Journal of Operational Research in its Applications
Vol.22, NO.2, Summer2025
ISSN: 2251-7286
DOI: 10.71773/jamlu-2025-2-2267

Value at Risk and Conditional Value at Risk to Optimize Capital Loss and Risk Control

A.Nazarizadeh[1], H. Samimi Haghgozar[2*]
[1]*PhD student, Department of Pure Mathematics, Faculty of Mathematics, Gilan University, Rasht, Iran*
[2]*Assistant Professor, Department of Statistics, Faculty of Mathematics, Gilan University, Rasht, Iran*

Research Paper

Received: 2 March 2024
Accepted: 22 July 2024

Abstract

Value at risk is the maximum expected loss of an asset portfolio under normal market conditions, over a given time horizon (one day, one month, or one week) and for a given confidence level. Determining value at risk is an attempt to provide financial managers with a certain number in which information about portfolio risk is available in a condensed and summarized manner. Considering the shortcomings and weaknesses of value at risk, Artzner et al. introduced the conditional value at risk measure to cover the shortcomings of value at risk. In fact, the main purpose of the value at risk is to determine the maximum loss, but the conditional value at risk determines the maximum loss in adverse conditions. These two criteria are defined in different ways. Failure to pay attention to it and wrong topic leads to misunderstanding and incorrect results. In this study, three different definitions of value at risk (and as a result, value at conditional risk) are given, based on each of these definitions, the results, relationships and theorems will be different.

Introduction: One of the important issues in economic activities is risk management. Any company, especially companies operating in finance is highly vulnerable to risk and their financial activities are highly unstable. Investors must be able to face all the risks that may occur to obtain the expected results and also be able to calculate these risks correctly to avoid losses. Efforts to design risk measurement tools began in the first half of the 20th century. In 1983, Macaulay introduced the DEER as a risk measure. The main innovation in Markowitz's method was the measurement of portfolio risk by the joint distribution of asset returns.

In the 1960s, Markowitz's student, William Sharpe, introduced the beta index to measure the relative changes in the value of each share against the relative changes in the market value by introducing the characteristic line. After the 1970s and the increasing risk in various aspects of financial decisions, managers' attention was drawn more and more to the measurement and management of risk. In 1993, J.P. Morgan introduced the Value at Risk (VaR).

This measure, which summarized all types of risk in a single number, seemed very attractive to users and its applications were added every day. In 1997, Artzner and et al. [2] proposed a measure called Conditional Value at Risk (CVaR), which is a systematic risk measure. Given that the conditional value at risk follows the property of subsummability (convexity), and this

---

[*] *Corresponding Author: samimi@guilan.ac.ir*

property is important in reducing portfolio risk and can calculate the combined risk that includes financial positions, losses, the conditional value at risk is of great importance. In this paper, we give three definitions of value at risk and conditional value at risk, which, although technically different, are conceptually similar effective tool for measuring the risk of fixed-income securities.

Materials and Methods: In this paper, the definitions of VaR and CVaR were stated in detail, and examples were given and shown on the plot to better understand the definitions.

Results and Discussion: One of the key concepts in risk management is its measurement, so risk measurement is one of the most important issues for investors. Among the methods of risk measurement are value at risk and conditional value at risk. In this article, three definitions of VaR and CVaR are given, although ultimately they provide the same concept of risk and loss.

Conclusions: This article presents three different definitions of and consequently of. The first and second definitions are based on profit, which is a real random variable of value, such that its negative value means a loss for the company. The third definition is based on loss, which is a non-negative random variable, such that it has a positive probability at zero; that is, with probability, the company has no loss (profitability or equal profit and loss). With these two approaches to the definition, relationships, formulas, and theorems will be different. However, they ultimately provide the same concept of risk and loss.

Keywords: Conditional Value at Risk, Value at Risk, Risk, Risk Management.

مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال بیست و دوم، شماره دوم (پیاپی ۸۵)،تابستان ۰۴، ص ص ۱۸۷-۱۷۵
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱
DOI: 10.71773/jamlu-2025-2-2267

ارزش در معرض ریسک و ارزش در معرض ریسک شرطی جهت بهینه کردن زیان سرمایه و کنترل ریسک

آناهیتا نظری‌زاده[1]، **حسین صمیمی حق گذار**[2*]
۱- دانشجوی دکتری، گروه ریاضی محض، دانشکده ریاضی، دانشگاه گیلان، رشت، ایران
۲- استادیار، گروه آمار، دانشکده ریاضی، دانشگاه گیلان، رشت، ایران

