مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال بیست و یکم، شماره دوم (پیاپی ۸۱)،تابستان ۰۳، ص ص ۱۶-۱
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

یک روش مبتنی بر استانداردسازی برای حل مسایل برنامه‌ریزی کسری خطی تماما فازی و کاربرد آن در تولید محصولات و فرآورده‌های چوبی

نعمت اله تقی نژاد[۱*]، الهام مهدی زاده[۲]، مهرداد غزنوی[۳]
۱- استادیار، گروه ریاضی و آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه گنبد کاووس، گنبد کاووس، ایران
۲- کارشناسی ارشد، گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران
۳- دانشیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

رسید مقاله: ۲۰ آذر ۱۴۰۲
پذیرش مقاله: ۱۶ اردیبهشت ۱۴۰۳

چکیده
در حال حاضر روش‌های زیادی برای حل مساله برنامه‌ریزی کسری خطی تحت متغیرهای فازی غیرمنفی وجود دارند. به دلیل ایرادات و محدودیت این روش‌ها، نمی‌توان از آنها برای حل مساله برنامه‌ریزی کسری خطی تماما فازی (FFLFP) که همه متغیرها و پارامترهای آن فازی هستند، استفاده کرد. این مقاله قصد دارد یک روش کارآمد برای مساله FFLFP با اعداد فازی ذوزنقه‌ای پیشنهاد دهد که با اضافه کردن متغیرهای کمکی قیود نامساوی را به قیود مساوی تبدیل و بدون استفاده از رتبه‌بندی اقدام به حل مساله می‌کند. در نهایت با ارایه چند مثال، ضمن پیاده‌سازی عملی، روش پیشنهادی با روش‌های دیگر مقایسه و میزان مطلوبیت این روش را از نظر سادگی عملیات و دقت نتایج سنجیده خواهد شد و همچنین یک مثال واقعی از یک شرکت تولید فرآورده‌ها و محصولات چوبی نیز مورد بررسی و حل قرار خواهد گرفت.

کلمات کلیدی: برنامه‌ریزی کسری خطی تماما فازی، برنامه‌ریزی خطی چندهدفه، اعداد فازی ذوزنقه‌ای، جواب بهین.

۱ مقدمه
مساله برنامه‌ریزی کسری خطی بسیار حایز اهمیت است؛ زیرا بر اساس نسبتی از مقادیر فیزیکی یا مقادیر اقتصادی برای بهینه‌سازی همزمان ایجاد می‌شود. در بسیاری از حوزه‌های مختلف از جمله برنامه‌ریزی مالی (نسبت بدهی به حقوق صاحبان سهام، نسبت سود به سرمایه‌گذاری)، برنامه‌ریزی تولید (سرمایه‌گذاری به فروش)، برنامه‌ریزی بهداشت و درمان و بیمارستان (نسبت پرستار به بیماران) و برنامه‌ریزی دانشگاهی (نسبت دانشجو به معلم) و غیره قابل اجرا است [۱-۳].

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: : ntaghinezhad@gmail.com

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2215]

در چنین مسایلی، فرض می‌شود ضرایب تابع هدف و محدودیت‌ها و منابع به طور دقیق شناخته شده باشند. ولی در عمل، (برخی یا همه) ضرایب به دلیل خطاهای اندازه‌گیری یا تغییرات با شرایط بازار یا برخی مشکلات غیرقابل کنترل (اقلیم، ترافیک، مشتریان و غیره) دقیق نیستند. بهینه‌سازی تحت عدم قطعیت عموماً در سه دیدگاه مورد بررسی قرار می‌گیرد: بهینه‌سازی تصادفی [۴]، بهینه‌سازی استوار [۵] و بهینه‌سازی فازی. در بهینه‌سازی تصادفی [۴]، پارامترهای نامعین توسط تابع توزیع احتمالی تحت کنترل بوده و مدل به دنبال ارایه راه حلی است که هزینه انتظاری تابع هدف را کمینه سازد. در بسیاری از مسایل کاربردی اطلاعات دقیق راجع به توزیع احتمالی غیرقطعی به راحتی به‌دست نمی‌آید، که این به علت نبود داده‌های شهودی کامل و گسترده است. در بهینه‌سازی استوار [۵]، عدم قطعیت با یک مجموعه غیرقطعی نمایش داده می‌شود که عدم قطعیت همه داده‌ها را در بر می‌گیرد. گردایه داده‌های غیرقطعی ممکن است شامل متغیرهای پیوسته یا گسسته باشد. در حالت گسسته، برای هر پارامتر بر اساس تجارب گذشته و مطالعات و امکان‌سنجی صورت‌گرفته چندین عدد مختلف پیشنهاد می‌شود که به هر یک از آنها عنوان سناریو اطلاق‌شده و در حالت پیوسته هر پارامتر غیرقطعی با یک بازه مشخص تعیین می‌گردد. مهم‌ترین کاستی این روش، محتاطانه عمل کردن آن است که باعث اتلاف منابع در عمل می‌شود.
اغلب مفاهیم در دنیای واقعی غیردقیق (مبهم) هستند برنامه‌ریزی تصادفی نمی‌تواند این خاصیت را با یک توزیع احتمال دقیق نمایش دهد و روش‌های بهینه‌سازی استوار بسیار پیچیده هستند در حالی که نظریه مجموعه فازی می‌تواند یک توصیف واضح از عدم قطعیت در داده‌های ورودی (پارامترها، بردار هزینه و ...) داشته باشد. استفاده از اعداد فازی برای پوشش عدم قطعیت داده‌ها بسیار کارآمد می‌باشد. لذا مساله‌ی برنامه‌ریزی کسری خطی فازی به وجود می‌آید [۶-۱۰].

۲ پیشینه تحقیق

لی و چن [۱۱] با استفاده از مفهوم و تعریف بهینه‌سازی فازی، فرم کلی برنامه‌ریزی کسری خطی فازی را حل کردند. داس و همکاران [۱۲] به توسعه یک الگوریتم کارآمد برای حل مساله برنامه‌ریزی کسری خطی تماما فازی پرداختند. برای این منظور، یک روش جدید از ترکیب روش چارنز و کوپر و مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه به‌دست آوردند. ورامانی و سوماتی [۱۳] یک الگوریتم جدید برای حل برنامه‌ریزی کسری خطی فازی بیان کردند که متغیرهای انحرافی را حداقل می‌کرد. آریا و همکاران [۱۴] با استفاده از یک تابع رتبه‌بندی و رویکرد وزن‌دهی، یک الگوریتم جدید برای حل مسایل برنامه‌ریزی کسری خطی فازی چندهدفه ارایه دادند. بورزا و رامبلی [۱۵] از روش مین-ماکس برای تبدیل یک مساله برنامه‌ریزی خطی کسری فازی چندهدفه به یک مساله تک‌هدفه استفاده کردند و نشان دادند جواب بهینه مساله تک‌هدفه یک جواب کارا برای مساله چندهدفه است. ورامانی و همکاران [۱۶] یک روش کارآمد برای حل مسایل برنامه‌ریزی کسری خطی تماما فازی ارایه نمودند در این روش، ابتدا توسط آلفا برش‌ها، تابع هدف و محدودیت‌های مساله به یک مساله برنامه‌ریزی خطی دوهدفه قطعی تبدیل سپس به کمک برنامه‌ریزی چندهدفه حل شدند. دب [۱۷] ابتدا مساله برنامه‌ریزی کسری فازی را با استفاده از روش چارنز و کوپر و رتبه‌بندی به مساله برنامه‌ریزی خطی قطعی تبدیل کرد و در نهایت با

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2215]

