-۷۴)	۴/۲۳۶۶	۱/۶۱۸۱
روش (۲۹), $\gamma_۰ = ۰/۱$	۰/۱۱۳۸۲(-۲)	۰/۴۷۲۸۳(-۲۱)	۰/۲۰۱۹۷(-۱۰۳)	۴/۵۶۱۴	۱/۶۵۸۴
روش (۳۰), $\gamma_۰ = ۰/۱$	۰/۱۱۳۸۲(-۲)	۰/۶۱۷۸۸(-۱۸)	۰/۱۲۱۵۹(-۹۰)	۴/۷۹۰۵	۱/۶۸۵۸
روش (۳۱), $\gamma_۰ = ۰/۱$	۰/۱۱۳۸۲(-۲)	۰/۲۴۹۸۱(-۲۰)	۰/۴۱۳۳۰(-۱۰۸)	۵/۲۳۶۱	۱/۷۳۶۵
روش (۵۴), $\gamma_۰ = ۰/۱$	۰/۸۱۱۶۳(-۳)	۰/۱۷۳۷۴(-۲۲)	۰/۵۱۳۲۲(-۱۳۹)	۶/۳۷۲۳	۱/۸۵۴۰

جدول۶. مقایسه خطای مطلق، شاخص کارایی و مرتبه همگرایی محاسباتی روش‌های جدید با دیگر روش‌ها

$f_۴(x) = e^{x^۳-x} - \cos(x^۲-۱) + x^۳ + ۱$					
روش‌های بررسی‌شده	$\lvert x_۱-\alpha \rvert$	$\lvert x_۲-\alpha \rvert$	$\lvert x_۳-\alpha \rvert$	r_c	IE
Newton [۱]	۰/۴۰۰۰۰(۰)	۰/۲۳۲۸۳(-۱)	۰/۲۴۵۱۳(-۳)	۲	۱/۴۱۴۲
Steffensen [۱]	۰/۴۰۰۰۰(۰)	۰/۲۸۹۲۷(۰)	۰/۱۷۶۹۸(۰)	۲	۱/۴۱۴۲
Hally	۰/۴۰۰۰۰(۰)	۰/۶۷۷۳۷(-۲)	۰/۳۳۵۹۵(-۶)	۳	۱/۴۴۲۳
Chebychev	۰/۴۰۰۰۰(۰)	۰/۹۰۷۱۱(-۲)	۰/۹۰۶۲۱(-۶)	۳	۱/۴۴۲۳
Abbasbandy [۲۴]	۰/۴۰۰۰۰(۰)	۰/۱۱۸۹۰(-۱)	۰/۱۹۰۱۵(-۵)	۳	۱/۴۴۲۳
Secant, $x_۰ = -۱/۴,\ x_۱ = -۱/۶$	۰/۲۰۰۰۰(۰)	۰/۲۵۰۹۱(-۱)	۰/۴۴۸۱۹(-۳)	۱/۶۱۸۰	۱/۶۱۸۰
Traub (۱۹۶۴) , $\gamma_۰ = ۰/۱$ [۲۵]	۰/۲۴۵۹۲(-۱)	۰/۹۲۱۵۹(-۵)	۰/۳۵۶۹۵(-۱۲)	۲/۴۸۲۵	۱/۵۷۵۶
Liu et al [۷]	۰/۸۹۴۸۵(-۱)	۰/۵۳۰۰۵(-۲)	۰/۱۱۲۱۸(-۷)	۴	۱/۵۸۷۴
روش (۲۸), $\gamma_۰ = ۰/۱$	۰/۱۷۶۷۶(-۲)	۰/۲۱۲۵۱(-۱۳)	۰/۹۲۲۸۷(-۵۹)	۴/۲۳۵۸	۱/۶۱۸۰
روش (۲۹), $\gamma_۰ = ۰/۱$	۰/۱۷۶۷۶(-۲)	۰/۶۲۱۱۶(-۱۴)	۰/۵۰۵۱۹(-۶۶)	۴/۵۶۱۴	۱/۶۵۸۴
روش (۳۰), $\gamma_۰ = ۰/۱$	۰/۱۷۶۷۶(-۲)	۰/۵۰۱۹۳(-۱۴)	۰/۷۰۶۲۹(-۶۹)	۴/۷۹۰۵	۱/۶۸۵۸
روش (۳۱), $\gamma_۰ = ۰/۱$	۰/۱۷۶۷۶(-۲)	۰/۳۴۰۴۹(-۱۴)	۰/۱۱۹۲۷(-۷۳)	۵/۲۳۶۱	۱/۷۳۶۵
روش (۵۴), $\gamma_۰ = ۰/۱$	۰/۴۲۲۱۷(-۲)	۰/۱۰۵۴۸(-۱۳)	۰/۷۷۵۳۴(-۸۵)	۶/۳۷۲۳	۱/۸۵۴۰

