

# تعیین شعاع پایداری یک واحد تصمیم گیرنده در بازده به مقیاس راست و چپ

رضا شاهرودی\*، فرزاد رضایی بائف، علی ابراهیم نژاد، صغرا نصیری

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد قانمشهر، گروه ریاضی، قانمشهر، ایران

رسید مقاله: ۸۹/۸/۳

پذیرش مقاله: ۹۰/۳/۲۱

## چکیده

این مقاله شعاع پایداری یک واحد تصمیم گیرنده را، که بازده به مقیاس راست و چپ آن داده شده است، محاسبه می کند به طوری که ویژگی بازده به مقیاس آن در طبقه بندی بازده به مقیاس باقی بماند. با توجه به ابر صفحه های تعریف کننده بازده به مقیاس راست و چپ و طبقه بندی  $DMU$ ، مدل هایی برای اندازه گیری شعاع پایداری پیشنهاد می شود.

**کلمات کلیدی:** شعاع پایداری، بازده به مقیاس، تحلیل پوششی داده ها.

## ۱ مقدمه

تحلیل پوششی داده ها ( $DEA$ ) یک تکنیک غیر پارامتری برای اندازه گیری کارایی نسبی یک مجموعه از واحدهای تصمیم گیرنده با ورودی ها و خروجی های مشترک است که اولین بار توسط چارلز، کوپر و رودز به عنوان مدل  $CCR$  ارائه شد [۵]. بازده به مقیاس معیاری برای شناخت تاثیر تغییرات ورودی ها بر تغییرات خروجی ها به عنوان یکی از مفاهیم کاربردی تحلیل پوششی داده ها، در اقتصاد خرد مورد توجه قرار گرفت. روش های زیادی برای تعیین این مفهوم در  $DEA$  ارائه شده است (بنکر، ۲۰۰۴؛ زارع پیشه و همکاران، ۲۰۰۶) [۳]. با تعیین بازده به مقیاس راست و چپ هادجیکستاس و سوتریو، رفتار یک  $DMU$  در جهت افزایش ورودی ها و در جهت کاهش ورودی ها تعیین می شود [۶]. هادجیکستاس و سوتریو روشی برای تعیین این دو مفهوم به کمک دو مدل برنامه ریزی خطی ارائه کردند. زارع پیشه و سلیمانی دامانه یک روش جدید بر پایه الگوریتم سیمپلکس دوال ارائه کردند که با یک مدل برنامه ریزی خطی بازده به مقیاس راست و چپ را محاسبه می کند [۱-۲]. در این مقاله مدل هایی برای تعیین سطح تغییرات ورودی ها و خروجی های یک واحد تصمیم گیرنده، که بازده به مقیاس راست و چپ آن داده شده است، ارائه می شود به طوری که ویژگی بازده به مقیاس آن در طبقه بندی بازده به مقیاس باقی بماند.

\*عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: shahverdi\_592003@yahoo.com

## ۲ تعاریف پایه ای و مقدماتی

فرض کنید  $DMU_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) واحد تصمیم گیرنده باشند که هر یک با صرف بردار ورودی  $X_j \in R_+^m$  بردار خروجی  $Y_j \in R_+^s$  را تولید می کنند.  $X_j \geq 0$  و  $Y_j \geq 0$  ( $j = 1, \dots, n$ ) حداقل یک مولفه مثبت دارد.

همچنین  $X = [X_1, X_2, \dots, X_n]$  و  $Y = [Y_1, Y_2, \dots, Y_s]$  به ترتیب ماتریس های  $m \times n$  و  $s \times n$  از ورودی ها و خروجی ها هستند.

مجموعه امکان تولید  $T_V$  با ویژگی بازده به مقیاس متغیر به صورت زیر است:

$$T_V = \left\{ (X, Y) \in R_+^{m+s} \mid \exists \lambda \in R^n : X \lambda \leq X_o, Y \lambda \geq Y_o, e \lambda = 1, \lambda \geq 0 \right\}$$

کارایی یک  $DMU_o$  خاص می تواند بوسیله مدل پوششی  $BCC$  (بنکر، چارنز و کوپر، ۱۹۸۴) در ماهیت خروجی ارزیابی شود:

$$\text{Max } \left\{ \alpha \mid X \lambda \leq X_o, Y \lambda \geq \alpha Y_o, e \lambda = 1, \lambda \geq 0 \right\} \quad (1)$$