استفاده از سیمپلکس جواب بهینه را به‌دست آورد. داس و همکاران [۱۸] یک رتبه‌بندی برای محاسبه پارامترهای بالا، میانی و پایین مساله برنامه‌ریزی کسری خطی فازی پیشنهاد دادند. با استفاده از این روش یک مساله برنامه‌ریزی کسری خطی سه هدفه تشکیل می‌گردد. لوگاناتان و گانسان [۱۹] به بررسی مساله FFLFP پرداختند و با استفاده از پارامتر R روشی ارایه کردند. فرنام و دره‌میرکی [۲۰] یک رویکرد جدید برای حل مسایل برنامه‌ریزی کسری خطی فازی متقارن ارایه دادند که در آن از تعمیم نظریه بلمن و زاده استفاده شد. لوگانتان و گانسان [۲۱] با تبدیل مساله برنامه‌ریزی کسری خطی تماما فازی به برنامه‌ریزی خطی قطعی و استفاده از یک رتبه‌بندی جدید به حل مساله پرداختند. یونسی-آبباکی و مولایی [۲۲] مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه را با استفاده از روشی مبتنی بر جمع وزنی با انجام سه مرحله به برنامه‌ریزی کسری قطعی تبدیل و حل کردند. کومار و داس [۲۳] به ایجاد یک تابع رتبه‌بندی جدید برای حل برنامه‌ریزی کسری خطی تماما فازی که در آن با جایگزین کردن اضلاع غیرموازی عدد فازی ذوزنقه‌ای به‌دست می‌آید، پرداختند. الحربی و خلیفه [۲۴] با استفاده از تقریب بازه بسته اعداد فازی، یک مساله برنامه‌ریزی کسری خطی تماماً فازی را حل کردند. آن‌ها با استفاده از روابط ترتیبی به‌دست آمده از ترجیحات تصمیم گیرنده، مساله تک‌هدفه را به یک مساله چندهدفه تبدیل کرده و آن را حل کردند. بهاتیا و همکاران [۲۵] از رویکرد مهار برای حل مسایل برنامه‌ریزی کمینه جریان کسری خطی فازی استفاده کردند. محمودی‌راد و همکاران [۲۶] مساله برنامه‌ریزی کسری خطی فازی را ابتدا به برنامه‌ریزی خطی تبدیل و سپس با بهره‌گیری از بهینگی پارتو مساله را حل کردند که مزیت روش آنان در استفاده نکردن از رتبه‌بندی است. ورمانی و همکاران [۲۷] یک روش برای یافتن جواب بهینه پارتو برای مساله برنامه‌ریزی چند هدفه خطی با ترکیب تابع خطی و کسری خطی از طریق تابع عضویت غیرخطی ارایه دادند. چاوهان و همکاران [۲۸] یک روش بر پایه آلفا برش پیشنهاد کردند که مسایل برنامه‌ریزی کسری خطی با متغیرهای فازی و پارامترهای نامحدود را حل می‌کند. نایاک و ماهارانا [۲۹] یک مساله برنامه‌ریزی خطی چند هدفه کسری را در محیط فازی مورد بررسی قرار دادند، در این روش، ابتدا توابع هدف به ارزش فازی تبدیل و در نهایت به کمک برنامه‌ریزی آرمانی فازی یک راه حل کارآمد ارایه شد.

با بررسی‌های انجام گرفته مشخص است که روش‌های مطرح‌شده برای حل مسایل برنامه‌ریزی کسری خطی تماما فازی دارای سه ایراد و محدودیت نسبتا مهم هستند (۱) مراحلی طولانی و پیچیده دارند در حالی که روش پیشنهاد شده در این مقاله با به‌کارگیری روندی بسیار قابل فهم و کاربردی می‌تواند جواب‌های بهینه را به‌دست آورد. (۲) منحصرا به اعداد مثلثی فازی پرداخته‌اند در حالی که در این مقاله به اعداد کامل‌تر ذوزنقه‌ای فازی پرداختیم و (۳) قیود مدل فازی را با روش های رتبه‌بندی به مدل قطعی تبدیل می‌کنند در حالی که در این مقاله به کمک محاسبات و برابری فازی قیود را به‌صورت فازی مورد بررسی قرار می‌دهیم و در قیود از رتبه‌بندی استفاده نکردیم.

در بخش سوم تعاریف اولیه فازی و عملیات حساب فازی بیان می‌شود. در بخش چهارم به ارایه روش جدید حل برنامه‌ریزی کسری خطی تماما فازی می‌پردازیم. در بخش پنجم با مطرح کردن چند مثال و حل آنها با توجه به روش پیشنهادی می‌توانیم به بررسی و مقایسه روش پیشنهادی جدید بپردازیم. در بخش ششم یک مثال واقعی

از یک شرکت تولید محصولات چوبی مدلسازی و حل می‌شود و در نهایت در فصل هفتم نتیجه‌گیری ارایه می‌شود.

۳ تعاریف فازی

در این بخش مفاهیم اولیه، حساب و مقایسه اعداد فازی ارایه می‌شود [۳۰-۳۱].

تعریف ۱: عدد $\tilde{A}=(a,b,c,d)$ را فازی ذوزنقه‌ای می گویند هرگاه تابع عضویت آن به‌صورت زیر تعریف شود:

$$\mu_A(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b\\ 1, & b\le x\le c\\ \dfrac{d-x}{d-c}, & c\le x\le d\end{cases} \tag{1}$$

تعریف ۲: عدد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{A}=(a,b,c,d)$ را مثبت (نامنفی) گویند اگر و فقط اگر $a>0$ ($a\ge 0$) باشد.

تعریف ۳: دو عدد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{A}=(a,b,c,d)$ و $\tilde{B}=(e,f,g,h)$ برابر هستند هرگاه $a=e$، $b=f$، $c=g$ و $d=h$ باشد.

تعریف ٤: جمع، تفریق و ضرب اعداد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{A}=(a,b,c,d)$ و $\tilde{B}=(e,f,g,h)$ به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}&\tilde{A}+\tilde{B}=(a+e,b+f,c+g,d+h)\\&\tilde{A}-\tilde{B}=(a-h,b-g,c-f,d-e)\\&k\tilde{A}=\begin{cases}(ka,kb,kc,kd), k\ge 0\\(kd,kc,kb,ka), k<0\end{cases}\\&\tilde{A}\otimes\tilde{B}=(ae,bf,cg,dh),\quad \tilde{A}\ge 0,\tilde{B}\ge 0.\end{aligned} \tag{2}$$

تعریف ۵: روش رتبه‌بندی مبنی بر مرکز ثقل برای عدد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{A}=(a,b,c,d)$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود [۳۲]:

$$R(\tilde{A})=\frac{1}{3}\left[a+b+c+d-\frac{cd-ab}{(c+d)-(a+b)}\right] \tag{3}$$

تعریف ٦: فرض کنید $\tilde{A}=(a,b,c,d)$ و $\tilde{B}=(e,f,g,h)$ دو عدد فازی ذوزنقه‌ای باشند می‌گوییم $\tilde{A}<\tilde{B}$ اگر و فقط اگر $d<h$، $c<g$، $b<f$ و $a<e$.

٤ روش جدید

در این بخش با مساله برنامه‌ریزی کسری خطی تماما فازی آشنا می‌شویم و روش حل پیشنهادی مطرح می‌گردد. در این روش مساله برنامه‌ریزی کسری خطی تماما فازی با متغیرها و پارامترهای ذوزنقه‌ای با قیود نامساوی با

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2215]

افزودن متغیرهای کمکی $\tilde{S}$ و $\tilde{R}$ به مساله با قیود تساوی تبدیل می‌شود و بعد با استفاده از برنامه‌ریزی خطی چندهدفه جواب بهینه به‌دست می‌آید. شرح کامل مراحل روش در ادامه بیان می‌شود. ابتدا مساله برنامه‌ریزی کسری خطی تماما فازی به‌صورت را در نظر می‌گیریم:

$$
\begin{aligned}
&Max\ \tilde{z} = \frac{\tilde{c}^t\tilde{x} + \tilde{p}}{\tilde{d}^t\tilde{x} + \tilde{q}} \\
&s.t. \\
&\quad \tilde{A}\tilde{x} \le \tilde{b} \\
&\quad \tilde{x} \ge 0
\end{aligned}
\tag{۴}
$$

که در آن $\tilde{A}$, $\tilde{b}$, $\tilde{q}$, $\tilde{d}$, $\tilde{p}$, $\tilde{c}$, $\tilde{x}$ و $\tilde{z}$ فازی می‌باشند. نخست با استفاده از تبدیل چارنز-کوپر $\tilde{y} = \tilde{t}\tilde{x}$ و $\tilde{t} = (\tilde{d}^t\tilde{x} + \tilde{q})^{-1}$ مساله را به یک مساله برنامه‌ریزی خطی تماما فازی تبدیل می‌کنیم، بنابراین داریم:

$$
\begin{aligned}
&Max\ \tilde{z} = \tilde{c}^t\tilde{y} + \tilde{p}\tilde{t} \\
&s.t. \\
&\quad \tilde{A}\tilde{y} - \tilde{b}\tilde{t} \le \tilde{0} \\
&\quad \tilde{d}^t\tilde{y} + \tilde{q}\tilde{t} \le \tilde{1} \\
&\quad \tilde{y}, \tilde{t} \ge 0
\end{aligned}
\tag{۵}
$$

