مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال بیست و یکم، شماره اول (پیاپی ۸۰)، بهار ۰۳، ص ص ۱۰۶-۹۳
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

# رویکردی جدید در حل مسایل تخصیص خاکستری با استفاده از مفهوم عملگرها و رتبه‌بندی اعداد خاکستری

**فرید پور افقی[۱*]، داود درویشی سلوکلایی[۲]**
۱- دکتری ریاضی کاربردی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران
۲-دانشیار، گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

رسید مقاله: ۱۵ شهریور ۱۴۰۲
پذیرش مقاله: ۲۱ دی ۱۴۰۲

## چکیده
از مهم‌ترین مدل‌های کاربردی در مسایل برنامه‌ریزی خطی، مساله تخصیص خطی می‌باشد. با توجه به عدم قطعیت موجود در داده‌ها و اطلاعات مسایل واقعی جهان، نمی‌توان همواره از داده‌های دقیق در ماتریس هزینه مساله تخصیص خطی استفاده کرد. بنابراین گاهی اوقات در موقعیت‌های عملی برای نمایش داده‌های نادقیق ماتریس هزینه مساله تخصیص از نظریه سیستم‌های خاکستری (اعداد خاکستری) استفاده می‌شود. یکی از روش‌های معمول برای حل مساله تخصیص با پارامترهای خاکستری، سفیدسازی اعداد خاکستری می‌باشد. چون تکنیک سفیدسازی تنها یک مدل معادل واضح ارایه می‌کند. بنابراین جواب به‌دست آمده از این روش نمی‌تواند ویژگی‌های عدم قطعیت را حفظ کند. برای این کاستی‌ها، در این مقاله، یک رویکرد مستقیم (بدون سفیدسازی) برای حل مساله تخصیص در محیط خاکستری معرفی شده است. برای این‌منظور، یک روش رتبه‌بندی و یک روش تفاضل جدید برای اعداد خاکستری بازه‌ای ارایه شده است که موجب بهبود جواب و کاهش حجم محاسبات می‌شود. در پایان، یک مثال برای نشان دادن کارایی روش پیشنهادی ارایه می‌شود. تاکید می‌شود، هر زمان که یک مدل برنامه‌ریزی خطی در محیط خاکستری فرموله شود می‌توان از رویکرد پیشنهادی استفاده کرد.

**کلمات کلیدی:** تخصیص، عدد خاکستری، برنامه‌ریزی خطی، ماتریس هزینه، رتبه‌بندی خاکستری.

## ۱ مقدمه
مساله تخصیص یکی از متداول‌ترین مدل‌های برنامه‌ریزی خطی می‌باشد. این مدل حالت خاصی از مساله حمل و نقل می‌باشد. مدل حمل و نقلی که همواره تعداد تقاضای آن (مقدار هر ستون) یک واحد و تعداد عرضه آن (مقدار هر سطر) نیز یک واحد خواهد بود. به عبارت دیگر، اگر مدل تخصیص را در قالب یک تابلوی حمل و

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: f_pourofoghi@pnu.ac.ir




[ DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2135 ]

نقل ارایه دهیم، تابلوی تخصیص دارای m مبدا و n مقصد است که ستون عرضه و سطر تقاضای آن دارای مقادیر مساوی ۱ است. این مدل در صدد یافتن مناسب‌ترین تخصیص برای حداقل کردن هزینه یا حداکثر کردن سود کل می‌باشد [۱]. امروزه از مساله تخصیص برای حل مسایل دنیای واقعی مانند تخصیص n فرد به n شغل، تخصیص n متصدی به n ماشین تولیدی و تخصیص n پروژه به n پیمانکار و غیره استفاده می‌شود[۲]. در این مساله هزینه تخصیص هر خانه به صورت $c_{ij}$ و متغیر تصمیم مربوط به هر خانه با $x_{ij}$ نشان داده می‌شود. پارامترهای $c_{ij}$ از نوع هزینه، زمان و مسافت است. مدل تخصیص دارای کاربردهای متعددی است که از آن جمله می‌توان به تخصیص n فرد به n شغل، تخصیص n متصدی به n ماشین تولیدی، تخصیص n راننده به n اتومبیل، تخصیص n تیم پزشکی به n بیمارستان و واگذاری n پروژه به n پیمانکار اشاره کرد. از ویژگی‌های اساسی مدل تخصیص محدود بودن تعداد سطرها و ستون‌های تابلوی تخصیص، یک به یک بودن حالت تخصیص‌ها، بیان نتیجه هر مساله تخصیص در قالب‌هایی مانند هزینه، سود یا زیان، مسافت و بیان هدف مساله تخصیص به صورت حداقل کردن هزینه یا حداکثر کردن سود کل می‌باشد. در مساله تخصیص کلاسیک، فرض بر این است که تمام پارامترهای مربوط به مساله تخصیص دارای ارزش ثابت هستند. روش‌های مختلفی برای پیدا کردن جواب مساله تخصیص به‌کار می‌رود که می توان به، الگوریتم برنامه‌ریزی خطی[۳]، الگوریتم مجارستانی [۴]، شبکه عصبی [۵] و الگوریتم ژنتیک[۶] اشاره کرد. پژوهشگران روش‌های مختلفی را برای حل انواع مختلف مسایل تخصیص پیشنهاد کرده‌اند. در این زمینه، آلبرچر[1] [۷] یک رفتار مجانبی از مشکلات گلوگاه را معرفی کرد و آلدوس[2] [۸] رفتار مجانبی را در مساله تخصیص تصادفی مطالعه کرد. بسیاری از پژوهشگران رویکردهای مختلف تخصیص درجه دوم را بررسی کرده‌اند[۹]. پاردالس و پیتسولیس[3] تحقیقاتی را در مورد مسایل تخصیص غیرخطی توسعه دادند[۱۰]. به منظور تصمیم‌گیری صحیح باید اطلاعات آماری دقیق و کامل در محل مناسب، موقعیت مشخص، زمان لازم و موضوع معینی در دسترس باشد. از آنجایی که ممکن است اطلاعات در زندگی واقعی دقیق و کامل نباشند، لذا نیاز به تعمیم مساله تخصیص برای داده‌های نادقیق است. برای مواجهه با عدم قطعیت‌ها، روش‌های مختلفی از جمله استفاده اعداد بازه‌ای، فازی، آمار و احتمال و تصادفی توسعه داده شده‌اند. اخیراً، مساله تخصیص تعمیم یافته فازی بسیار رایج شده است. بنابراین، برای در نظر گرفتن عدم قطعیت در موقعیت‌های زندگی واقعی، داده‌های فازی از داده‌های واضح سود بیشتری دارند [۱۱]. اما اگر در مساله‌ای تعداد خبرگان و سطح تجربه کم باشد به نحوی که نتوان توابع عضویت را استخراج کرد، در این صورت نمی‌توان از نظریه‌ی سیستم‌های فازی استفاده کرد. برای مقابله با چنین موقعیت‌هایی؛ به عنوان یک مدل متفاوت برای نمایش عدم قطعیت، پروفسور دنگ[4] نظریه سیستم های خاکستری را در سال ۱۹۸۲ پیشنهاد کرد [۱۲،۱۳]. نظریه سیستم‌های خاکستری بر مطالعه چنین سیستم‌های نامطمئنی با اطلاعات جزیی شناخته‌شده و ناشناخته تمرکز دارد که موضوعات مربوط به ویژگی‌های اطلاعات ضعیف به عنوان موضوعات تحقیقاتی آن در نظر گرفته می‌شود [۱۴]. استفاده نظریه سیستم