دوال آن که صورت مضربی نامیده می شود به صورت زیر است:

$$\text{Min } \left\{ V X_o + u_o \mid V X - U Y + u_o \geq 0, U Y_o = 1, U \geq 0, V \geq 0 \right\} \quad (2)$$

**تعریف ۱**  $DMU_o$  یک واحد کارای تکنیکی در ماهیت خروجی است اگر  $\alpha^* = 1$  در مدل (۱). (\* علامت بهینگی است)

**تعریف ۲** اگر  $(V^*, U^*, u_o^*)$  جواب بهینه مدل (۲) باشد آن گاه  $V^* X - U^* Y + u_o^* \geq 0$  ابر صفحه تکیه کننده بر مجموعه امکان تولید  $BCC$  است.

**تعریف ۳** اگر  $V^* X_o - U^* Y_o + u_o^* = 0$  آن گاه  $DMU_o$  یک واحد تصمیم گیرنده کارا است و ابر صفحه تکیه کننده ی  $V^* X - U^* Y + u_o^* \geq 0$  بر مجموعه امکان تولید، ابر صفحه گذرنده از نقطه  $(X_o, Y_o)$  می باشد.

**تعریف ۴** اگر  $V^* X_o - U^* Y_o + u_o^* = 0$  و داشته باشیم  $V_i^* \neq 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ) و  $u_r^* \neq 0$  ( $r = 1, \dots, s$ ) آن گاه این ابر صفحه گذرنده از  $(X_o, Y_o)$  یک ابر صفحه کارای قوی است.

## ۳ تعیین شعاع پایداری در تعریف بازده به مقیاس

فرض کنید  $DMU_o$  یک واحد کارای تکنیکی در ماهیت خروجی است، که بازده به مقیاس راست  $(\rho_o^+)$  و بازده به مقیاس چپ  $(\rho_o^-)$  آن تعیین شده است.

**توجه.** بازده به مقیاس یک ویژگی مرزی است، نه ویژگی خاص یک  $DMU_o$  که در نقطه ای روی مرز قرار می گیرد، بنابراین بازده به مقیاس راست  $DMU_o$  ویژگی ابر صفحه گذرنده از  $DMU_o$  است که در جهت افزایش سطح تغییرات در ورودی ها و خروجی های  $DMU_o$  تعریف می شود و بازده به مقیاس چپ ویژگی ابر

صفحه گذرنده از  $DMU_o$  است که در جهت کاهش سطح تغییرات در ورودی ها و خروجی های  $DMU_o$  تعریف می شود.

برای تعیین سطح تغییرات در بردارهای ورودی و خروجی  $DMU_o$ ، دو دسته متفاوت زیر را در نظر بگیرید.

دسته اول: فرض کنید بازده به مقیاس راست و چپ  $DMU_o$  با هم برابر باشند یعنی داشته باشیم  $\rho_o^+ = \rho_o^-$  بنابراین میزان سطح افزایش در بردارهای ورودی و خروجی  $DMU_o$  از مدل زیر محاسبه می شود:

$$\begin{aligned}
 &Max \quad \theta_o \\
 &Max \quad \alpha_o \\
 &st. \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{io} + \theta_{io}, \quad i = 1, \dots, m, \\
 &\quad \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro} + \alpha_{ro}, \quad r = 1, \dots, s, \quad (3) \\
 &\quad \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \\
 &\quad \sum_{i=1}^m v_i (x_{io} + \theta_{io}) - \sum_{r=1}^s u_r (y_{ro} + \alpha_{ro}) + u_o = 0, \\
 &\quad \sum_{i=1}^m v_i (x_{ij}) - \sum_{r=1}^s u_r (y_{rj}) + u_o \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 &\quad \sum_{i=1}^m v_i (x_{io}) + u_o = 1, \\
 &\quad \sum_{r=1}^s u_r (y_{ro}) = 1, \\
 &\quad \lambda_j \geq 0, v_i \geq 0, \theta_{io} \geq 0, u_r \geq 0, \alpha_{ro} \geq 0, \quad \forall j, i, r.
 \end{aligned}$$

که  $\alpha_o = (\alpha_{1o}, \dots, \alpha_{so})$  و  $\theta_o = (\theta_{1o}, \dots, \theta_{mo})$  اگر  $(\theta_o^*, \alpha_o^*)$  جواب بهینه مدل (۳) باشد، آن گاه  $(\theta_o^*, \alpha_o^*)$  اندازه شعاع پایداری  $DMU_o$  است به طوری که روی ابر صفحه تعریف کننده بازده به مقیاس راست باقی بماند.