رسید مقاله: ۱۲ اسفند ۱۴۰۲
پذیرش مقاله: ۱ مرداد ۱۴۰۳

چکیده

ارزش در معرض ریسک، حداکثر زیان مورد انتظار سبد دارایی در شرایط عادی بازار، در طول افق زمانی معین (یک روز، یک ماه، یا یک هفته) و برای یک سطح اطمینان معین است. تعیین ارزش در معرض ریسک، تلاشی است برای این‌که عدد معینی به مدیران مالی ارایه شود که در آن اطلاعات در مورد ریسک سبد سرمایه به طور فشرده و تلخیص‌شده موجود باشد. با توجه به کاستی‌ها و نقاط ضعف ارزش در معرض ریسک، آرتزنر و همکارانش، با معرفی معیار ارزش در معرض ریسک شرطی، معیاری را معرفی کردند که نارسایی‌های ارزش در معرض ریسک را پوشش دهد. در واقع هدف اصلی ارزش در معرض ریسک، تعیین حداکثر زیان است ولی ارزش در معرض ریسک شرطی تعیین‌کننده حداکثر زیان در شرایط نامطلوب است. این دو معیار به صورت‌های گوناگون و متفاوتی تعریف می‌شوند که عدم توجه به آن و خلط مبحث، سوء برداشت و نتایج نادرستی در پی دارد. در این مقاله سه تعریف مختلف از ارزش در معرض ریسک (و در نتیجه ارزش در معرض ریسک شرطی) آورده می‌شود که براساس هریک از این تعریف‌ها نتایج، روابط و قضایا متفاوت خواهند بود.

کلمات کلیدی: ارزش در معرض ریسک، ارزش در معرض ریسک شرطی، ریسک، مدیریت ریسک.

۱ مقدمه

یکی از مسایل مهم در فعالیت‌های اقتصادی مدیریت ریسک است . هر شرکتی، به‌ویژه شرکت‌هایی که در امور مالی فعالیت می‌کنند، در برابر ریسک بسیار آسیب‌پذیر هستند و فعالیت‌های مالی آن‌ها بسیار ناپایدار است. سرمایه‌گذاران باید بتوانند با تمام ریسک‌هایی که ممکن است برای به دست آوردن نتایج مورد انتظار رخ دهد، روبه‌رو شوند و همچنین بتوانند این ریسک‌ها را به درستی محاسبه کنند تا از ضرر جلوگیری کنند. تلاش برای طراحی ابزارهای اندازه گیری ریسک، از نیمه‌ی اول قرن بیستم شروع شد. مکالی در سال ۱۹۸۳، دیرش را به

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: samimi@guilan.ac.ir

عنوان اندازه ریسک معرفی کرد که ابزاری ساده و در عین حال کارآمد برای سنجش ریسک اوراق بهادار با درآمد ثابت است. در سال ۱۹۵۲، مارکویت [۱] با ارایه‌ی مدلی کمی، جهت انتخاب سبد دارایی، برای اولین بار مقوله ریسک را در کنار بازدهی، مدنظر قرار داد. وی انحراف معیار را به عنوان اندازه ریسک در نظر گرفت. نوآوری اصلی در روش مارکویتز، اندازه‌گیری ریسک سبد سرمایه، به‌وسیله توزیع توام بازدهی‌های دارایی‌ها بود. در دهه‌ی ۱۹۶۰ شاگرد مارکویتز، ویلیام شارپ[1]، شاخص بتا را برای اندازه‌گیری تغییرات نسبی ارزش هر سهم در قبال تغییرات نسبی ارزش بازار با معرفی خط مشخصه ارایه کرد. بعد از دهه‌ی ۱۹۷۰ و افزایش روز افزون ریسک در جنبه‌های مختلف تصمیمات مالی، توجه مدیران بیش از پیش به اندازه‌گیری و مدیریت ریسک جلب شد. در سال ۱۹۹۳ موسسه جی.پی.مورگان [2] ارزش در معرض ریسک (VaR [3]) را معرفی کرد. این معیار که تمامی انواع ریسک را در یک عدد خلاصه می‌کرد، برای استفاده‌کنندگان بسیار جذاب به نظر آمد و هر روز به کاربردهای آن افزوده شد. در سال ۱۹۹۷توسط آرتزنر و همکارانش [۲]، معیاری موسوم به ارزش در معرض ریسک شرطی ($CVaR$ [4]) پیشنهاد شد که یک معیار ریسک سیستماتیک است. باتوجه به این‌که ارزش در معرض ریسک شرطی از خاصیت زیر جمع‌پذیری (محدب بودن) پیروی می‌کند و این خاصیت در کاهش ریسک سبد دارایی مهم است و می‌تواند ریسک توام که شامل موقعیت‌های مالی، زیان است، را محاسبه کند، ارزش در معرض ریسک شرطی اهمیت زیادی دارد. در این مقاله سه تعریف از ارزش در معرض ریسک و ارزش در معرض ریسک شرطی را می‌آوریم که هر چند از نظر تکنیکی با هم متفاوت هستند ولی به لحاظ مفهومی مشابه یکدیگرند.