[1] Albrecher
[2] Aldous
[3] Pardalos and Pitsoulis
[4] Deng





[ DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2135 ]

خاکستری، رویکردی جدید برای حل مساله تخصیص برای داده‌های نادقیق در اختیار تصمیم گیرندگان قرار می‌دهد. با ترکیب نظریه سیستم‌های خاکستری با مساله تخصیص خطی، مدل تخصیص خطی با پارامترهای خاکستری ایجاد می‌شود. بای [۱۵] روش‌هایی را برای حل مساله تخصیص خاکستری نشان داد. روش‌های که مبنای آن سفیدسازی اعداد خاکستری بود. در این روش مساله تخصیص خاکستری به یک مساله با پارامترهای دقیق تبدیل می‌شود؛ لذا نمی‌تواند به عنوان جوابی مناسب برای حالت نادقیق در نظر گرفته شود. از این رو، برای غلبه بر کاستی آشکاری که در بالا مورد بحث قرار گرفت، در این مقاله، یک رویکرد مستقیم (بدون سفیدسازی) برای حل مساله تخصیص در محیط خاکستری معرفی شده است. برای این‌منظور، یک روش رتبه‌بندی و یک روش تفاضل جدید برای اعداد خاکستری بازه‌ای ارایه شده است که موجب بهبود جواب و کاهش حجم محاسبات می‌شود.

ادامه مقاله به شرح زیر سازماندهی شده است. تعاریف لازم برای نظریه سیستم های خاکستری، که در بخش‌های بعدی مورد نیاز است، در بخش ۲ ارایه شده است. تعریف مساله تخصیص خاکستری در بخش۳ آورده شده است. رویکرد پیشنهادی برای رتبه‌بندی اعداد خاکستری، تفاضل اعداد خاکستری و مسایل مربوط به آن و یک الگوریتم برای حل مساله تخصیص خاکستری بر اساس رویکرد پیشنهادی در بخش ۴ آورده شده است. در بخش ۵، یک مثال عددی با روش پیشنهادی حل‌شده و نتیجه با روش سفیدسازی مقایسه شده است. در نهایت، بخش ۶ شامل نتیجه‌گیری است.

## ۲ نظریه سیستم خاکستری

حل و فصل عدم قطعیت موجود در رفتار سیستم‌ها یکی از موضوعات علمی جذاب بوده و نظریه‌ها و روش‌های متنوعی برای مطالعه سیستم‌های غیرقطعی توسعه داده شده‌اند. نظریه سیستم‌های خاکستری یکی از مهم‌ترین دستاوردهای علمی در زمینه چگونگی استفاده از اطلاعات نادقیق محسوب می‌شود. این نظریه، روشی جدید برای مطالعه مسایلی است که به دلیل داده‌های اندک و اطلاعات محدود، عدم دقت بالایی دارند. نظریه سیستم خاکستری پژوهشگران بسیاری را به خود جلب کرده است [۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴]. در این بخش، به طور مختصر در مورد برخی از تعاریف و مفاهیم مورد نیاز برای مطالعه و تحلیل سیستم خاکستری، بحث خواهد شد.

**تعریف ۲-۱:** عدد خاکستری بازه‌ای، عددی است که برای مطالعه موضوعاتی که دامنه مشخص و ماهیت غیرقطعی دارند تمرکز دارد یعنی، مقدار دقیق آن در دامنه مشخص نیست [۲۴].

$$\otimes x \in \left[\underline{x},\overline{x}\right]=\left\{\underline{x}\le t\le \overline{x}\right\} \qquad , \qquad \underline{x}<\overline{x}$$

**تعریف ۲-۲:** سفیدشده عدد خاکستری بازه‌ای $\otimes x \in \left[\underline{x},\overline{x}\right]$ با نماد $\otimes\hat{x}$ نمایش داده شده و به صورت زیر محاسبه می‌شود [۲۴]:

$$\otimes\hat{x}=\alpha\overline{x}+\left(۱-\alpha\right)\underline{x},\ \alpha\in\left[۰,۱\right]$$





[ DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2135 ]

که به آن سفیدشده وزنی همگن گفته می‌شود.

$\alpha$ وزنی است که برای سفید کردن عدد خاکستری، مورد استفاده قرار می‌گیرد. اگر $\alpha=\frac{۱}{۲}$ باشد، به مقادیر پایین و بالای بازه وزن برابر داده شده و نتیجه حاصل، سفید شده عدد خاکستری بازه‌ای $\otimes x\in[\underline{x},\overline{x}]$ می‌باشد، که به آن مرکز عدد خاکستری بازه‌ای $\otimes x\in[\underline{x},\overline{x}]$ گفته می‌شود.

$$\otimes\hat{x}=\frac{\underline{x}+\overline{x}}{۲}$$

**تعریف ۲-۳:** عدد خاکستری $\otimes x\in[\underline{x},\overline{x}]$ را مثبت می‌نامیم، هرگاه داشته باشیم: $\otimes\hat{x}\geq ۰$

**قضیه ۲-۱:** هر عدد خاکستری بازه‌ای نامنفی می‌تواند به صورت مجموع دو عدد خاکستری بازه‌ای نامنفی کوچک‌تر یا مساوی خودش نوشته شود [۲۵].