و مدل زیر میزان سطح کاهش در بردارهای ورودی و خروجی  $DMU_o$  را محاسبه می کند:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } \theta_o \\
 & \text{Max } \alpha_o \\
 \text{s.t. } & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{io} - \theta_o, & i = 1, \dots, m, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro} - \alpha_{ro}, & r = 1, \dots, s, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\
 & \sum_{i=1}^m v_i (x_{io} - \theta_o) - \sum_{r=1}^s u_r (y_{ro} - \alpha_{ro}) + u_o = 0 \\
 & \sum_{i=1}^m v_i (x_{ij}) - \sum_{r=1}^s u_r (y_{rj}) + u_o \geq 0, & j = 1, \dots, n, \\
 & \sum_{i=1}^m v_i (x_{io}) + u_o = 1, \\
 & \sum_{r=1}^s u_r (y_{ro}) = 1, \\
 & \lambda_j \geq 0, v_i \geq 0, \theta_o \geq 0, u_r \geq 0, \alpha_{ro} \geq 0, \quad \forall j, i, r.
 \end{aligned} \tag{4}$$

اگر  $(\theta_o^*, \alpha_o^*)$  جواب بهینه مدل (4) باشد، آن گاه  $(\theta_o^*, \alpha_o^*)$  اندازه شعاع پایداری  $DMU_o$  است به طوری که روی ابر صفحه تعریف کننده بازده به مقیاس چپ باقی بماند.

با جای گذاری تابع هدف در مدل (3) و (4) به صورت  $\sum_{i=1}^m \rho_i \theta_i + \sum_{r=1}^s \mu_r \alpha_r$  که در آن  $\rho_i > 0$  و  $\mu_r > 0$  به ترتیب وزن های مربوط به ورودی  $i$ ام و خروجی  $r$ ام است یک مدل غیر خطی تک هدفه به دست می آید که توسط نرم افزارهای ریاضی (Gams، lingo) قابل حل می باشد.

دسته دوم: همه  $DMU_o$ هایی را در نظر بگیرید که در دسته اول نیستند. بنابراین ابر صفحه گذرنده از این  $DMU_o$ ها منحصر بفره نیست. برای پیدا کردن ابر صفحه تعریف کننده بازده به مقیاس راست و بازده به مقیاس چپ دو مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } u_o \\
 \text{s.t. } & \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} + u_o \geq 0, & j = 1, \dots, n, \\
 & \sum_{i=1}^m v_i x_{io} + u_o = 1, \\
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} = 1, \\
 & v_i \geq 0, u_r \geq 0, & \forall i, r.
 \end{aligned} \tag{5}$$

اگر  $(V^*, U^*, u_o^*)$  جواب بهینه مدل (۵) باشد، آن گاه  $V^*X - U^*Y + u_o^* \geq 0$  ابر صفحه تعریف کننده بازده به مقیاس راست  $DMU_o$  است.

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } u_o \\
 & \text{s.t. } \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} + u_o \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \sum_{i=1}^m v_i x_{io} + u_o = 1 \quad (۶) \\
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} = 1 \\
 & v_i \geq 0, u_r \geq 0, \quad \forall i, r.
 \end{aligned}$$

اگر  $(V^*, U^*, u_o^*)$  جواب بهینه مدل (۶) باشد آن گاه  $V^*X - U^*Y + u_o^* \geq 0$  ابر صفحه تعریف کننده بازده به مقیاس چپ  $DMU_o$  است.

بنابراین با پیدا کردن ابر صفحه های تعریف کننده، میزان شعاع پایداری برای  $DMU_o$  با مدل های زیر تعریف می شود.