۲ ارزش در معرض ریسک (VaR)

۲-۱ تعریف اول VaR: فرض کنید X متغیری حقیقی که نشان‌دهنده مقدار سود یک شرکت در یک دوره زمانی معین باشد، مقدار منفی X نشان‌دهنده زیان شرکت است. مقدار VaR در سطح α ، $\alpha \in (0,1)$، به صورت زیر تعریف می شود **[۴،۳]**:

$$VaR_\alpha(X) = -\inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) > \alpha\}. \qquad (۱)$$

که در آن $F_X(.)$ تابع توزیع X است.

به عبارت دیگر

$$-VaR_\alpha(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) > \alpha\}.$$

در صورتی که X متغیر تصادفی پیوسته باشد، داریم:

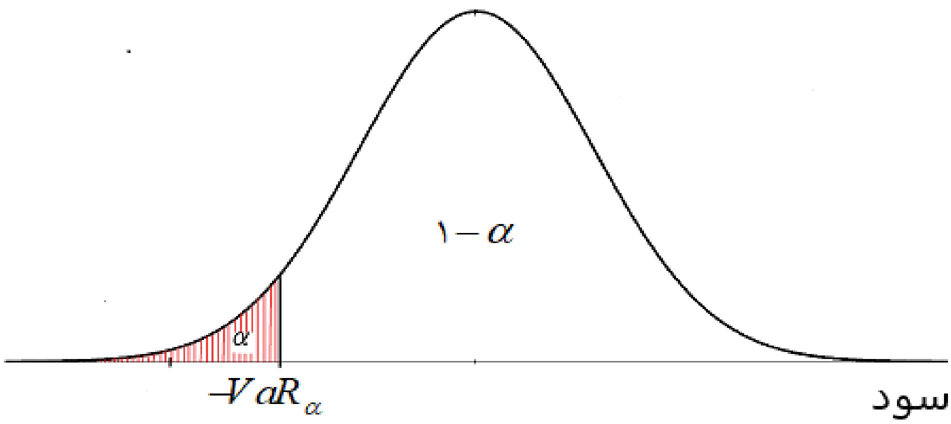
$$P(X \le -VaR_\alpha(X)) = \alpha.$$

---

[1] William Sharpe
[2] J.P. Morgan
[3] Value at Risk
[4] Conditional at Risk

یعنی

$$-VaR_{\alpha}(X) = F_X^{-۱}(\alpha) \qquad (۲)$$



شکل۱. $VaR_{\alpha}(X)$ وقتی که X پیوسته و حقیقی است و نشان دهنده سود شرکت است.

از این تعریف در حالتی که X پیوسته باشد نتیجه می‌گیریم:

$$P(-X \leq VaR_{\alpha}(X)) = ۱-\alpha \,.$$

پس

$$VaR_{\alpha}(X) = F_{-X}^{-۱}(۱-\alpha)\,. \qquad (۳)$$

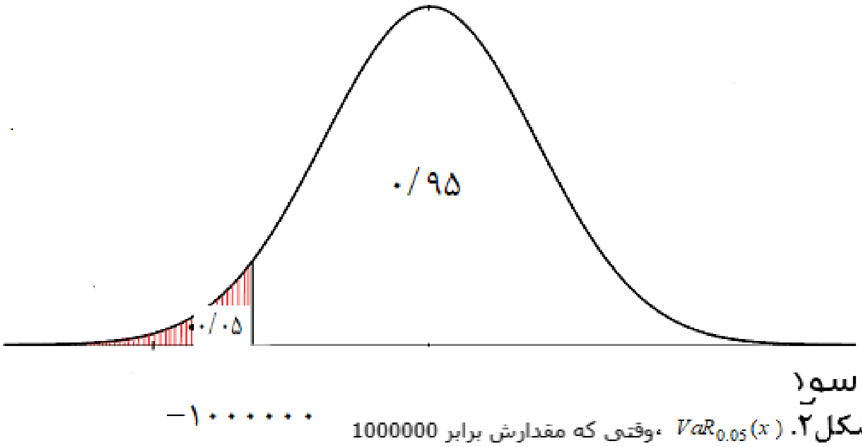
یعنی $VaR_{\alpha}(X)$ چندک از مرتبه $۱-\alpha$ در توزیع $-X$ است.

به طور مثال فرض کنید احتمال اینکه شرکتی در یک دوره زمانی معینی حداکثر یک میلیون ضرر کند، برابر ۰/۹۵ باشد؛ یعنی ۹۵٪ اطمینان دارد که ضرر شرکت بیش از یک میلیون نخواهد شد (۵٪ احتمال دارد که بیش از یک میلیون ضرر کند.) در این صورت داریم:

$$P(-X < ۱۰۰۰۰۰۰) = P(X > -۱۰۰۰۰۰۰) = ۰/۹۵,$$
$$P(X \leq -۱۰۰۰۰۰۰) = ۰/۰۵\,.$$

بنابراین

$$VaR_{۰/۰۵}(X) = ۱۰۰۰۰۰۰\,.$$



شکل۲. $VaR_{0.05}(x)$ ، وقتی که مقدارش برابر 1000000

۲-۲ تعریف دوم VaR.