[DOI: 10.52547/jamlu.19.4.137]

جدول۷. مقایسه خطای مطلق، شاخص کارایی و مرتبه همگرایی محاسباتی روش‌های جدید با دیگر روش‌ها

$f_{۵}(x)=\log(۱+x^{۲})+e^{-۳x+x^{۲}}\sin x$					
روش‌های بررسی‌شده	$\vert x_{۱}-\alpha\vert$	$\vert x_{۲}-\alpha\vert$	$\vert x_{۳}-\alpha\vert$	r_c	IE
Newton [۱]	۰/۶۰۰۰۰(۰)	۰/۷۲۸۶۲(−۱)	۰/۹۰۲۹۷(−۲)	۲	۱/۴۱۴۲
Steffensen [۱]	۰/۶۰۰۰۰(۰)	۰/۱۱۹۷۱(۰)	۰/۲۸۵۳۳(−۱)	۲	۱/۴۱۴۲
Hally	۰/۶۰۰۰۰(۰)	۰/۳۸۸۳۴(−۱)	۰/۶۹۴۳۰(−۴)	۳	۱/۴۴۲۳
Chebychev	۰/۶۰۰۰۰(۰)	۰/۱۹۳۰۵(−۱)	۰/۲۳۴۸۸(−۴)	۳	۱/۴۴۲۳
Abbasbandy [۲۴]	۰/۶۰۰۰۰(۰)	۰/۳۸۷۳۵(−۱)	۰/۶۶۵۹۲(−۴)	۳	۱/۴۴۲۳
Secant , $x_{۰}=۰/۶,\ x_{۱}=۱$	۰/۱۰۰۰۰(۰)	۰/۱۱۷۴۳(۰)	۰/۳۴۴۱۰(−۲)	۱/۶۱۸۰	۱/۶۱۸۰
Traub (۱۹۶۴) $,\gamma_{۰}=۰/۱$ [۲۵]	۰/۸۰۲۳۲(−۱)	۰/۲۶۵۲۱(−۲)	۰/۲۰۸۷۴(−۵)	۲/۴۶۸۲	۱/۵۷۱۱
Liu et al [۷]	۰/۳۶۲۲۴(−۱)	۰/۲۲۸۶۰(−۴)	۰/۱۴۵۷۸(−۱۷)	۴	۱/۵۸۷۴
روش (۲۸) $,\gamma_{۰}=۰/۱$	۰/۳۴۴۰۶(−۱)	۰/۵۵۶۴۶(−۵)	۰/۵۲۵۵۰(−۲۱)	۴/۲۳۶۰	۱/۶۱۸۰
روش (۲۹) $,\gamma_{۰}=۰/۱$	۰/۳۴۴۰۶(−۱)	۰/۱۸۹۲۳(−۵)	۰/۷۶۰۷۵(−۱۵)	۴/۵۶۱۴	۱/۶۵۸۴
روش (۳۰) $,\gamma_{۰}=۰/۱$	۰/۳۴۴۰۶(−۱)	۰/۱۳۰۶۰(−۵)	۰/۱۰۹۳۵(−۲۶)	۴/۷۸۸۷	۱/۶۸۵۵
روش (۳۱) $,\gamma_{۰}=۰/۱$	۰/۱۷۶۷۶(−۲)	۰/۴۸۸۰۹(−۶)	۰/۴۲۶۶۳(−۳۰)	۵/۲۳۶۱	۱/۷۳۶۵
روش (۵۴) $,\gamma_{۰}=۰/۱$	۰/۴۱۰۸۹(−۱)	۰/۲۱۰۰۱(−۶)	۰/۳۵۳۸۹(−۳۸)	۶/۳۷۲۳	۱/۸۵۴۰