میزان سطح افزایش در بردارهای ورودی و خروجی:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } \sum_{i=1}^m \rho_i \theta_{io} + \sum_{r=1}^s \mu_r \alpha_{ro} \\
 & \text{s.t. } \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{io} + \theta_{io}, \quad i = 1, \dots, m, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro} + \alpha_{ro}, \quad r = 1, \dots, s, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\
 & \sum_{i=1}^m v_i^* (x_{io} + \theta_{io}) - \sum_{r=1}^s u_r^* (y_{ro} + \alpha_{ro}) + u_o^* = 0 \\
 & \lambda_j \geq 0, \theta_{io} \geq 0, \alpha_{ro} \geq 0, \quad \forall j, i, r. \quad (۷)
 \end{aligned}$$

که در آن  $u_o^*, u_r^*, v_i^*, \dots, 1 = r, \dots, s, v_i^*, \dots, 1 = i, \dots, m$  جواب بهینه مدل ۵ می باشد.

شاهوردی و بهکاران، تعیین شعاع پایداری یک واحد تصمیم گیرنده در بازده به مقیاس راست و چپ

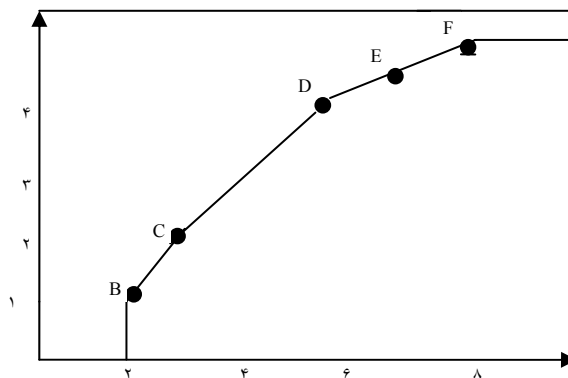
میزان سطح کاهش در بردارهای ورودی و خروجی:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \quad \sum_{i=1}^m \rho_i \theta_{io} + \sum_{r=1}^s \mu_r \alpha_{ro} \\
 & \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{io} - \theta_{io}, \quad i = 1, \dots, m, \\
 & \quad \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro} - \alpha_{ro}, \quad r = 1, \dots, s, \\
 & \quad \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \\
 & \quad \quad \sum_{i=1}^m v_i^* (x_{io} - \theta_{io}) - \sum_{r=1}^s u_r^* (y_{ro} - \alpha_{ro}) + u_o^* = 0, \\
 & \quad \quad \lambda_j \geq 0, \theta_{io} \geq 0, \alpha_{ro} \geq 0, \quad \forall j, i, r.
 \end{aligned} \tag{8}$$

که در آن  $(v_i^*, m, \dots, 1 = i, u_r^*, s, \dots, 1 = r, u_o^*)$  جواب بهینه مدل ۶ می باشد.

#### ۴ یک مثال عددی

در این بخش درستی مدل های پیشنهادی در بخش (۳) را به کمک یک مثال عددی که توسط هادجیکستاس و سوتریو (۲۰۰۶) ارائه شده است نشان می دهیم. فرض کنید یک ورودی و یک خروجی داریم  $(m = s = 1)$ . شکل ۱ را ببینید.



شکل ۱. مجموعه امکان BCC با DMU های B تا F

بازده به مقیاس راست و چپ  $DMU_o$  های کارا در ماهیت خروجی از B تا F توسط هادجیکستاس و سوتریو (۲۰۰۶) به صورت جدول ۱ تعیین شدند.

جدول ۱. بازده به مقیاس راست و چپ DMU های B تا F

	$B = (2,1)$	$C = (3,2)$	$D = (6,4)$	$E = \left(7, 4\frac{1}{4}\right)$	$F = \left(8, 4\frac{1}{2}\right)$
$\rho_o^+, \rho_o^-$	$2, \infty$	$1, \frac{3}{2}$	$\frac{3}{8}, 1$	$\frac{7}{17}, \frac{7}{17}$	$0, \frac{4}{9}$

$DMU_E$  را به عنوان واحد تحت ارزیابی در نظر بگیرید. برای این واحد  $\rho_o^+ = \rho_o^-$ . بنابراین در دسته اول قرار

می گیرد و مدل (۳) در جهت افزایش بردارهای ورودی و خروجی متناظر این واحد به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } \theta + \alpha \\
 \text{s.t. } & 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 6\lambda_3 + 7\lambda_4 + 8\lambda_5 \leq 7 + \theta, \\
 & \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 + \frac{17}{4}\lambda_4 + \frac{9}{2}\lambda_5 \geq \frac{17}{4} + \alpha, \\
 & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 1, \\
 & v(7 + \theta) - u\left(\frac{17}{4} + \alpha\right) + u_o = 0, \\
 & 2v - u + u_o \geq 0, \\
 & 3v - 2u + u_o \geq 0, \\
 & 6v - 4u + u_o \geq 0, \\
 & 7v - \frac{17}{4}u + u_o \geq 0, \\
 & 8v - \frac{9}{2}u + u_o \geq 0, \\
 & 7v + u_o = 1, \\
 & \frac{17}{4}u = 1, \\
 & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5, \quad v, u, \theta, \alpha \geq 0.
 \end{aligned}$$