تعریف دوم مشابه تعریف اول است با این تفاوت که علامت منفی در آن وجود ندارد [۳،۵]. متغیر تصادفی حقیقی مقدار X مثل قبل، سود در نظر گرفته می‌شود. (مقدار مثبت به معنای سود و مقدار منفی به معنای زیان است) و برای $\alpha \in (۰,۱)$:

$$VaR_{\alpha}(X) = \inf\{X \in \mathbb{R} : F_X(x) > \alpha\}. \quad (۴)$$

بنابراین اگر X پیوسته باشد آنگاه $VaR_{\alpha}(X)$ چندک از مرتبه α برای توزیع X است:

$$VaR_{\alpha}(X) = F_X^{-۱}(\alpha) . \quad (۵)$$

بدیهی است که با این تعریف مقدار $VaR_{\alpha}(X)$ برای مقادیر کوچک α منفی است و سود منفی به معنای زیان است. بنابراین به جای این‌که بگوییم احتمال این‌که مقدار سود بیش از ۱۰۰۰۰۰۰- باشد، برابر ۰/۹۵ است، می‌گوییم احتمال اینکه زیان حداکثر ۱۰۰۰۰۰۰ باشد، ۰/۹۵ است. در اینجا

$$VaR_{۰/۰۵}(X) = -۱۰۰۰۰۰۰.$$

شکل ۲ را نگاه کنید.

مثال ۱. فرض کنیم X سود شرکتی از توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$ بر حسب میلیون تومان پیروی کند. بنابراین VaR برای سبد دارایی در سطح اطمینان α براساس تعریف دوم به صورت زیر می‌باشد [۶]:

$$F_X(VaR_{\alpha}) = P(X \le VaR_{\alpha}) .$$

یعنی

$$P(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{VaR-\mu}{\sigma}) = \alpha,$$

$$\Phi(\frac{VaR_{\alpha}-\mu}{\sigma}) = \alpha .$$

تابع $\Phi(.)$ تابع توزیع نرمال استاندارد است، پس با تعریف دوم داریم:

$$VaR_{\alpha} = \sigma\Phi^{-۱}(\alpha) + \mu .$$

[DOI: 10.71773/jamlu-2025-2-2267]

همچنین براساس تعریف اول

$$VaR_{\alpha} = -\sigma\Phi^{-1}(\alpha) - \mu .$$

به طور مثال با فرض $\mu = ۲$ و $\sigma^{۲} = ۹$ براساس تعریف دوم داریم:

$$VaR_{۰/۰۵} = ۳\times(-۱/۶۵) + ۲ = -۲/۹۵,$$
$$VaR_{۰/۰۱} = ۳\times(-۲/۳۳) + ۲ = -۴/۹۹ .$$

با تعریف اول مقدار VaR برابر است با

$$VaR_{۰/۰۵} = ۲/۹۵,$$
$$VaR_{۰/۰۱} = ۴/۹۹ .$$

که در هر حال بدین معناست که ۵ درصد (۱درصد)احتمال دارد که شرکت بیش از ۲۹۵۰۰۰۰(۴۹۹۰۰۰۰) تومان ضرر کند یا ۹۵درصد (۹۹درصد) احتمال دارد که زیان شرکت کمتر از ۲۹۵۰۰۰۰(۴۹۹۰۰۰۰) باشد.

۳-۲ تعریف سوم VaR.

این تعریف براساس مقدار مطلق زیان شرکت قرار دارد. فرض کنید Y متغیر تصادفی نامنفی، مقدار زیان یک شرکت مالی باشد و $۰ < \alpha < ۱$. ارزش در معرض ریسک Y در سطح اطمینان $۱-\alpha$ به صورت زیر تعریف می‌شود[۳]:

$$VaR_{\alpha}(Y) = \inf\{y \geq ۰ : P(Y > y) \leq \alpha\} . \qquad (۶)$$

رابطه Y با X (در تعریف‌های اول و دوم) به صورت زیر است:

$$Y = -\min(۰, X) = \begin{cases} ۰ & X \geq ۰, \\ -X & X < ۰ . \end{cases} \qquad (۷)$$

بنابراین Y حداقل دارای یک اتم در صفر است؛ یعنی $P(Y = ۰) = p > ۰$.(مگر اینکه فرض کنیم شرکت همواره زیان ده و احتمال سوددهی آن صفر است.) اگر Y فقط در صفر اتم داشته باشد، یعنی در مقادیر بزرگتر از صفر پیوسته باشد، در صورتی که $VaR_{\alpha}(Y) > ۰$، داریم:

$$P(Y > VaR_{\alpha}(Y)) = \alpha,$$
$$P(Y \leq VaR_{\alpha}(Y)) = ۱-\alpha .$$

یعنی

$$.VaR_{\alpha}(Y) = F_{Y}^{-1}(۱-\alpha) .$$

بنابراین $VaR_{\alpha}(Y)$ چندک از مرتبه $۱-\alpha$ برای توزیع Y زیان شرکت است.