اکنون با افزودن متغیر کمکی $\tilde{S}$ و $\tilde{R}$ قیود نامساوی مساله را به قیود مساوی تبدیل می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
&Max\ \tilde{z} = \tilde{c}^t\tilde{y} + \tilde{p}\tilde{t} \\
&s.t. \\
&\quad \tilde{A}\tilde{y} - \tilde{b}\tilde{t} + \tilde{S}_1 = \tilde{0} + \tilde{R}_1 \\
&\quad \tilde{d}^t\tilde{y} + \tilde{q}\tilde{t} + \tilde{S}_2 = \tilde{1} + \tilde{R}_2 \\
&\quad \tilde{y}, \tilde{t}, \tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \tilde{R}_1, \tilde{R}_2 \ge 0
\end{aligned}
\tag{۶}
$$

در ادامه همه پارامترها و متغیرهای مساله با اعداد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$، $\tilde{c}^t = (c_1, c_2, c_3, c_4)$، $\tilde{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$، $\tilde{d}^t = (d_1, d_2, d_3, d_4)$، $\tilde{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)$، $\tilde{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$، $\tilde{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$، $\tilde{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4)$، $\tilde{R}_1 = (R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{14})$، $\tilde{R}_2 = (R_{21}, R_{22}, R_{23}, R_{24})$، $\tilde{S}_1 = (S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14})$ و $\tilde{S}_2 = (S_{21}, S_{22}, S_{23}, S_{24})$ نمایش داده می‌شود و مساله به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&Max\ (z_1, z_2, z_3, z_4) = (c_1y_1, c_2y_2, c_3y_3, c_4y_4) + (p_1t_1, p_2t_2, p_3t_3, p_4t_4) \\
&s.t. \\
&(a_1, a_2, a_3, a_4) \otimes (y_1, y_2, y_3, y_4) - (b_1t_1, b_2t_2, b_3t_3, b_4t_4) + (S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}) = \\
&= \tilde{0} + (R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{14}) \\
&(d_1y_1, d_2y_2, d_3y_3, d_4y_4) + (q_1t_1, q_2t_2, q_3t_3, q_4t_4) + (S_{21}, S_{22}, S_{23}, S_{24}) = \\
&= \tilde{1} + (R_{21}, R_{22}, R_{23}, R_{24}) \\
&\tilde{y}, \tilde{t}, \tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \tilde{R}_1, \tilde{R}_2 \ge 0
\end{aligned}
\tag{۷}
$$

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2215]

تذکر ۱: اگر $\tilde{y}^* = ((y^*)_۱,(y^*)_۲,(y^*)_۳,(y^*)_۴)$ ، جواب بهینه یکتا مساله (۵) باشد، شرایط زیر را برقرار می‌کند:

۱. $\tilde{A}\tilde{y}^* = \tilde{b}$.

۲. برای یک $\tilde{y} = ((y)_۱,(y)_۲,(y)_۳,(y)_۴)$ داریم، $\tilde{c}^t\tilde{y} + \tilde{p}\tilde{t} \le \tilde{c}^t\tilde{y}^* + \tilde{p}\tilde{t}$ در حالت بیشینه‌سازی و در حالت کمینه‌سازی $\tilde{c}^t\tilde{y} + \tilde{p}\tilde{t} \ge \tilde{c}^t\tilde{y}^* + \tilde{p}\tilde{t}$.

۳. اگر $\tilde{y}^*$ جواب بهینه مساله (۵) باشد و y' جواب بهینه دیگری برای مساله (۵) باشد حتما در رابطه‌ی $\tilde{c}^t\tilde{y}' + \tilde{p}\tilde{t} = \tilde{c}^t\tilde{y}^* + \tilde{p}\tilde{t}$ صدق می‌کند.

حال گام های روش پیشنهادی برای حل مساله برنامه‌ریزی خطی کسری تماما فازی را ارایه می‌کنیم:

گام ۱. با توجه به تعاریف حساب فازی و جمع سمت راست قیود با صفر و یک فازی مساله (۷) را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&Max\left(z_۱,z_۲,z_۳,z_۴\right) = \left(c_۱y_۱ + p_۱t_۱, c_۲y_۲ + p_۲t_۲, c_۳y_۳ + p_۳t_۳, c_۴y_۴ + p_۴t_۴\right)\\
&s.t.\\
&\left(a_۱y_۱ - b_۴t_۴, a_۲y_۲ - b_۳t_۳, a_۳y_۳ - b_۲t_۲, a_۴y_۴ - b_۱t_۱\right) + \left(S_{۱۱},S_{۱۲},S_{۱۳},S_{۱۴}\right) =\\
&= \left(R_{۱۱},R_{۱۲},R_{۱۳},R_{۱۴}\right)\\
&\left(\left(d^ty + qt\right)_۱,\left(d^ty + qt\right)_۲,\left(d^ty + qt\right)_۳,\left(d^ty + qt\right)_۴\right) + \left(S_{۲۱},S_{۲۲},S_{۲۳},S_{۲۴}\right) =\\
&= \left(R_{۲۱} + ۱, R_{۲۲} + ۱, R_{۲۳} + ۱, R_{۲۴} + ۱\right)\\
&\left(y_۱,y_۲,y_۳,y_۴\right) \ge ۰, \left(t_۱,t_۲,t_۳,t_۴\right) \ge ۰, \left(S_{۱۱},S_{۱۲},S_{۱۳},S_{۱۴}\right) \ge ۰,\\
&\left(S_{۲۱},S_{۲۲},S_{۲۳},S_{۲۴}\right) \ge ۰, \left(R_{۱۱},R_{۱۲},R_{۱۳},R_{۱۴}\right) \ge ۰, \left(R_{۲۱},R_{۲۲},R_{۲۳},R_{۲۴}\right) \ge ۰.
\end{aligned} \tag{۸}$$

گام ۲. با استفاده از تعریف (۳) که به برابری دو عدد فازی اشاره دارد دو طرف قیود مساله (۸) را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned}
&Max\left(z_۱,z_۲,z_۳,z_۴\right) = \left(\left(c^ty + pt\right)_۱,\left(c^ty + pt\right)_۲,\left(c^ty + pt\right)_۳,\left(c^ty + pt\right)_۴\right)\\
&\left(ay\right)_۱ - \left(bt\right)_۱ + S_{۱۱} = R_{۱۱}\\
&\left(ay\right)_۲ - \left(bt\right)_۲ + S_{۱۲} = R_{۱۲}\\
&\left(ay\right)_۳ - \left(bt\right)_۳ + S_{۱۳} = R_{۱۳}\\
&\left(ay\right)_۴ - \left(bt\right)_۴ + S_{۱۴} = R_{۱۴}\\
&\left(d^ty + qt\right)_۱ + S_{۲۱} = ۱ + R_{۲۱}\\
&\left(d^ty + qt\right)_۲ + S_{۲۲} = ۱ + R_{۲۲}\\
&\left(d^ty + qt\right)_۳ + S_{۲۳} = ۱ + R_{۲۳}\\
&\left(d^ty + qt\right)_۴ + S_{۲۴} = ۱ + R_{۲۴}\\
&y_۱ \ge ۰, y_۲ - y_۱ \ge ۰, y_۳ - y_۲ \ge ۰, y_۴ - y_۳ \ge ۰\\
&t_۱ \ge ۰, t_۲ - t_۱ \ge ۰, t_۳ - t_۲ \ge ۰, t_۴ - t_۳ \ge ۰\\
&\left(S_{۱۱},S_{۱۲},S_{۱۳},S_{۱۴}\right) \ge ۰, \left(S_{۲۱},S_{۲۲},S_{۲۳},S_{۲۴}\right) \ge ۰\\
&\left(R_{۱۱},R_{۱۲},R_{۱۳},R_{۱۴}\right) \ge ۰, \left(R_{۲۱},R_{۲۲},R_{۲۳},R_{۲۴}\right) \ge ۰.
\end{aligned} \tag{۹}$$