جواب بهینه مدل فوق برابر است با:

$$(\theta^*, \alpha^*, \lambda_5^*, v^*, u^*, u_o^*) = (1, 0.25, 1, 0.5882353E - 01, 0.2352941, 0.5882353)$$

$$(X_o + \theta_o^*, Y_o + \alpha_o^*) = \left(7 + 1, \frac{17}{4} + 0/25\right) = \left(8, \frac{9}{2}\right) = DMU_F$$

$(\theta^*, \alpha^*) = (1, 0/25)$  میزان شعاع پایداری در جهت ابر صفحه تعریف کننده بازده به مقیاس راست است.

مدل ۴ در جهت کاهش بردارهای ورودی و خروجی:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } \theta + \alpha \\
 & \text{s.t. } 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 6\lambda_3 + 7\lambda_4 + 8\lambda_5 \leq 7 - \theta, \\
 & \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 + \frac{17}{4}\lambda_4 + \frac{9}{2}\lambda_5 \geq \frac{17}{4} - \alpha, \\
 & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 1, \\
 & v(7 - \theta) - u\left(\frac{17}{4} - \alpha\right) + u_o = 0, \\
 & 2v - u + u_o \geq 0, \\
 & 3v - 2u + u_o \geq 0, \\
 & 6v - 4u + u_o \geq 0, \\
 & 7v - \frac{17}{4}u + u_o \geq 0, \\
 & 8v - \frac{9}{2}u + u_o \geq 0, \\
 & 7v + u_o = 1, \\
 & \frac{17}{4}u = 1, \\
 & \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, 5, v, u, \theta, \alpha \geq 0.
 \end{aligned}$$

جواب بهینه مدل فوق به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 & (\theta^*, \alpha^*, \lambda_3^*, v^*, u^*, u_o^*) = (1, 0.25, 1, 0.5882353E - 01, 0.2352941, 0.5882353) \\
 & (X_o + \theta_o^*, Y_o + \alpha_o^*) = \left(7 - 1, \frac{17}{4} - 0.25\right) = (6, 4) = DMU_D
 \end{aligned}$$

$(\theta^*, \alpha^*) = (1, 0.25)$  میزان شعاع پایداری در جهت ابر صفحه تعریف کننده بازده به مقیاس چپ است.  $DMU_C$  به عنوان واحد تحت ارزیابی، با بازده به مقیاس راست ثابت و بازده به مقیاس چپ صعودی در دسته دوم قرار می گیرد. مدل (۵) برای پیدا کردن ابر صفحه تعریف کننده بازده به مقیاس راست متناظر این واحد به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } u_o \\
 & \text{s.t. } 2v - u + u_o \geq 0, \\
 & 3v - 2u + u_o \geq 0, \\
 & 6v - 4u + u_o \geq 0, \\
 & 7v - \frac{17}{4}u + u_o \geq 0, \\
 & 8v - \frac{9}{2}u + u_o \geq 0, \\
 & 3v + u_o = 1, \\
 & 2u = 1, \\
 & v \geq 0, u \geq 0.
 \end{aligned}$$

جواب بهینه مدل فوق می باشد.  $(v^*, u^*, u_o^*) = (0.3333333, 0.5, 0)$

مدل ۶ برای پیدا کردن ابر صفحه تعریف کننده بازده به مقیاس راست متناظر  $DMU_C$  به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \text{Min } & u_o \\ \text{s.t. } & 2v - u + u_o \geq 0, \\ & 3v - 2u + u_o \geq 0, \\ & 6v - 4u + u_o \geq 0, \\ & 7v - \frac{17}{4}u + u_o \geq 0, \\ & 8v - \frac{9}{2}u + u_o \geq 0, \\ & 3v + u_o = 1, \\ & 2u = 1, \\ & v \geq 0, u \geq 0. \end{aligned}$$

جواب بهینه مدل فوق می باشد.  $(v^*, u^*, u_o^*) = (0.5, 0.5, -0.5)$

با پیدا کردن ابر صفحه ها، به کمک مدل (۷) و (۸) متناظر این واحد، شعاع پایداری در جهت بازده به مقیاس راست و چپ محاسبه می شود.