پس در این حالت که Y متغیر تصادفی آمیخته است که فقط در صفر احتمال مثبت دارد:

$$VaR_{\alpha}(Y) = \begin{cases} ۰ & ۱-\alpha \leq p, \\ F_{Y}^{-1}(۱-\alpha) & ۱-\alpha > p. \end{cases} \qquad (۸)$$

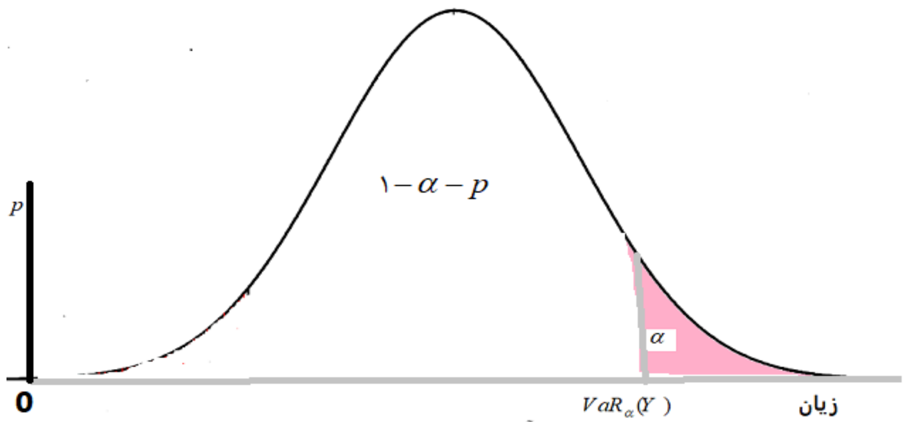
که در آن

[DOI: 10.71773/jamlu-2025-2-2267]

$$p = P(Y = ۰) = P(X \geq ۰).$$

چون برای $۱-\alpha \leq p$ ، $F_Y^{-۱}(۱-\alpha) = ۰$. لذا در هر حال داریم:(۹) .

$$VaR_\alpha(Y) = F_Y^{-۱}(۱-\alpha)$$



شکل۳: مقدار $VaR_\alpha(Y)$ وقتی که Y متغیر تصادفی نامنفی آمیخته (با احتمال مثبت p در صفر و برای مقادیر مثبت پیوسته) وقتی که $1-\alpha>p$

مثال ۲. فرض کنیم متغیر تصادفی زیان Y، در صفر دارای احتمال مثبت است و در مقادیر مثبت از توزیع نرمال تا خورده با پارامترهای $(۰,\sigma^۲)$ پیروی می‌کند. تابع توزیع Y، به صورت زیر می‌باشد:

$$F_Y(y) = \begin{cases} ۰ & y < ۰, \\ p & y = ۰, \\ p + (۱-p)\int_۰^y \frac{۲}{\sqrt{۲\pi\sigma^۲}} e^{-\frac{t^۲}{۲\sigma^۲}} dt & y > ۰. \end{cases}$$

برای محاسبه VaR در حالت $۱-\alpha > p$ داریم:

$$p + ۲(۱-p)\int_۰^y \frac{۱}{\sqrt{۲\pi\sigma^۲}} e^{-\frac{t^۲}{۲\sigma^۲}} dt = ۱-\alpha .$$

پس

$$p + ۲(۱-p)(\Phi(\frac{y}{\sigma}) - ۰/۵) = ۱-\alpha$$

که در آن $\Phi(.)$ تابع توزیع نرمال استاندارد است. در نتیجه

$$\Phi(\frac{y}{\sigma}) = \frac{۱-\alpha-p}{۲(۱-p)} + ۰/۵,$$

$$\frac{y}{\sigma} = \Phi^{-۱}(\frac{۱-\alpha-p}{۲(۱-p)} + ۰/۵),$$

$$y = \sigma\Phi^{-۱}(\frac{۱-\alpha-p}{۲(۱-p)} + ۰/۵),$$

[DOI: 10.71773/jamlu-2025-2-2267]

بنابراین

$$VaR_\alpha=\begin{cases}\circ & ۱-\alpha\geq p,\\ \sigma\Phi^{-۱}(\frac{۱-\alpha-p}{۲(۱-p)}+\circ/۵) & ۱-\alpha<p.\end{cases}$$

در حالت $p=\circ/۵$ و $\sigma^۲=۹$ و برای α برابر ۰/۰۵ و ۰/۰۱ داریم:

$$VaR_{\circ/\circ۵}=۳\Phi^{-۱}(\circ/۹۵)=۳\times۱/۶۵=۶/۹۵$$

و

$$VaR_{\circ/\circ۱}=۳\Phi^{-۱}(\circ/۹۹)=۳\times۲/۳۳=۶/۹۹.$$

که همان مقادیر مثال قبلی در حالت خاص $\mu=0$ است.