$$\forall\ \otimes x\in[\underline{x},\overline{x}],\ \otimes\hat{x}\geq ۰,\ \exists\otimes y\in[\underline{y},\overline{y}],\ \otimes\hat{y}\geq ۰,\ \otimes z\in[\underline{z},\overline{z}],\ \otimes\hat{z}\geq ۰$$

به طوری که:

$$[\underline{x},\overline{x}]=[\underline{y},\overline{y}]+[\underline{z},\overline{z}].$$

## ۳ مساله تخصیص خاکستری

از آن جایی که ممکن است اطلاعات در زندگی واقعی دقیق و کامل نباشند، لذا نیاز به تعمیم مساله تخصیص برای داده‌های نادقیق داریم. برای ساختن یک مدل واقعی، به منظور حداقل کردن هزینه یا حداکثر کردن سود کل، استفاده ازمسایل تخصیص با پارامتر غیرقطعی مناسب‌تر است. عدم دقت موجود در پارامترها بدان معنی است که اطلاعات مربوط به این پارامترها کامل نیست. با این حال، حتی با اطلاعات ناقص، مدل مورد استفاده به طور معمول قادر به ارایه یک مقدار خاکستری برای پارامترها است. بنابراین، استفاده از مسایل تخصیص خاکستری برای مدل‌سازی و حل مسایل دنیای واقعی مناسب‌تر است. تعاریف و مفاهیم استفاده شده در این بخش از [۲، ۱۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸] می‌باشد. مساله تخصیص خاکستری به صورت جدول ۱ نمایش داده می‌شود.

**جدول ۱.** ماتریس هزینه مساله تخصیص خاکستری

| مقاصد / مبادی | ۱ | ۲ | … | j | … | n | عرضه |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | $\otimes c_{۱۱}$ | $\otimes c_{۱۲}$ | … | $\otimes c_{۱j}$ | … | $\otimes c_{۱n}$ | ۱ |
| ۲ | $\otimes c_{۲۱}$ | $\otimes c_{۲۲}$ | … | $\otimes c_{۲j}$ | … | $\otimes c_{۲n}$ | ۱ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| i | $\otimes c_{i۱}$ | $\otimes c_{i۲}$ | … | $\otimes c_{ij}$ | … | $\otimes c_{in}$ | ۱ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| m | $\otimes c_{n۱}$ | $\otimes c_{n۲}$ | … | $\otimes c_{nj}$ | … | $\otimes c_{nn}$ | ۱ |
| تقاضا | ۱ | ۱ | … | ۱ | … | ۱ | |





[ DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2135 ]

مدل ریاضی مساله تخصیص خاکستری به شرح زیر ارایه می‌شود:

$$\begin{aligned} & Min\ \otimes Z =_G \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \otimes c_{ij} x_{ij} \\ & s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,2,....,m \\ & \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j = 1,2,....,n \\ & \qquad x_{ij} = 0 \ or\ 1, \quad i = 1,2,....,m\ ,\ j = 1,2,....,n \end{aligned} \tag{1}$$

به‌طوری که $\otimes c_{ij}$ برای هر $i$ و $j$، اعداد خاکستری بازه‌ای هستند.

در این‌جا فرض بر این است که $\otimes Z$ می‌نیمم مقدار تابع هدف، $\otimes c_{ij} >_G \otimes 0$ها برای هر $i = 1,2,...,m$ و $j = 1,2,...,n$ ضرایب هزینه تابع هدف، برای هر $i = 1,2,...,m$ میزان عرضه مبداء $i$ام برابر یک و برای هر $j = 1,2,...,n$ میزان تقاضای مقصد $j$ام برابر یک می‌باشد. در ضمن $x_{ij} = 1$ است هرگاه منبع $i$ام به مقصد $j$ام اختصاص یابد و $x_{ij} = 0$ است هرگاه منبع $i$ام به مقصد $j$ام اختصاص نیابد. به عبارت دیگر

$$\begin{aligned} & Min\ \otimes Z =_G \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \otimes\left[\underline{c}_{ij}, \overline{c}_{ij}\right] \times x_{ij} \\ & s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,2,....,m \\ & \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j = 1,2,....,n \\ & \qquad x_{ij} = 0 \ or\ 1 \quad i = 1,2,....,m\ ;\ j = 1,2,....,n \end{aligned} \tag{2}$$

**تعریف ۳- ۱:** یک مساله تخصیص خاکستری، متعادل است هرگاه تعداد سطرها (عرضه‌ها) برابر با تعداد ستون‌ها (تقاضاها) باشد.

**تعریف ۳- ۲:** برای مساله تخصیص خاکستری رابطه (۲) دو مساله تخصیص زیر را می توان در نظر گرفت.

مساله تخصیص با کران پایین که به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} & Min\ Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \underline{c}_{ij} \times x_{ij} \\ & s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,2,....,m \\ & \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j = 1,2,....,n \\ & \qquad x_{ij} = 0 \ or\ 1 \quad i = 1,2,....,m\ ;\ j = 1,2,....,n \end{aligned} \tag{3}$$

مساله تخصیص با کران بالاکه به صورت زیر خواهد بود:

$$
\begin{aligned}
&Min\ Z = \sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{n}\overline{c}_{ij}\times x_{ij} \\
&s.t. \qquad \sum_{j=۱}^{n} x_{ij} = ۱, \quad i=۱,۲,....,m, \\
&\qquad\quad \sum_{i=۱}^{m} x_{ij} = ۱, \quad j=۱,۲,....,n, \\
&\qquad\quad x_{ij} = ۰ \ or \ ۱ \quad i=۱,۲,....,m\ ;\ j=۱,۲,....,n
\end{aligned}
\tag{۴}
$$

**قضیه۳-۱:** [۶] در مساله تخصیص رابطه (۲) اگر جواب بهینه مساله (۳) و مساله (۴) به ترتیب $\underline{z}$ و $\overline{z}$ باشند، آنگاه خواهیم داشت:

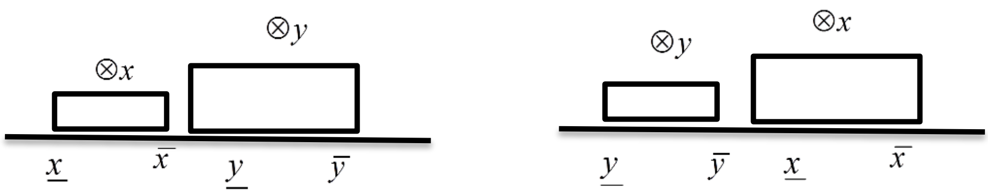
۱. $\underline{z} \le \overline{z}$

۲. $\otimes c = \left[\underline{z}, \overline{z}\right]$ جواب بهینه مساله تخصیص خاکستری نامیده می‌شود.