گام ۳. حال مساله (۹) که دارای چهار تابع هدف است را با اعمال رتبه‌بندی تعریف (۶) داریم:

$$\begin{aligned}
&\text{Max} \quad z_4 = (c^t y + pt)_4 \\
&\text{Max} \quad z_3 = (c^t y + pt)_3 \\
&\text{Max} \quad z_2 = (c^t y + pt)_2 \\
&\text{Max} \quad z_1 = (c^t y + pt)_1 \\
&s.t. \\
&\left(ay\right)_1 - \left(bt\right)_1 + S_{11} - R_{11} = 0 \\
&\left(ay\right)_2 - \left(bt\right)_2 + S_{12} - R_{12} = 0 \\
&\left(ay\right)_3 - \left(bt\right)_3 + S_{13} - R_{13} = 0 \\
&\left(ay\right)_4 - \left(bt\right)_4 + S_{14} - R_{14} = 0 \\
&\left(d^t y + qt\right)_1 + S_{21} - R_{21} = 1 \\
&\left(d^t y + qt\right)_2 + S_{22} - R_{22} = 1 \\
&\left(d^t y + qt\right)_3 + S_{23} - R_{23} = 1 \\
&\left(d^t y + qt\right)_4 + S_{24} - R_{24} = 1 \\
&y_1 \geq 0, y_2 - y_1 \geq 0, y_3 - y_2 \geq 0, y_4 - y_3 \geq 0 \\
&t_1 \geq 0, t_2 - t_1 \geq 0, t_3 - t_2 \geq 0, t_4 - t_3 \geq 0 \\
&\left(S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\right) \geq 0, \left(S_{21}, S_{22}, S_{23}, S_{24}\right) \geq 0 \\
&\left(R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{14}\right) \geq 0, \left(R_{21}, R_{22}, R_{23}, R_{24}\right) \geq 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

گام ٤. در مساله (۱۰) تابع هدف z_4 با شرایط مربوط به آن به‌صورت مجزا می‌تواند در نظر گرفته شود:

$$\begin{aligned}
&\text{Max} \quad z_4 = (c^t y + pt)_4 \\
&s.t. \\
&\quad (ay)_4 - (bt)_4 + S_{14} - R_{14} = 0, \\
&\quad (d^t y + qt)_4 + S_{24} - R_{24} = 1, \\
&\quad y_4 \geq 0, t_4 \geq 0, S_{14} \geq 0, S_{24} \geq 0, \\
&\quad R_{14} \geq 0, R_{24} \geq 0
\end{aligned} \tag{11}$$

گام ٥. با نرم افزارهای بهینه‌سازی مانند Lingo به راحتی مدل (۱۱) را حل کرده و مقادیر متغیرهای به‌دست آمده را در مساله (۱۰) جایگذاری می‌کنیم. سپس برای تابع هدف z_3 مستقل از دیگر توابع هدف داریم:

$$\begin{aligned}
&\text{Max} \quad z_3 = (c^t y + pt)_3 \\
&s.t. \\
&(ay)_3 - (bt)_3 + S_{13} - R_{13} = 0 \\
&(d^t y + qt)_3 + S_{23} - R_{23} = 1 \\
&y_4 - y_3 \geq 0, t_4 - t_3 \geq 0 \\
&S_{13} \geq 0, S_{23} \geq 0, R_{13} \geq 0, R_{23} \geq 0
\end{aligned} \tag{12}$$

گام ٦. مدل (۱۲) را حل کرده و مقادیر متغیرهای به‌دست آمده را در مساله (۱۰) جایگذاری می‌کنیم. سپس برای تابع هدف z_2 مستقل از دیگر توابع هدف داریم:

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2215]

$$\begin{aligned}
&\text{Max} \quad z_2 = (c^t y + pt)_2 \\
&s.t. \\
&\quad (ay)_2 - (bt)_2 + S_{12} - R_{12} = 0 \\
&\quad (d^t y + qt)_2 + S_{22} - R_{22} = 1 \\
&\quad y_3 - y_2 \geq 0, t_3 - t_2 \geq 0 \\
&\quad S_{12} \geq 0, S_{22} \geq 0, R_{12} \geq 0, R_{22} \geq 0
\end{aligned} \tag{13}$$

گام ۷. مدل (۱۳) را حل کرده و مقادیر متغیرهای به‌دست آمده را در مساله (۱۰) جایگذاری می کنیم. در نهایت مدل مستقل تابع هدف z_1 به‌صورت زیر قابل بیان است:

$$\begin{aligned}
&\text{Max} \quad z_1 = (c^t y + pt)_1 \\
&s.t. \\
&\quad (ay)_1 - (bt)_1 + S_{11} - R_{11} = 0 \\
&\quad (d^t y + qt)_1 + S_{21} - R_{21} = 1 \\
&\quad y_2 - y_1 \geq 0, t_2 - t_1 \geq 0, \\
&\quad S_{11} \geq 0, S_{21} \geq 0, R_{11} \geq 0, R_{21} \geq 0
\end{aligned} \tag{14}$$

جواب بهینه یکتا به‌دست آمده برای مساله (۱۴) همان جواب بهینه مساله (۸) می‌باشد.

۵ مثال‌های عددی

در این بخش به منظور پیاده‌سازی عملی روش و مقایسه با سایر روش‌ها، چند مثال را حل خواهیم کرد.

مثال ۱. مساله برنامه‌ریزی کسری تماما فازی را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
&\text{Max} \quad \tilde{z} = \frac{(0,1,1,2)\tilde{x}_1 - (0,1,1,2)\tilde{x}_2 + (0,1,1,2)}{(0,1,1,2)\tilde{x}_1 - (0,1,1,2)\tilde{x}_2 + (1,2,2,3)} \\
&s.t. \\
&(0,1,1,2)\tilde{x}_1 + (0,1,1,2)\tilde{x}_2 + \tilde{S}_1 = (1,2,2,3) + \tilde{R}_1 \\
&(0,1,1,2)\tilde{x}_1 - (0,1,1,2)\tilde{x}_2 + \tilde{S}_2 = (1,2,2,3) + \tilde{R}_2 \\
&\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \geq 0, \tilde{S}_1, \tilde{S}_2 \geq 0, \tilde{R}_1, \tilde{R}_2 \geq 0,
\end{aligned}$$

بر اساس گام ۱ مساله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2215]

$$
\begin{aligned}
&\text{Max} \quad \tilde{z} = \frac{\left(\begin{array}{l}(۰,۱,۱,۲) \otimes ((x_۱)_۱,(x_۱)_۲,(x_۱)_۳,(x_۱)_۴) - \\ (۰,۱,۱,۲) \otimes ((x_۲)_۱,(x_۲)_۲,(x_۲)_۳,(x_۲)_۴) + (۰,۱,۱,۲)\end{array}\right)}{\left(\begin{array}{l}(۰,۱,۱,۲) \otimes ((x_۱)_۱,(x_۱)_۲,(x_۱)_۳,(x_۱)_۴) + \\ (۰,۱,۱,۲) \otimes ((x_۲)_۱,(x_۲)_۲,(x_۲)_۳,(x_۲)_۴) + (۱,۲,۲,۳)\end{array}\right)} \\
&s.t. \\
&(۰,۱,۱,۲) \otimes ((x_۱)_۱,(x_۱)_۲,(x_۱)_۳,(x_۱)_۴) + (۰,۱,۱,۲) \otimes ((x_۲)_۱,(x_۲)_۲,(x_۲)_۳,(x_۲)_۴) + \\
&\left(S_{۱۱},S_{۱۲},S_{۱۳},S_{۱۴}\right) = (۱,۲,۲,۳) + \left(R_{۱۱},R_{۱۲},R_{۱۳},R_{۱۴}\right) \\
&(۰,۱,۱,۲) \otimes ((x_۱)_۱,(x_۱)_۲,(x_۱)_۳,(x_۱)_۴) - (۰,۱,۱,۲) \otimes ((x_۲)_۱,(x_۲)_۲,(x_۲)_۳,(x_۲)_۴) + \\
&\left(S_{۲۱},S_{۲۲},S_{۲۳},S_{۲۴}\right) = (۰,۱,۱,۲) + \left(R_{۲۱},R_{۲۲},R_{۲۳},R_{۲۴}\right) \\
&(x_۱)_۱,(x_۱)_۲,(x_۱)_۳,(x_۱)_۴ \geq ۰,(x_۲)_۱,(x_۲)_۲,(x_۲)_۳,(x_۲)_۴ \geq ۰ \\
&\left(S_{۱۱},S_{۱۲},S_{۱۳},S_{۱۴}\right) \geq ۰,\left(S_{۲۱},S_{۲۲},S_{۲۳},S_{۲۴}\right) \geq ۰ \\
&\left(R_{۱۱},R_{۱۲},R_{۱۳},R_{۱۴}\right) \geq ۰,\left(R_{۲۱},R_{۲۲},R_{۲۳},R_{۲۴}\right) \geq ۰.
\end{aligned}
$$