۲-٤ مزایای ارزش در معرض ریسک

۱. محاسبه ریسک سبدهای دارایی متشکل از انواع دارایی‌های مختلف، با این روش قابل اندازه‌گیری است و این امر، یکی از مزایای VaR است. امروزه محاسبه برنامه‌ها در بانک‌ها، موسسات بیمه، صندوق‌های سرمایه‌گذاری و سایر موسسات مالی و اعتباری با استفاده از این روش صورت می‌پذیرد. ضمن آن که محاسبه حد کفایت سرمایه در بانک‌ها نیز براساس این معیار انجام می‌شود.

۲. مزیت دیگر VaR، سهولت محاسبه و سادگی مفهوم و تفسیر آن است، به گونه ای که ریسک های بالقوه در داراییها را به صورت کمی و با یک عدد بیان می کند.

۳.تمرکز VaR بر روی دم‌های توزیع است. به طور خاص، VaR معمولا برای سطوح اطمینان ۹۵ و ۹۹ درصد و حتی بالاتر محاسبه می‌شود و در نتیجه می‌توان از آن برای توزیع‌های نامتقارن و دارای چولگی استفاده کرد.

۲-۵ محدودیت‌های تحلیل ارزش در معرض ریسک

۱. این معیار، ریسک سبد دارایی را صرفاً در یک عدد تحت عنوان VaR بیان می کند. همین ماهیت ساده و خلاصه VaR که موجب جذابیت آن می‌شود، مهم‌ترین محدودیت آن نیز به شمار می‌آید. تنها به مبلغ ریالی ریسک سبد دارایی توجه دارد و تبادل ریسک و بازده مورد انتظار را نادیده می گیرد. این امر موجب حذف بخش قابل توجهی از اطلاعات سبد دارایی می‌شود. لذا این شاخص برای رتبه‌بندی و مقایسه فرصت‌های مختلف سرمایه‌گذاری مناسب نبوده و تنها می‌توان از آن برای مقایسه سبد دارایی های با نرخ بازده مورد انتظار یکسان استفاده کرد.

۲. مهم‌ترین اشکال VaR این است که به دلیل زیرجمع پذیر نبودن جزء شاخص‌های منسجم ریسک محسوب نمی‌شود.

یعنی اگر $X_۱$ و $X_۲$ سود (یا زیان) دو شرکت یا دو سهم مختلف باشد، آنگاه لزوما رابطه زیر برقرار نیست:

$$VaR_\alpha(X_۱+X_۲)\leq VaR_\alpha(X_۱)+VaR_\alpha(X_۲).$$

[DOI: 10.71773/jamlu-2025-2-2267]

۳ ارزش در معرض ریسک شرطی ($CVaR$)

با توجه به معیار VaR، معیار دیگری به نام ارزش در معرض ریسک شرطی ($CVaR$) برای ارزیابی ریسک شرکت‌های مالی معرفی شده است. بر حسب اینکه VaR چگونه تعریف شود، تعریف $CVaR$ نیز فرق خواهد کرد. در اینجا تعریف $CVaR$ را برحسب X و Y می‌آوریم.

تعریف ۱. اگر X را مثل قبل سود شرکت (مقدار منفی به معنای زیان) و $VaR_\alpha(X)$ را براساس تعریف دوم در نظر بگیریم؛ یعنی

$$VaR_\alpha(X)=\inf\{x\in\mathbb{R}:F_X(x)>\alpha\},$$

$CVaR_\alpha(X)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$CVaR_\alpha(X)=\frac{۱}{۱-\alpha}\int_\alpha^۱ VaR_s(X)ds \qquad (۱۰)$$

که میانگین مقدار VaR در فاصله $(\alpha,۱)$ است.

قضیه زیر عبارت‌های معادل تعریف $CVaR$ است.

قضیه ۱. الف) $CVaR_\alpha(X)=E(X\mid X>VaR_\alpha(X))$.

ب) $CVaR_\alpha(X)=\frac{۱}{۱-\alpha}\int_{VaR_\alpha(X)}^{+\infty}xdF_X(x)$.

برهان. اثبات در حالتی که X پیوسته است آورده می شود. در حالتی که X پیوسته نباشد به طور مشابه است.