## ٤ رتبه‌بندی پیشنهادی اعداد خاکستری

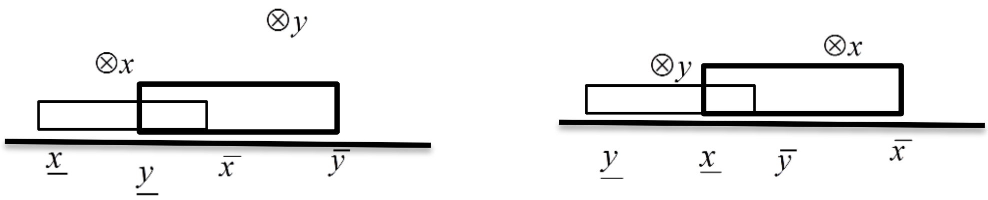
فرض کنید $\otimes x \in \left[\underline{x}, \overline{x}\right]$ و $\otimes y \in \left[\underline{y}, \overline{y}\right]$ دو عدد خاکستری بازه‌ای دلخواه باشند. در این صورت می‌توان آنها را به شکل زیر طبقه‌بندی کرد:

۱) بازه‌هایی که جدا از هم هستند و اشتراکی ندارند.




**شکل ۱.** بازه‌هایی که با هم اشتراک ندارند.

۲) بازه‌هایی که اشتراک جزیی دارند.

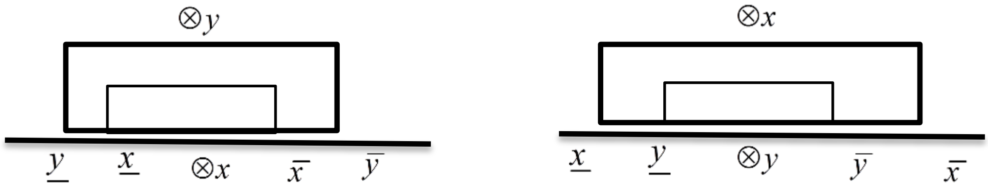



**شکل ۲.** بازه‌هایی که با هم اشتراک جزیی دارند.

۳) بازه‌هایی که کاملاً تداخل دارند.



[ DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2135 ]




**شکل۳.** بازه‌هایی که با هم اشتراک کامل دارند.

**تعریف ٤-۱:** رابطه ترتیب بین دو عدد خاکستری بازه‌ای نامنفی $\otimes x \in [\underline{x}, \bar{x}]$ و $\otimes y \in [\underline{y}, \bar{y}]$ را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$\otimes x \geq_G \otimes y$ اگر و تنها اگر عدد خاکستری بازه‌ای نامنفی $\otimes z \in [\underline{z}, \bar{z}]$ وجود داشته باشد به‌طوری که

$$\otimes[\underline{x}, \bar{x}] = \otimes[\underline{y}, \bar{y}] + \otimes[\underline{z}, \bar{z}].$$

## ٤-۱ بررسی رتبه‌بندی پیشنهادی درحالت‌های مختلف

**حالت اول:** فرض کنید $\otimes x \in [\underline{x}, \bar{x}]$ و $\otimes y \in [\underline{y}, \bar{y}]$ دو عدد خاکستری بازه‌ای نامنفی باشند به طوری که $\bar{x} \leq \underline{y}$. در این صورت خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} \otimes[\underline{y}, \bar{y}] = \otimes[\underline{x}, \bar{x}] + \otimes[\underline{y} - \underline{x}, \bar{y} - \bar{x}] \\ \otimes[\underline{y} - \underline{x}, \bar{y} - \bar{x}] \geq \otimes ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow \otimes[\underline{y}, \bar{y}] \geq \otimes[\underline{x}, \bar{x}]$$

**مثال٤-۱:** فرض کنید $\otimes x = \otimes[۲,۳]$ و $\otimes y = \otimes[۵,۷]$ دو عدد خاکستری باشند، در این صورت خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} \otimes[۵,۷] = \otimes[۲,۳] + \otimes[۵-۲, ۷-۳] \\ \otimes[۵-۲, ۷-۳] = \otimes[۳,۴] \geq \otimes ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow \otimes[۵,۷] \geq \otimes[۲,۳] \qquad (۵)$$

**حالت دوم:** فرض کنید $\otimes x \in [\underline{x}, \bar{x}]$ و $\otimes y \in [\underline{y}, \bar{y}]$ دو عدد خاکستری بازه‌ای نامنفی باشند به طوری که $\underline{x} \leq \underline{y} \leq \bar{x} \leq \bar{y}$،

در این صورت خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} \otimes[\underline{y}, \bar{y}] = \otimes[\underline{x}, \bar{x}] + \otimes[\underline{y} - \underline{x}, \bar{y} - \bar{x}] \\ \otimes[\underline{y} - \underline{x}, \bar{y} - \bar{x}] \geq \otimes ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow \otimes[\underline{y}, \bar{y}] \geq \otimes[\underline{x}, \bar{x}]$$

**مثال٤-۲:** فرض کنید $\otimes x = \otimes[۲,۵]$ و $\otimes y = \otimes[۳,۸]$ دوعدد خاکستری باشند، در این صورت خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} \otimes[۳,۸] = \otimes[۲,۵] + \otimes[۳-۲, ۸-۵] \\ \otimes[۳-۲, ۸-۵] = \otimes[۱,۳] \geq \otimes ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow \otimes[۳,۸] \geq \otimes[۲,۵] \qquad (۶)$$




[ DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2135 ]

**حالت سوم:** فرض کنید $\otimes x \in [\underline{x},\overline{x}]$ و $\otimes y \in [\underline{y},\overline{y}]$ دو عدد خاکستری بازه‌ای نامنفی باشند به طوری که $\underline{y} \le \underline{x} \le \overline{x} \le \overline{y}$،

در این صورت خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} \otimes[\underline{y},\overline{y}] = \otimes[\underline{x},\overline{x}] + \otimes[\underline{y}-\underline{x},\overline{y}-\overline{x}] \\ \otimes[\underline{y}-\underline{x},\overline{y}-\overline{x}] \ge \otimes۰ \end{array}\right\} \Rightarrow \otimes[\underline{y},\overline{y}] \ge \otimes[\underline{x},\overline{x}]$$