مدل ۷ متناظر  $DMU_C$ :

$$\begin{aligned} \text{Max } & \theta + \alpha \\ \text{s.t. } & 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 6\lambda_3 + 7\lambda_4 + 8\lambda_5 \leq 3 + \theta, \\ & \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 + \frac{17}{4}\lambda_4 + \frac{9}{2}\lambda_5 \geq 2 + \alpha, \\ & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 1, \\ & 0/3333333(3 + \theta) - 0/5(2 + \alpha) + 0 = 0, \\ & \theta \geq 0, \alpha \geq 0, \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

جواب بهینه مدل فوق برابر است با:

$$\begin{aligned} (\theta^*, \alpha^*, \lambda_3^*) &= (3, 2, 1) \\ (X_o + \theta_o^*, Y_o + \alpha_o^*) &= (3 + 3, 2 + 2) = (6, 4) = DMU_D \end{aligned}$$

$(\theta^*, \alpha^*) = (3, 2)$  میزان شعاع پایداری در جهت ابر صفحه تعریف کننده بازده به مقیاس راست است.

مدل (۸) متناظر  $DMU_C$  :

$$\begin{aligned} \text{Max } & \theta + \alpha \\ \text{s.t. } & 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 6\lambda_3 + 7\lambda_4 + 8\lambda_5 \leq 3 - \theta, \\ & \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 + \frac{17}{4}\lambda_4 + \frac{9}{2}\lambda_5 \geq 2 - \alpha, \\ & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 1, \\ & 0.5(3 - \theta) - 0.5(2 - \alpha) - 0.5 = 0, \\ & \theta \geq 0, \alpha \geq 0, \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

جواب بهینه مدل فوق برابر است با:

$$\begin{aligned} (\theta^*, \alpha^*, \lambda_1^*) &= (1, 1, 1) \\ (X_o + \theta_o^*, Y_o + \alpha_o^*) &= (3 - 1, 2 - 1) = (2, 1) = DMU_B \end{aligned}$$

$(\theta^*, \alpha^*) = (1, 1)$  میزان شعاع پایداری در جهت ابر صفحه تعریف کننده بازده به مقیاس چپ است.

## ۵ نتیجه گیری

در این مقاله مدل هایی برای تعیین سطح تغییرات ورودی ها و خروجی های یک واحد تصمیم گیرنده، که بازده به مقیاس راست و چپ آن داده شده است، ارائه می شود به طوری که ویژگی بازده به مقیاس آن در طبقه بندی بازده به مقیاس باقی بماند. در جهت ابر صفحه تعریف کننده بازده به مقیاس راست،  $DMU'$  - ای به دست می آید که بازده به مقیاس چپ آن معادل بازده به مقیاس راست  $DMU_o$  است و در جهت ابر صفحه تعریف کننده بازده به مقیاس چپ،  $DMU'$  - ای به دست می آید که بازده به مقیاس راست آن معادل بازده به مقیاس چپ  $DMU_o$  می باشد.

## منابع

- [1] Zarepisheh, M. and Soleimani-damaneh, M. (2009). A dual simplex-based method for determination of the right and left returns to scale in DEA. *European Journal of Operational Research* 194, 585–591.
- [2] Zarepisheh, M., Soleimani-damaneh, M., and L. Pourkarimi (2006). Determination of returns to scale by CCR formulation without chasing down alternative optimal solutions. *Applied Mathematics Letters* 19, 964–967.
- [3] Banker, R.D., Charnse, A., Cooper, w.w., (1984). some models for estimating technical and scale efficiencies in data envelopment analysis. *Management science* 30, 1078-1092.
- [4] Banker, R.D., Cooper, w.w., Thrall, R.M., Seiford, L.M., Zhu, j., (2004). Returns to scale in different DEA models. *European Journal of Operational Research* 154, 345-362.
- [5] Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E., (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research* 2, 429-444.
- [6] Hadjicostas, P., Soteriou, A.C., (2006). One-sided elasticities and technical efficiency in multi- output production: A theoretical framework. *European Journal of Operational Research* 168 (2), 425