طبق گام ۲، داریم:

$$
\begin{aligned}
&\text{Max} \quad \tilde{z} = (-۲(y_۲)_۴,(y_۱)_۲ - (y_۲)_۳ + t_۲,(y_۱)_۳ - (y_۲)_۲ + t_۳,۲(y_۱)_۴ + ۲t_۴) \\
&s.t. \\
&۰ - t_۱ + S_{۱۱} - R_{۱۱} = ۰ \\
&(y_۱)_۲ + (y_۲)_۲ - t_۲ + S_{۱۲} - R_{۱۲} = ۰ \\
&(y_۱)_۳ + (y_۲)_۳ - ۲t_۳ + S_{۱۳} - R_{۱۳} = ۰ \\
&۲(y_۱)_۴ + ۲(y_۲)_۴ - ۳t_۴ + S_{۱۴} - R_{۱۴} = ۰ \\
&-۲(y_۲)_۴ + S_{۲۱} - R_{۲۱} = ۰ \\
&(y_۱)_۲ - (y_۲)_۳ - t_۲ + S_{۲۲} - R_{۲۲} = ۰ \\
&(y_۱)_۳ - (y_۲)_۲ - t_۳ + S_{۲۳} - R_{۲۳} = ۰ \\
&۲(y_۱)_۴ - ۲t_۴ + S_{۲۴} - R_{۲۴} = ۰ \\
&t_۱ + S_{۳۱} - R_{۳۱} = ۱ \\
&(y_۱)_۲ + (y_۲)_۲ + t_۲ + S_{۳۲} - R_{۳۲} = ۱ \\
&(y_۱)_۳ + (y_۲)_۳ + ۲t_۳ + S_{۳۳} - R_{۳۳} = ۱ \\
&۲(y_۱)_۴ + ۲(y_۲)_۴ + ۳t_۴ + S_{۳۴} - R_{۳۴} = ۱ \\
&(y_۱)_۱ \geq ۰,(y_۱)_۲ - (y_۱)_۱ \geq ۰,(y_۱)_۳ - (y_۱)_۲ \geq ۰,(y_۱)_۴ - (y_۱)_۳ \geq ۰ \\
&(y_۲)_۱ \geq ۰,(y_۲)_۲ - (y_۲)_۱ \geq ۰,(y_۲)_۳ - (y_۲)_۲ \geq ۰,(y_۲)_۴ - (y_۲)_۳ \geq ۰ \\
&t_۱ \geq ۰,t_۲ - t_۱ \geq ۰,t_۳ - t_۲ \geq ۰,t_۴ - t_۳ \geq ۰, \\
&\left(S_{۱۱},S_{۱۲},S_{۱۳},S_{۱۴}\right) \geq ۰,\left(S_{۲۱},S_{۲۲},S_{۲۳},S_{۲۴}\right) \geq ۰,\left(S_{۳۱},S_{۳۲},S_{۳۳},S_{۳۴}\right) \geq ۰ \\
&\left(R_{۱۱},R_{۱۲},R_{۱۳},R_{۱۴}\right) \geq ۰,\left(R_{۲۱},R_{۲۲},R_{۲۳},R_{۲۴}\right) \geq ۰,\left(R_{۳۱},R_{۳۲},R_{۳۳},R_{۳۴}\right) \geq ۰.
\end{aligned}
$$

بنابر گام ۳ روش، مساله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2215]

$$
\begin{aligned}
&\text{Max}\quad z_1 = -2(y_2)_4\\
&\text{Max}\quad z_2 = (y_1)_2 - (y_2)_3 + t_2\\
&\text{Max}\quad z_3 = (y_1)_3 - (y_2)_2 + t_3\\
&\text{Max}\quad z_4 = 2(y_1)_4 + 2t_4\\
&s.t.\\
&0 - t_1 + S_{11} - R_{11} = 0\\
&(y_1)_2 + (y_2)_2 - t_2 + S_{12} - R_{12} = 0\\
&(y_1)_3 + (y_2)_3 - 2t_3 + S_{13} - R_{13} = 0\\
&2(y_1)_4 + 2(y_2)_4 - 3t_4 + S_{14} - R_{14} = 0\\
&-2(y_2)_4 + S_{21} - R_{21} = 0\\
&(y_1)_2 - (y_2)_3 - t_2 + S_{22} - R_{22} = 0\\
&(y_1)_3 - (y_2)_2 - t_3 + S_{23} - R_{23} = 0\\
&2(y_1)_4 - 2t_4 + S_{24} - R_{24} = 0\\
&t_1 + S_{31} - R_{31} = 1\\
&(y_1)_2 + (y_2)_2 + t_2 + S_{32} - R_{32} = 1\\
&(y_1)_3 + (y_2)_3 + 2t_3 + S_{33} - R_{33} = 1\\
&2(y_1)_4 + 2(y_2)_4 + 3t_4 + S_{34} - R_{34} = 1\\
&(y_1)_1 \ge 0, (y_1)_2 - (y_1)_1 \ge 0, (y_1)_3 - (y_1)_2 \ge 0, (y_1)_4 - (y_1)_3 \ge 0\\
&(y_2)_1 \ge 0, (y_2)_2 - (y_2)_1 \ge 0, (y_2)_3 - (y_2)_2 \ge 0, (y_2)_4 - (y_2)_3 \ge 0\\
&t_1 \ge 0, t_2 - t_1 \ge 0, t_3 - t_2 \ge 0, t_4 - t_3 \ge 0,\\
&\left(S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\right) \ge 0, \left(S_{21}, S_{22}, S_{23}, S_{24}\right) \ge 0, \left(S_{31}, S_{32}, S_{33}, S_{34}\right) \ge 0\\
&\left(R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{14}\right) \ge 0, \left(R_{21}, R_{22}, R_{23}, R_{24}\right) \ge 0, \left(R_{31}, R_{32}, R_{33}, R_{34}\right) \ge 0.
\end{aligned}
$$

طبق تعریف (۶) مساله تابع هدف z_4 را حل می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
&\text{Max}\quad z_4 = 2(y_1)_4 + 2t_4\\
&s.t.\\
&2(y_1)_4 + 2(y_2)_4 - 3t_4 + S_{14} - R_{14} = 0\\
&2(y_1)_4 - 2t_4 + S_{24} - R_{24} = 0\\
&2(y_1)_4 + 2(y_2)_4 + 3t_4 + S_{34} - R_{34} = 1\\
&(y_1)_4 \ge 0, (y_2)_4 \ge 0, t_4 \ge 0\\
&S_{14}, S_{24}, S_{34} \ge 0, R_{14}, R_{24}, R_{34} \ge 0
\end{aligned}
$$

جواب بهینه‌ی مساله $z_4^* = 0/8$ می‌باشد. لذا به مرحله بعد می‌رویم:

$$
\begin{aligned}
&\text{Max}\quad z_3 = (y_1)_3 - (y_2)_2 + t_3\\
&s.t.\\
&(y_1)_3 + (y_2)_3 - 2t_3 + S_{13} - R_{13} = 0\\
&(y_1)_3 - (y_2)_2 - t_3 + S_{23} - R_{23} = 0\\
&(y_1)_3 + (y_2)_3 + 2t_3 + S_{33} - R_{33} = 1\\
&(y_1)_3 \ge 0, (y_2)_3 \ge 0, (y_2)_2 \ge 0, t_3 \ge 0\\
&S_{13}, S_{23}, S_{33} \ge 0, R_{13}, R_{23}, R_{33} \ge 0
\end{aligned}
$$

جواب بهینه‌ی به‌دست آمده مساله بالا $z_3^* = 0/4$ می‌باشد؛ پس به مرحله بعد می‌رویم:

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2215]

$$
\begin{aligned}
&\text{Max} \quad z_2 = (y_1)_2 - (y_2)_3 + t_2 \\
&s.t. \\
&(y_1)_2 + (y_2)_2 - t_2 + S_{12} - R_{12} = 0 \\
&(y_1)_2 - (y_2)_3 - t_2 + S_{22} - R_{22} = 0 \\
&(y_1)_2 + (y_2)_2 + t_2 + S_{32} - R_{32} = 1 \\
&(y_1)_2 \geq 0, (y_2)_2 \geq 0, (y_2)_3 \geq 0, t_2 \geq 0 \\
&S_{12}, S_{22}, S_{32} \geq 0, R_{12}, R_{22}, R_{32} \geq 0
\end{aligned}
$$

جواب بهینه‌ی مساله $z_2^* = 0 / 4$ است؛ لذا به مرحله آخر می‌رویم:

$$
\begin{aligned}
&Max\, z_1 = -2(y_2)_4 \\
&s.t. \\
&-t_1 + S_{11} - R_{11} = 0 \\
&-2(y_2)_4 + S_{21} - R_{21} = 0 \\
&t_1 + S_{31} - R_{31} = 1 \\
&(y_1)_1 \geq 0, (y_2)_1 \geq 0, t_1 \geq 0, (y_2)_4 \geq 0 \\
&S_{11}, S_{21}, S_{31} \geq 0, R_{11}, R_{21}, R_{31} \geq 0
\end{aligned}
$$