**مثال ٤-٣:** فرض کنید $\otimes x = \otimes[۳,۵]$ و $\otimes y = \otimes[۲,۷]$ دو عدد خاکستری باشند، در این صورت خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} \otimes[۲,۷] = \otimes[۳,۵] + \otimes[۲-۳,۷-۵] \\ \otimes[۲-۳,۷-۵] = \otimes[-۱,۲] \ge \otimes۰ \end{array}\right\} \Rightarrow \otimes[۲,۷] \ge \otimes[۳,۵] \qquad (۷)$$

### ٤-٢ روش تفاضل معمولی برای اعداد بازه‌ای نامنفی $\otimes x \in [\underline{x},\overline{x}]$ و $\otimes y \in [\underline{y},\overline{y}]$

فرض کنید $\otimes x \in [\underline{x},\overline{x}]$ و $\otimes y \in [\underline{y},\overline{y}]$ دو عدد خاکستری بازه‌ای نامنفی باشند. بنا بر تعریف تفاضل اعداد خاکستری بازه‌ای داریم:

$$\otimes x - \otimes y = \otimes x + (-\otimes y) = [\underline{x}-\overline{y},\overline{x}-\underline{y}]$$

$$\otimes[\underline{x},\overline{x}] - \otimes[\underline{y},\overline{y}] = \otimes[\underline{x},\overline{x}] + \otimes[-\overline{y},-\underline{y}] = \otimes[\underline{x}-\overline{y},\overline{x}-\underline{y}]$$

**مثال ٤-٤:** فرض کنید $\otimes x = \otimes[\underline{x},\overline{x}] = \otimes[۲,۵]$ و $\otimes y = \otimes[\underline{y},\overline{y}] = \otimes[۳,۸]$ اعداد خاکستری باشند

در این صورت خواهیم داشت:

$$\otimes[۳,۸] - \otimes[۲,۵] = \otimes[۳,۸] + \otimes[-۵,-۲] = \otimes[-۲,۶] \qquad (۸)$$

### ٤-٣ تفاضل پیشنهادی برای اعداد خاکستری بازه‌ای نامنفی $\otimes x \in [\underline{x},\overline{x}]$ و $\otimes y \in [\underline{y},\overline{y}]$

۱. ابتدا با استفاده از روش رتبه‌بندی جدید، تعیین کنید کدام عدد بزرگ‌تر است.

۲. با استفاده از قضیه ۱، رابطه بین اعداد خاکستری بازه‌ای نامنفی $\otimes x \in [\underline{x},\overline{x}]$ و $\otimes y \in [\underline{y},\overline{y}]$ را با داشتن عدد خاکستری بازه‌ای نامنفی $\otimes[\underline{z},\overline{z}]$ به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\otimes[\underline{x},\overline{x}] = \otimes[\underline{y},\overline{y}] + \otimes[\underline{z},\overline{z}]$$

۳. تفاضل اعداد را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$\otimes[\underline{x},\overline{x}] - \otimes[\underline{y},\overline{y}] = \otimes[\underline{y},\overline{y}] + \otimes[\underline{z},\overline{z}] - \otimes[\underline{y},\overline{y}] = \otimes[\underline{z},\overline{z}]$$

**مثال ٤-٥:** فرض کنید $\otimes x = \otimes[\underline{x},\overline{x}] = \otimes[۲,۵]$ و $\otimes y = \otimes[\underline{y},\overline{y}] = \otimes[۳,۸]$ اعداد خاکستری باشند،

در این صورت خواهیم داشت:

$$\otimes[۳,۸] = \otimes[۲,۵] + \otimes[۱,۳] \qquad (۹)$$





[ DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2135 ]

حال تفاضل این دو عدد را به صورت زیر به‌دست خواهد آمد.

$$\otimes[۳,۸]-\otimes[۲,۵]=\otimes[۲,۵]+\otimes[۱,۳]-\otimes[۲,۵]=\otimes[۱,۳] \qquad (۱۰)$$

حال جواب (۱۰) در مقایسه با جواب (۸) دارای مرکز یکسان وشعاع کوچک‌تر می‌باشد لذا جواب بهتری می‌باشد.

**لم ۱:** تفاضل هر عدد خاکستری از خودش برابر صفر است.

**اثبات:** فرض کنید عدد خاکستری $\otimes x\in[\underline{x},\overline{x}]$ داده شده است. در این‌صورت، طبق روش پیشنهادی داریم:

$$\otimes[\underline{x},\overline{x}]=\otimes[\underline{x},\overline{x}]+\otimes[۰,۰]$$

$$\otimes[\underline{x},\overline{x}]-\otimes[\underline{x},\overline{x}]=\otimes[\underline{x},\overline{x}]+\otimes[۰,۰]-\otimes[\underline{x},\overline{x}]=\otimes[۰,۰]$$

## ٤-٤ الگوریتم پیشنهادی حل مساله تخصیص مبتنی بر رتبه‌بندی و تفاضل پیشنهادی اعداد خاکستری بازه‌ای نامنفی

از میان روش‌های مختلفی که برای حل مسایل تخصیص ارایه‌شده، روش مجارستانی[۱۳]، روشی کارآمد در حالت متوازن است. در این قسمت برای حل مساله تخصیص با پارامترهای خاکستری برای به‌دست آوردن حداقل هزینه کل خاکستری، الگوریتم زیر پیشنهاد شده است.

مساله تخصیص متوازن با پارامترهای خاکستری را در نظر بگیرید.

**گام اول:** با استفاده از رتبه‌بندی جدید پیشنهادی (۴) کوچک‌ترین عدد خاکستری در هر سطر را تعیین کنید.

**گام دوم:** با استفاده از روش جدید پیشنهادی تفاضل دو عدد خاکستری بازه‌ای (۴-۳)، کوچک‌ترین عدد خاکستری بازه‌ای هر سطر را از تمام عددهای خاکستری آن سطر کم کنید.

**گام سوم:** با استفاده از روش جدید پیشنهادی تفاضل دو عدد خاکستری بازه‌ای (۴-۳)، کوچک‌ترین عدد خاکستری بازه‌ای هر ستون را از تمام عددهای خاکستری آن ستون کم کنید.

**گام چهارم:** اولین ماتریس هزینه فرصت اصلاح‌شده خاکستری را بنویسید.

**گام پنجم:** حداقل خطوط افقی و عمودی لازم برای پوشش همه اعداد خاکستری بازه‌ای صفر را در ماتریس هزینه فرصت اصلاح‌شده خاکستری تعیین کنید.