با تعریف $VaR_\alpha(X)=F_X^{-۱}(\alpha)$ داریم

$$E(X\mid X>VaR_\alpha(X))=\int_{VaR_\alpha(X)}^{+\infty}x\frac{f_X(x)}{P(X>VaR_\alpha(X))}dx\ .$$

از طرفی

$$\begin{aligned}P(X>VaR_\alpha(X))&=۱-P(X\le VaR_\alpha(X)),\\&=۱-P(X\le F_X^{-۱}(\alpha)),\\&=۱-P(F_X(x)\le\alpha),\\&=۱-\alpha\ .\end{aligned}$$

با تغییر متغیر $VaR_s(X)=x$ در (۱۰) داریم

$$\begin{aligned}F_X^{-۱}(s)&=x,\\s&=F_X(x),\\ds&=f_X(x)dx\ .\end{aligned}$$

همچنین از $x=+\infty$ نتیجه می‌شود $s=۱$ و $x=VaR_\alpha(X)$ یعنی $VaR_\alpha(X)=VaR_s(X)$. پس $s=\alpha$.

بنابراین

$$\int_{VaR_\alpha(X)}^{+\infty}x\frac{f_X(x)}{P(X>VaR_\alpha(X))}dx=\frac{۱}{۱-\alpha}\int_{VaR_\alpha(X)}^{+\infty}xf_X(x)dx=\frac{۱}{۱-\alpha}\int_\alpha^۱ VaR_s(X)ds\ .$$

[DOI: 10.71773/jamlu-2025-2-2267]

مثال ۳. اگر متغیر تصادفی سود از توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 پیروی کند، می‌توانیم اندازه ریسک $CVaR_\alpha$ را به صورت زیر به‌دست آوریم:

$$CVaR_\alpha(X)=\frac{۱}{۱-\alpha}\int_\alpha^۱ VaR_s(X)ds=\frac{۱}{۱-\alpha}\int_\alpha^۱(\mu+\sigma\Phi^{-۱}(s))ds=\mu+\frac{\sigma}{۱-\alpha}\int_\alpha^۱\Phi^{-۱}(s)ds.$$

حال با تغییر متغیر $\Phi^{-۱}(s)=t$ داریم

$$\Phi(t)=s,$$
$$\varphi(t)dt=ds$$

که φ تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی نرمال استاندارد است.

همچنین از $s=\alpha$ نتیجه می شود $t=\Phi^{-۱}(\alpha)$ و از $s=۱$ نتیجه می شود $t=+\infty$.

پس

$$CVaR_\alpha(X)=\mu+\frac{\sigma}{۱-\alpha}\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{\Phi^{-۱}(\alpha)}^{+\infty}te^{-\frac{t^۲}{۲}}ds=\mu+\frac{\sigma}{۱-\alpha}\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{(\Phi^{-۱}(\alpha))^۲}{۲}}=\mu+\frac{\sigma}{۱-\alpha}\varphi(\Phi^{-۱}(\alpha))$$

۳-۱ تعریف دوم $CVaR$

تعریف دیگر $CVaR$ براساس متغیر تصادفی زیان، Y و تعریف سوم VaR است، یعنی

$$VaR_\alpha(Y)=\inf\{y\geq 0: P(Y>y)\leq\alpha\}$$

که در آن Y، متغیر تصادفی نامنفی است و در صفر احتمال مثبت دارد.

در این حالت $CVaR$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$CVaR_\alpha(Y)=\frac{۱}{\alpha}\int_۰^\alpha VaR_s(Y)ds \qquad (۱۱)$$

$CVaR_\alpha(Y)$ به میانگین مقدار VaR در فاصله $(0,\alpha)$ و یا میانگین کسر بودجه تعبیر می‌شود.

مشابه قبل معادل‌هایی برای این تعریف وجود دارد.

قضیه ۲. اگر $P(Y=VaR_\alpha(Y))=0$ آنگاه

الف) $CVaR_\alpha(Y)=\frac{۱}{\alpha}\int_{VaR_\alpha(Y)}^{+\infty} ydF_Y(y)$.

ب) $CVaR_\alpha(Y)=E(Y|Y>VaR_\alpha(Y))$.

برهان. ابتدا ملاحظه کنید که شرط $P(Y=VaR_\alpha(Y))=۰$ معادل با $P(Y=۰)<۱-\alpha$ است. (یعنی احتمال سودآوری شرکت کمتر از $1-\alpha$، سطح اطمینان VaR است.) زیرا از $P(Y=VaR_\alpha(Y))=۰$ نتیجه می‌شود $VaR_\alpha(Y)\neq۰$ چون $P(Y=۰)>۰$. با توجه به تعریف $VaR_\alpha(Y)$ (۸) نتیجه می‌شود $P(Y=۰)<۱-\alpha$.