در نتیجه جواب‌های بهینه مساله به‌صورت زیر می‌باشد:

$$
\begin{aligned}
\tilde{y}_1^* &= \{(y_1^*)_1, (y_1^*)_2, (y_1^*)_3, (y_1^*)_4\} = (0, 0/2, 0/2, 0/2) \\
\tilde{y}_2^* &= \{(y_2^*)_1, (y_2^*)_2, (y_2^*)_3, (y_2^*)_4\} = (0, 0, 0, 0) \\
t^* &= \left\{(t_1, t_2, t_3, t_4)\right\} = (0, 0/2, 0/2, 0/2) \\
S_1^* &= \left\{(S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14})\right\} = (0, 0/2, 0/2, 0/2) \\
S_2^* &= \left\{(S_{21}, S_{22}, S_{23}, S_{24})\right\} = (0, 0, 0, 0) \\
S_3^* &= \left\{(S_{31}, S_{32}, S_{33}, S_{34})\right\} = (1, 1/4, 1/4, 2) \\
R_1^* &= \left\{(R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{14})\right\} = (0, 0, 0, 0) \\
R_2^* &= \left\{(R_{21}, R_{22}, R_{23}, R_{24})\right\} = (0, 0, 0, 0) \\
R_3^* &= \left\{(R_{31}, R_{32}, R_{33}, R_{34})\right\} = (0, 1, 1, 2)
\end{aligned}
$$

در نتیجه جواب بهینه متغیرهای اصلی مساله برابر است با:

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}_1^* &= \{(x_1^*)_1, (x_1^*)_2, (x_1^*)_3, (x_1^*)_4\} = (0, 1, 1, 1) \\
\tilde{x}_2^* &= \{(x_2^*)_1, (x_2^*)_2, (x_2^*)_3, (x_2^*)_4\} = (0, 0, 0, 0)
\end{aligned}
$$

و همچنین جواب بهینه تابع هدف به‌صورت عدد فازی ذوزنقه‌ای به‌صورت زیر می‌باشد:

$$
\tilde{z}^* = \{(z^*)_1, (z^*)_2, (z^*)_3, (z^*)_4\} = (0, 0/4, 0/4, 0/8)
$$

جواب بهینه ارایه‌شده توسط داس $\tilde{z} = (0, 0/4, 0/4, 0/8)$ [۱۲] است، در حالی که داس فقط قادر به حل مسایل با اعداد فازی مثلثی است که نشان می‌دهد روش پیشنهادی ارایه‌شده دارای جوابی هم‌مرتبه روش داس می‌باشد.

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2215]

مثال ۲. شرکتی در تولید چای گیلان فعالیت دارد که برای تامین تقاضای دو مرکز توزیع رشت و لاهیجان محصول چای تولید می‌کند. طبق اطلاعات اولیه منابع احتمالی موجود به ازای هر ده هزار واحد به صورت $(۵,۶,۶,۷)$ عرضه می‌شود. اگر تقاضای مقصد برای رشت $(۴,۵,۵,۶)$ ده هزار واحد و لاهیجان $(۶,۸,۸,۱۰)$ ده هزار واحد باشد، سود شرکت به علت اطلاعات غیرقابل دستیابی اعداد نادقیق با درجه عضویت ذوزنقه‌ای هستند. مدیریت شرکت در حال بررسی است تا سود را حداکثر کند.

محصول چای	تقاضای محصولات مقصد	هزینه حمل و نقل
رشت	$(۱۰,۱۲,۱۲,۱۴)$	$(۲,۴,۴,۵)$
لاهیجان	$(۱۸,۲۰,۲۲,۲۳)$	$(۴,۵,۶,۷)$

$$
\begin{aligned}
&Max\tilde{z} = \frac{(۱۰,۱۲,۱۲,۱۴)\tilde{x}_{۱۱} + (۱۸,۲۰,۲۲,۲۳)\tilde{x}_{۱۲}}{(۲,۴,۴,۵)\tilde{x}_{۱۱} + (۴,۵,۶,۷)\tilde{x}_{۱۲} + (۱,۲,۲,۳)} \\
&s.t. \\
&\tilde{x}_{۱۱} + \tilde{x}_{۱۲} \le (۵,۶,۶,۷) \\
&\tilde{x}_{۱۱} + \tilde{x}_{۱۲} \le (۴,۵,۵,۶) \\
&\tilde{x}_{۱۱} + \tilde{x}_{۱۲} \le (۶,۸,۸,۱۰) \\
&\tilde{x}_{۱۱} \ge ۰, \tilde{x}_{۱۲} \ge ۰
\end{aligned}
$$

جواب بهینه حاصل از روش پیشنهادی به شرح زیر است:

$$
\begin{aligned}
\tilde{y}_۱^* &= \{(y_۱^*)_۱,(y_۱^*)_۲,(y_۱^*)_۳,(y_۱^*)_۴\} = (۰,۰,۰,۰) \\
\tilde{y}_۲^* &= \{(y_۲^*)_۱,(y_۲^*)_۲,(y_۲^*)_۳,(y_۲^*)_۴\} = (۰/۰۸, ۰/۱, ۰/۱, ۰/۱۲) \\
t^* &= \left\{(t_۱,t_۲,t_۳,t_۴)\right\} = (۰/۰۲, ۰/۰۲, ۰/۰۲, ۰/۰۲)
\end{aligned}
$$

در نتیجه جواب بهینه متغیرهای اصلی مساله برابر است با:

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}_۱^* &= \{(x_۱^*)_۱,(x_۱^*)_۲,(x_۱^*)_۳,(x_۱^*)_۴\} = (۰,۰,۰,۰) \\
\tilde{x}_۲^* &= \{(x_۲^*)_۱,(x_۲^*)_۲,(x_۲^*)_۳,(x_۲^*)_۴\} = (۴,۵,۵,۶)
\end{aligned}
$$

و همچنین جواب بهینه تابع هدف به‌صورت عدد فازی ذوزنقه‌ای به‌صورت زیر می‌باشد:

$$
\tilde{z}^* = \{(z^*)_۱,(z^*)_۲,(z^*)_۳,(z^*)_۴\} = (۱/۴, ۲, ۲/۲, ۳/۱)
$$

مثال ۳. مثال ارایه‌شده توسط ورامانی و سماتی [۳۳] به صورت ذیل است:

$$
\begin{aligned}
&Max\ \tilde{z} = \frac{\left(۳,۴,۶,۷\right)\tilde{x}_۱ + \left(۲, ۲/۵, ۳/۵, ۴\right)\tilde{x}_۲}{\left(۴, ۴/۵, ۵/۵, ۶\right)\tilde{x}_۱ + \left(۱, ۱/۵, ۲/۵, ۳\right)\tilde{x}_۲ + \left(۰, ۰/۵, ۱/۵, ۲\right)} \\
&s.t. \\
&\left(۲, ۲/۵, ۳/۵, ۴\right)\tilde{x}_۱ + \left(۳,۴,۶,۷\right)\tilde{x}_۲ \le \left(۱۱,۱۲,۱۸,۱۹\right) \\
&\left(۴, ۴/۵, ۵/۵, ۶\right)\tilde{x}_۱ + \left(۱, ۱/۵, ۲/۵, ۳\right)\tilde{x}_۲ \le \left(۸,۹,۱۱,۱۲\right) \\
&\tilde{x}_۱, \tilde{x}_۲ \ge ۰\,.
\end{aligned}
$$

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2215]

جواب بهینه حاصل از روش پیشنهادی به شرح زیر است:

$$\tilde{y}_1^* = \{(y_1^*)_1, (y_1^*)_2, (y_1^*)_3, (y_1^*)_4\} = \left(0/06, 0/06, 0/06, 0/06\right)$$
$$\tilde{y}_2^* = \{(y_2^*)_1, (y_2^*)_2, (y_2^*)_3, (y_2^*)_4\} = \left(0/15, 0/15, 0/15, 0/15\right)$$
$$t^* = \left\{\left(t_1, t_2, t_3, t_4\right)\right\} = \left(0/07, 0/07, 0/07, 0/07\right)$$
$$S_1^* = \left\{\left(S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}\right)\right\} = \left(0/18, 0/24, 0/29, 0/36\right)$$
$$S_2^* = \left\{\left(S_{21}, S_{22}, S_{23}, S_{24}\right)\right\} = \left(0/18, 0/18, 0/26, 0/30\right)$$
$$S_3^* = \left\{\left(S_{31}, S_{32}, S_{33}, S_{34}\right)\right\} = \left(0/5, 0/6, 0/9, 1\right)$$
$$R_1^* = \left\{\left(R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{14}\right)\right\} = \left(0, 0/18, 0/18, 0/36\right)$$
$$R_2^* = \left\{\left(R_{21}, R_{22}, R_{23}, R_{24}\right)\right\} = \left(0, 0/07, 0/23, 0/30\right)$$
$$R_3^* = \left\{\left(R_{31}, R_{32}, R_{33}, R_{34}\right)\right\} = \left(0, 0/2, 0/8, 1\right)$$