**گام ششم:** اگر حداقل خطوط افقی و عمودی به‌دست آمده در گام پنجم برابر با بعد ماتریس هزینه فرصت اصلاح شده خاکستری باشد، مساله حل‌شده و جواب بهینه به‌دست آمده است.

**گام هفتم:** اگر حداقل خطوط افقی و عمودی به‌دست آمده در گام پنجم برابر با بعد ماتریس هزینه فرصت اصلاح‌شده خاکستری نباشد، کوچک ترین عدد خاکستری بازه‌ای ماتریس هزینه فرصت خاکستری اصلاح‌شده را که به وسیله هیچ یک از خطوط عمودی و افقی پوشش داده نشده را با استفاده از روش رتبه‌بندی پیشنهادی (۴) پیدا کرده و آن را از همه اعداد بدون پوشش بر طبق روش پیشنهادی (۴-۳) کسر کرده و به اعداد محل تقاطع خطوط پوشش اضافه کنید و به گام پنجم برگردید.





[ DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2135 ]

## ۵ مثال کاربردی

در این بخش مثالی برای نشان دادن کارایی روش ارایه‌شده برای حل مساله تخصیص خاکستری آورده شده است.

**مثال ۱:** یک شرکت تولیدی می‌خواهد سه شغل $J_۱$ و $J_۲$ و $J_۳$ را به سه نفر $P_۱$ و $P_۲$ و $P_۳$ تخصیص دهد. ولی به دلیل تغییر شرایط اقتصادی حاکم بر جامعه تعیین مقدار دقیق هزینه تخصیص امکان‌پذیر نمی‌باشد. بنابراین هزینه‌ها را به صورت پارامترهای نادقیق در نظر گرفته است. جدول ۲ بیانگر هزینه تخصیص هر فرد به هر شغل بر اساس اعداد خاکستری بازه‌ای می‌باشد. مساله را طوری حل کنید که هزینه کل تخصیص افراد به شغل‌ها حداقل گردد.

**جدول ۲.** ماتریس هزینه بر اساس اعداد خاکستری

| | $J_۱$ | $J_۲$ | $J_۳$ |
|---|---|---|---|
| $P_۱$ | $\otimes[۲,۶]$ | $\otimes[۷,۱۲]$ | $\otimes[۴,۸]$ |
| $P_۲$ | $\otimes[۸,۱۳]$ | $\otimes[۱۰,۱۵]$ | $\otimes[۵,۱۰]$ |
| $P_۳$ | $\otimes[۲,۶]$ | $\otimes[۶,۱۰]$ | $\otimes[۹,۱۲]$ |

با استفاده از رتبه‌بندی جدید پیشنهادی (۴) کوچک‌ترین عدد خاکستری در هر سطر را تعیین کنید.

سطر اول؛

$$\left.\begin{array}{l}\otimes[۷,۱۲]=\otimes[۲,۶]+\otimes[۵,۶]\\ \otimes[۴,۸]=\otimes[۲,۶]+\otimes[۲,۲]\end{array}\right\}\Rightarrow \min\{\otimes[۲,۶],\otimes[۷,۱۲],\otimes[۴,۸]\}=\otimes[۲,۶]$$

سطر دوم؛

$$\left.\begin{array}{l}\otimes[۸,۱۳]=\otimes[۵,۱۰]+\otimes[۳,۳]\\ \otimes[۱۰,۱۵]=\otimes[۵,۱۰]+\otimes[۵,۵]\end{array}\right\}\Rightarrow \min\{\otimes[۸,۱۳],\otimes[۱۰,۱۵],[۵,۱۰]\}=\otimes[۵,۱۰]$$

سطر سوم؛

$$\left.\begin{array}{l}\otimes[۶,۱۰]=\otimes[۲,۶]+\otimes[۴,۴]\\ \otimes[۹,۱۲]=\otimes[۲,۶]+\otimes[۷,۶]\end{array}\right\}\Rightarrow \min\{\otimes[۲,۶],\otimes[۶,۱۰],\otimes[۹,۱۲]\}=\otimes[۲,۶]$$

**جدول ۳.** ماتریس هزینه بر اساس اعداد خاکستری بعد از تعیین مینیمم هر سطر

| | $J_۱$ | $J_۲$ | $J_۳$ | می‌نیمم هر سطر |
|---|---|---|---|---|
| $P_۱$ | $\otimes[۲,۶]$ | $\otimes[۷,۱۲]$ | $\otimes[۴,۸]$ | $\otimes[۲,۶]$ |
| $P_۲$ | $\otimes[۸,۱۳]$ | $\otimes[۱۰,۱۵]$ | $\otimes[۵,۱۰]$ | $\otimes[۵,۱۰]$ |
| $P_۳$ | $\otimes[۲,۶]$ | $\otimes[۶,۱۰]$ | $\otimes[۹,۱۲]$ | $\otimes[۲,۶]$ |





[ DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2135 ]

حال با استفاده از روش جدید پیشنهادی تفاضل دو عدد خاکستری بازه‌ای (۴-۳)، کوچک‌ترین عدد خاکستری بازه‌ای هر سطر را از تمام عددهای خاکستری آن سطر کم کنید.

برای سطر اول نتایج زیر به‌دست می‌آید.

$$\otimes[۲,۶]-\otimes[۲,۶]=\otimes[۰,۰]$$
$$\otimes[۷,۱۲]-\otimes[۲,۶]=\otimes[۲,۶]+\otimes[۵,۶]-\otimes[۲,۶]=\otimes[۵,۶]$$
$$\otimes[۴,۸]-\otimes[۲,۶]=\otimes[۲,۶]+\otimes[۲,۲]-\otimes[۲,۶]=\otimes[۲,۲]$$

اگر برای سطر دوم و سطر سوم نیز به همین ترتیب عمل کنیم نتایج جدول ۴ به‌دست خواهد آمد.

**جدول ٤.** ماتریس هزینه پس از کسر کوچک‌ترین عدد خاکستری از عناصر هر سطر

| | $J_۱$ | $J_۲$ | $J_۳$ |
|---|---|---|---|
| $P_۱$ | $\otimes[۰,۰]$ | $\otimes[۵,۶]$ | $\otimes[۲,۲]$ |
| $P_۲$ | $\otimes[۳,۳]$ | $\otimes[۵,۵]$ | $\otimes[۰,۰]$ |
| $P_۳$ | $\otimes[۰,۰]$ | $\otimes[۴,۴]$ | $\otimes[۷,۶]$ |

با استفاده از رتبه‌بندی جدید پیشنهادی (۴) کوچک‌ترین عدد خاکستری در هر ستون جدول ۴ را تعیین کنید.