جدول۸. مقایسه شاخص کارایی و مرتبه همگرایی محاسباتی روش‌های جدید با دیگر روش‌ها

روش‌های تکراری بدون حافظه			روش‌های تکراری باحافظه		
شاخص کارایی	مرتبه همگرایی	نام روش	شاخص کارایی	مرتبه همگرایی	نام روش
۱/۴۱۴۲	۲	روش نیوتن [۱]	۱/۶۴۴۸	۴/۴۴۹۵	روش پتکوویچ و همکاران [۲۰]
۱/۴۱۴۲	۲	روش استیفنسن [۲]	۱/۸۴۸۵	۶/۳۱۶۶	روش لاله چینی و همکاران [۱۶]
۱/۴۴۲۳	۳	روش عباسبندی [۲۴]	۱/۷۳۲۱	۳	روش دزونیک-پتکوویچ [۱۶]
۱/۵۸۷۴	۴	روش استروفسکی [۳]	۱/۶۱۸۰	۴/۲۳۶۱	روش ونگ [۲۱]
۱/۵۸۷۴	۴	روش جارات [۴]	۱/۶۴۴۸	۴/۴۴۹۵	روش ونگ [۲۱]
۱/۵۸۷۴	۴	روش لیو وهمکاران [۷]	۱/۵۷۰۳	۴/۴۶۶۱	روش تراب [۲۵]
۱/۵۸۷۴	۴	روش کانگ-تراب [۸]	۱/۶۱۸۱	۴/۲۳۶۲	روش (۲۸)
۱/۵۸۷۴	۴	روش کینگ [۵]	۱/۶۵۸۱	۴/۵۶۱۸	روش (۲۹)
۱/۵۸۷۴	۴	روش چان [۶]	۱/۶۸۵۹	۴/۷۹۱۵	روش (۳۰)
۱/۵۸۷۴	۴	روش سلیمانی و همکاران [۱۴]	۱/۷۳۶۵	۵/۲۳۶۱	روش (۳۱)
۱/۵۸۷۴	۴	روش کوردرو و همکاران [۱۳]	۱/۸۵۴۰	۶/۳۷۲۳	روش (۵۴)

۶ نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این مقاله، چندین معادله غیرخطی با ریشه‌های ساده را با استفاده از روش‌های تکراری باحافظه حل کرده‌ایم. این معادلات در اکثر مسایل مربوط به علوم مهندسی دیده می‌شوند و در این رشته‌ها کاربرد فراوانی دارند. همان‌طور که از جدول ۱ مشاهده می‌شود بهبود مرتبه همگرایی روش‌های جدید از دیگر روش‌های ذکرشده در

[DOI: 10.52547/jamlu.19.4.137]

این مقاله بالاتر است. بهبود مرتبه همگرایی یک روش دوگامی بهین از ۴ به ۴/۲۳۶۱، ۴/۵۶۱۶، ۴/۷۹۱۲، ۵/۲۳۶۱ و ۶/۳۷۲۳ را همان‌طورکه در بخش چهارم مشاهده شد، در بخش پنجم نیز با استفاده از مثال‌های عددی، به‌صورت عملی اثبات شد. مثال‌های عددی جدول‌های ۳ تا ۷ با نتایج موجود در بخش‌های۳ و۴ این مقاله هماهنگی کامل دارد. جدول ۸ نشان می‌دهد شاخص کارایی روش باحافظه جدید از دیگر روش‌های موجود بالاتر می‌باشد.

در تحقیقات آتی نیز می‌توان موارد زیر را در نظر گرفت:

۱) بحث روی ریشه‌های غیرساده معادلات غیرخطی.

۲) بحث روی ناحیه جذب ریشه‌های معادلات غیرخطی و نقشه‌های دینامیکی آنها.

۳) حل دستگاه‌های معادلات غیرخطی با استفاده از روش‌های تکراری.

۴) بحث در همگرایی موضعی ونیمه موضعی این روش‌ها.

منابع

[1] Ortega, J.M., Rheinboldt, W.C., (1970). Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables. Academic Press, New York.

[2] J.F. Steffensen, (1933). Remarks on iteration, Scandinavian Aktuarietidskr, 16, 64-72.

[3] Ostrowski, A.M., (1960). Solution of Equations and Systems of Equations. Academic Press, New York.

[4] Jarratt, P., (1966). Some fourth order multipoint methods for solving equations. Mathematics of Computation, 20, 434-437.

[5] King, R.F., (1973). A family of fourth-order methods for nonlinear equations. SIAM Journal on Numerical Analysis, 10, 876-879.

[6] Chun, C., (2008). Some fourth-order iterative methods for solving nonlinear equations. Applied Mathematics and Computation, 195, 454-459.

[7] Z., Liu, Q., Zheng, P., Zhao, (2010), A variant of Steffensen's method of fourth-order convergence and its applications, Applied Mathematics and Computation, 216, 1978-1983.

[8] Kung, H.T., Traub, J.F., (1974). Optimal order of one-point and multipoint iteration. Journal of the ACM (JACM), 21, 643-651.

[9] Chun, C., (2005). Iterative methods improving Newton's method by the decomposition method, Computers and Mathematics with Applications, 50, 1559-1568.

[10]. Chun, C., M.Y. Lee, Neta, B., Dzunic, J., (2012), On optimal fourth-order iterative methods free from second derivative and their dynamics, Applied Mathematics and Computation, 218, 6427-6438.

[11] Kansal, M., Kanwar, V., Bhatia, S., (2015). New modifications of Hansen–Patrick's family with optimal fourth and eighth orders of convergence, Applied Mathematics and Computation, 269, 507-519.