در نتیجه جواب بهینه متغیرهای اصلی مساله برابر است با:

$$\tilde{x}_1^* = \{(x_1^*)_1, (x_1^*)_2, (x_1^*)_3, (x_1^*)_4\} = \left(0/86, 0/86, 0/86, 0/86\right)$$
$$\tilde{x}_2^* = \{(x_2^*)_1, (x_2^*)_2, (x_2^*)_3, (x_2^*)_4\} = \left(2/1, 2/1, 2/1, 2/1\right)$$

و همچنین جواب بهینه تابع هدف به‌صورت عدد فازی ذوزنقه‌ای به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\tilde{z}^* = \{(z^*)_1, (z^*)_2, (z^*)_3, (z^*)_4\} = \left(0/51, 0/65, 0/93, 1/08\right)$$

ورامانی و سماتی [۳۳] $\tilde{z} = \left(0, 0/27, 0/99\right)$ را به عنوان جواب بهینه ارایه کردند، که نمایش ذوزنقه‌ای آن به فرم $\tilde{z} = \left(0, 0/27, 0/27, 0/99\right)$ می‌باشد و با هر روش رتبه‌بندی به وضوح جواب روش پیشنهادی این مقاله از روش ورامانی بهتر است.

$$R\left(0/51, 0/65, 0/93, 1/08\right) = 0/8$$
$$R\left(0, 0/27, 0/27, 0/99\right) = 0/4$$
$$Proposed\_method = 0/8 > Veeramani\_method = 0/4$$

۶ یک مثال کاربردی از تولید محصولات و فرآورده‌های چوبی

شرکت تولید محصولات و فرآورده های چوبی قصد دارد دو محصول A و B را با سود $(1,2,2,3)$ و $(0,1,1,2)$ دلار به ازای هر واحد تولید کند. همچنین هزینه تولید هر یک از محصولات ذکر شده برابر $(1,3,3,5)$ و $(1,1,1,1)$ دلار است و هزینه ثابت $(3,6,6,9)$ دلار به تابع هزینه افزوده خواهد شد که به دلیل مدت زمان انتظار می‌باشد. از طرف دیگر برای تولید این محصولات به مواد اولیه نیاز است که قیمتی برابر $(4,7,7,10)$ به ازای هر واحد بر پوند و $(0,1,1,2)$ به ازای هر واحد بر دلار دارند در حالی‌که در کل $(4,6,6,8)$ دلار در اختیار شرکت است. همچنین برای تولید A و B به $(1,5,5,9)$ و $(2,3,3,4)$ ساعت نیروی انسانی نیاز است و مجموع نیروی انسانی در اختیار شرکت به‌صورت روزانه برابر $(5,6,6,7)$ است. شرکت می‌خواهید بداند با تولید چه تعداد از هر محصول به بیشترین سود دست خواهد یافت [۳۴].

مساله فوق به‌صورت زیر مدل‌سازی خواهد شد که در آن $\tilde{x}_۱$ میزان تولید محصول A و $\tilde{x}_۲$ نشان‌دهنده میزان تولید محصول B است:

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } \tilde{z} = \frac{\left(۱,۲,۲,۳\right)\tilde{x}_۱ + \left(۰,۱,۱,۲\right)\tilde{x}_۲}{\left(۱,۳,۳,۵\right)\tilde{x}_۱ + \left(۱,۱,۱,۱\right)\tilde{x}_۲ + \left(۳,۶,۶,۹\right)} \\
&s.t. \\
&\left(۴,۷,۷,۱۰\right)\tilde{x}_۱ + \left(۰,۱,۱,۲\right)\tilde{x}_۲ \le \left(۴,۶,۶,۸\right) \\
&\left(۱,۵,۵,۹\right)\tilde{x}_۱ + \left(۲,۳,۳,۴\right)\tilde{x}_۲ \le \left(۵,۶,۶,۷\right) \\
&\tilde{x}_۱, \tilde{x}_۲ \ge ۰.
\end{aligned}
$$

جواب بهینه حاصل از روش پیشنهادی به شرح زیر است:

$$
\begin{aligned}
\tilde{y}_۱^* &= \{(y_۱^*)_۱, (y_۱^*)_۲, (y_۱^*)_۳, (y_۱^*)_۴\} = \left(۰, ۰/۰۷, ۰/۰۷, ۰/۰۷\right) \\
\tilde{y}_۲^* &= \{(y_۲^*)_۱, (y_۲^*)_۲, (y_۲^*)_۳, (y_۲^*)_۴\} = \left(۰, ۰/۰۷, ۰/۰۷, ۰/۱۶\right) \\
t^* &= \left\{\left(t_۱, t_۲, t_۳, t_۴\right)\right\} = \left(۰/۰۹, ۰/۰۹, ۰/۰۹, ۰/۰۹\right) \\
S_۱^* &= \left\{\left(S_{۱۱}, S_{۱۲}, S_{۱۳}, S_{۱۴}\right)\right\} = \left(۰/۱, ۰, ۰, ۰/۴\right) \\
S_۲^* &= \left\{\left(S_{۲۱}, S_{۲۲}, S_{۲۳}, S_{۲۴}\right)\right\} = \left(۰, ۰, ۰, ۰/۴\right) \\
S_۳^* &= \left\{\left(S_{۳۱}, S_{۳۲}, S_{۳۳}, S_{۳۴}\right)\right\} = \left(۰, ۰/۲, ۰/۲, ۰/۷\right) \\
R_۱^* &= \left\{\left(R_{۱۱}, R_{۱۲}, R_{۱۳}, R_{۱۴}\right)\right\} = \left(۰, ۰/۰۲, ۰/۰۲, ۰/۰۴\right) \\
R_۲^* &= \left\{\left(R_{۲۱}, R_{۲۲}, R_{۲۳}, R_{۲۴}\right)\right\} = \left(۰/۰۲, ۰/۰۲, ۰/۰۲, ۰/۱\right) \\
R_۳^* &= \left\{\left(R_{۳۱}, R_{۳۲}, R_{۳۳}, R_{۳۴}\right)\right\} = \left(۰/۰۲, ۰/۰۳, ۰/۰۶, ۰/۱۸\right)
\end{aligned}
$$

در نتیجه جواب بهینه متغیرهای اصلی مساله به‌صورت زیر قابل ارایه است:

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}_۱^* &= ((x_۱^*)_۱, (x_۱^*)_۲, (x_۱^*)_۳, (x_۱^*)_۴) = \left(۰, ۰/۷۸, ۰/۷۸, ۰/۷۸\right) \\
\tilde{x}_۲^* &= ((x_۲^*)_۱, (x_۲^*)_۲, (x_۲^*)_۳, (x_۲^*)_۴) = \left(۰, ۰/۷۸, ۰/۷۸, ۱/۷۸\right)
\end{aligned}
$$

و همچنین تابع هدف بهینه هست:

$$
\tilde{z}^* = ({z^*}_۱, {z^*}_۲, {z^*}_۳, {z^*}_۴) = \left(۰/۰۷, ۰/۲۱, ۰/۲۱, ۰/۳۳\right)
$$

در نتیجه شرکت باید $\left(۰, ۰/۷۸, ۰/۷۸, ۰/۷۸\right)$مقدار از محصول ۱و $\left(۰, ۰/۷۸, ۰/۷۸, ۱/۷۸\right)$مقدار از محصول ۲ تولید کند. با جواب‌های به‌دست آمده برنامه تحویلی به خط تولید بدین صورت است که برای محصول ۱ باید ۰/۷۸ مقدار تولید شود ولی امکان تولید کمتر هم وجود دارد و برای محصول ۲ مقدار تولید باید ۰/۷۸ باشد ولی امکان اضافه تولید تا ۱/۷۸ با فراهم بودن شرایط لازم یا تولید کمتر با عدم تحقق شرایط تولید وجود دارد.