**جدول ٥.** ماتریس هزینه بر اساس اعداد خاکستری بعد از تعیین مینیمم هر ستون

| | $J_۱$ | $J_۲$ | $J_۳$ |
|---|---|---|---|
| $P_۱$ | $\otimes[۰,۰]$ | $\otimes[۵,۶]$ | $\otimes[۲,۲]$ |
| $P_۲$ | $\otimes[۳,۳]$ | $\otimes[۵,۵]$ | $\otimes[۰,۰]$ |
| $P_۳$ | $\otimes[۰,۰]$ | $\otimes[۴,۴]$ | $\otimes[۷,۶]$ |
| می‌نیمم هر ستون | $\otimes[۰,۰]$ | $\otimes[۴,۴]$ | $\otimes[۰,۰]$ |

با استفاده از روش جدید پیشنهادی تفاضل دو عدد خاکستری بازه‌ای (۴-۳)، کوچک‌ترین عدد خاکستری بازه‌ای هر ستون را از تمام عددهای خاکستری آن ستون کم کنید.

چون کوچک‌ترین عدد در ستون اول و سوم $\otimes[۰,۰]$ است، لذا عناصر آن دو ستون هیچ تغییری نخواهند کرد و فقط در ستون دوم عملیات کسر کوچک‌ترین عدد خاکستری بازه‌ای از تمام عددهای خاکستری آن ستون انجام خواهد شد.

$$\otimes[۵,۶]-\otimes[۴,۴]=\otimes[۴,۴]+\otimes[۱,۲]-\otimes[۴,۴]=\otimes[۱,۲]$$
$$\otimes[۵,۵]-\otimes[۴,۴]=\otimes[۴,۴]+\otimes[۱,۱]-\otimes[۴,۴]=\otimes[۱,۱]$$
$$\otimes[۴,۴]-\otimes[۴,۴]=\otimes[۰,۰]$$



[ DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2135 ]

**جدول ٦.** ماتریس هزینه پس از کسر کوچک‌ترین عدد خاکستری هر ستون از عناصر آن

| | $J_۱$ | $J_۲$ | $J_۳$ |
|---|---|---|---|
| $P_۱$ | $\otimes[۰,۰]$ | $\otimes[۱,۲]$ | $\otimes[۲,۲]$ |
| $P_۲$ | $\otimes[۳,۳]$ | $\otimes[۱,۱]$ | $\otimes[۰,۰]$ |
| $P_۳$ | $\otimes[۰,۰]$ | $\otimes[۰,۰]$ | $\otimes[۷,۶]$ |

از آنجا که حداقل تعداد خطوط پوششی برابر با بعد ماتریس هزینه است، آن را با روش مجارستانی حل کنید تا تخصیص بهینه را به شرح زیر دریافت کنید.

$$P_۱ \rightarrow J_۱ \quad , \quad P_۲ \rightarrow J_۳ \quad , \quad P_۳ \rightarrow J_۲$$

بنابراین می‌نیمم کل هزینه تخصیص سه فرد برای سه شغل به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\otimes Z =_G \otimes[۲,۶]+\otimes[۵,۱۰]+\otimes[۶,۱۰]=_G \otimes[۱۳,۲۶].$$

برای نشان دادن اثربخشی روش پیشنهادی، نتایج به‌دست‌آمده از روش پیشنهادی برای مثال ۱ را با جواب به‌دست‌آمده از روش سفیدسازی مقایسه می‌کنیم.

## ۵-۱ حل مثال بالا با استفاده از روش سفیدسازی

**جدول ۷.** ماتریس هزینه فرصت بر اساس سفیدسازی اعداد خاکستری

| | $J_۱$ | $J_۲$ | $J_۳$ |
|---|---|---|---|
| $P_۱$ | ۴ | ۹/۵ | ۶ |
| $P_۲$ | ۱۰/۵ | ۱۲/۵ | ۷/۵ |
| $P_۳$ | ۴ | ۸ | ۱۰/۵ |

**جدول ۸.** ماتریس هزینه فرصت با حداقل خطوط پوششی

| | $J_۱$ | $J_۲$ | $J_۳$ |
|---|---|---|---|
| $P_۱$ | ۰ | ۱/۵ | ۲ |
| $P_۲$ | ۳ | ۱ | ۰ |
| $P_۳$ | ۰ | ۰ | ۶/۵ |

از آنجا که حداقل تعداد خطوط پوششی برابر با بعد ماتریس هزینه فرصت است، آن را با روش مجارستانی حل کنید تا تخصیص بهینه را به شرح زیر دریافت کنید.

$$P_۱ \rightarrow J_۱ \quad , \quad P_۲ \rightarrow J_۳ \quad , \quad P_۳ \rightarrow J_۲$$

بنابراین می‌نیمم کل هزینه تخصیص سه فرد برای سه شغل به‌صورت زیر خواهد بود.

$$Z = ۴+۷/۵+۸=۱۹/۵.$$

### ۵-۲ مقایسه نتایج به‌دست آمده از روش پیشنهادی و روش سفیدسازی

**جدول ۹.** جدول مقایسه جواب به‌دست آمده از روش پیشنهادی و روش سفیدکننده

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| روش پیشنهادی | $P_۱ \to J_۱$ | $P_۲ \to J_۳$ | $P_۳ \to J_۲$ | $\otimes Z =_G \otimes[۱۳,۲۶]$ |
| روش سفیدسازی | $P_۱ \to J_۱$ | $P_۲ \to J_۳$ | $P_۳ \to J_۲$ | $Z = ۱۹/۵$ |

جواب به‌دست آمده از روش سفیدسازی، تنها تقریبی از جواب مساله، با پارامترهای خاکستری است و نمی تواند عدم قطعیت پارامترهای خاکستری مساله اصلی را در جواب نهایی منعکس کند.