[12] Cordero Barbero, A., Hueso Pagoaga, J.L., Martinez Molada, E., Torregrosa Sanchez, J.R., (2013). A new technique to obtain derivative-free optimal iterative methods for solving nonlinear equations. Journal of Computational and Applied Mathematics, 252, 95-102.

[13] Cordero Barbero, A., Maimo, J., Torregrosa Sanchez, JR., Vassileva, M.,(2015). Solving nonlinear problems by Ostrowski-Chun type parametric families. Journal of Mathematical Chemistry, 53(1),430-449.

[14] Soleymani, F., Sharma, R., Li, X., Tohidi, E., (2012). An optimized derivative-free form of the Potra–Ptak method, Mathematical and Computer Modelling, 56, 97-104.

[15] Neta, B., (1983). A new family of higher order methods for solving equations, International Journal of Computer Mathematics, 14(2), 191-195.

[16] Lalehchini, M. J., Lotfi, T., Mahdiani, K., (2020), On Developing an Adaptive Free-Derivative Kung and Traub's Method with Memory, Journal of Mathematical Extension, 14(3), 221-241.

[DOI: 10.52547/jamlu.19.4.137]

[17] Torkashvand, V., (2019). Structure of an Adaptive with Memory Method with Efficiency Index 2, International Journal of Mathematical Modelling & Computations, 9(4), 239-252.
[18] Torkashvand, V., Kazemi, M., (2020). On an Efficient Family with Memory with High Order of Convergence for Solving Nonlinear Equations, International Journal Industrial Mathematics ,12(2), 209-224.
[19] Petkovic, M.S., Neta, B., Petkovic, L.D., Dzunic, J., (2014). Multipoint methods for solving nonlinear equations: A survey. Applied Mathematics and Computation, 226, 635-660.
[20] Petkovic, M.S., Ilic S., Dzunic J., (2010). Derivative free two-point methods with and without memory for solving nonlinear equations, Applied Mathematics and Computation, 217 (5),1887-1895.
[21] Wang, X., (2018). A new accelerating technique applied to a variant of Cordero-Torregrosa method, Journal of Computational and Applied Mathematics, 330, 695-709.
[22] Soleymani, F., Lotfi, T., Tavakoli E., Haghani F.K., (2015). Several iterative methods with memory using- accelerators, Applied Mathematics Computation, 254, 452-458.
[23] Cordero, A., Lotfi, T., Torregrosa, J.R., Assari, P., Mahdiani, K., (2016). Some new bi-accelerator two-point methods for solving nonlinear equations, Computation. Applied. Mathematics. 35, 251-267.
[24] Abbasbandy, S., (2006). Modified homotopy perturbation method for nonlinear equations and comparison with Adomian decomposition method. Applied Mathematics and Computation, 172 (1), 431-438.
[25] Traub, J.F., (1964). Iterative Methods for the Solution of Equations. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
[26] Dzunic, J., Petkovic, M. S., (2012). A cubically convergent Steffensen-like method for solving nonlinear equations, Applied Mathematics Letters, 25, 1881-1886.
[27] Sharifi, S., Siegmund, S., Salimi, M., (2016). Solving nonlinear equations by a derivative-free form of the King’s family with memory, Calcolo, 53 (2), 201-215.
[28] Torkashvand. V, Lotfi, T., Fariborzi Araghi, M.A., (2019). A new family of adaptive methods with memory for solving nonlinear equations, Mathematical Sciences, 13,1-20.
[29] Ahdi Aghdam, R., Rezapour, R., (1389). Development of Newton iterative methods and introduction of fast methods for solving nonlinear equations. Journal of Operations Research in Its Applications, 7 (3), 11-19.
[30] Ahdi Aghdam, R., Qousi, S., (1388). Newton-like iterative methods for nonlinear equation systems. Journal of Operations Research in Its Applications, 6 (23), 1-10.
[31] Ullah, M. Z., Torkashvand, V., Shateyi, Stanford., Asma, M., (2022). Using matrix eigenvalues to construct an iterative method with the highest possible efficiency index two, Mathematics, 10(1370), 1-15.
[32] Torkashvand, V., (2022). A two-step method adaptive with memory with eighth-order for solving nonlinear equations and its dynamic, Computational Methods for Differential Equations, 50(1), 2022, 1007-1026.
[33] Moccari, M., Lotfi, T., Torkashvand, V., (2022). On Stability of a Two-Step Method for a Fourth-degree Family by Computer Designs along with Applications, International Journal of Nonlinear Analysis and Applications (IJNAA), 2022, inpress, 1-15.

[DOI: 10.52547/jamlu.19.4.137]