۷ نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این مقاله روش جدیدی برای حل مساله برنامه‌ریزی کسری خطی تماما فازی با اعداد فازی ذوزنقه‌ای پیشنهاد شد که در آن، برنامه‌ریزی کسری خطی تماما فازی با استفاده از حساب فازی و افزودن متغیر کمکی به برنامه‌ریزی خطی چند هدفه تبدیل و سپس با استفاده از یک الگوریتم تکراری جواب‌های بهینه مساله برنامه‌ریزی

خطی چندهدفه به‌دست آمدند. در پایان روش پیشنهادی با روش‌های دیگر مقایسه و مشخص شد که این روش نسبت به روش‌های دیگر بسیار ساده و کارآمد می‌باشد و از نظر بهینگی جواب بهتری ارایه می‌کند، پیشنهاد برای کارهای بعدی می‌تواند در نظر گرفتن اعداد فازی LR و یا استفاده از الگوریتم‌های فراابتکاری برای حل مسایل چندهدفه باشد.

منابع

[1] Labbafi, M., Darabi, R., & Sarraf, F. (2021). Optimizing Asset and Liability Management with Fractional Planning Model Approach (Case Study: Melli Bank of Iran). Journal of Operational Research In Its Applications (Applied Mathematics)-Lahijan Azad University, 18(3), 93-109. (In Persian)

[2] Rostamzadeh, H., & Mirdehghan, S. M. (2021). Finding the Efficient Solutions of Multiobjective Linear Fractional Programming Problems with Fuzzy Coefficients in Constraints and Vector of Resources. Journal of Operational Research In Its Applications (Applied Mathematics)-Lahijan Azad University, 18(1), 73-84. (In Persian)

[3] Salary Pour Sharif Abad, F., Allahdadi, M., & Mishmast Nehi, H. (2021). New Approaches to Improve the Determination of Feasible Solutions of the Interval Linear Fractional Programming Problem. Journal of Operational Research In Its Applications (Applied Mathematics)-Lahijan Azad University, 18(3), 31-48. (In Persian)

[4] Shapiro, A., Dentcheva, D. and Ruszczynski, A. (2021). Lectures on Stochastic Programming. Modeling and Theory. SIAM.

[5] Ben-Tal, A., El-Ghaoui, L. and Nemirovski, A. (2009). Robust Optimization. Princeton Series in Applied Mathematics, Princeton University Press.

[6] Taghi-nezhad, N. A., Naseri, H., Khalili Goodarzi, F., & Taleshian Jelodar, F. (2015). Reactive scheduling presentation for an open shop problem focused on jobs' due dates. Production and Operations Management, 6(2), 95-112. (In Persian)

[7] Taghi-Nezhad, N. A. (2022). A revisit of the proposed model for solving fuzzy linear fractional programming problem. International Journal of Mathematics in Operational Research, 23(2), 215-231.

[8] Taghi-Nezhad, N. (2023). Fuzzy Linear Fractional Programming for Container Transportation Optimization. *Iranian Journal of Marine Science and Technology*, 27(107), 76-85. doi: 10.22034/ijmst.2023.544120.1636 (In Persian)

[9] Taghi-Nezhad, N. A., & Babakordi, F. (2023). Fully hesitant parametric fuzzy equation. Soft Computing, 1-12.

[10] Taghi-Nezhad, N. A., & Taleshian, F. (2023). A New Approach for Solving Fuzzy Single Facility Location Problem Under L1 Norm. Fuzzy Optimization and Modeling Journal, 4(2), 66-80.

[11] Li, D. F. and Chen, S. (1996). A fuzzy programming approach to fuzzy linear fractional programming with fuzzy coefficients. The Journal of Fuzzy Mathematics, 4, 829-834.

[12] Das, S. K., Mandal, T. and Edalatpanah, S. A. (2017). A new approach for solving fully fuzzy linear fractional programming problems using the multi-objective linear programming. RAIRO-Operations research, 51(1), 285-297.

[13] Veeramani, C. and Sumathi, M. (2016). A new method for solving fuzzy linear fractional Programming Problems. Journal Of Intelligent Fuzzy Systems, 31(3), 1831-1843

[14] Arya, R., Singh, P., Kumari, S. and Obaidat, M. (2019). An approach for solving fully fuzzy multi-objective linear fractional optimization problems. Soft Computing, 24, 9105–9119.

[15] Borza, M. and Rambely, A. S. (2021). A new method to solve multi-objective linear fractional problems, Fuzzy Information and Engineering, 13(3), 323-334.

[16] Veeramani, C., Sharanya, S. and Ebrahimnejad, A. (2020). Optimization for multi-objective sum of linear and linear fractional programming problem. Fuzzy nonlinear programming approach. Mathematical Sciences, 1-15.

[17] Deb, M. (2018). A study of fully fuzzy linear fractional programming problems by signed distance ranking technique. In Optimization Techniques for Problem Solving in Uncertainty (pp. 73-115). IGI Global.

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2215]

[18] Das, S. K., Edalatpanah, S. A. and Mandal, T. (2018). A proposed model for solving fuzzy linear fractional programming problem: Numerical Point of View. Journal of Computational Science, 25, 367-375.

[19] Loganathan, T., and Ganesan, K. (2021). Solution of fully Fuzzy Linear Fractional Programming Problem-A Simple Approach. In IOP Conference Series: Materials Science and Engineering (Vol. 1130, No. 1, p. 012047). IOP Publishing.

[20] Farnam, M., and Darehmiraki, M. (2020). Hesitant Fuzzy Linear Fractional Programming Problem. In International Online Conference on Intelligent Decision Science (pp. 864-872). Springer, Cham.

[21] Loganathan, T., and Ganesan, K. (2019). A solution approach to fully fuzzy linear fractional programming problems. In Journal of Physics: Conference Series (Vol. 1377, No. 1, p. 012040). IOP Publishing.

[22] Younsi-Abbaci, L., and Moulai, M. (2021). Solving the Multi-Objective Stochastic Interval-Valued Linear Fractional Integer Programming Problem. Asian-European Journal of Mathematics

[23] Kumar-Das, S. (2019). A new method for solving fuzzy linear fractional programming problem with new ranking function. International Journal of Research in Industrial Engineering, 8(4), 384-393.

[24] Alharbi, M. G. and Khalifa, H. A. (2021). On solutions of fully fuzzy linear fractional programming problems using close interval approximation for normalized heptagonal fuzzy numbers. Applied Mathematics and Information Sciences, 15(4), 471-477.

[25] Bhatia, T. K., Kumar, A., Sharma, M. K. and Appadoo, S. S. (2022). Mehar approach to solve fuzzy linear fractional minimal cost flow problems. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, In Press, DOI: 10.3233/JIFS-212909.

[26] Mahmoodirad, A., Garg, H., and Niroomand, S. (2020). Solving fuzzy linear fractional set covering problem by a goal programming based solution approach. Journal of Industrial Management Optimization.

[27] Veeramani, C., Sharanya, S. and Ebrahimnejad, A. (2020). Optimization for multi-objective sum of linear and linear fractional programming problem. Fuzzy nonlinear programming approach. Mathematical Sciences, 14, 219-233.

[28] Chauhan, A., Mahajan, S., Ahmad, I., and Al-Homidan, S. (2023). On Fuzzy Linear Fractional Programming Problems via α-Cut-Based Method with Application in Transportation Sector. Symmetry, 15(2), 419.

[29] Nayak, S., and Maharana, S. (2023). An efficient fuzzy mathematical approach to solve multi-objective fractional programming problem under fuzzy environment. Journal of Applied Mathematics and Computing, 1-27.

[30] Kumar, A., Kaur, J., Singh, P. (2011). A new method for solving fully fuzzy linear programming problems. Applied Mathematical Modelling, 35, 817–823.

[31] Kumar, A., Kaur, A. (2014). Optimal way of selecting cities and conveyances for supplying coal in uncertain environment, adhana, 39(1), 165-187.

[32] Wang, Y. M., Yang, J. B., Xu, D. L., & Chin, K. S. (2006). On the centroids of fuzzy numbers. Fuzzy sets and systems, 157(7), 919-926.

[33] Veeramani, C. and Sumathi, M. (2014). Fuzzy mathematical programming approagh for solving fuzzy linear fractional Programming Problems. RAIRO-Operations research, 48(1), 109-122.

[34] Srinivasan, R. (2020). On solving fuzzy linear fractional programming in material aspects. Materials Today: Proceedings, 21, 155-157.

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2215]