## ۶ نتیجه‌گیری

به دلیل عدم قطعیت موجود در داده‌ها و اطلاعات مسایل واقعی جهان، نمی‌توان همواره از داده‌های دقیق در مسایل استفاده کرد. با توجه به این‌که یکی از مسایل کاربردی موجود در دنیای واقعی مساله تخصیص است و به دلیل تغییر شرایط اقتصادی حاکم بر جامعه تعیین مقدار دقیق هزینه تخصیص امکان‌پذیر نمی‌باشد باید هزینه‌ها را به صورت پارامترهای نادقیق در نظر گرفت. در این مطالعه، مساله کاربردی تخصیص با پارامترهای نادقیق را که در محیط خاکستری فرموله‌شده مورد بررسی قرار دادیم. برای حل این مساله یک رویکرد جدید را پیشنهاد کردیم. در این رویکرد یک روش رتبه‌بندی و یک روش تفاضل جدید برای اعداد خاکستری بازه‌ای معرفی شد. کاربرد روش رتبه‌بندی و روش تفاضل جدید برای حالت‌های مختلف اعداد خاکستری بازه‌ای نشان داده شد. همچنین، نشان دادیم که با استفاده از رویکرد جدید می‌توان مساله تخصیص با پارامترهای بازه‌ای خاکستری را بدون تبدیل آن به یک مساله کلاسیک معادل حل کرد. ضمنا در این روش خاکستری بودن همه پارامترها در مراحل حل حفظ می‌شود و این باعث می‌شود تا عدم قطعیت داده‌های ورودی در نتایج خروجی نمایان باشد. علاوه برآن حجم محاسبات کاهش و بازه جواب به‌دست آمده نیز بهبود می‌یابد. در پایان تاکید می کنیم که روش رتبه‌بندی و روش تفاضل جدید ارایه‌شده برای اعداد خاکستری بازه‌ای که در این مقاله مورد بحث قرار گرفته، می‌تواند در پژوهش‌های بعدی برای مدل‌های حمل و نقل در محیط خاکستری استفاده شود.

## منابع


[1] Ramesh Kumar, A., and Deepa, S. (2014). Restrictions of interval assignment problem using Hungarian method, International Journal in IT and Engineering, 2(12), 56-61.

[2] Thorani, Y.L. and Ravi Shankar, N. (2013). Fuzzy assignment problem with generalized fuzzy numbers, Applied Mathematical Sciences, 7(71), 3511-3537.

[3] Mcginnis, L.F. (1983). Implementation and testing of a primal-dual algorithm for the assignment problem, Operations Research, 31(2), 277-291.

[4] Kuhn, H.W. (1955). The Hungarian method for the assignment problem, Naval Research Logistics Quarterly, 2, 83-97.

[5] Eberhardt, S.P., Duad Kerns, T.A., Brown T.X. and Thakoor, A.P. (1991). Competitive neural architecture for hardware solution to the assignment problem, Neural Networks, 4(4), 431-442.

[6] Avis, D., and Devroye, L. (1985). An analysis of a decomposition heuristic for the assignment problem, Operations Research Letters, 3(6), 279-283.

[7] Albrecher, H. (2005). A note on the asymptotic behavior of bottleneck problems, Operations Research Letters, 33, 183–186.






[ DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2135 ]

[8] Aldous, D. (1992). Asymptotic in the random assignment problem, Probability Theory and Related Fields, 93, 507–534.
[9] Anstreicher, K.M. (2003). Recent advances in the solution of quadratic assignment problems, Mathematical Programming, 97(1-2), 27–42.
[10] Pardalos, P.M. and Pitsoulis, L. (2000). Nonlinear assignment problems: Algorithms and applications, Kluwer Academic Publishers.
[11] Ramesh, G. and Ganesan, K. (2015). Assignment problem with generalized interval arithmetic, International Journal of Scientific and Engineering Research, 6(3), 82-85.
[12] Deng, J.L. (1982). The control problems of grey systems, Systems and Control Letters, 15, 288–294.
[13] Deng, J.L. (1982). Introduction to grey system theory, The Journal of Grey Systems, 1(1), 1-24.
[14] Li, Q.X. and Lin, Y. (2014). A briefing to grey systems theory, Journal of Systems Science and Information, 2(2), 178-192.
[15] Bai, G. (1992). Grey assignment problem, Chinese Journal of Operation Research, 11(2), 67–69.
[16] Darvishi, D. (2019). Some duality results in grey linear programming problem, Journal of Operational Research and Its Applications, 16(3), 55-68.
[17] Darvishi, D., Forrest, J. and Liu, S., (2019). A comparative analysis of grey ranking approaches, Grey Systems: Theory and Application, 9(4), 472-487.
[18] Gu, S.-q., Liu, Y. and Diao, W. (2023). A multi-objective grey hierarchical group consensus model and its application, Grey Systems: Theory and Application, 13(3), 427-444.
[19] Li, M., Zhang, J. and Shen, Z. (2023). Three-parameter interval grey number dynamic TOPSIS method based on comprehensive similarity, Grey Systems: Theory and Application, 13 (3), 464-487.
[20] Li, L. and Li, X. (2023). Some properties of generalized greyness of interval grey number, Grey Systems: Theory and Application, 13 (3), 576-593.
[21] Li, B., Zhang, S., Li, W. and Zhang, Y. (2022). Application progress of grey model technology in agricultural science. Grey Systems: Theory and Application, 12 (4), 744-784.
[22] Liu, S., Tao, Y., Xie, N., Tao, L. and Hu, M. (2022). Advance in grey system theory and applications in science and engineering, Grey Systems: Theory and Application, 12 (4), 804-823.
[23] Nasseri, S.H. and Darvishi, D. (2018). Duality results on grey linear programming problems, The Journal of Grey System, 30(3), 127-142.
[24] Saffar Ardabili, J., Darvishi, D. and PourOfoghi, F. (2020). Application of center and width concepts to solving grey linear programming, International Journal of Applied and Computational Mathematics, 6(49), 1-12.
[25] Pourofoghi, F., Darvishi, D. and Saffar Ardabili, J. (2020). A New Approach to Finding the Answer to Transportation Problems with Grey Parameters, Journal of Operations Research in its Applications, 18(2), 59-73.
[26] Bai, G. Z. (2009). Grey assignment problems, Fuzzy Information and Engineering, 54, 245-250.
[27] Bashiri, M., Badri, H., and Hejazi, T.H. (2011). Selecting optimum maintenance strategy by fuzzy interactive linear assignment method, Applied Mathematical Modelling, 35(1), 152-164.
[28] Majumdar, S. (2013). Interval linear assignment problems, Universal Journal of Applied Mathematics, 1(1), 14-16.



[ DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2135 ]