برای اثبات (الف) با تغییر متغیر $y=VaR_s(Y)$ داریم:

$$y=F_Y^{-۱}(۱-s),$$

[DOI: 10.71773/jamlu-2025-2-2267]

$$F_Y(y)=1-s,$$
$$dF_Y(y)=-ds.$$

همچنین از $s=0$ نتیجه می‌شود $y=+\infty$ و از $s=\alpha$ داریم $F_Y(y)=1-\alpha$؛ یعنی $y=F^{-1}(1-\alpha)=VaR_\alpha(Y)$. در نتیجه

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha VaR_s(Y)ds=\frac{1}{\alpha}\int_{VaR_\alpha(Y)}^{+\infty} y\,dF_Y(y).$$

برای اثبات(ب) داریم:

$$E(Y\,|Y>VaR_\alpha(Y))=\int_{VaR_\alpha(Y)}^{+\infty} y\,\frac{dF_Y(y)}{P(Y>VaR_\alpha(Y))}=\int_{VaR_\alpha(Y)}^{+\infty} y\,\frac{dF_Y(y)}{\alpha}.$$

مثال ٤. فرض کنیم خواسته باشیم $CVaR_\alpha(Y)$ را برای مثال ۲ حساب کنیم، با توجه به $VaR_\alpha(Y)$ که در مثال ۲ آمده است و تعریف دوم $CVaR_\alpha(Y)$ برای $p<1-\alpha$ داریم:

$$CVaR_\alpha(Y)=\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha VaR_s(Y)ds$$
$$=\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \sigma\Phi^{-1}\left(\frac{1-s-p}{2(1-p)}+0/5\right)ds.$$

با تغییر متغیر $\Phi^{-1}\left(\frac{1-s-p}{2(1-p)}+0/5\right)=t$ داریم:

$$\frac{1-s-p}{2(1-p)}+0/5=\Phi(t),$$
$$\frac{-ds}{2(1-p)}=\varphi(t)dt.$$

$s=0$ معادل $t=+\infty$ است. بنابراین

$$CVaR_\alpha(Y)=\frac{1}{\alpha}\int_k^{+\infty}\frac{\sigma t}{2(1-p)}\varphi(t)dt$$

که در آن $k=\Phi^{-1}\left(\frac{1-\alpha-p}{2(1-p)}+0/5\right)$.

با محاسبه انتگرال خواهیم داشت:

$$CVaR_\alpha(Y)=\frac{\sigma}{2\alpha(1-p)}\varphi(k).$$

در حالت خاص $p=0/5$ داریم:

$$CVaR_\alpha(Y)=\frac{\sigma}{\alpha}\varphi(\Phi^{-1}(1-\alpha)).$$

٤ نتیجه

در این مقاله سه تعریف متفاوت از VaR و در نتیجه از $CVaR$آورده شده است. تعریف اول و دوم براساس سود است که یک متغیر تصادفی حقیقی مقدار است به طوری که مقدار منفی آن به معنای زیان شرکت است. تعریف

[DOI: 10.71773/jamlu-2025-2-2267]

سوم براساس زیان است که متغیر تصادفی نامنفی است به طوری که در صفر احتمال مثبت p دارد؛ یعنی با احتمال p، شرکت فاقد زیان (سودآوری یا سود و زیان برابر) است. با این دو رویکرد تعریف، روابط، فرمول‌ها و قضایا متفاوت خواهند شد. هر چند در نهایت مفهوم یکسانی از ریسک و زیان ارایه می‌دهند.

منابع

[1] Markowitz,h.,(1952), Portfolio selection. The journal of Finance, 7(1), 77-91.

[2] Artzner, P. (1999). Application of coherent risk measures to capital requirements in insurance. North American Actuarial Journal, 3(2), 11-25.

[3] Cai, J., Chi, Y. (2020), Optimal reinsurance designs based on risk measures; A review. Statistical Theory and Related Fields, 4(1), 1-13.

[4] Hashem Pesaran, M.(2015), Times Series and Panel Data Economics. Oxford

[5] Manteghipor, M., Ghafari Hadigheh,A. and Safari, A.(1396). Determining the optimal rate of insurance policies in homogeneous risk groups, a case study. Journal of Operational Research and Its Applications (Applied Mathematics) - Lahijan Azad University, 56 (1) , 41-56. (In Persian).

[6] Hall, J.C.(2009). option, futures and another Derivatives, Pearson Prentice Hell.

[7] Franq, C. and Zakoian,J. M.(2010),' Garch Models, John Wiley & sons.
.

[8] Juniar, A., Rahmi, Z., Rahmawati, R., & Fadah, I. (2020). Value at Risk in the Formation of Optimal Portfolio on Sharia-Based Stocks. International Journal of Recent Technology and Engineering, *8*(5), 1198-1203.

[9] Rezaie, M., Ghahtarani, A., and Nagafi, A.(1396). Application of robust optimization in the problem of choosing a stock portfolio with conditional capital loss at risk. Journal of Operational Research and Its Applications (Applied Mathematics) - Lahijan Azad University, 53 (2) ,81-93. (In Persian).

[DOI: 10.71773/jamlu-2025-2-2267]